Capítulo 19

1)

a) F

b) V

c) V

d) V

e) V

f) F

Capítulo 20

1) Vamos desenvolver $(1+1)^n$ pelo teorema binomial.

Temos:

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}.1^n + \binom{n}{1}.1^{n-1}.1^1 + \ldots + \binom{n}{i}.1^{n-i}.1^i + \ldots + \binom{n}{n}.1^0$$

Logo,

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{i} + \ldots + \binom{n}{n}$$

2)

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1+4+6+4+1 = 16$$

3)

a)

$$\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}$$
$$= 1+10+45+120+210+252+210+120+45+10+1 = 1024$$

b)

$$\sum_{i=1}^{10}\binom{10}{i} = \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}$$
$$= 10+45+120+210+252+210+120+45+10+1 = 1023$$

c)

$$\sum_{i=2}^{10}\binom{10}{i} = \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}$$
$$= 45+120+210+252+210+120+45+10+1 = 1013$$

4)

$$\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}=1023\Rightarrow\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}-\binom{m}{0}=1023\Rightarrow\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}=1024\Rightarrow\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}=2^{10}\Rightarrow m=10$$

5)

$$\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}-\binom{n}{0}=2^{n}-1$$

6)

$$\sum_{k=0}^{10}\binom{11}{k}=\binom{11}{0}+\binom{11}{1}+\binom{11}{2}+\binom{11}{3}+\binom{11}{4}+\binom{11}{5}+\binom{11}{6}+\binom{11}{7}+\binom{11}{8}+\binom{11}{9}+\binom{11}{10}$$
$$=1+11+55+165+330+462+462+330+165+55+11=2047$$

7) Para calcularmos p na equação devemos analisar dois casos:

1º Caso: denominadores iguais

$$\binom{14}{3p}=\binom{14}{p+6}\Rightarrow 3p=p+6\Rightarrow 2p=6\Rightarrow p=3$$

2° Caso: A soma dos denominadores resulta em 14 (3ª Propriedade)

$$\binom{14}{3p}=\binom{14}{p+6}\Rightarrow 3p+p+6=14\Rightarrow 4p=8\Rightarrow p=2$$

8) Para calcular p na equação devemos analisar o caso $(p-3)=10+(p+3)$:

$$\binom{10}{p-3}=\binom{10}{p+3}\Rightarrow p\cancel{-3}+p\cancel{+3}=10\Rightarrow 2p=10\Rightarrow p=5$$

9) Para calcularmos x na equação devemos analisar dois casos:

1º Caso: denominadores iguais

$$\binom{14}{x}=\binom{14}{2x-1}\Rightarrow x=2x-1\Rightarrow x=1$$

2° Caso: A soma dos denominadores resulta em 14.

$$\binom{14}{x}=\binom{14}{2x-1}\Rightarrow x+2x-1=14\Rightarrow 3x=15\Rightarrow x=5$$

10) Para calcular p na equação devemos analisar o caso $(p+3)=12+(p-1)$:

$$\binom{12}{p+3}=\binom{12}{p-1}\Rightarrow p+3+p-1=12\Rightarrow 2p=10\Rightarrow p=5$$

11) Para calcularmos m na equação devemos analisar dois casos:

1º Caso: denominadores iguais

$$\binom{11}{m-1}=\binom{11}{2m-3}\Rightarrow m-1=2m-3\Rightarrow m=2$$

2° Caso: A soma dos denominadores resulta em 11.

$$\binom{11}{m-1}=\binom{11}{2m-3}\Rightarrow m-1+2m-3=11\Rightarrow 3m=15\Rightarrow m=5$$

Capítulo 21

1)

a) $\Omega = \{P, R, O, B, A, I, L, D, E\}$

b) $\Omega = \{V, B, A\}$

c) $\Omega = \left\{ \begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10, 11, \\ 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, \\ 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, \\ 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, \\ 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50 \end{array} \right\}$

d) Sejam $p = paus$, $c = copas$, $e = espadas$ e $o = ouros$.

Então temos que:

$$\Omega = \left\{2_p,\ 2_c,\ 2_e,\ 2_o,\ 3_p,\ 3_c,\ 3_e,\ 3_o, \ldots,\ K_p,\ K_c,\ K_e,\ K_o,\ A_p,\ A_c,\ A_e,\ A_o\right\}$$

e) $\Omega = \{(V, V), (V, B), (B, V), (B, B)\}$

f) $\Omega = \{(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A)\}$

g) A letra M indica o sexo masculino e a letra F indica o sexo feminino.

Então temos que:

$$\Omega = \{(M, M, M), (M, M, F), (M, F, M), (M, F, F), (F, M, M), (F, M, F), (F, F, M), (F, F, F)\}$$

h) Vamos considerar o resultado como um par de números (a, b) em que a representa o resultado do dado verde e b representa o resultado no dado vermelho.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1), \\ (1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,1), \\ (1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3), \\ (1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4), \\ (1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5), \\ (1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6), \end{array} \right\}$$

i) $\Omega = \{(A,B),(A,C),(\mathrm{A,D}),(A,E),(\mathrm{B,C}),(B,D),(\mathrm{B,E}),(C,D),(\mathrm{C,E}),(D,E)\}$

Capítulo 22

1)

a) ***A***: O número obtido é par.

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$$

b) ***B***: O número obtido é ímpar.

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}$$

c) ***C***: O número obtido é primo.

$$C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$$

d) ***D***: O número obtido é maior que 16.

$$D = \{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$$

e) ***E***: O número é múltiplo de 2 e de 5.

$$E = \{10, 20, 30\}$$

f) ***F***: O número é múltiplo de 3 ou de 8.

$$F = \{3, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 21, 24, 27, 30\}$$

g) ***G***: O número não é múltiplo de 6.

$$G = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29\}$$

2)

a) **A:** ocorre 3 no dado verde.

$$A = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$$

b) **B:** ocorrem números iguais nos dois dados.

$$B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

c) **C:** ocorre número 2 em ao menos um dado.

$$C = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(1,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}$$

d) **D:** ocorrem números cuja soma é 7.

$$D = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

e) **E:** ocorrem números cuja soma é menor que 7.

$$E = \{(1,5),(1,4),(1,3),(1,2),(1,1),(2,4),(2,3),(2,2),(2,1),(3,3),(3,2),(3,1),(4,2),(4,1),(5,1)\}$$

3) Sejam $k = cara$ e $C = coroa$.

a) **A:** ocorre cara.

$$A = \{(k,1),(k,2),(k,3),(k,4),(k,5),(k,6)\}$$

b) **B:** ocorre número par.

$$B = \{(k,2),(k,4),(k,6),(C,2),(C,4),(C,6)\}$$

c) **C:** ocorre o número 3.

$$C = \{(k,3),(C,3)\}$$

d) $A \cup B = \{(k,1),(k,2),(k,3),(k,4),(k,5),(k,6),(C,2),(C,4),(C,6)\}$

e) $B \cap C = \varnothing$

f) $A \cap C = \{(k,3)\}$

g) A^C : ocorrência de não ter cara

$$A^C = \{(C,1),(C,2),(C,3),(C,4),(C,5),(C,6)\}$$

h) C^C : ocorrência de não ter o número 3.

$$C^C = \{(k,1),(k,2),(k,4),(k,5),(k,6),(C,1),(C,2),(C,4),(C,5),(C,6)\}$$

4)

a) $A = \{(x,y) \mid x = y\}$.

$$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

b) $B = \{(x,y) \mid x > y\}$.

$$B = \{(4,3),(4,2),(4,1),(3,2),(3,1),(2,1)\}$$

c) $C = \{(x,y) \mid x + y = 2\}$.

$$C = \{(1,1)\}$$

d) $D = \{(x,y) \mid y = x^2\}$.

$$D = \{(1,1),(2,4)\}$$

e) $E = \{(x,y) \mid x = 1\}$.

$$E = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)\}$$

f) $F = \{(x,y) \mid y = 3\}$.

$$F = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3)\}$$

5)

a) $\boldsymbol{A}$: a urna escolhida é a I.

$$A = \{(I,V),(I,B)\}$$

b) $\boldsymbol{B}$: a urna escolhida é a II.

$$B = \{(II,V),(II,B)\}$$

c) $\boldsymbol{C}$: a bola escolhida é vermelha.

$$C = \{(I,V),(II,V)\}$$

d) $\boldsymbol{D}$: a bola escolhida é branca.

$$D = \{(I,B),(II,B)\}$$

e) $A \cup B = \{(I,V),(I,B),(II,V),(II,B)\} = \Omega$

f) $A \cap B = \varnothing$

g) D^C : ocorrência da bola escolhida não ser branca.

$$D^C = \{(I,V),(II,V)\} = C$$

6)

a) $\Omega = \{(S,S,S),(S,S,N),(S,N,S),(S,N,N),(N,S,S),(N,S,N),(N,N,S),(N,N,N)\}$

b) $A = \{(S,S,N),(S,N,S),(S,N,N),(N,S,S),(N,S,N),(N,N,S),(N,N,N),\}$

Capítulo 24

1) $P(A)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

2) $P(A)=1$

3)

a) Como $p_1=p_2=p_3$ temos que:

$$P=p_1+p_2+p_3+p_4 \Rightarrow 1=3p_1+0,1 \Rightarrow p_1=0,3$$

Portanto, $p_1=p_2=p_3=0,3$.

b) $P(A)=p_1+p_3=0,3+0,3=0,6$

c) $P(A^C)=p_2+p_4=0,3+0,1=0,4$

d) $P(B)=p_1+p_4=0,3+0,1=0,4$

e) $P(A\bigcup B)=p_1+p_3+p_4=0,3+0,3+0,1=0,7$ e $P(A\bigcap B)=p_1=0,3$

f) $P(A\bigcup B)^C=p_3=0,3$ e $P(A\bigcap B)^C=p_1+p_3+p_4=0,3+0,3+0,1=0,7$

4) Resposta pessoal.

5)

a) Como a moeda é viciada a probabilidade de sair cara é duas vezes mais provável do que sair coroa. Assim, temos a seguinte probabilidade de sair cara:

$$P(A) = \frac{2}{3}$$

b) $P(C) = \frac{1}{3}$

6) O espaço amostral é $\Omega = \{K, C, K, K\}$ para $K = cara$ e $C = coroa$. Assim, temos a seguinte probabilidade para se obter cara:

$$P(K) = \frac{3}{4}$$

7) O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Pelo enunciado, temos que: $p_2 = 2p_1$, $p_3 = 3p_1$, $p_4 = 4p_1$, $p_5 = 5p_1$ e $p_6 = 6p_1$.

Logo,

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

$$p_1 + 2p_1 + 3p_1 + 4p_1 + 5p_1 + 6p_1 = 1$$

$$21p_1 = 1$$

$$p_1 = \frac{1}{21}$$

a) O evento que nos interessa é $A = \{2, 4, 6\}$.

$$P(A) = p_2 + p_4 + p_6 = 2.\frac{1}{21} + 4.\frac{1}{21} + 6.\frac{1}{21} = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

b) O evento que nos interessa é $B = \{5, 6\}$.

$$P(B) = p_5 + p_6 = 5.\frac{1}{21} + 6.\frac{1}{21} = \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{11}{21}$$

8) O espaço amostral é $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Pelo enunciado, temos que: $p_2 = 3p_1$, $p_3 = p$, $p_4 = 3p_1$, $p_5 = p_1$ e $p_6 = 3p_1$.

Logo,

$$p_1 + 3p_1 + p_1 + 3p_1 + p_1 + 3p_1 = 1$$

$$12p_1 = 1$$

$$p_1 = \frac{1}{12}$$

a) O evento que nos interessa é $A = \{2,3,5\}$.

$$P(A) = p_2 + p_3 + p_5 = 3.\frac{1}{12} + 1.\frac{1}{12} + 1.\frac{1}{12} = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

b) O evento que nos interessa é $B = \{3,6\}$.

$$P(B) = p_3 + p_6 = 1.\frac{1}{12} + 3.\frac{1}{12} = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

c) O evento que nos interessa é $C = \{1,2,3\}$.

$$P(C) = p_1 + p_2 + p_3 = 1.\frac{1}{12} + 3.\frac{1}{12} + 1.\frac{1}{12} = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

9)

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,2 + 0,3 - 0,1 = 0,4$

b) $P\left(A^C\right) = 1 - P(A) = 1 - 0,2 = 0,8$

c) $P\left(B^C\right) = 1 - P(B) = 1 - 0,3 = 0,7$

Capítulo 25

1)

a) $\boldsymbol{A}$: Ocorrer dama de copas.

$$P(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{1}{52}$$

b) $\boldsymbol{B}$: Ocorrer dama.

$$P(B)=\frac{\#B}{\#\Omega}=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$

c) $\boldsymbol{C}$: Ocorrer carta de naipe paus

$$P(C)=\frac{\#C}{\#\Omega}=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

d) $\boldsymbol{D}$: Ocorrer dama ou rei ou valete.

$$P(D)=\frac{\#D}{\#\Omega}=\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$$

e) $\boldsymbol{E}$: Ocorrer uma carta que não é um rei.

$$P(E)=\frac{\#E}{\#\Omega}=\frac{48}{52}=\frac{12}{13}$$

2)

a) $\boldsymbol{A}$: par.

$$P(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

b) $\boldsymbol{B}$: ímpar.

$$P(B)=\frac{\#B}{\#\Omega}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

c) ***C***: primo.

$$P(C)=\frac{\#C}{\#\Omega}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

Observação: De 1 até 20 temos os seguintes números primos:

$$p=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$$

d) ***D***: quadrado perfeito.

$$P(D)=\frac{\#D}{\#\Omega}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

Observação: De 1 até 20 temos os seguintes quadrados perfeitos $\{1,4,9,16\}$.

3)

a) $A=\{9,18,27,36,45,54,63,72,81,90,99\}$

$$P(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{11}{100}$$

b) $B=\{12,24,36,48,60,72,84,96\}$

$$P(B)=\frac{\#B}{\#\Omega}=\frac{8}{100}=\frac{2}{25}$$

c) $C=\left\{\begin{matrix}3,4,6,8,9,12,15,16,18,20,21,24,27,28,30,32,33,36,\\39,40,42,44,45,48,51,52,54,56,57,60,63,64,66,68,\\69,72,75,76,78,80,81,84,87,88,90,92,93,96,99,100\end{matrix}\right\}$

$$P(C)=\frac{\#C}{\#\Omega}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$$

4) $A\cup B=\{2,4,5,6,8,10,12,14,15,16,18,20\}$. Então a probabilidade de $A\cup B$ é:

$$P(A\cup B)=\frac{\#A\cup B}{\#\Omega}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

5) Sejam B_1, B_2 e B_3 as bolas brancas, V_1 e V_2 as bolas vermelhas e A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 as bolas azuis. O espaço amostral para o experimento é $\Omega = \{B_1, B_2, B_3, V_1, V_2, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ tal que $\#\Omega = 10$.

a) ***A***: a bola extraída é branca. Então, $A = \{B_1, B_2, B_3\}$ tal que $\# A = 3$. Assim, temos que:

$$P(A) = \frac{3}{10}$$

b) ***B***: a bola extraída é vermelha. Então, $B = \{V_1, V_2\}$ tal que $\# B = 2$. Assim, temos que:

$$P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

c) ***C***: a bola extraída é azul. Então, $C = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ tal que $\# C = 5$. Assim, temos que:

$$P(C) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

6) Sejam P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 as bolas pretas, B_1 e B_2 as bolas brancas e A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9 e A_{10} as bolas amarelas. O espaço amostral para o experimento é

$\Omega = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, B_1, B_2, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}\}$ tal que $\#\Omega = 18$.

a) ***A***: a bola extraída não é amarela. Então, $A = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, B_1, B_2\}$ tal que $\# A = 8$. Assim, temos que:

$$P(A) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

b) ***B***: a bola extraída é branca ou preta. Então, $B = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, B_1, B_2\}$ tal que $\# B = 8$. Assim, temos que:

$$P(B) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

c) ***C***: a bola extraída não é branca nem amarela. Então, $C=\{P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6\}$ tal que $\#C=6$. Assim, temos que:

$$P(C)=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$

7) Sejam dois dados, um verde e um vermelho, faremos a combinação dos dois lançamentos de dados pelo par ordenado (dado verde, dado vermelho).

$$\Omega=\left\{\begin{array}{l}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6).\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6).\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{array}\right\}$$

a) ***A***: números iguais.

$$P(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

b) ***B***: números diferentes.

$$P(B)=\frac{\#B}{\#\Omega}=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$$

c) ***C***: a soma dos números ser 7.

$$P(C)=\frac{\#C}{\#\Omega}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

d) ***D***: a soma dos números ser 12.

$$P(D)=\frac{\#D}{\#\Omega}=\frac{1}{36}$$

e) ***E***: a soma dos números ser menor ou igual a 12.

$$P(E)=\frac{\#E}{\#\Omega}=\frac{36}{36}=1$$

f) $\boldsymbol{F}$: aparecer número 3 em ao menos um dado.

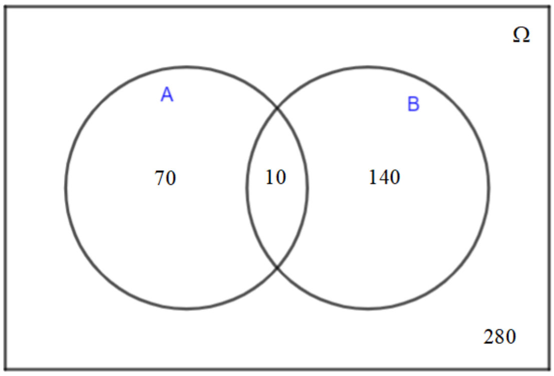
$$P(F) = \frac{\#F}{\#\Omega} = \frac{11}{36}$$

8) Sejam os eventos:

$\boldsymbol{A}$: o aluno estuda Engenharia.

$\boldsymbol{B}$: o aluno estuda Economia.

O diagrama abaixo permite responder facilmente às perguntas.



É fácil perceber que 280 alunos não estudam Engenharia nem Economia:

$$500 - 70 - 10 - 140 = 280$$

a) $\dfrac{10}{500} = \dfrac{1}{50}$

b) $\dfrac{70}{500} = \dfrac{7}{50}$

c) $\dfrac{140}{500} = \dfrac{7}{25}$

d) $\dfrac{280}{500} = \dfrac{14}{25}$

e) $\dfrac{220}{500} = \dfrac{11}{25}$

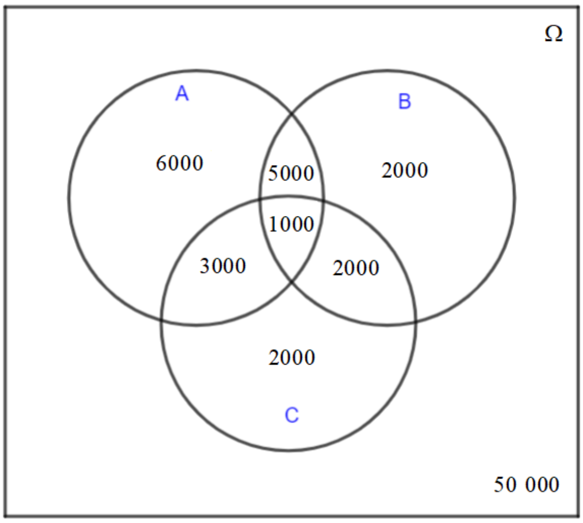
9) Sejam os eventos:

A: Leem o jornal A.

B: Leem o jornal B.

C: Leem o jornal C.

O diagrama abaixo permite responder facilmente às perguntas.



a) ***E***: leia pelo menos um jornal.

$$P(E)=\frac{\#E}{\#\Omega}=\frac{21\ 000}{50\ 000}=\frac{21}{50}$$

b) ***F***: leia só um jornal.

$$P(F)=\frac{\#F}{\#\Omega}=\frac{10\ 000}{50\ 000}=\frac{1}{5}$$

10) Seja Ω o conjunto dos números de 4 algarismos distintos formados com os dígitos $1,2,3,4,5$. Então:

$$\#\Omega = A_{5,4}=\frac{5!}{1!}=120$$

a) Seja B o evento, o número escolhido é par. Então:

$$\_\ \_\ \_\ \underline{2}\ A_{4,3}=24 \qquad \#B=24+24=48$$
$$\_\ \_\ \_\ \underline{4}\ A_{4,3}=24$$

Logo, $P(B)=\dfrac{48}{120}=\dfrac{2}{5}$.

b) Seja C o evento, o número é ímpar. Como $C=B^{c}$, decorre que:

$$P(C)=1-P(B)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

11) Consideremos o espaço amostral Ω constituído de todas as combinações das 10 pessoas, tomadas 3 a 3. Logo,

$$\#\Omega=\binom{10}{3}=120$$

O evento A que nos interessa é formado por todas as combinações de Ω, tais que em cada uma existem dois ou três homens. Isto é:

$$\#A=\binom{6}{2}.\binom{4}{1}+\binom{6}{3}=80$$

Logo, $P\left(A\right)=\dfrac{80}{120}=\dfrac{2}{3}$.

12) Seja o espaço amostral Ω constituído das combinações 52 cartas tomadas 3 a 3. Então:

$$\#\Omega=\binom{52}{3}=22100$$

O evento A que nos interessa é formado por todas as combinações de Ω, nas quais 3 cartas são do mesmo naipe. Logo,

$$\#A=4.\binom{13}{3}=1144$$

Portanto, $P\left(A\right)=\dfrac{1144}{22100}=\dfrac{22}{425}$.

Capítulo 26

1)

a) Lançando um dado e observando a face de cima, temos que:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Sejam os eventos:

A: número maior ou igual a 5.

B: número par.

$P(A|B)$ será a probabilidade de ocorrer número maior ou igual a 5 no novo espaço amostral reduzido.

$$B = \{2, 4, 6\}$$

Assim, cada probabilidade do evento B vale $\frac{1}{3}$, então a probabilidade de ocorrer o evento A no espaço amostral reduzido será $\{6\}$.

Portanto,

$$P(A|B) = \frac{1}{3}$$

b) Lançando um dado e observando a face de cima, temos que:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Sejam os eventos:

A: número par.

B: número maior ou igual a 5.

$P(A|B)$ será a probabilidade de ocorrer número par no novo espaço amostral reduzido.

$$B = \{5, 6\}$$

Assim, cada probabilidade do evento B vale $\frac{1}{2}$, então a probabilidade de ocorrer o evento A no espaço amostral reduzido será $\{6\}$.

Portanto,

$$P(A\,|\,B)=\frac{1}{2}$$

c) Lançando um dado e observando a face de cima, temos que:

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

Sejam os eventos:

A: número menor que 3.

B: número ímpar.

$P(A\,|\,B)$ será a probabilidade de ocorrer número menor que 3 no novo espaço amostral reduzido.

$$B=\{1,3,5\}$$

Assim, cada probabilidade do evento B vale $\frac{1}{3}$, então a probabilidade de ocorrer o evento A no espaço amostral reduzido será $\{1\}$.

Portanto,

$$P(A\,|\,B)=\frac{1}{3}$$

d) Lançando um dado e observando a face de cima, temos que:

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

Sejam os eventos:

A: número ímpar.

B: número menor que 3.

$P(A\,|\,B)$ será a probabilidade de ocorrer número ímpar no novo espaço amostral reduzido.

$$B=\{1,2\}$$

Assim, cada probabilidade do evento B vale $\frac{1}{2}$, então a probabilidade de ocorrer o evento A no espaço amostral reduzido será $\{1\}$.

Portanto,

$$P(A|B)=\frac{1}{2}$$

2)

a) Um número é sorteado ao acaso entre os 100 inteiros de 1 a 100, temos que:

$$\Omega=\{1,2,\ldots,100\}$$

Sejam A, um evento dos números pares, então temos que:

$$P(A)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$$

b) Um número é sorteado ao acaso entre os 100 inteiros de 1 a 100, temos que:

$$\Omega=\{1,2,\ldots,100\}$$

Sejam os eventos:

A: número par.

B: número menor que 50.

$P(A|B)$ será a probabilidade de ocorrer número par no novo espaço amostral reduzido.

$$B=\{1,2,\ldots,49\}$$

Assim, cada probabilidade do evento B vale $\frac{1}{49}$, então a probabilidade de ocorrer o evento A no espaço amostral reduzido será $\{2,4,6,\ldots,48\}$.

Portanto,

$$P(A|B)=\frac{24}{49}$$

c) Um número é sorteado ao acaso entre os 100 inteiros de 1 a 100, temos que:

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 100\}$$

Sejam os eventos:

A: número ser divisível por 5.

B: número par.

$P(A|B)$ será a probabilidade de ocorrer número ser divisível por 5 no novo espaço amostral reduzido.

$$\{2, 4, 6, \ldots, 100\}$$

Assim, cada probabilidade do evento B vale $\frac{1}{50}$, então a probabilidade de ocorrer o evento A no espaço amostral reduzido será $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$.

Portanto,

$$P(A|B) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

3) Sejam dois dados, d_1 e d_2, os lançaremos serão descritos como um par ordenado (d_1, d_2).

O espaço amostral destes lançamentos, podem ser descritos da seguinte forma:

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1) \\ (1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2) \\ (1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3) \\ (1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4) \\ (1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5) \\ (1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6) \end{matrix}\right\}$$

a) Sejam os eventos:

A: a soma dos dados ser 6.

B: a face observada em d_1 foi 2.

Temos os seguintes eventos:

$$A = \{(3,3),(4,2),(5,1),(2,4),(1,5)\}$$

$$B = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$$

$$A \cap B = \{(2,4)\}$$

Assim, temos as seguintes probabilidades:

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

Portanto,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6}$$

b) Sejam os eventos:

A: a face observada em d_1 foi 2.

B: a soma dos dados ser 6.

Temos os seguintes eventos:

$$A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$$

$$B = \{(3,3),(4,2),(5,1),(2,4),(1,5)\}$$

$$A \cap B = \{(2,4)\}$$

Assim, temos as seguintes probabilidades:

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$P(B)=\frac{5}{36}$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{36}$$

Portanto, $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}}=\dfrac{1}{5}$.

c) Sejam os eventos:

A: a soma dos dados menor do que 7.

B: ao menos um dado apareceu o resultado 2.

Temos os seguintes eventos:

$$A=\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),\\(3,2)(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\end{matrix}\right\}$$

$$B=\left\{\begin{matrix}(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\(1,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\end{matrix}\right\}$$

$$A\cap B=\{(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(4,2)\}$$

Assim, temos as seguintes probabilidades:

$$P(A)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

$$P(B)=\frac{11}{36}$$

$$P(A\cap B)=\frac{7}{36}$$

Portanto,

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{7}{36}}{\frac{11}{36}}=\frac{7}{11}$$

d) Sejam os eventos:

A: a soma dos dados ser menor ou igual a 6.

B: a soma dos dados ser menor ou igual a 4.

Temos os seguintes eventos:

$$A=\begin{Bmatrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),\\(3,2)(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\end{Bmatrix}$$

$$B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$$

$$A\cap B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$$

Assim, temos as seguintes probabilidades:

$$P(A)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

$$P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$P(A\cap B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

Portanto,

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}=1$$

e) Sejam os eventos:

A: a soma dos dados ser menor ou igual a 5.

B: a soma dos dados ser menor ou igual a 9.

Temos os seguintes eventos:

$$A=\{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$$

$$B=\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\(3,1),(3,2)(3,3),(3,4),(3,5)(3,6),\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5)(5,1),\\(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3)\end{matrix}\right\}$$

$$A\cap B=\{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$$

Assim, temos as seguintes probabilidades:

$$P(A)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

$$P(B)=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$$

$$P(A\cap B)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

Portanto,

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{6}}=\frac{4}{15}$$

4)

a) **Loiro:** $17+9=26$

$$P(L)=\frac{\#L}{\#\Omega}=\frac{26}{50}=\frac{13}{25}$$

b) **Moreno de olhos verdes:** 4

$$P(M/O_V)=\frac{\#M/O_V}{\#\Omega}=\frac{4}{50}=\frac{2}{25}$$

c) **Moreno ou ter olhos verdes:** 38

$$P(M\ ou\ O_V)=\frac{\#M\ ou\ O_V}{\#\Omega}=\frac{38}{50}=\frac{19}{25}$$

5) No todo 5 pessoas tomadas 3 a 3, então temos que:

$$\frac{5!}{3!2!}=\frac{5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}.2.1}=10 \text{ possíveis comissões}$$

Porém, temos dois eventos a serem analisados, são eles:

A: Comissão sem Denise

B: Comissão com César

No evento A, temos 4 pessoas tomadas 3 a 3, então:

$$\frac{4!}{3!1!}=\frac{4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}.1}=4 \text{ possíveis comissões}$$

No evento B, temos 4 pessoas tomadas 2 a 2, pois, o César já participa da comissão, então temos que:

$$\frac{4!}{2!2!}=\frac{4.3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}.2.1}=6 \text{ possíveis comissões}$$

Logo, a probabilidade da comissão com César é:

$$P(B)=\frac{6}{10}$$

No evento $A \cap B$, temos 3 pessoas tomadas 2 a 2, pois, o César já participa da comissão e não temos a Denise, então temos que:

$$\frac{3!}{2!1!} = \frac{3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}.1} = 3 \text{ possíveis comissões}$$

Logo, a probabilidade da interseção entre os eventos de não ter Denise na comissão e de ter César na comissão é:

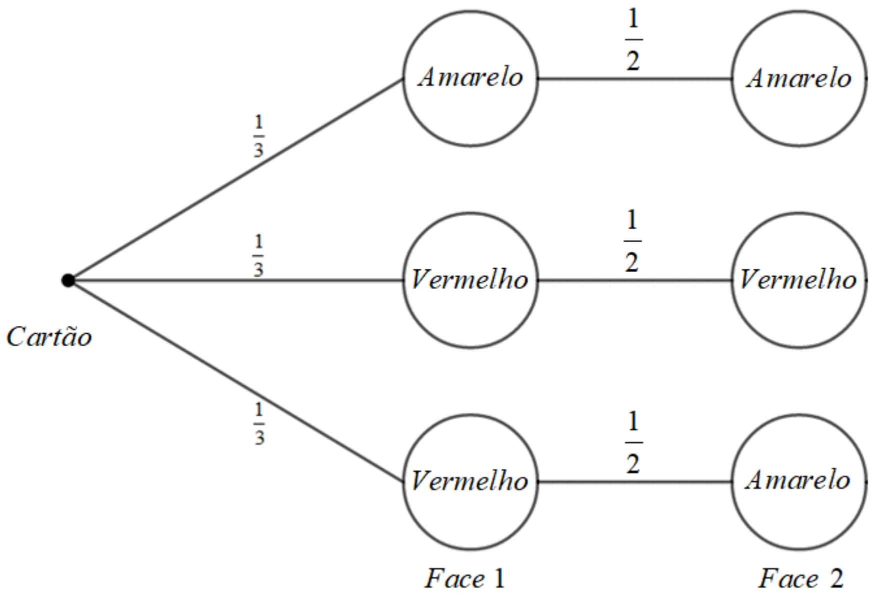
$$P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$

Calculando, a probabilidade condicional, temos que:

$$P\left(A|B\right) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{4}$$

Capítulo 27

1) Resolveremos através de um diagrama de árvore. Primeiramente, como o cartão é escolhido ao acaso e temos três, então a probabilidade é $\frac{1}{3}$ para cada cartão. No cartão I, II e III temos $\frac{1}{2}$ para cada cor, pois ou é vermelho ou amarelo.



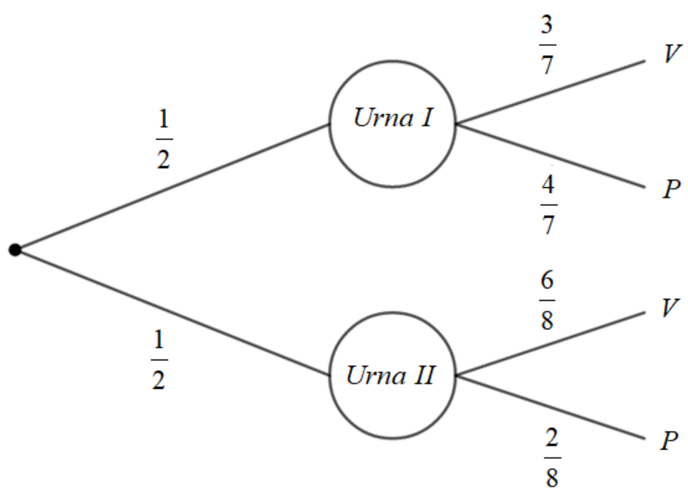
A probabilidade de a face que o juiz vê ser vermelha e de a outra face ser amarela, temos que:

$$P\left(V \cap A\right)=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

2)

a) Resolveremos através de um diagrama de árvore. Primeiramente, como a urna é escolhida ao acaso e temos duas, então a probabilidade é $\frac{1}{2}$ para cada urna, I e II.

Na urna I, temos $\frac{3}{7}$ para as bolas vermelhas e $\frac{4}{7}$ para as bolas pretas. Na Urna II, temos $\frac{6}{8}$ para as bolas vermelhas e $\frac{2}{8}$ para as bolas pretas.



Assim, temos que:

Sejam os eventos:

$$\begin{cases} U_I: \textit{escolher} \text{ Urna } I \\ U_{II}: \textit{escolher} \text{ Urna } II \\ V: \textit{escolher} \text{ bola vermelha} \\ B: \textit{escolher} \text{ bola branca} \end{cases}$$

Como precisamos obter Urna I e bola vermelha, temos que:

$$P(U_I \cap V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$$

b) $P(U_I \cap P) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

c) $P(U_{II} \cap V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{8} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

d) $P(U_{II} \cap P) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$

3)

a) $P(1^a V \cap 2^a B) = P(1^a V).P(2^a B) = \frac{8}{15}.\frac{3}{14} = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}$

b) $P(1^a B \cap 2^a V) = P(1^a B).P(2^a V) = \frac{3}{15}.\frac{8}{14} = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}$

c) $P(1^a V \cap 2^a V) = P(1^a V).P(2^a V) = \frac{8}{15}.\frac{7}{14} = \frac{56}{210} = \frac{4}{15}$

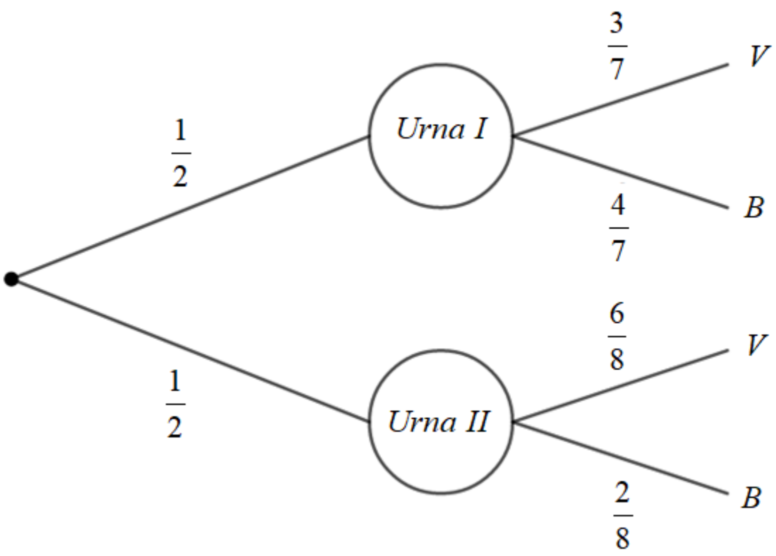
4) Dos 31 dias temos 5 dias que chove, portanto, 26 dias sem chover. Então a probabilidade que o primeiro dia não chova é de $\frac{26}{31}$. Não chovendo nesse dia, restará 30 dias do mês para que ocorra chuva em 5 dias, não ocorrendo em 25, então a probabilidade que não chova no segundo dia é de $\frac{25}{30}$. Então a probabilidade que não chova nem no primeiro nem no segundo dia é de

$$P = \frac{26}{31}.\frac{25}{30} = \frac{65}{93}$$

5) Pela Teorema da Probabilidade Total, temos que:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = 0,8 + 0,1 = 0,9$$

6) Fazendo o diagrama de árvore, temos que:



a) $P(U_I \cap V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$

b) $P(V) = \frac{1}{2}.\frac{3}{7} + \frac{1}{2}.\frac{6}{8} = \frac{33}{56}$

c) $P(U_I | V) = \frac{P(U_I \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{33}{56}} \frac{1}{2}.\frac{3}{7} + \frac{1}{2}.\frac{6}{8} = \frac{33}{56}$

Capítulo 28

1) Pelo teorema da probabilidade total, temos que:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

Logo, temos que:

$$P(B) = P(A).P(B) + P(A^c \cap B)$$
$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A).P(B)$$
$$P(A^c \cap B) = P(B).[1 - P(A)]$$
$$P(A^c \cap B) = P(B).P(A^c)$$

2)

a) $P(H) = \dfrac{4}{10} = 0,4$

b) $P(M) = \dfrac{6}{10} = 0,6$

c) Não, pois $P(H \cap M) = 0 \neq P(H)\ .\ P(M)$.

3)

a) A e B são independentes.

b) A e C são independentes.

c) B e C não são independentes.

4)

a) $P(A \cap B) = P(A)\ .\ P(B) = \dfrac{1}{3}\ .\ \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{5}$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{11}{15}$

c) $1-P(A\cup B)=1-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$

d) $P(A\cup B)-P(B)=\frac{11}{15}-\frac{3}{5}=\frac{11}{15}-\frac{9}{15}=\frac{2}{15}$

e) $P(A\cup B)-P(A)=\frac{11}{15}-\frac{1}{3}=\frac{11}{15}-\frac{5}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

5)

a) $P(H\cap M)=P(H)\ .\ P(M)=0,4\ .\ 0,5=0,2$

b) $P(H\cup M)=P(H)+P(M)-P(H\cap M)=0,4+0,5-0,2=0,7$

6) Assumindo que A, B e C são eventos independentes, temos:

a) $P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$

b) Queremos calcular $P(A\cup B\cup C)$. Assim, temos que:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

Logo,

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(A).P(B)-P(A).P(C)-P(B).P(C)+P(A\cap B\cap C)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

7)

a) Sejam os eventos:

$\boldsymbol{A_1}$**:** ocorre cara no 1º lançamento.

$\boldsymbol{A_2}$**:** ocorre cara no 2º lançamento.

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$\boldsymbol{A_{10}}$**:** ocorre cara no 10º lançamento.

Os resultados de cada lançamento não são afetados pelos outros, assim $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ são eventos independentes.

Logo, temos que:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_{10})$$

Como, $A_1 = A_2 = \dots = A_{10} = \dfrac{1}{2}$, temos que:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10}) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2}}_{10\ vezes} = \frac{1}{1024}$$

b) Sejam os eventos:

$\boldsymbol{A_1}$**:** ocorre coroa no 1º lançamento.

$\boldsymbol{A_2}$**:** ocorre coroa no 2º lançamento.

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$\boldsymbol{A_{10}}$**:** ocorre coroa no 10º lançamento.

Os resultados de cada lançamento não são afetados pelos outros, assim $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ são eventos independentes.

Logo, temos que:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_{10})$$

Como, $A_1 = A_2 = \dots = A_{10} = \dfrac{1}{2}$, temos que:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10}) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2}}_{10\ vezes} = \frac{1}{1024}$$

c) $$P = \binom{10}{4} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}_{4\ caras} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}_{6\ coroas} = 210 . \left(\frac{1}{16}\right) . \left(\frac{1}{64}\right) = \frac{105}{512}$$

Capítulo 29

1)

a) $P_0 = \binom{10}{0} . (0,4)^0 . (0,6)^{10} = 0,0060466176 \cong 0,006$

b) $P_4 = \binom{10}{4} . (0,4)^4 . (0,6)^6 = 210 \ . \ 0,0256 \ . \ 0,046656 = 0,250822656 \cong 0,251$

c) $P_6 = \binom{10}{6} . (0,4)^6 . (0,6)^4 = 210 \ . \ 0,004096 \ . \ 0,1296 = 0,111476736 \cong 0,111$

d) $P_8 = \binom{10}{8} . (0,4)^8 . (0,6)^2 = 45 \ . \ 0,00065536 \ . \ 0,36 = 0,010616832 \cong 0,011$

2) Temos: $n = 6,\ p = \frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2}$

Estamos interessados em calcular: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6$.

Como:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1 - P_0$$

Logo, basta calcularmos P_0.

Temos:

$$P_0 = \binom{6}{0} . \left(\frac{1}{2}\right)^0 . \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

Logo, a probabilidade desejada é:

$$1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

3) Temos: $n=9,\ p=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}$

Estamos interessados em calcular: $P_0+P_1+P_2+P_3$. Então:

$$P_0=\binom{9}{0}.\left(\frac{1}{2}\right)^0.\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{512}$$

$$P_1=\binom{9}{1}.\left(\frac{1}{2}\right)^1.\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{9}{512}$$

$$P_2=\binom{9}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{36}{512}$$

$$P_3=\binom{9}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^3.\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{84}{512}$$

Logo,

$$P_0+P_1+P_2+P_3=\frac{1}{512}+\frac{9}{512}+\frac{36}{512}+\frac{84}{512}=\frac{130}{512}=0,254$$

1) Para o primeiro dígito temos o número 2, ou seja, uma única possibilidade.

1	.	.	.	.	.	.	.
1º dígito	2º dígito	3º dígito	4º dígito	5º dígito	6º dígito	7º dígito	8º dígito

Para o segundo e terceiro dígito não podemos usar o zero, logo temos 9 possibilidades.

1	. 9	. 9	.	.	.	.	.
1º dígito	2º dígito	3º dígito	4º dígito	5º dígito	6º dígito	7º dígito	8º dígito

Para o quarto, quinto, sexto, sétimo e oitavo dígito temos 10 possibilidades cada.

1	. 9	. 9	. 10	. 10	. 10	. 10	. 10
1º dígito	2º dígito	3º dígito	4º dígito	5º dígito	6º dígito	7º dígito	8º dígito

Assim, temos que:

1	. 9	. 9	. 10	. 10	. 10	. 10	. 10	= 8 100 000
1º dígito	2º dígito	3º dígito	4º dígito	5º dígito	6º dígito	7º dígito	8º dígito	

Portanto, temos 8 100 000 números diferentes de telefones.

2) Pela permutação com repetição, temos que:

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3!.2!} = \frac{6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}.2.1} = 60$$

3) Cada maneira de pintar a bandeira consiste em uma sequência de cinco cores distintas (sequências porque as listras da bandeira estão numa ordem) escolhidas entre as oito existentes. Logo, o número de sequências procurado é:

$$A_{8,5} = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8.7.6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 6\ 720$$

4)

a) Para que nenhum seja matemático, então tiramos os Matemáticos. Assim, temos 15 pessoas para 10 vagas.

$$C_{15,10}=\frac{15!}{(15-10)!.10!}=\frac{15.14.13.12.11.\cancel{10!}}{5!.\cancel{10!}}=\frac{360\ 360}{120}=3\ 003$$

b) Para que todos os Matemáticos participem da comissão, então temos 5 vagas preenchidas na comissão. Assim, temos 15 pessoas para 5 vagas restantes.

$$C_{15,5}=\frac{15!}{(15-5)!.5!}=\frac{15.14.13.12.11.\cancel{10!}}{\cancel{10!}.5!}=\frac{360\ 360}{120}=3\ 003$$

c) Na primeira vaga temos um Matemático, para esta vaga temos 5 opções. Para as outras vagas temos 15 pessoas (pois tiramos os Matemáticos, pois há exatamente um Matemático na comissão) para as 9 vagas faltantes. Assim, temos que:

$$5.C_{15,9}=5\ .\ \frac{15!}{(15-9)!.9!}=\cancel{5}\ .\ \frac{15.14.13.12.11.10.\cancel{9!}}{6.\cancel{5}.4.3.2.1.\cancel{9!}}=\frac{3\ 603\ 600}{144}=25\ 025$$

d) Para que pelo menos um membro seja matemático, devemos calcular todas as possibilidades com todo mundo, ou seja, uma combinação de 20 tomados 10 a 10 **menos** a quantidade da comissão sem nenhum Matemático, isto é, uma combinação de 15 tomados 10 a 10.

$$C_{20,10}-C_{15,10}=\frac{20!}{(20-10)!.10!}-\frac{15!}{(15-10)!.10!}$$

$$=\frac{20.19.\cancel{18}.17.16.\cancel{15}.14.13.12.11.\cancel{10!}}{10.\cancel{9}.8.7.6.\cancel{5}.4.\cancel{3}.\cancel{2}.1.\cancel{10!}}-\frac{15.14.13.12.11.\cancel{10!}}{5!.\cancel{10!}}$$

$$=\frac{2.483.120.640}{13.440}-\frac{360\ 360}{120}$$

$$=184.756-3\ 003$$

$$=181.753$$

5)

a)

$$(x+25)^8 = \sum_{i=0}^{8}\binom{8}{i}\cdot x^{8-i}\cdot 25^i$$

b)

$$(x-4)^{15} = \sum_{i=0}^{15}\binom{15}{i}\cdot x^{15-i}\cdot(-4)^i$$

c)

$$(x+25)^{100} = \sum_{i=0}^{100}\binom{100}{i}\cdot x^{100-i}\cdot 25^i$$

d)

$$(x-2y)^{10} = \sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}\cdot x^{10-i}\cdot(-2y)^i$$

e)

$$(3x+2)^5 = \sum_{i=0}^{5}\binom{5}{i}\cdot 3x^{5-i}\cdot 2^i$$

f)

$$(2x-5)^6 = \sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}\cdot 2x^{6-i}\cdot(-5)^i$$

6) Pela Observação 5, temos que:

$$\left(m+\frac{1}{m}\right)^5 - \left(m-\frac{1}{m}\right)^5 = \left(m+\frac{1}{m}\right)^5 + \left(-m+\frac{1}{m}\right)^5$$

Desenvolvendo a primeira parcela pelo Teorema Binomial, temos que:

$$\left(m+\frac{1}{m}\right)^5 = \binom{5}{0}\cdot m^5 + \binom{5}{1}\cdot m^{5-1}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^1 + \binom{5}{2}\cdot m^{5-2}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \binom{5}{3}\cdot m^{5-3}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^3 + \binom{5}{4}\cdot m^{5-4}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^4 + \binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^5$$

$$= \binom{5}{0}\cdot m^5 + \binom{5}{1}\cdot m^4\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^1 + \binom{5}{2}\cdot m^3\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \binom{5}{3}\cdot m^2\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^3 + \binom{5}{4}\cdot m\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^4 + \binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^5$$

Desenvolvendo a segunda parcela pelo teorema binomial, temos que:

$$\left(-m+\frac{1}{m}\right)^5 = \binom{5}{0}\cdot(-m)^5 + \binom{5}{1}\cdot(-m)^{5-1}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^1 + \binom{5}{2}\cdot(-m)^{5-2}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \binom{5}{3}\cdot(-m)^{5-3}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^3 + \binom{5}{4}\cdot(-m)^{5-4}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^4 + \binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^5$$

$$= -\binom{5}{0}\cdot m^5 + \binom{5}{1}\cdot m^4\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^1 - \binom{5}{2}\cdot m^3\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \binom{5}{3}\cdot m^2\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^3 - \binom{5}{4}\cdot m\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^4 + \binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^5$$

Somando as duas parcelas, temos que:

$$\left(m+\frac{1}{m}\right)^5 + \left(-m+\frac{1}{m}\right)^5 = \cancel{\binom{5}{0}\cdot m^5} + \binom{5}{1}\cdot m^4\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^1 + \cancel{\binom{5}{2}\cdot m^3\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^2} + \binom{5}{3}\cdot m^2\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^3$$
$$+ \cancel{\binom{5}{4}\cdot m\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^4} + \binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^5 - \cancel{\binom{5}{0}\cdot m^5} + \binom{5}{1}\cdot m^4\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^1$$
$$- \cancel{\binom{5}{2}\cdot m^3\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^2} + \binom{5}{3}\cdot m^2\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^3 - \cancel{\binom{5}{4}\cdot m\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^4} + \binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^5$$

$$= 5m^3 + \frac{10}{m} + \frac{1}{m^5} + 5m^3 + \frac{10}{m} + \frac{1}{m^5}$$

$$= 10m^3 + \frac{20}{m} + \frac{2}{m^5}$$

7) Para calcular p na equação devemos analisar o caso $(p-3)=10+(p+3)$:

$$\binom{10}{p-3}=\binom{10}{p+3} \Rightarrow p\cancel{-3}+p\cancel{+3}=10 \Rightarrow 2p=10 \Rightarrow p=5$$

8) O espaço amostral é $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Pelo enunciado, temos que: $p_2=3p_1$, $p_3=p$, $p_4=3p_1$, $p_5=p_1$ e $p_6=3p_1$.

Logo,

$$p_1+3p_1+p_1+3p_1+p_1+3p_1=1$$

$$12p_1=1$$

$$p_1=\frac{1}{12}$$

a) O evento que nos interessa é $A=\{2,3,5\}$.

$$P(A)=p_2+p_3+p_5=3.\frac{1}{12}+1.\frac{1}{12}+1.\frac{1}{12}=\frac{3}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

b) O evento que nos interessa é $B=\{3,6\}$.

$$P(B)=p_3+p_6=1.\frac{1}{12}+3.\frac{1}{12}=\frac{1}{12}+\frac{3}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

c) O evento que nos interessa é $C=\{1,2,3\}$.

$$P(C)=p_1+p_2+p_3=1.\frac{1}{12}+3.\frac{1}{12}+1.\frac{1}{12}=\frac{1}{12}+\frac{3}{12}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

9) Sejam P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 as bolas pretas, B_1 e B_2 as bolas brancas e A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9 e A_{10} as bolas amarelas. O espaço amostral para o experimento é

$\Omega=\{P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,B_1,B_2,A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9,A_{10}\}$ tal que $\#\Omega=18$.

a) $\boldsymbol{A}$: a bola extraída não é amarela. Então, $A=\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, B_1, B_2\}$ tal que $\# A = 8$. Assim, temos que:

$$P(A)=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$$

b) $\boldsymbol{B}$: a bola extraída é branca ou preta. Então, $B=\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, B_1, B_2\}$ tal que $\# B = 8$. Assim, temos que:

$$P(B)=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$$

c) $\boldsymbol{C}$: a bola extraída não é branca nem amarela. Então, $C=\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ tal que $\# C = 6$. Assim, temos que:

$$P(C)=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$

10) Sejam dois dados, d_1 e d_2, os lançaremos serão descritos como um par ordenado (d_1, d_2).

O espaço amostral destes lançamentos, podem ser descritos da seguinte forma:

$$\Omega=\left\{\begin{matrix}(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\\(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\\(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3)\\(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4)\\(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5)\\(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\end{matrix}\right\}$$

a) Sejam os eventos:

A: a soma dos dados ser 6.

B: a face observada em d_1 foi 2.

Temos os seguintes eventos:

$$A = \{(3,3),(4,2),(5,1),(2,4),(1,5)\}$$

$$B = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$$

$$A \cap B = \{(2,4)\}$$

Assim, temos as seguintes probabilidades:

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

Portanto,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6}$$

b) Sejam os eventos:

A: a face observada em d_1 foi 2.

B: a soma dos dados ser 6.

Temos os seguintes eventos:

$$A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$$

$$B = \{(3,3),(4,2),(5,1),(2,4),(1,5)\}$$

$$A \cap B = \{(2,4)\}$$

Assim, temos as seguintes probabilidades:

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$P(B)=\frac{5}{36}$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{36}$$

Portanto, $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}}=\dfrac{1}{5}$.

c) Sejam os eventos:

A: a soma dos dados menor do que 7.

B: ao menos um dado apareceu o resultado 2.

Temos os seguintes eventos:

$$A=\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),\\(3,2)(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\end{matrix}\right\}$$

$$B=\left\{\begin{matrix}(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\(1,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\end{matrix}\right\}$$

$$A\cap B=\{(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(4,2)\}$$

Assim, temos as seguintes probabilidades:

$$P(A)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

$$P(B)=\frac{11}{36}$$

$$P(A\cap B)=\frac{7}{36}$$

Portanto,

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{7}{36}}{\frac{11}{36}}=\frac{7}{11}$$

d) Sejam os eventos:

A: a soma dos dados ser menor ou igual a 6.

B: a soma dos dados ser menor ou igual a 4.

Temos os seguintes eventos:

$$A=\begin{Bmatrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),\\ (3,2)(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\end{Bmatrix}$$

$$B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$$

$$A\cap B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$$

Assim, temos as seguintes probabilidades:

$$P(A)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

$$P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$P(A\cap B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

Portanto,

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}=1$$

e) Sejam os eventos:

A: a soma dos dados ser menor ou igual a 5.

B: a soma dos dados ser menor ou igual a 9.

Temos os seguintes eventos:

$$A=\{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$$

$$B=\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\(3,1),(3,2)(3,3),(3,4),(3,5)(3,6),\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5)(5,1),\\(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3)\end{matrix}\right\}$$

$$A\cap B=\{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$$

Assim, temos as seguintes probabilidades:

$$P(A)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

$$P(B)=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$$

$$P(A\cap B)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

Portanto,

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{6}}=\frac{4}{15}$$

11) Pela Teorema da Probabilidade Total, temos que:

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^c)=0,8+0,1=0,9$$

12) Assumindo que A, B e C são eventos independentes, temos:

a) $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

b) Queremos calcular $P(A \cup B \cup C)$. Assim, temos que:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Logo,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A).P(B) - P(A).P(C) - P(B).P(C) + P(A \cap B \cap C)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

13) Temos: $n = 9,\ p = \frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2}$

Estamos interessados em calcular: $P_0 + P_1 + P_2 + P_3$. Então:

$$P_0 = \binom{9}{0}.\left(\frac{1}{2}\right)^0.\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}$$

$$P_1 = \binom{9}{1}.\left(\frac{1}{2}\right)^1.\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{9}{512}$$

$$P_2 = \binom{9}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{36}{512}$$

$$P_3 = \binom{9}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^3.\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{84}{512}$$

Logo,

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{512} + \frac{9}{512} + \frac{36}{512} + \frac{84}{512} = \frac{130}{512} = 0,254$$