Capítulo 16

1) Pelo PFC, temos que:

$$\underset{\textit{carnes}}{8} \quad . \quad \underset{\textit{sobremesas}}{5} \quad = \; 40 \; \textit{refeições}$$

Portanto, o homem pode fazer a sua refeição de 40 formas diferentes.

2) Pelo PFC, temos que:

$$\underset{\textit{blusas}}{5} \quad . \quad \underset{\textit{saias}}{6} \quad = \; 30 \text{ combinações}$$

Portanto, a moça pode vestir uma blusa e uma saia de 30 formas diferentes.

3) Pelo PFC, temos que:

$$\underset{\textit{ternos}}{10} \quad . \quad \underset{\textit{camisas}}{12} \quad . \quad \underset{\textit{sapatos}}{5} \quad = \; 600 \text{ combinações}$$

Portanto, o homem pode vestir um terno, uma camisa e um sapato de 600 formas diferentes.

4) Neste problema para comprar um automóvel é necessário analisar 3 quesitos: cor, motor e versão. Na cor temos 7 possibilidades, no motor temos 2 possibilidades e na versão temos 3 possibilidades. Pelo PFC, temos que:

$$\underset{\textit{cor}}{7} \quad . \quad \underset{\textit{motor}}{2} \quad . \quad \underset{\textit{versão}}{3} \quad = \; 42 \text{ combinações}$$

Portanto, o comprador possui 42 alternativas de carro.

5) Para sabermos de quantas formas podemos responder uma prova, temos que analisar 2 aspectos: quantidade de questões e quantidade de alternativas de cada questão. A prova contém 20 questões e cada questão possui 2 alternativas (verdadeiro ou falso). Assim, temos que:

$$\underset{1^{a}\ questão}{2} \ . \ \underset{2^{a}\ \text{questão}}{2} \ . \ \ldots \ . \ \underset{20^{a}\ questão}{2} = 2^{20} = 1\ 048\ 576 \text{ formas}$$

Portanto, uma pessoa poderá responder a prova de 1 048 576 formas.

6) Cada bit dá duas possibilidades (0 e 1), então no primeiro bit temos duas possibilidades, no segundo temos duas e assim por diante, até chegarmos em 32 bits. Fazendo o PFC, temos que:

$$\underset{1^{o} Bit}{2} \ . \ \underset{2^{o} Bit}{2} \ . \ \underset{3^{o} Bit}{2} \ . \ \ldots \ . \ \underset{32^{o} Bit}{2} = 2^{32} = 4.294.967.296$$

Portanto, o número de palavras distintas de 32 bits é 4 294 967 296.

7) Existe duas possibilidades para cada porta: **aberta** ou **fechada**. Como temos 10 portas, pelo PFC, temos que:

$$\underset{1^{a}\ porta}{2} \ . \ \underset{2^{a}\ porta}{2} \ . \ \underset{3^{a}\ porta}{2} \ . \ \ldots \ . \ \underset{10^{a}\ porta}{2} = 2^{10} = 1\ 024$$

Encontramos 1 024 maneiras diferentes de dispor a sala. Porém dentro deste número existe uma única possibilidade de a sala estar fechada, que é todas as portas estarem fechadas.

Por isso, precisamos tirar esta possibilidade para encontrarmos a sala aberta.

$$1\ 024 - 1 = 1\ 023$$

Portanto, temos 1 023 maneiras da sala ficar aberta.

8) Existem duas possibilidades para cada pessoa: **convidar** ou **não convidar**. Como temos 5 pessoas, pelo PFC, temos que:

$$\underset{1^{a}\,pessoa}{2} \;.\; \underset{2^{a}\,pessoa}{2} \;.\; \underset{3^{a}\,pessoa}{2} \;.\; \underset{4^{a}\,pessoa}{2} \;.\; \underset{5^{a}\,pessoa}{2} = 2^5 = 32$$

Encontramos 32 possibilidades para as pessoas. Porém dentro deste número existe uma única possibilidade de não convidar ninguém para o jantar. Por isso, precisamos tirar esta possibilidade para convidarmos uma ou mais para jantar.

$$32 - 1 = 31 \text{ possibilidades}$$

Portanto, temos 31 possibilidades de convidar uma ou mais pessoas.

9) Pelo PFC, temos que:

$$\underset{1^{a}\,tecla}{26} \;.\; \underset{2^{a}\,tecla}{26} \;.\; \underset{3^{a}\,tecla}{26} \;.\; \underset{4^{a}\,tecla}{26} \;.\; \underset{5^{a}\,tecla}{26} \;.\; \underset{6^{a}\,tecla}{26} = 26^6 = 308\,915\,776 \text{ possibilidades}$$

Sim, $TECTEC$ está entre estes anagramas, pois as letras podem acabar repetindo.

10) Pelo PFC, temos que:

$$\underset{1^{o}\text{ dígito}}{5} \;.\; \underset{2^{o}\text{ dígito}}{5} \;.\; \underset{3^{o}\text{ dígito}}{5} = 5^3 = 125 \text{ possibilidades}$$

11) Pelo PFC, temos que:

$$\underset{\text{nome}}{10} \;.\; \underset{\text{sobrenome}}{20} = 200 \text{ possibilidades}$$

12) Pelo PFC, temos que:

$$\underset{1^{\text{o}}\text{ dado}}{6} \;.\; \underset{2^{\text{o}}\text{ dado}}{6} \;.\; \underset{3^{\text{o}}\text{ dado}}{6} \;.\; \underset{4^{\text{o}}\text{ dado}}{6} \;.\; \underset{5^{\text{o}}\text{ dado}}{6} \;.\; \underset{6^{\text{o}}\text{ dado}}{6} \;. = 6^6 = 46\ 656$$

Portanto, temos 46 656 resultados possíveis.

13) Para sabermos de quantas formas podemos responder um questionário, temos que analisar 2 aspectos: quantidade de perguntas e quantidade de alternativas de cada pergunta. O questionário contém 12 perguntas e cada pergunta possui 2 alternativas (sim ou não). Assim, temos que:

$$\underset{1^{\text{a}}\text{ pergunta}}{2} \;.\; \underset{2^{\text{a}}\text{ pergunta}}{2} \;.\; \ldots \;.\; \underset{12^{\text{a}}\text{ pergunta}}{2} = 2^{12} = 4\ 096 \text{ formas}$$

Portanto, uma pessoa poderá responder o questionário de 4 096 formas.

14) Antonio precisa realizar 4 atividades em sua casa.

$$P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$$

Portanto, Antonio possui 24 maneiras diferentes de executar as atividades.

15) Pela permutação simples, temos que:

$$P_8 = 8! = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40\ 320$$

Portanto, para dispor 8 pessoas em fila indiana temos 40 320 formas.

16) Para o primeiro dígito temos o número 2, ou seja, uma única possibilidade.

1 . . . .
1º dígito 2º dígito 3º dígito 4º dígito 5º dígito 6º dígito 7º dígito 8º dígito

Para o segundo e terceiro dígito não podemos usar o zero, logo temos 9 possibilidades.

1 . 9 . 9 . . . . .
1º dígito 2º dígito 3º dígito 4º dígito 5º dígito 6º dígito 7º dígito 8º dígito

Para o quarto, quinto, sexto, sétimo e oitavo dígito temos 10 possibilidades cada.

1 . 9 . 9 . 10 . 10 . 10 . 10 . 10
1º dígito 2º dígito 3º dígito 4º dígito 5º dígito 6º dígito 7º dígito 8º dígito

Assim, temos que:

1 . 9 . 9 . 10 . 10 . 10 . 10 . 10 = 8 100 000
1º dígito 2º dígito 3º dígito 4º dígito 5º dígito 6º dígito 7º dígito 8º dígito

Portanto, temos 8 100 000 números diferentes de telefones.

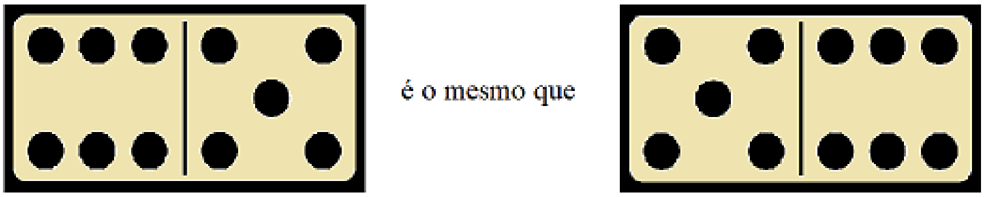
17) Pelo PFC, temos que:

10 . 10 . 10 . 10 . 10 . 10 . 10 = 10^7 = 10 000 00
1º dígito 2º dígito 3º dígito 4º dígito 5º dígito 6º dígito 7º dígito

Portanto, temos 10 000 000 números telefônicos com 7 dígitos.

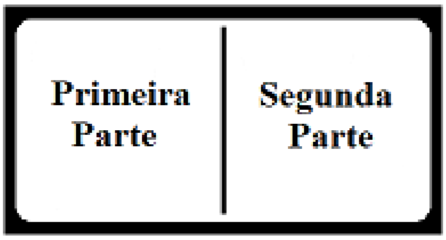
18) O primeiro aspecto a ser analisado é a questão de peças iguais, pois o problema pede peças diferentes;

Exemplo:



O problema pede para encontrarmos peças diferentes formadas pelos números $0, 1, 2, \dots, n$.

O dominó é dividido em duas partes: a primeira e a segunda parte.



Iremos encontrar a quantidade de peças diferentes dividindo em duas etapas e somando-as. Na primeira etapa encontraremos todas as peças diferentes do dominó que não se repetem na primeira e segunda partes e na segunda etapa encontraremos as peças que se repetem na primeira e segunda parte.

Etapa 1: Peças diferentes do dominó que não se repetem na primeira e segunda partes.

- A primeira parte temos $n + 1$ possibilidades, pois começa no zero e não no 1.
- A segunda parte temos n possibilidades, pois não iremos contar neste momento os dominós que possuem as duas partes iguais.

Assim, pelo PFC temos que:

$$(n+1).\, n$$

Porém precisando tirar algo desta contagem, pois ela conta as peças iguais duas vezes, ou seja, precisamos dividir o resultado por dois.

$$\frac{(n+1).\, n}{2}$$

Etapa 2: Peças diferentes do dominó que se repetem na primeira e segunda partes.

Como são $n+1$ números, então temos $n+1$ peças, tais como: $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$, …, (n,n)

Somando as duas etapas, temos todas as peças diferentes do dominó com os números $0, 1, 2, \ldots, n$.

$$\frac{(n+1).\,n}{2}+n+1=\frac{(n+1).\,n+2.(n+1)}{2}=\frac{(n+1).\,(n+2)}{2}$$

19)

a)

$$\underset{1^{a}\text{ carta}}{52}\;.\;\underset{2^{a}\text{ carta}}{52}\;.\;\underset{3^{a}\text{ carta}}{52}\;.\;\underset{4^{a}\text{ carta}}{52}\;.\;\underset{5^{a}\text{ carta}}{52}=52^{5}$$

b)

$$\underset{1^{a}\text{ carta}}{52}\;.\;\underset{2^{a}\text{ carta}}{51}\;.\;\underset{3^{a}\text{ carta}}{50}\;.\;\underset{4^{a}\text{ carta}}{49}\;.\;\underset{5^{a}\text{ carta}}{48}=311\,875\,200$$

20) (Dica: Use o Diagrama da Árvore) São 3 jogadas e você ganha ou perde nas jogadas, então temos 8 opções diferentes. Se ganhar iremos chamar de G e se perder de P.

As 8 opções são: $GGG, GGP, GPG, GPP, PGG, PGP, PPG, PPP$.

Assim, temos que:

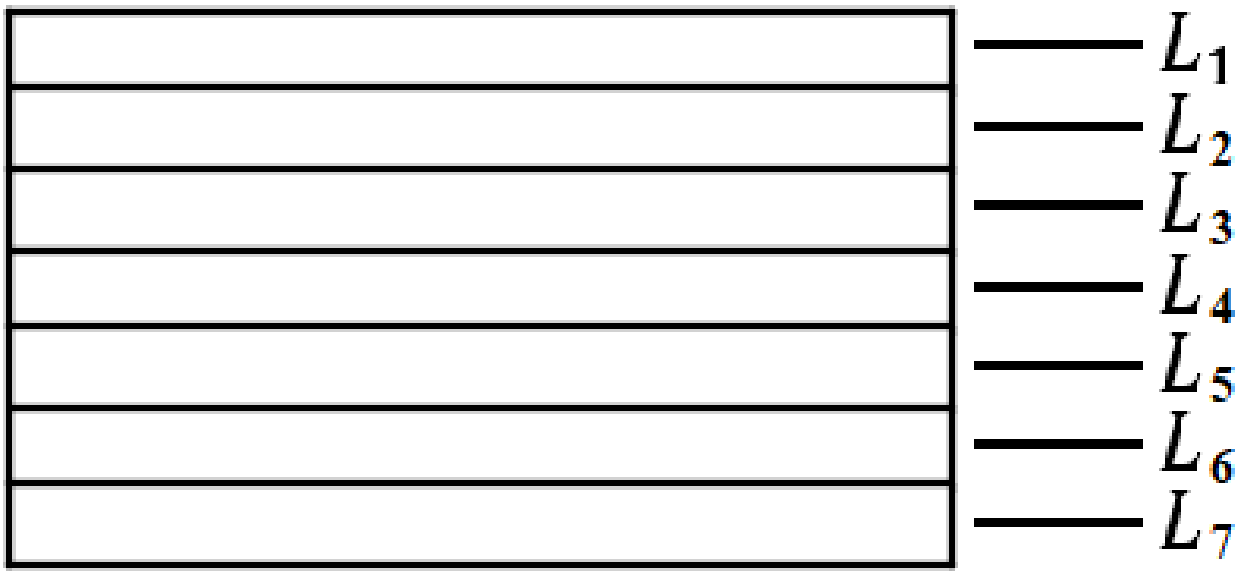
$$R\$2000,00 \to GGG \to R\$5000,00$$
$$R\$2000,00 \to GGP \to R\$3000,00$$
$$R\$2000,00 \to GPG \to R\$3000,00$$
$$R\$2000,00 \to GPP \to R\$1000,00$$
$$R\$2000,00 \to PGG \to R\$3000,00$$
$$R\$2000,00 \to PGP \to R\$1000,00$$
$$R\$2000,00 \to PPG \to R\$1000,00$$
$$R\$2000,00 \to PPP \to R\$-1000,00$$

Como só pode jogar se tiver dinheiro, então a última possibilidade não vale. Portanto, temos como resultado três valores: $R\$\ 1\,000{,}00$, $R\$\ 3\,000{,}00$ e $R\$\ 5\,000{,}00$.

21) Pelo PFC, temos que:

$$\underset{1^{\text{o}}\ \text{colocado}}{20} \quad . \quad \underset{2^{\text{o}}\ \text{colocado}}{19} \quad . \quad \underset{3^{\text{o}}\ \text{colocado}}{18} \quad = 6\,840$$

22) Primeiramente iremos nomear as 7 listas conforme o desenho abaixo:



Vamos analisar as opções que temos de cores em cada linha:

Para L_1 temos 3 opções de cores.

Para L_2 temos 2 opções de cores, pois a cor de L_2 tem que ser diferente da cor de L_1 por serem listras adjacentes.

Para L_3 temos 2 opções de cores, pois a cor de L_3 tem que ser diferente da cor de L_2 por serem listras adjacentes.

Para L_4 temos 2 opções de cores, pois a cor de L_4 tem que ser diferente da cor de L_3 por serem listras adjacentes.

Para L_5 temos 2 opções de cores, pois a cor de L_5 tem que ser diferente da cor de L_4 por serem listras adjacentes.

Para L_6 temos 2 opções de cores, pois a cor de L_6 tem que ser diferente da cor de L_5 por serem listras adjacentes.

Para L_7 temos 2 opções de cores, pois a cor de L_7 tem que ser diferente da cor de L_6 por serem listras adjacentes.

3
2
2
2
2
2
2

Portanto, pelo P.F.C., temos que:

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 192$$

23) Para irmos da cidade A até a cidade F, temos que atravessar 4 cidades; então temos que:

$$\underset{1^{a}\text{ cidade}}{A} \cdot \underset{2^{a}\text{ cidade}}{4} \cdot \underset{3^{a}\text{ cidade}}{3} \cdot \underset{4^{a}\text{ cidade}}{2} \cdot \underset{5^{a}\text{ cidade}}{1} \cdot \underset{6^{a}\text{ cidade}}{F} = 24$$

24) Pelo PFC, temos que:

$$\underset{1^{o}\text{ dígito}}{10} \cdot \underset{2^{o}\text{ dígito}}{9} \cdot \underset{3^{o}\text{ dígito}}{8} = 720$$

25) Para formarmos 11 jogadores temos 1 goleiro e 10 jogadores. Assim, pelo PFC, temos que:

$$\underset{\text{Goleiro}}{3} \cdot \underset{1^{o}\text{ jogador}}{19} \cdot \underset{2^{o}\text{ jogador}}{18} \cdot \underset{3^{o}\text{ jogador}}{17} \cdot \underset{4^{o}\text{ jogador}}{16} \cdot \underset{5^{o}\text{ jogador}}{15} \cdot \underset{6^{o}\text{ jogador}}{14} \cdot \underset{7^{o}\text{ jogador}}{13} \cdot \underset{8^{o}\text{ jogador}}{12} \cdot \underset{9^{o}\text{ jogador}}{11} \cdot \underset{10^{o}\text{ jogador}}{10} = 3 \cdot A_{19,10}$$

26) Pelo PFC, temos que:

$$\underset{1^o\ \text{dígito}}{9} \cdot \underset{2^o\ \text{dígito}}{8} \cdot \underset{3^o\ \text{dígito}}{7} = 504$$

27) As placas são formadas por 2 letras $(A\ e\ B)$ e 4 algarismos (pares e não se repetem). Assim teremos 6 posições.

Para as letras, temos apenas 2 possibilidades para as duas primeiras posições; então temos que:

$$\underset{1^a\ \text{letra}}{2} \cdot \underset{2^a\ \text{letra}}{2} \cdot \underset{1^o\ \text{número}}{\ } \cdot \underset{2^o\ \text{número}}{\ } \cdot \underset{3^o\ \text{número}}{\ } \cdot \underset{4^o\ \text{número}}{\ }$$

Nos números, temos 5 algarismos $(0,2,4,6,8)$, assim, temos que:

$$\underset{1^a\ \text{letra}}{2} \cdot \underset{2^a\ \text{letra}}{2} \cdot \underset{1^o\ \text{número}}{5} \cdot \underset{2^o\ \text{número}}{4} \cdot \underset{3^o\ \text{número}}{3} \cdot \underset{4^o\ \text{número}}{2}$$

Portanto,

$$\underset{1^a\ \text{letra}}{2} \cdot \underset{2^a\ \text{letra}}{2} \cdot \underset{1^o\ \text{número}}{5} \cdot \underset{2^o\ \text{número}}{4} \cdot \underset{3^o\ \text{número}}{3} \cdot \underset{4^o\ \text{número}}{2} = 480$$

28) Esse número é precedido pelos números da forma:

$(\underline{1}, \_, \_, \_, \_)$ que são em número $P_4 = 4!$

$(\underline{2}, \_, \_, \_, \_)$ que são em número $P_4 = 4!$

$(\underline{4}, \_, \_, \_, \_)$ que são em número $P_4 = 4!$

$(\underline{6}, \underline{1}, \_, \_, \_)$ que são em número $P_3 = 3!$

$(\underline{6}, \underline{2}, \_, \_, \_)$ que são em número $P_3 = 3!$

$(\underline{6}, \underline{4}, \_, \_, \_)$ que são em número $P_3 = 3!$

$(\underline{6}, \underline{8}, \underline{1}, \_, \_)$ que são em número $P_2 = 2!$

$(\underline{6}, \underline{8}, \underline{2}, \_, \_)$ que são em número $P_2 = 2!$

Assim, concluímos que 68 412 é precedido por um total de

$$4! + 4! + 4! + 3! + 3! + 3! + 2! + 2! = 94$$

Portanto, a posição de 68 412 é a 95ª.

29)

a) Cada anagrama é uma permutação das letras T, E, O, R, I, A. Logo, o número procurado é:

$$P_6 = 6! = 720$$

b) Começando por T, temos:

$$\underline{T}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

Neste caso temos somente que permutar as letras E, O, R, I, A. Logo, o número procurado é:

$$P_5 = 5! = 120$$

c) Começando por T e terminando com A, temos:

$$\underline{T}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \underline{A}$$

Neste caso temos somente que permutar as letras E, O, R, I, A. Logo, o número procurado é:

$$P_4 = 4! = 24$$

d) Temos as seguintes possibilidades:

$$\underline{A}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_ \rightarrow P_5 = 5! = 120 \text{ anagramas}$$
$$\underline{E}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_ \rightarrow P_5 = 5! = 120 \text{ anagramas}$$
$$\underline{I}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_ \rightarrow P_5 = 5! = 120 \text{ anagramas}$$
$$\underline{O}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_ \rightarrow P_5 = 5! = 120 \text{ anagramas}$$

Logo, ao todo teremos: $120 + 120 + 120 + 120 = 480$ anagramas.

e) Se as vogais A, E, I, O devem estar juntas, então elas funcionam como "uma letra" que deve ser permutada com T e R. Logo, o número de permutações é:

$$P_3 = 3! = 6$$

Todavia, em cada uma dessas permutações, as vogais podem se permutar entre si, de $4! = 24$ formas.

Logo, o número de anagramas nessas condições é:

$$6.24 = 144$$

30) A palavra $FILTRO$ tem 6 letras, sendo 4 consoantes e duas vogais.

Para a primeira letra temos 4 opções (F, L, T, R), as demais letras podem ser consoantes ou vogais; então temos que:

4	.	5	.	4	.	3	.	2	.	1	= 480	anagramas
1ª letra		2ª letra		3ª letra		4ª letra		5ª letra		6ª letra		

31) A palavra $PERNAMBUCO$ tem 10 letras, sendo todas as letras diferentes.

Permutando a palavra $PERNAMBUCO$ temos que:

$$P_{10} = 10!$$

Portanto, com a palavra $PERNAMBUCO$ podemos formar 10! palavras distintas.

Começando com a sílaba PER restam 7 letras a serem permutadas, então temos que:

$$P_7 = 7!$$

Portanto, com a sílaba PER podemos formar 7! palavras distintas.

32) A palavra $PASTEL$ tem 6 letras, sendo 4 consoantes e duas vogais.

Para a primeira letra temos 4 opções (P, S, T, L) e para última letra teremos 3 opções, pois uma consoante já foi usada na primeira letra.

4	.		.		.		.		.	3
1ª letra		2ª letra		3ª letra		4ª letra		5ª letra		6ª letra

As demais letras podem ser consoantes ou vogais, então temos que:

4	.	4	.	3	.	2	.	1	.	3	= 288	anagramas
1ª letra		2ª letra		3ª letra		4ª letra		5ª letra		6ª letra		

33) ROMA ROAM RMOA RMAO

RAOM	AOMR	OMRA	MRAO
RAMO	AMRO	OMAR	MORA
AROM	AMOR	OARM	MOAR
ARMO	ORMA	OAMR	MARO
AORM	ORAM	MROA	MAOR

34)

a) Se começam por MA, resta apenas permutar as outras 4 letras, ou seja,

$$P_4 = 4! = 24 \text{ anagramas}$$

b) Se duas letras devem estar juntas e em uma determinada ordem, consideramo-nas como um bloco, ou seja,

$$P_5 = 5! = 120 \text{ anagramas}$$

c) Parecido com o item anterior, porém, como não existe uma ordem específica para as letras que ficam juntas, elas devem ser permutadas dentro do bloco. Sendo assim, o número de anagramas é

$$P_5 \cdot P_2 = 5!.2! = 240 \text{ anagramas}$$

35)

a) Resta permutar as outras 6 letras. Segue que o número de anagramas é

$$P_6 = 6! = 720 \text{ anagramas}$$

b) Vamos contar a quantidade de anagramas que começam com A, somado à quantidade de anagramas que terminam com E. Como os anagramas que começam com A e terminam com E foram contados duas vezes, subtraímo-no do resultado. Temos então

$$P_7 + P_7 - P_6 = 7! + 7! - 6! = 10\ 080 - 720 = 9\ 360 \text{ anagramas}$$

c) Como deve terminar e começar com vogal e são 3 vogais para 2 espaços, segue que é $3.2 = 6$ o número de maneiras de organizá-las. Agora, basta permutar as demais. Temos então

$$6 \cdot P_6 = 6.720 = 4\ 320 \text{ anagramas}$$

d) Basta pensar que a letra T fica antes da letra M em metade dos anagramas, ou seja,

$$\frac{P_8}{2} = 20\ 160 \text{ anagramas}$$

36) Basta subtrair, do total, a quantidade de anagramas nos quais as vogais aparecem todas juntas, ou seja,

$$P_6 - P_3 \cdot P_4 = 6! - 3!4! = 576 \text{ anagramas}$$

37) Pela permutação com repetição, temos que:

$$P_{12}^{8,4} = \frac{12!}{8!.4!} = \frac{12.11.10.9.\cancel{8!}}{\cancel{8!}.4.3.2\cancel{3!}} = \frac{11\ 880}{24} = 495$$

38) Pela permutação com repetição, temos que:

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3!.2!} = \frac{6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}.2.1} = 60$$

39) Pela permutação com repetição, temos que:

$$P_{11}^{2,3,2,2} = \frac{11!}{2!.3!.2!.2!} = \frac{11.10.9.8.7.6.5.4.\cancel{3!}}{2.\cancel{3!}.2.2} = \frac{6\ 652\ 800}{8} = 831\ 600$$

Portanto, temos 831 600 minutos ou 577 dias e meio.

40) Pela permutação com repetição, temos que:

$$P_{20}^{10,10} = \frac{20!}{10!.10!}$$

41) Pela permutação com repetição, temos que:

$$P_{5}^{3,2} = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}.2.1} = \frac{20}{2} = 10$$

Capítulo 17

1)

a)

$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$$

b)

$$A_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10.9.8.7.\cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 5\ 040$$

c)

$$A_{20,1} = \frac{20!}{(20-1)!} = \frac{20.\cancel{19!}}{\cancel{19!}} = 20$$

d)

$$A_{12,2} = \frac{12!}{(12-2)!} = \frac{12.11.\cancel{10!}}{\cancel{10!}} = 132$$

2) Arranjo de 6 tomados 2 a 2, então temos que:

$$A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6.5.\cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 30$$

3) Cada maneira de pintar a bandeira consiste em uma sequência de cinco cores distintas (sequências porque as listras da bandeira estão numa ordem) escolhidas entre as oito existentes. Logo, o número de sequências procurado é:

$$A_{8,5} = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8.7.6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 6\ 720$$

4) Na 1ª urna temos 5 bolas para agrupar 3 a 3 então temos que:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60$$

Na 2ª urna temos 3 bolas para agrupar 2 a 2 então temos que:

$$A_{3,2} = \frac{3!}{1!} = \frac{3.2.\cancel{1!}}{\cancel{1!}} = 6$$

Portanto, temos que:

$$A_{5,3} \cdot A_{3,2} = 60.6 = 360$$

5) $\{7,8\}, \{7,9\}, \{7,0\}, \{8,9\}, \{8,0\}, \{9,0\}$

6)

$$\frac{C_{8,p+2}}{C_{8,p+1}} = 2$$

$$\frac{\dfrac{8!}{(8-p-2)!(p+2)!}}{\dfrac{8!}{(8-p-1)!(p+1)!}} = 2$$

$$\frac{\frac{8!}{(6-p)!(p+2)!}}{\frac{8!}{(7-p)!(p+1)!}}=2$$

$$\frac{\cancel{8!}}{(6-p)!(p+2)!}\cdot\frac{(7-p)!(p+1)!}{\cancel{8!}}=2$$

$$\frac{(7-p)\,\cancel{(6-p)!}\,\cancel{(p+1)!}}{\cancel{(6-p)!}\,(p+2)\,\cancel{(p+1)!}}=2$$

$$\frac{(7-p)}{(p+2)}=2$$

$$7-p=2(p+2)$$

$$7-p=2p+4$$

$$3p=3$$

$$p=1$$

7) O aluno deve selecionar 10 questões num total de 15 para realizar a prova. Note que a ordem da resolução das questões não é importante.

Portanto, o aluno pode fazer esta escolha de

$$C_{15,10}=\frac{15!}{(15-10)!10!}=\frac{15.14.13.12.11.\cancel{10!}}{5.4.3.2.1.\cancel{10!}}=3\ 003$$

8) O problema pede para formar comissões no mínimo de 4 pessoas; então levar em consideração as comissões com $4, 5, 6, 7, 8, 9$ e 10 pessoas.

Assim, temos que somar: $C_{10,4}+C_{10,5}+C_{10,6}+C_{10,7}+C_{10,8}+C_{10,9}+C_{10,10}$

Calculando individualmente cada combinação, temos que:

$$C_{10,4}=\frac{10!}{(10-4)!4!}=\frac{10.9.8.7.\cancel{6!}}{\cancel{6!}.4.3.2.1}=\frac{5\ 040}{24}=210$$

$$C_{10,5}=\frac{10!}{(10-5)!5!}=\frac{10.9.8.7.6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}.5.4.3.2.1}=\frac{30\ 240}{120}=252$$

$$C_{10,6}=\frac{10!}{(10-6)!6!}=\frac{10.9.8.7.\cancel{6!}}{4.3.2.1.\cancel{6!}}=\frac{5\ 040}{24}=210$$

$$C_{10,7}=\frac{10!}{(10-7)!7!}=\frac{10.9.8.\cancel{7!}}{3.2.1.\cancel{7!}}=\frac{720}{6}=120$$

$$C_{10,8}=\frac{10!}{(10-8)!8!}=\frac{10.9.\cancel{8!}}{2.1.\cancel{8!}}=\frac{90}{2}=45$$

$$C_{10,9}=\frac{10!}{(10-9)!9!}=\frac{10.\cancel{9!}}{1.\cancel{9!}}=10$$

$$C_{10,10} = \frac{10!}{(10-10)!10!} = \frac{10!}{0!.10!} = 1$$

Portanto,

$$210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 848 \text{ comissões}$$

9) Em um baralho de 52 cartas, 4 cartas são reis, e queremos tirar 4 cartas sem olhar a ordem, de modo que em cada escolha haja pelo menos um rei.

Para isso, devemos considerar todas as possibilidades de tirar 4 cartas das 52 **menos** as hipóteses de tirar 4 cartas e nenhuma ser rei:

Tirar 4 cartas de um baralho

$$C_{52,4} = \frac{52!}{(52-4)!4!} = \frac{52.51.50.49.\cancel{48!}}{\cancel{48!}.4.3.2.1} = \frac{6\ 497\ 400}{24} = 270\ 725$$

Tirar 4 cartas e nenhuma ser rei

$$C_{48,4} = \frac{48!}{(48-4)!4!} = \frac{48.47.46.45.\cancel{44!}}{\cancel{44!}.4.3.2.1} = \frac{4\ 669\ 920}{24} = 194\ 580$$

Portanto, para tirarmos 4 cartas de um baralho, sem olhar a ordem, de modo que em cada escolha haja pelo menos um rei, temos que:

$$270\ 725 - 194\ 580 = 76\ 145$$

10) Como João é o único goleiro, então ele fica fixo. Assim, no mesmo time pode haver mudança de apenas 4 jogadores, pois só existe um goleiro. Logo, teremos que combinar 9 pessoas tomadas 4 a 4:

$$C_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!4!} = \frac{9.8.7.6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}.4!} = \frac{3\ 024}{24} = 126$$

Portanto, teremos 126 times para escalar

11) Para encontrarmos a quantidade de modos possíveis de associar 6 substâncias entre os 10 tipos, sem que duas substâncias estejam juntas, por produzirem mistura explosiva, devemos calcular todas as possibilidades menos a quantidade de combinações que causam explosão.

Todas as possibilidades: 10 substâncias tomadas 6 a 6.

$$C_{10,6} = \frac{10!}{(10-6)!.6!} - \frac{10.9.8.7.\cancel{6!}}{4!.\cancel{6!}} = \frac{5\ 040}{24} = 210$$

Explosão: as duas substâncias que produzem explosão já foram selecionadas, agora falta 4 substâncias com 8 tipos.

$$C_{8,4} = \frac{8!}{(8-4)!.4!} - \frac{8.7.6.5.\cancel{4!}}{4!.\cancel{4!}} = \frac{1\ 680}{24} = 70$$

Portanto, temos que:

$$210 - 70 = 140 \text{ misturas}$$

12)

a) Para que nenhum seja Matemático, então tiramos os Matemáticos. Assim, temos 15 pessoas para 10 vagas.

$$C_{15,10} = \frac{15!}{(15-10)!.10!} = \frac{15.14.13.12.11.\cancel{10!}}{5!.\cancel{10!}} = \frac{360\ 360}{120} = 3\ 003$$

b) Para que todos os Matemáticos participem da comissão, então temos 5 vagas preenchidas na comissão. Assim, temos 15 pessoas para 5 vagas restantes.

$$C_{15,5} = \frac{15!}{(15-5)!.5!} = \frac{15.14.13.12.11.\cancel{10!}}{\cancel{10!}.5!} = \frac{360\ 360}{120} = 3\ 003$$

c) Na primeira vaga temos um Matemático, para esta vaga temos 5 opções. Para as outras vagas temos 15 pessoas (pois tiramos os Matemáticos, pois há exatamente um Matemático na comissão) para as 9 vagas faltantes. Assim, temos que:

$$5.C_{15,9} = 5\ .\ \frac{15!}{(15-9)!.9!} = \cancel{5}\ .\ \frac{15.14.13.12.11.10.\cancel{9!}}{6.\cancel{5}.4.3.2.1.\cancel{9!}} = \frac{3\ 603\ 600}{144} = 25\ 025$$

d) Para que pelo menos um membro seja Matemático, devemos calcular todas as possibilidades com todo mundo, ou seja, uma combinação de 20 tomados 10 a 10 **menos** a quantidade da comissão sem nenhum Matemático, isto é, uma combinação de 15 tomados 10 a 10.

$$C_{20,10} - C_{15,10} = \frac{20!}{(20-10)!.10!} - \frac{15!}{(15-10)!.10!}$$

$$= \frac{20.19.\cancel{18}.17.16.\cancel{15}.14.13.12.11.\cancel{10!}}{10.\cancel{9}.8.7.6.\cancel{5}.4.\cancel{3}.\cancel{2}.1.\cancel{10!}} - \frac{15.14.13.12.11.\cancel{10!}}{5!.\cancel{10!}}$$

$$= \frac{2.483.120.640}{13.440} - \frac{360\ 360}{120}$$

$$= 184.756 - 3\ 003$$

$$= 181.753$$

13) Para encontrarmos a quantidade de comissões formadas por pelo menos um diretor devemos encontrar o total de comissões e tirar as comissões que não tem nenhum diretor.

Total de comissões:

$$C_{8,5}=\frac{8!}{(8-5)!.5!}=\frac{8.7.6.\cancel{5!}}{3!.\cancel{5!}}=\frac{336}{6}=56$$

Nenhum diretor:

$$C_{5,5}=1$$

Portanto,

$$56-1=55 \text{ comissões}$$

14) Podemos escolher 3 homens entre 10,

$$C_{10,3}=\frac{10!}{(10-3)!.3!}=\frac{10.9.8.\cancel{7!}}{\cancel{7!}.3!}=\frac{720}{6}=120$$

E podemos escolher 2 mulheres entre 10,

$$C_{10,2}=\frac{10!}{(10-2)!.2!}=\frac{10.9.\cancel{8!}}{\cancel{8!}.2!}=\frac{90}{2}=45$$

Cada grupo de 3 homens pode juntar-se com um dos 45 grupos de mulheres, formando uma comissão. Como existem 120 grupos de homens, teremos ao todo

$$120\ .\ 45 = 5\ 400$$

15) Vamos dividir em duas partes: bolas pretas e bolas brancas.

Nas bolas pretas temos 7 bolas para tirarmos 4; então temos que:

$$C_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)!.4!} = \frac{7.6.5.\cancel{4!}}{3!.\cancel{4!}} = \frac{210}{6} = 35$$

Nas bolas brancas temos 5 bolas para tirarmos duas; então temos que:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!.2!} = \frac{5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}.2!} = \frac{20}{2} = 10$$

Pelo PFC, temos que:

$$35.10 = 350 \text{ maneiras}$$

16) Vamos dividir em duas partes: Estatísticos e Economistas.

Temos 7 Estatísticos e 3 serão escolhidos para a comissão, então temos que:

$$C_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!.3!} = \frac{7.6.5.\cancel{4!}}{\cancel{4!}.3!.} = \frac{210}{6} = 35$$

Temos 6 Economistas e 2 serão escolhidos para a comissão; então temos que:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!.3!} = \frac{6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}.3!} = \frac{120}{6} = 20$$

Pelo PFC, temos que:

$$35.20 = 700 \text{ maneiras}$$

17) Vamos dividir em duas partes: professores de Matemática e professores de Física.

Temos 30 professores de Matemática 3 professores serão escolhidos para a comissão; então temos que:

$$C_{30,3} = \frac{30!}{(30-3)!.3!} = \frac{30.29.28.\cancel{27}!}{\cancel{27}!.3!.} = \frac{24\ 360}{6} = 4\ 060$$

Temos 12 professores de Física 2 professores serão escolhidos para a comissão; então temos que:

$$C_{12,2} = \frac{12!}{(12-2)!.2!} = \frac{12.11.\cancel{10}!}{\cancel{10}!.2!} = \frac{132}{2} = 66$$

Pelo PFC, temos que:

$$4\ 060\ .\ 66 = 267\ 960 \text{ maneiras}$$

18) Como já possui um elemento determinado, então passa a ser uma combinação de 7 tomados dois a dois

$$C_{7,2} = \frac{7!}{5!.2!} = \frac{7.6.\cancel{5}!}{\cancel{5}!.2.1} = 21$$

19) Já possuímos k elementos determinados; então temos uma combinação $(n-k)$ tomados $(p-k)$ a $(p-k)$

$$C_{n-k,p-k}=\frac{(n-k)!}{(n-k-p+k)!.(p-k!)}=\frac{(n-k)!}{(n-p)!.(p-k!)}$$

20) Aplicando a fórmula de Combinação, temos que:

$$C_{n,n}=\frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{n!}{n!0!}=\frac{n!}{0!n!}=\frac{n!}{0!(n-0)!}=C_{n,0}$$

Temos também,

$$\frac{n!}{n!0!}=\frac{n!}{n!1}=\frac{n!}{n!}=1$$

Portanto,

$$C_{n,n}=C_{n,0}=1$$

21) O estudante deve selecionar um grupo de 6 num total de 8 questões.

Note que a ordem da resolução das questões não é importante: Resolvendo em ordem 1, 2, 3, 4, 5 e 6 ou, resolvendo 6, 5, 4, 3, 2 e 1 nesta ordem, de qualquer forma o aluno terá resolvido as mesmas questões.

Portanto, o aluno pode fazer esta escolha de

$$C_{8,6}=\frac{8!}{6!(8-6)!}=\frac{8!}{6!.2!}=\frac{8.7.\cancel{6}!}{\cancel{6}!.2.1}=\frac{56}{2}=28$$

22)

$$C_{6,2}=\frac{6!}{4!.2!}=15$$

23)

$$C_{5,2} = \frac{5!}{3!.2!} = 10$$

24)

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!.3!} = 20$$

25)

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!.2!} = 10$$

Capítulo 18

1)

a)

$$\binom{9}{2} = \binom{9}{7}$$

b)

$$\binom{11}{4} = \binom{11}{7}$$

c)

$$\binom{12}{7} = \binom{12}{5}$$

d)

$$\binom{139}{0} = \binom{139}{139}$$

2)

a)

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)!.4!} = \frac{7.6.5.\cancel{4!}}{3!.\cancel{4!}} = \frac{210}{6} = 35$$

b)

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!.2!} = \frac{6.5.\cancel{4!}}{\cancel{4!}.2!} = \frac{30}{2} = 15$$

c)

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{(10-7)!.7!} = \frac{10.9.8.\cancel{7!}}{3!.\cancel{7!}} = \frac{720}{6} = 120$$

d)

$$\binom{139}{138} = \frac{139!}{(139-138)!.138!} = \frac{139.\cancel{138!}}{1!.\cancel{138!}} = 139$$

3)

a) O coeficiente x^2 é o segundo termo de $(x+2)^3$; então temos que:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot y^{p}$$

$$T_{1+1} = \binom{3}{1} \cdot x^{3-1} \cdot 2^{1}$$

$$T_{2} = \frac{3!}{2!.1!} \cdot 2x^{2} = 3 \cdot 2x^{2} = 6x^{2}$$

Portanto, o termo que acompanha x^2 é 6.

b) O coeficiente x^3 é o segundo termo de $(x+2)^4$; então temos que:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot y^{p}$$

$$T_{1+1} = \binom{4}{1} \cdot x^{4-1} \cdot 2^{1}$$

$$T_{2} = \frac{4!}{3!.1!} \cdot 2x^{3} = 4 \cdot 2x^{3} = 8x^{3}$$

Portanto, o termo que acompanha x^3 é 8.

c) O coeficiente x^3 é o terceiro termo de $(x+3)^5$; então temos que:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot y^{p}$$

$$T_{2+1} = \binom{5}{2} \cdot x^{5-2} \cdot 3^{2}$$

$$T_{3} = \frac{5!}{3!.2!} \cdot 9x^{3} = 10 \cdot 9x^{3} = 90x^{3}$$

Portanto, o termo que acompanha x^3 é 90.

d) O coeficiente x^2 é o quarto termo de $(x+2)^5$; então temos que:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot y^{p}$$

$$T_{3+1} = \binom{5}{3} \cdot x^{5-3} \cdot 2^{3}$$

$$T_4 = \frac{5!}{2!.3!} \cdot 8x^2 = 10 \cdot 8x^2 = 80x^3$$

Portanto, o termo que acompanha x^2 é 80.

e) O coeficiente x^2 é o segundo termo de $(3x+2)^3$; então temos que:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot y^p$$

$$T_{1+1} = \binom{3}{1} \cdot (3x)^{3-1} \cdot 2^1$$

$$T_2 = \frac{3!}{2!.1!} \cdot 18x^2 = 3 \cdot 18x^2 = 54x^2$$

Portanto, o termo que acompanha x^2 é 54.

4)

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k-1)!.(k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-k)!.(k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1).\,n!}{(n-k)!.(k+1).\,k!}$$

$$= \frac{n+1}{k+1} \cdot \frac{n!}{(n-k)!\ .\ k!}$$

$$= \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$$

5) Iremos desenvolver os dois lados da igualdade e encontraremos um valor comum.

Começaremos desenvolvendo a primeira parte; então temos que:

$$\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \frac{n!}{(n-m!)\ .\ m!} \cdot \frac{m!}{(m-r!)\ .\ r!} = \frac{n!.\cancel{m!}}{(n-m!).\cancel{m!}.(m-r!).r!} = \frac{n!}{(n-m!).(m-r!).r!}$$

Desenvolvendo a outra parte, temos que:

$$\binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r} = \frac{n!}{(n-r!)\ .\ \mathrm{r}!} \cdot \frac{(n-r)!}{(n-r-[m-r]!)\ .\ (m-r)!} = \frac{n!.(n-r)!}{(n-r!)\ .\ \mathrm{r}!.(n-r-m+r!)\ .\ (m-r)!}$$

$$= \frac{n!.\cancel{(n-r)!}}{\cancel{(n-r!)}.\mathrm{r}!.(n-m!).(m-r)!} = \frac{n!}{(n-m!).(m-r!).r!}$$

Portanto, temos que:

$$\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$$

6)

a)

$$(x+3b)^3 = \binom{3}{0} \cdot x^3 + \binom{3}{1} \cdot x^{3-1} \cdot (3b)^1 + \binom{3}{2} \cdot x^{3-2} \cdot (3b)^2 + \binom{3}{3} \cdot (3b)^3$$

$$= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3b + 3 \cdot x \cdot 9b^2 + 27b^3$$

$$= x^3 + 9x^2b + 27xb^2 + 27b^3$$

b)

$$\left(1 - x^2\right)^5 = \left(1 + \left[-x^2\right]\right)^5 =$$

$$= \binom{5}{0} \cdot 1^5 + \binom{5}{1} \cdot 1^{5-1} \cdot \left(-x^2\right)^1 + \binom{5}{2} \cdot 1^{5-2} \cdot \left(-x^2\right)^2 + \binom{5}{3} \cdot 1^{5-3} \cdot \left(-x^2\right)^3 + \binom{5}{4} \cdot 1^{5-4} \cdot \left(-x^2\right)^4 + \binom{5}{5} \cdot \left(-x^2\right)^5$$

$$= 1 \cdot 1^5 + 5 \cdot 1^4 \cdot \left(-x^2\right) + 10 \cdot 1^3 \cdot x^4 + 10 \cdot 1^2 \cdot \left(-x^6\right) + 5 \cdot 1^1 \cdot x^8 + 1 \cdot \left(-x^{10}\right)$$

$$= 1 - 5x^2 + 10x^4 - 10x^6 + 5x^8 - x^{10}$$

$$= - x^{10} + 5x^8 - 10x^6 + 10x^4 - 5x^2 + 1$$

c)

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^4 = \left(\sqrt{x} + \left[-\sqrt{y}\right]\right)^4$$

$$= \binom{4}{0} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^4 + \binom{4}{1} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^{4-1} \cdot \left(-\sqrt{y}\right)^1 + \binom{4}{2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^{4-2} \cdot \left(-\sqrt{y}\right)^2 + \binom{4}{3} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^{4-3} \cdot \left(-\sqrt{y}\right)^3 + \binom{4}{4} \cdot \left(-\sqrt{y}\right)^4$$

$$= 1 \cdot \left(\sqrt{x}\right)^4 + 4 \cdot \left(\sqrt{x}\right)^3 \cdot \left(-\sqrt{y}\right)^1 + 6 \cdot \left(\sqrt{x}\right)^2 \cdot \left(-\sqrt{y}\right)^2 + 4 \cdot \left(\sqrt{x}\right) \cdot \left(-\sqrt{y}\right)^3 + 1 \cdot \left(-\sqrt{y}\right)^4$$

$$= x^2 - 4\sqrt{x}^3\sqrt{y} + 6xy - 4\sqrt{x}\sqrt{y}^3 + y^2$$

$$= x^2 - 4x\sqrt{xy} + 6xy - 4y\sqrt{xy} + y^2$$

d)

$$(sen\theta + \cos\theta)^4 =$$

$$= \binom{4}{0}.(sen\theta)^4 + \binom{4}{1}.(sen\theta)^{4-1}.(\cos\theta)^1 + \binom{4}{2}.(sen\theta)^{4-2}.(\cos\theta)^2 + \binom{4}{3}.(sen\theta)^{4-3}.(\cos\theta)^3 + \binom{4}{4}.(\cos\theta)^4$$

$$= 1 \,.\, sen^4\theta + 4 \,.\, sen^3\theta.\cos\theta + 6 \,.\, sen^2\theta.\cos^2\theta + 4 \,.\, sen\,\theta.\cos^3\theta + \cos^4\theta$$

$$= sen^4\theta + 4sen^3\theta.\cos\theta + 6sen^2\theta.\cos^2\theta + 4sen\,\theta.\cos^3\theta + \cos^4\theta$$

e)

$$(3 - y)^5 = (3 + [-y])^5$$

$$= \binom{5}{0}.3^5 + \binom{5}{1}.3^{5-1}.(-y)^1 + \binom{5}{2}.3^{5-2}.(-y)^2 + \binom{5}{3}.3^{5-3}.(-y)^3 + \binom{5}{4}.3^{5-4}.(-y)^4 + \binom{5}{5}.(-y)^5$$

$$= 1 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^4.(-y) + 10 \cdot 3^3.y^2 + 10 \cdot 3^2.(-y^3) + 5 \cdot 3^1.y^4 + 1 \cdot (-y^5)$$

$$= 243 - 405y + 270y^2 - 90y^3 + 15y^4 - y^5$$

$$= -y^5 + 15y^4 - 90y^3 + 270y^2 - 405y + 243$$

7) Pela Observação 5, temos que:

$$\left(m+\frac{1}{m}\right)^5-\left(m-\frac{1}{m}\right)^5=\left(m+\frac{1}{m}\right)^5+\left(-m+\frac{1}{m}\right)^5$$

Desenvolvendo a primeira parcela pelo Teorema Binomial, temos que:

$$\left(m+\frac{1}{m}\right)^5=\binom{5}{0}\cdot m^5+\binom{5}{1}\cdot m^{5-1}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^1+\binom{5}{2}\cdot m^{5-2}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^2+\binom{5}{3}\cdot m^{5-3}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^3+\binom{5}{4}\cdot m^{5-4}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^4+\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^5$$

$$=\binom{5}{0}\cdot m^5+\binom{5}{1}\cdot m^4\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^1+\binom{5}{2}\cdot m^3\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^2+\binom{5}{3}\cdot m^2\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^3+\binom{5}{4}\cdot m\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^4+\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^5$$

Desenvolvendo a segunda parcela pelo teorema binomial, temos que:

$$\left(-m+\frac{1}{m}\right)^5=\binom{5}{0}\cdot(-m)^5+\binom{5}{1}\cdot(-m)^{5-1}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^1+\binom{5}{2}\cdot(-m)^{5-2}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^2+\binom{5}{3}\cdot(-m)^{5-3}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^3+\binom{5}{4}\cdot(-m)^{5-4}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^4+\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^5$$

$$=-\binom{5}{0}\cdot m^5+\binom{5}{1}\cdot m^4\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^1-\binom{5}{2}\cdot m^3\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^2+\binom{5}{3}\cdot m^2\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^3-\binom{5}{4}\cdot m\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^4+\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^5$$

Somando as duas parcelas, temos que:

$$\left(m+\frac{1}{m}\right)^5+\left(-m+\frac{1}{m}\right)^5=\cancel{\binom{5}{0}\cdot m^5}+\binom{5}{1}\cdot m^4\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^1+\cancel{\binom{5}{2}\cdot m^3\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^2}+\binom{5}{3}\cdot m^2\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^3$$
$$+\cancel{\binom{5}{4}\cdot m\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^4}+\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^5-\cancel{\binom{5}{0}\cdot m^5}+\binom{5}{1}\cdot m^4\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^1$$
$$-\cancel{\binom{5}{2}\cdot m^3\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^2}+\binom{5}{3}\cdot m^2\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^3-\cancel{\binom{5}{4}\cdot m\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^4}+\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^5$$

$$= 5m^3 + \frac{10}{m} + \frac{1}{m^5} + 5m^3 + \frac{10}{m} + \frac{1}{m^5}$$

$$= 10m^3 + \frac{20}{m} + \frac{2}{m^5}$$

8)

$$(x+a)^7 = \binom{7}{0} \cdot x^7 + \binom{7}{1} \cdot x^{7-1} \cdot a^1 + + \binom{7}{2} \cdot x^{7-2} \cdot a^2 + \binom{7}{3} \cdot x^{7-3} \cdot a^3$$
$$+ \binom{7}{4} \cdot x^{7-4} \cdot a^4 + \binom{7}{5} \cdot x^{7-5} \cdot a^5 + \binom{7}{6} \cdot x^{7-6} \cdot a^6 + \binom{7}{7} \cdot a^7$$

$$= 1 \cdot x^7 + 7 \cdot x^6 \cdot a + 21 \cdot x^5 \cdot a^2 + 35 \cdot x^4 \cdot a^3 + 35 \cdot x^3 \cdot a^4$$
$$+ 21 \cdot x^2 \cdot a^5 + 7 \cdot x \cdot a^6 + 1 \cdot a^7$$

$$= x^7 + 7x^6 a + 21x^5 a^2 + 35x^4 a^3 + 35x^3 a^4 + 21x^2 a^5 + 7x\, a^6 + a^7$$

9)

a) 8 termos.

b) 11 termos.

c) $n + 1$ termos.

10)

$$T_{99+1} = T_{100}$$

$$= \binom{1000}{99} \cdot x^{1000-99} \cdot y^{99} = \binom{1000}{99} \cdot x^{901} \cdot y^{99}$$

11) **Primeiro termo:**

$$T_{0+1} = T_1 = \binom{100}{0} \cdot x^{100-0} \cdot y^0 = x^{100}$$

Segundo termo:

$$T_{1+1} = T_2 = \binom{100}{1} \cdot x^{100-1} \cdot y^1 = 100x^{99}y$$

Terceiro termo:

$$T_{2+1} = T_3 = \binom{100}{2} \cdot x^{100-2} \cdot y^2 = 4950x^{98}y^2$$

12)

$$12^5 + 5\,(12)^4 + 10\,(12)^3 + 10\,(12)^2 + 5\,(12) + 1 =$$

$$= 248\,832 + 5\,.\,20\,736 + 10 \cdot 1\,728 + 1440 + 60 + 1$$

$$= 248\,832 + 103\,680 + 17\,280 + 1440 + 60 + 1$$

$$= 371\,293$$

13) Note que a expressão é o desenvolvimento de $(x + y)^n$ (Teorema Binomial); então temos que:

$$x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + y^n = (x + \mathrm{y})^n$$

Substituindo $x = y = 1$, temos que:

$$x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + y^n = (1+1)^n = 2^n$$

Portanto, a expressão vale 2^n.

14) O termo x^2 é o terceiro termo de $\left(1 - 2x\right)^6$; então temos que:

$$T_{2+1} = \binom{6}{2} \cdot 1^{6-2} \cdot \left(-2x\right)^2 = 60x^2$$

Portanto, é o coeficiente 60.

15) O termo x^4 é o terceiro termo de $\left(x+3y\right)^9$; então temos que:

$$T_{5+1} = T_6 = \binom{9}{5} \cdot x^{9-5} \cdot 3y^5 = 30\ 618x^4y^5$$

Portanto, o termo é $30\ 618x^4y^5$.

16) O termo x^8 é o quinto termo de $\left(1 - 2x^2\right)^5$; então temos que:

$$T_{4+1} = T_5 = \binom{5}{4} \cdot 1^{5-4} \cdot \left(-2x^2\right)^4 = 80x^8$$

Portanto, o termo é 80.

17) Para encontrarmos x^6, temos a seguinte fórmula:

$$T_{p+1} = \binom{8}{p} \cdot \left(x^2\right)^{8-p} \cdot \left(x^{-3}\right)^p$$

Para isso, temos que analisarmos as duas potências de x, para que a soma delas resulte em 6; então temos que:

$$2(8-p)+(-3p)=6$$

$$16-2p-3p=6$$

$$-5p=-10$$

$$p=2$$

Assim, para termos o termo x^6, devemos tomar $p=2$, ou seja, o termo x^6 é o terceiro termo; então temos que:

$$T_{2+1} = T_3 = \binom{8}{2} \cdot \left(x^2\right)^{8-2} \cdot \left(x^{-3}\right)^2 = 28x^{12} \cdot x^{-6} = 28x^6$$

Portanto, o termo é 28.

18) O termo x^4 é o quinto termo de $\left(x-2\right)^7$; então temos que:

$$T_{3+1} = T_4 = \binom{7}{3} \cdot x^{7-3} \cdot \left(-2\right)^3 = 35x^4 \cdot \left(-8\right) = -280x^4$$

Portanto, o termo é -280.

19)

a)

$$\left(x+25\right)^{8}=\sum_{i=0}^{8}\binom{8}{i}\cdot x^{8-i}\cdot 25^{i}$$

b)

$$\left(x-4\right)^{15}=\sum_{i=0}^{15}\binom{15}{i}\cdot x^{15-i}\cdot\left(-4\right)^{i}$$

c)

$$\left(x+25\right)^{100}=\sum_{i=0}^{100}\binom{100}{i}\cdot x^{100-i}\cdot 25^{i}$$

d)

$$\left(x-2y\right)^{10}=\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}\cdot x^{10-i}\cdot\left(-2y\right)^{i}$$

e)

$$\left(3x+2\right)^{5}=\sum_{i=0}^{5}\binom{5}{i}\cdot 3x^{5-i}\cdot 2^{i}$$

f)

$$\left(2x-5\right)^{6}=\sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}\cdot 2x^{6-i}\cdot\left(-5\right)^{i}$$