

Gabarito de Matemática

Etapas 9, Volume 1

Lição 1 – Conceitos iniciais

1.

a) 15

b) -7 e 15

c) -7

d) $-\frac{1}{2}, -3,8, 0,333, \sqrt{21}$

2. Para que este número possa ser escrito na forma de fração, devemos buscar a fração geratriz que gera essa dízima. A fração geratriz é $\frac{128}{33}$.

Lição 2 – Número Pi

1.

a) 62,8 cm

b) 28,26 cm

c) 56,52 cm

d) 2,826 cm

2.

a) 188,4 cm

b) 753.600 cm = 7.536 m

3. Foram dadas 25 voltas.

4. 28 m

Lição 3 – Os números reais

1. 3

2. 100

3. $\sqrt{13}$

4.

a) Verdadeira

b) Verdadeira

c) Falsa

d) Falsa

Lição 4 – Introdução de Potência e Raiz

2. Se considerarmos que $l \cdot l = l^2$, iremos nos lembrar de que “toda raiz ao quadrado resulta no próprio radicando”, e chegamos à conclusão:

$$A = l \cdot l$$

$$2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{Logo } l = \sqrt{2}.$$

Sem as raízes, não seria possível calcular o lado de nenhum quadrado cuja área não fosse um quadrado perfeito (Quadrado perfeito é todo número que possui raiz quadrada exata).

Lição 5 – Propriedades de Potência

1. 1ª Propriedade: multiplicação com potências de mesma base $\square 5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5 = 3.125$

2ª Propriedade: divisão com potências de mesma base $\square \frac{5^{15}}{5^4} = 5^{15-4} = 5^{11}$

3ª Propriedade: multiplicação de potências de mesmo expoente $\square 5^{-3} \cdot 2^{-3} = (5 \cdot 2)^{-3} = 10^{-3}$

4ª Propriedade: divisão de potências de mesmo expoente $\square \frac{5_{71}}{3_{71}} = \left(\frac{5}{3} \right)_{71}$

2.

a) 125

b) – 243

- c) 36
- d) 0,001
- e) 2,25
- f) 1
- g) 0,81
- h) $\frac{1}{16}$
- i) $-\frac{8}{27}$

3. $\overline{7}_{20}$

4. $-\frac{11}{8}$

5. $a^8b^8c^7$

6.

- a) 3^4
- b) 6
- c) $(-10)^2$
- d) $(-0,1)^1 = (-0,1)$

Lição 6 – Propriedades de Potência

1. 5ª Propriedade: potência elevada a um expoente $\square (2^3)^{20} = 2^{3 \cdot 20} = 2^{60}$

6ª Propriedade: elevado a 0 $\square -4^0 = 1$

7ª Propriedade: elevado a 1 $\square -4^1 = -4$

$$(-1)^2 = 1$$

$\square$

8ª Propriedade: potência de expoente

|

—

negativo $\square 25^{-2} = |$

=

25^2

2. $x = 2$

3.

a) -1

b) 3

4.

a) 10^5

b) a^6

5.

a) V

b) F ; **Correção:** $(7^3)^2 = 7^{3 \cdot 2} = 7^6$

c) F ; **Correção:** $2^{3^2} = 2^9$

d) F ; **Correção:** $(5 + 2)^2 = (7)^2$

e) V

6. Entre os pontos A e B.

Lição 7 – Notação Científica

1.

a) $4,83 \cdot 10^6$

b) $9,062 \cdot 10^6$

c) $2,4 \cdot 10^{-3}$

2.

a) $1,234567 \cdot 10^9$

b) $9 \cdot 10^{-12}$

c) $1,240 \cdot 10^{-7}$ ou $1,24 \cdot 10^{-7}$

d) $1,00458 \cdot 10^3$

e) $4,56 \cdot 10^{15}$

f) $8,904 \cdot 10^{-1}$

Lição 8 – Raiz enésima

1.

a) 3,65

b) 0,83

2.

a) 2,828

b) 1,118

c) -1,71

d) 3,161704

Lição 9 – Relação de Potência e Raiz

1.

a) 7

b) 64

c) 3

d) $\frac{1}{3}$

2.

a) $2^{\frac{4}{3}}$

b) $7^{\frac{1}{2}}$

Lição 10 – Propriedades do radical

1.

a) -18

b) 24

c) $\frac{2}{5}$

2.

a) -1

b) $\frac{1}{5}$

c) $-\frac{2}{3}$

d) 4

e) $\frac{1}{10}$

f) 2

g) $-\frac{1}{2}$

h) 0

i) 2

3.

a) 9

b) 9

c) 10

d) 1

e) $16x -$

f) $-2\sqrt{5}$

Lição 11 - Cálculo das raízes: fatoração

1.

a) $729 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$

$$\sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3^{\frac{6}{2}} = 3^3 = 27$$

b) $343 = 7 \times 7 \times 7 = 7^3$

$$\sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7$$

c) $1024 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10}$

$$\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2 = 4$$

d) $1089 = 3 \times 3 \times 11 \times 11 = 3^2 \cdot 11^2$

$$\sqrt{1089} = \sqrt{3^2 \cdot 11^2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{11^2} = 3 \cdot 11 = 33$$

Lição 12 - Simplificando Radicais

1.

a) $9\sqrt{3}$

b) $4\sqrt{2}$

$$c) 11\sqrt{2}$$

$$d) -3\sqrt{5}$$

$$e) -18$$

$$f) 24$$

$$g) \frac{7}{5}$$

$$h) \sqrt{30}$$

$$i) \sqrt{10}$$

$$j) 3$$

$$k) \sqrt{3}$$

$$l) \sqrt[6]{10}$$

Lição 13 – Introduzindo fator externo do radical

1.

$$a) 8\sqrt{3} = \frac{\sqrt{8^2}}{\square 3} = \frac{\sqrt{64}}{3} = \frac{\sqrt{64 \square 3}}{3} = \frac{\sqrt{192}}{3}$$

$$b) 3\sqrt{5} = \frac{\sqrt{3^2}}{\square 5} = \frac{\sqrt{9}}{5} = \frac{\sqrt{9 \square 5}}{5} = \frac{\sqrt{45}}{5}$$

$$c) 10\sqrt{7} = \frac{\sqrt{10^2}}{\square 7} = \frac{\sqrt{100}}{7} = \frac{\sqrt{100 \square 7}}{7} = \frac{\sqrt{700}}{7}$$

$$d) 15\sqrt{2} = \frac{\sqrt{15^2}}{\square 2} = \frac{\sqrt{225}}{2} = \frac{\sqrt{225 \square 2}}{2} = \frac{\sqrt{450}}{2}$$

$$e) 2\sqrt[3]{2} = \frac{\sqrt[3]{2^3}}{\square 2} = \frac{\sqrt[3]{8}}{2} = \frac{\sqrt[3]{8 \square 2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{16}}{2}$$

$$f) 3\sqrt[4]{10} = \frac{\sqrt[4]{3^4}}{\square 10} = \frac{\sqrt[4]{81}}{10} = \frac{\sqrt[4]{81 \square 10}}{10} = \frac{\sqrt[4]{7290}}{10}$$

2.

$$a) 4\sqrt{a} = \frac{\sqrt{4^2}}{a} = \frac{\sqrt{16}}{a} = \frac{\sqrt{16a}}{a}$$

$$b) 3a\sqrt{b} = \frac{\sqrt{3^2}}{a^2b} = \frac{\sqrt{9}}{a^2b} = \frac{\sqrt{9a^2b}}{a^2b}$$

$$c) 2a\sqrt{a} = \frac{\sqrt{2^2}}{a^2a} = \frac{\sqrt{4}}{a^3} = \frac{\sqrt{4a^3}}{a^3}$$

$$d) 5ab\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{5^2 a^2 b^2}{a^2 b^2} ab} = \sqrt{25a^3b^3}$$

$$e) a\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a^3 ab} = \sqrt[3]{a^4 b}$$

$$f) b\sqrt[5]{2b} = \frac{\sqrt[5]{b^5}}{2b} = \sqrt[5]{2b^6}$$

$$g) 2\sqrt[3]{2} = \frac{\sqrt[3]{2^3}}{2} = \sqrt[3]{2^4}$$

3.

a) $\sqrt[18]{y^5}$

b) $\sqrt[10]{x^3 \cdot y^7}$

Lição 14 – Adição algébrica de radicais

1. $8\sqrt{2}$

2. $4x^3\sqrt{xy}$

3. Perímetro = soma de todos os lados.

$$\text{Perímetro} = \sqrt{40} + \sqrt{250} + \sqrt{40} + \sqrt{250}$$

$$\text{Perímetro} = 14\sqrt{10}$$

Lição 15 – Multiplicação com radicais

1.

a) $6\sqrt{10}$

b) $\sqrt[11]{15x^2}$

c) $\sqrt[5]{625}$

d) $6\sqrt{10}$

e) $\sqrt[5]{1716}$

2.

a) $2\sqrt{3} - \sqrt{6}$

b) $7 + \sqrt{14}$

c) $6\sqrt{5} - 14\sqrt{10}$

d) $5\sqrt{5}$

e) $2\sqrt{3} - \sqrt{6}$

f) $6 + 8\sqrt{6} - \sqrt{15} - 4\sqrt{10}$

g) 3

3. Perímetro = soma de todos os lados

$$\text{Perímetro} = (6 - \sqrt{5}) + (\sqrt{5} + \sqrt{5}) + (6 - 5) + (5 + 5)$$

$$\text{Perímetro} = 22$$

$$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura}$$

$$\text{Área} = (5 + \sqrt{5}) \cdot (6 - 5)$$

$$\text{Área} = 25 + \sqrt{5}$$

4. $3\sqrt{10}$

Lição 16 – Divisão com radicais

1.

$$\text{a) } \sqrt{200} \div \sqrt{5} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{12} \div \sqrt{4} = \frac{\sqrt[3]{12}}{2}$$

$$\text{c) } \sqrt{168} \div \sqrt{2} = 2\sqrt{21}$$

$$\text{d) } \sqrt[3]{125} \div \sqrt{5} = \sqrt[3]{25}$$

$$\text{e) } \sqrt{240} \div \sqrt{8} = \sqrt{30}$$

$$\text{f) } \sqrt[11]{x^7} \div \sqrt[11]{x^4} = \sqrt[11]{x^3}$$

2.

$$\text{a) } \sqrt{15}$$

$$\text{b) } 3\sqrt{3}$$

$$c) \sqrt[3]{\sqrt{6}}$$

$$d) y^3 \sqrt[5]{y^4}$$

3.

$$a) 12\sqrt{2} + 7\sqrt{5}$$

$$b) \frac{1}{2}$$

$$c) \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$d) \frac{7}{3}$$

$$e) \frac{1}{5}$$

$$4. \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}$$

Gabarito de Matemática

Etapa 9, Volume 2

Lição 17 – Potenciação de radicais

1.

a) 50

$$\sqrt[2]{50^2} = 50^2 = 50^1 = 50$$

b) $2 \cdot \sqrt[3]{2}$

$$= 2^1 \cdot 2^1 = 2 \cdot 2$$

$$\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^{3+1}} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^1}$$

$$\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^1} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^1}$$

c) 245

$$\left(\sqrt[2]{75}\right)^2 = 7^2 \cdot \left(\sqrt[2]{5}\right)^2 = 49 \cdot 5^2 = 49 \cdot 5^1 = 49 \cdot 5 = 245$$

$$\sqrt[3]{3^6} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3^6} \cdot \sqrt[3]{3^2}$$

d) $9 \cdot \sqrt{3}$

$$= 3^2 \cdot 3^1 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 3$$

$$\left(\sqrt[4]{3}\right)^9 = \sqrt[4]{3^9} = \sqrt[4]{3^{8+1}} = \sqrt[4]{3^8} \cdot \sqrt[4]{3^1}$$

e) $\frac{20}{9}$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^2 = \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} = \frac{1}{9 \cdot 9} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}$$

$$\left|-\frac{\sqrt{20}}{9}\right| = \left|-\frac{1}{9} \cdot \sqrt{20}\right| = \frac{1}{9} \cdot \sqrt{20} = \frac{1}{9} \cdot \sqrt{2^2 \cdot 5} = \frac{1}{9} \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = \frac{2}{9} \cdot \sqrt{5}$$

$$(3 \quad) \quad (3 \quad)$$

$$3^2 \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad 9$$

2. 27.000

Resolução:

Se são conhecidos os valores para x e y, basta substituir esses valores na expressão x^2y^2 :

$$x^2 \cdot y^2 = \left(3\sqrt{10}\right)^2 \left(\sqrt{10}3\right)^2 =$$

$$\left[3^2 \cdot \left(\sqrt{10}\right)^2\right] \cdot \left[10^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2\right] =$$

$$\left[\quad \right] \left[\quad \right] \left[\quad \right]$$

$$\left[\cdot \right] \left[\right]$$

$$\left| 9 \cdot 10^2 \right| \cdot \left| 100 \cdot 3^2 \right| =$$

$$\left| \quad \right| \left| \quad \right| \left| \quad \right|$$

$$\left[9 \cdot 10^1 \right] \cdot \left[100 \cdot 3^1 \right] = \left[9 \cdot 10 \right] \cdot \left[100 \cdot 3 \right] =$$

$$\left[90 \right] \cdot \left[300 \right] = 27000$$

3. **ERRO NO ENUNCIADO.** A propriedade distributiva só será usada na letra e). Nas letras a), b), c) e d) devemos usar o produto notável do quadrado de uma soma/subtração.

a) $5 + 2\sqrt{6}$

Resolução:

Aplice o produto notável do quadrado da soma: $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$$\left(\sqrt{3} + \sqrt{2} \right)^2 = \left(\sqrt{3} \right)^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \left(\sqrt{2} \right)^2$$

$$3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2 =$$

$$3 + 2 \cdot \sqrt{30} + 2 =$$

$$3 + 2 \cdot \sqrt{6} + 2 =$$

$$3 + 2 + 2 \cdot \sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6}$$

b) $9 - 4\sqrt{5}$

Resolução:

Aplice o produto notável do quadrado da subtração: $(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$$\left(2 - \sqrt{5} \right)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + \left(\sqrt{5} \right)^2 =$$

$$4 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + 5 =$$

$$4 - 4 \cdot \sqrt{5} + 5 =$$

$$4 + 5 - 4 \cdot \sqrt{5} = 9 - 4\sqrt{5}$$

c) $35 + 8\sqrt{6}$

Resolução:

Aplique o produto notável do quadrado da soma: $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$$\left(4\sqrt{2} + 3\right)^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 + 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 3 + \left(3\right)^2 =$$

$$16 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 3 =$$

$$4^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 + 8 \cdot 2 \cdot 3 + \left(3\right)^2 =$$

$$16 \cdot 2 + 8 \cdot 6 + 3 =$$

$$16 \cdot 2 + 8 \cdot 6 + 3 = 32 + 48 + 3 = 83$$

$$32 + 8 \cdot \sqrt{6} + 3 =$$

$$32 + 3 + 8 \cdot \sqrt{6} = 35 + 8\sqrt{6}$$

d) $16 + 6\sqrt{7}$

Resolução:

Aplique o produto notável do quadrado da soma: $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$$\left(3 + \sqrt{7}\right)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7} + \left(\sqrt{7}\right)^2 =$$

$$9 + 6 \cdot \sqrt{7} + 7 =$$

$$9 + 7 + 6 \cdot \sqrt{7} = 16 + 6\sqrt{7}$$

e) -4

Resolução:

Aplique a distributiva.

$$\left(\sqrt{13} + \sqrt{17}\right) \cdot \left(\sqrt{13} - \sqrt{17}\right) =$$

$$\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} + \sqrt{13} \cdot (-\sqrt{17}) + \sqrt{17} \cdot \sqrt{13} + \sqrt{17} \cdot (-\sqrt{17}) =$$

$$\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} - \sqrt{13} \cdot \sqrt{17} + \sqrt{17} \cdot \sqrt{13} - \sqrt{17} \cdot \sqrt{17} =$$

$$\left(\sqrt{13}\right)^2 - \left(\sqrt{17}\right)^2 =$$

$$13 - \sqrt{13 \cdot 17} + \sqrt{17 \cdot 13} - 17 =$$

$$13 - \sqrt{221} + \sqrt{221} - 17 =$$

□ Note que $-\sqrt{221} + \sqrt{221} = 0$

$$13 + 0 - 17 = -4$$

Lição 18 – Potenciação de radicais

1.

a) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

b) $\sqrt{7}$

c) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

e) $\sqrt{5}$

f) $\frac{\sqrt{11}}{11}$

g) $\frac{\sqrt{21}}{3}$

h) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

i) $-\sqrt{2}$

j) $5 - 2\sqrt{6}$

k) $\sqrt[3]{-2}$

l) $3\sqrt[3]{27}$

Lição 19 – Calculadora científica

1.

a) 8

b) 36

c) 28

d) 4

e) 2

f) 2

g) 8

Lição 20 – Quadrado da soma de dois termos

1.

a) $x^2 + 2x + 1$

b) $x^2 + 12x + 36$

c) $a^2 + 20a + 100$

d) $y^2 + 8y + 16$

e) $9x^2 + 6x + 1$

f) $4a^2 + 20a + 25$

g) $a^2 + 4ab + ab^2$

h) $x^4 + 8x^2 + 16$

i) $a^4 + 2a^2 + 1$

j) $25a^2 + 30ab + 9b^2$

2.

a) $\frac{9x^2 + 6x + 1}{x^2 + 4x + 4}$

b) $\frac{a^2}{4a^2 + 8a + 4}$

c) $\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2}$

3.

a) Errado.

Correção: $(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$

b) Certo.

c) Errado.

Correção: $p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2$

d) Errado.

Correção: $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

e) Certo.

4. 26

Resolução:

Desenvolva o quadrado $(x+y)^2$:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Reorganize a soma:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

Sabemos o valor de $x^2 + y^2$ e de xy . Substitua-os:

$$\square x^2 + y^2 = 20$$

$$\square xy = 3$$

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$(x + y)^2 = 20 + 2xy$$

$$(x + y)^2 = 20 + 2 \cdot xy$$

$$(x + y)^2 = 20 + 2 \cdot 3$$

$$(x + y)^2 = 20 + 6 = 26$$

5. 225

Resolução:

Desenvolva o quadrado $(x+y)^2$:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Reorganize a soma:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

Sabemos o valor de $x^2 + y^2$ e de xy . Substitua-os:

$$\square x^2 + y^2 = 153$$

$$\square xy = 36$$

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$(x + y)^2 = 153 + 2xy$$

$$(x + y)^2 = 153 + 2 \cdot xy$$

$$(x + y)^2 = 153 + 2 \cdot 36$$

$$(x + y)^2 = 153 + 72 = 225$$

6.

a) 169

$$13^2 = (10 + 3)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 3 + 3^2 = 100 + 20 \cdot 3 + 9 = 100 + 60 + 9 = 169$$

b) 361

$$19^2 = (10 + 9)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 9 + 9^2 = 100 + 20 \cdot 9 + 81 = 100 + 180 + 81 = 361$$

c) 529

$$23^2 = (20 + 3)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2 = 400 + 40 \cdot 3 + 9 = 400 + 120 + 9 = 529$$

d) 1764

$$42^2 = (40 + 2)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2 = 1600 + 80 \cdot 2 + 4 = 1600 + 160 + 4 = 1764$$

7.

a) 7x

b) $7x$

c) $x^2 + 14x + 49$

Lição 21 – Quadrado da diferença de dois termos

1.

a) $x^2 - 2xa + a^2$

b) $x^2 - 20x + 100$

c) $16x^2 - 8x + 1$

d) $25a^2 - 30ab + 9b^2$

e) $9a^2 - 12ab + 4b^2$

2. $25x^4 - 35x^2 + 11$

3. 10

Resolução:

Desenvolva o quadrado $(a - 2b)^2$:

$$(a - 2b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 2b + (2b)^2 = a^2 - 4ab + 4b^2$$

Reorganize a soma:

$$(a - 2b)^2 = a^2 + 4b^2 - 4ab$$

Sabemos o valor de $a^2 + 4b^2$ e de ab . Substitua-os:

$$\square a^2 + 4b^2 = 30$$

$$\square ab = 5$$

$$(a - 2b)^2 = a^2 + 4b^2 - 4ab$$

$$(a - 2b)^2 = 30 - 4ab$$

$$(a - 2b)^2 = 30 - 4 \cdot ab$$

$$(a - 2b)^2 = 30 - 4 \cdot 5$$

$$(a - 2b)^2 = 30 - 20 = 10$$

4. e) ao quádruplo do produto dos
números Resolução:

A diferença entre o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois números reais é igual:

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = \\ (x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) =$$

Atenção ao jogo de sinal.

$$x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 =$$

Reorganize:

$$x^2 - x^2 + 2xy + 2xy + y^2 - y^2$$

$$= 0 + 4xy + 0 =$$

$$4xy$$

Portanto, a diferença entre o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois números reais é igual ao quádruplo do produto desses dois números ($4xy$).

Lição 22 – Produto da soma pela diferença

1.

a) $x^2 - 1$

b) $a^2 - 25$

c) $9b^2 - 49$

d) $9x^2 - 4y^2$

2.

a) 2496

$$52 \cdot 48 = (50 + 2) \cdot (50 - 2) = 50^2 - 2^2 = 2500 - 4 = 2496$$

b) 3591

$$57 \cdot 63 = (60 - 3) \cdot (60 + 3) = 60^2 - 3^2 = 3600 - 9 = 3591$$

c) 8099

$$91 \cdot 89 = (90 + 1) \cdot (90 - 1) = 90^2 - 1^2 = 8100 - 1 = 8099$$

d) 39900

$$210 \cdot 190 = (200 + 10) \cdot (200 - 10) = 200^2 - 10^2 = 40000 - 100 = 39900$$

e) 89999

$$301 \cdot 299 = (300 + 1) \cdot (300 - 1) = 300^2 - 1^2 = 90000 - 1 = 89999$$

3.

a) $4x^2$

b) -5

4.

a) 15

Resolução:

A área de um retângulo é base $\cdot$ altura A

base desse retângulo é $(n + 3)$

A altura desse retângulo é $(n - 3)$

Então, sua área é : $(n + 3) \cdot (n - 3)$

Mas, o exercício nos afirma que a área vale 216. Logo:

$$(n + 3) \cdot (n - 3) = \text{Área do retângulo}$$

$$(n + 3) \cdot (n - 3) = 216$$

Desenvolva o produto notável.

$$n^2 - 3^2 = 216$$

$$n^2 - 9 = 216$$

$$n^2 = 216 + 9$$

$$n^2 = 225$$

$$n = \pm \sqrt{225}$$

$$n = 15 \text{ ou } n = -15$$

Mas, se n for igual a -15 , as medidas ficariam negativas ($n + 3 = -12$; $n - 3 = -18$).

Como não existem medidas negativas, o único valor possível para n é 15. Logo, $n = 15$.

b) 18

Resolução:

O maior lado é $n + 3$. Se $n = 15$, $n + 3 = 18$.

5. 16

Resolução:

O número “ n ” é par. Seus vizinhos ímpares são $n + 1$ e $n - 1$.

Pense no número 2 (par).

Seus vizinhos ímpares são 1 e 3.

O número 1 é $2 - 1$.

O número 3 é $2 + 1$.

Logo, os vizinhos ímpares de um número par são $n - 1$ e $n + 1$. O

produto desses vizinhos é: $(n - 1) \cdot (n + 1)$

Contudo, este produto vale 255. Logo:

$$(n - 1) \cdot (n + 1) = 255$$

$$n^2 - 1^2 = 255$$

$$n^2 - 1 = 255$$

$$n^2 = 255 + 1$$

$$n^2 = 256$$

$$n = \pm \sqrt{256}$$

$$n = -16 \text{ ou } n = 16$$

Mas, o enunciado deixa claro que estamos procurando um par POSITIVO. Conclui-se que o n só pode valer 16.

Então, 16 é o número par que procuramos (e seus vizinhos ímpares são 15 e 17, cujo produto $15 \times 17 = 255$).

6.

(II) O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo, menos duas vezes o 1º termo vezes o 2º, mais o quadrado do 2º termo.

(I) O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo, mais duas vezes o 1º termo vezes o 2º termo, mais o quadrado do 2º termo.

(III) O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo menos o quadrado do 2º termo

Lição 23 – Cubo da soma de dois termos

1.

a) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

b) $8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$

c) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

d) $27x^3 + 162x^2 + 324x + 216$

e) $y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3$

f) $8m^3 + 60m^2 + 150m + 125$

g) $27y^3 + 27y^2 + 9y + 1$

h) $b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$

i) $1 + 6a + 12a^2 + 8a^3$

j) $64 + 240b + 300b^2 + 125b^3$

Lição 24 – Cubo da diferença de dois termos

1.

a) $b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3$

b) $1 - 6a + 12a^2 - 8a^3$

c) $27y^3 - 27y^2 + 9y - 1$

d) $y^3 - 3xy^2 + 3x^2y - x^3$

e) $27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$

f) $8m^3 - 60m^2 + 150m - 125$

2.

a) $a^2b - ab^2$

b) $-20x^2y - 2y^3 + 2xy^2$

c) $3a^2 - 7a + 2$

Lição 25 – Fator comum em evidência

1.

a) $x \cdot (m + n - p)$

b) $5x \cdot (4x + 5)$

c) $2m^2 \cdot (2m - 3)$

d) $a^2b^2c^2 \cdot (a + b + c)$

e) $3xy \cdot (xy - 3)$

f) $16a^3 \cdot (a - 4)$

g) $(a + b) \cdot (x + 2)$

h) $(a + 1) \cdot (x + y)$

2.

a) $a^2 \cdot (a - 1) \cdot (a + 1)$

b) $2a \cdot (x - 4) \cdot (x + 4)$

c) $(a + 1) \cdot (a - 2) \cdot (a + 2)$

d) $(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^4 + 1)$

e) $x \cdot (x - 1)^2$

f) $x^3 \cdot (x + 1)^2$

3. $(x + 2)$

Resolução:

Fatore a expressão da área.

$$\text{Área} = 2x^2 + 4x$$

$$\text{Área} = 2x \cdot (x + 2)$$

A área de um retângulo é:

$$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura}.$$

A base é $2x$.

Logo, o outro fator, $(x + 2)$, só pode ser a altura.

Assim, a medida do outro lado (a altura) é $x + 2$.

Lição 26 – Fatoração por agrupamento

1.

a) $(x + y) \cdot (a - b)$

b) $(m - p) \cdot (m - 3)$

c) $(x + 2) \cdot (x^2 + 2)$

d) $(3 + a) \cdot (4 + b)$

e) $(7x + 1) \cdot (x - y)$

f) $(m^2 + 1) \cdot (u - 1)$

Lição 27 – Diferença de dois quadrados

1.

a) $(x + 9) \cdot (x - 9)$

b) $(5b - 4) \cdot (5b + 4)$

c) $(10x - 1) \cdot (10x + 1)$

d) $(ab - 2) \cdot (ab + 2)$

e) $(2p - 3b) \cdot (2p + 3b)$

f) $[(x + y) - y] \cdot [(x + y) + y]$

$$= x \cdot (x + 2y) =$$

$$x^2 + 2xy$$

g) $[(a + b) - (a - b)] \cdot [(a + b) + (a -$

$$b)] = 2b \cdot 2a =$$

$$4ab$$

h) $[1 - (x + y)] \cdot [1 + (x + y)]$

Lição 28 – Trinômio quadrado perfeito

1.

a) $(x + y)^2$

b) $(a + 1)^2$

Atenção: o enunciado é $a^2 + 2a + 1$

c) $(x - 3)^2$

d) $(2x - 1)^2$

e) $(m + n)^2$

f) $(x - 6)^2$

g) $(3x + 1)^2$

h) $x \cdot (x + 1)^2$

Lição 29 – Soma ou diferença de dois cubos

1.

$$a) (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2)$$

$$b) (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

$$c) (c - 1) \cdot (c^2 + c + 1)$$

$$d) (m + 2) \cdot (m^2 - 2m + 4)$$

$$e) (3 - n) \cdot (9 + 3n + n^2)$$

$$f) (1 + p)(1 - p + p^2)$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \overline{5} & || & \overline{25} \end{array} \right| \overline{5} \quad \left| \begin{array}{ccc} \overline{5} & || & \overline{25} \end{array} \right| \overline{5}$$

2.

$$a) (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2)$$

$$b) 3 \cdot (x - 1)^2$$

$$c) x \cdot (m - 1) \cdot (m + 1)$$

$$d) 5 \cdot (a + 3b)^2$$

$$e) xy \cdot (x - y) \cdot (x + y)$$

Lição 30 – Fatorando mais de uma vez

$$1. x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (a + b)$$

2. A fatoração da expressão é: $xy \cdot (x + y)^2$ O valor da expressão é 250.

Resolução:

$$x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 = xy \cdot (x^2 + 2xy + y^2) = xy \cdot (x + y)^2$$

Sabemos que:

$$\square xy = 10$$

$$\square x + y = -5$$

Substitua esses valores de xy e $x+y$ na expressão fatorada:

$$xy \cdot (x + y)^2 =$$

$$10 \cdot (x + y)^2 =$$

$$10 \cdot (-5)^2 =$$

$$10 \cdot 25 =$$

$$250$$

3. $(b - c) \cdot (b + c) \cdot (a + b)$

Lição 31 – Usando a fatoração para resolver equações

1.

a) 0 e 9

b) -9 e 9

c) -8 e 8

d) -20 e 0

e) 0 e 1

f) -0,5 e 0,5

g) -1 e 1

h) -0,6 e 0

i) -0,1 e 0,1

j) 0 e $\frac{1}{4}$

4

2. b)

ATENÇÃO: há um erro no enunciado. O enunciado correto é: $(x + y)^2 - (2x + y)(-x + y) =$
Resolução:

$$(x + y)^2 - (2x + y)(-x + y) =$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - (-2x^2 + 2xy - xy + y^2)$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 - (-2x^2 + xy + y^2) =$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x^2 - xy - y^2$$

$$= x^2 + 2x^2 + 2xy - xy + y^2 -$$

$$y^2 = 3x^2 + xy + 0 =$$

$$3x^2 + xy$$

$$x \cdot (3x + y)$$

Logo, é a alternativa b).

Lição 32 – Avaliação

1.

a) 343

b) 16

c) -1

d) 1

e) $\frac{27}{125}$

f) 2

g) $\frac{1}{5}$

h) 0

i) $\frac{1}{4}$

j) $-\frac{1}{2}$

2.

a) $1,7 \cdot 10^5$

b) $1,2 \cdot 10^1$

c) $4,0 \cdot 10^{-6}$

d) $1,84 \cdot 10^1$

e) $5,8 \cdot 10^{-3}$

3.

a) 2^{18}

b) 5^8

c) 2^6

d) 9^{10}

4.

a) 6

b) 2

c) 1

$$d) \frac{1}{5}$$

e) 4

f) 9

g) 1

h) 7

i) $9\sqrt{3}$

j) $-4\sqrt{3}$

k) 10

l) 3

5.

a) $x^2 + 6x + 9$

b) $x^2 - 6x + 9$

c) $x^2 - 9$

d) -5

e) $12x$

6.

a) $5x \cdot (4x + 5)$

b) $(x + y) \cdot (a - b)$

c) $2m^2 \cdot (2m - 3)$

d) $(a + 1) \cdot (x + y)$

e) $(3 + a) \cdot (4 + b)$

f) $(10x - 1) \cdot (10x + 1)$

g) $(5b - 4) \cdot (5b + 4)$

h) $(x - 3)^2$

i) $(x + 6)^2$

7. $(x + 1) \cdot (2x + 3) = 2x^2 + 5x + 3$

Gabarito de Matemática

Etapla 9, Volume 3

Lição 33 – Equação

1.

- a) Equação é uma expressão algébrica, com uma ou mais incógnitas, que contém uma igualdade.
- b) Expressão algébrica é uma expressão matemática que apresenta números, letras e operações.
- c) Incógnita são as letras que aparecem nas expressões, mas que possuem um valor específico que deve ser descoberto.
- d) Igualdade é o sinal de igual entre duas expressões.

2.

- a) Segundo grau.
- b) Quarto grau.
- c) Nono grau.
- d) Quinquagésimo grau.
- e) Quinto grau.
- f) Décimo milésimo grau.

Lição 34 – Equação do 1º grau

1.

- a) $b = 6$
- b) $x = 7$
- c) $y = -6$
- d) $x = 6$
- e) $a = -60$
- f) $x = 6$
- g) $x = \frac{3}{2}$

h) $y = 21$

i) $b = \frac{5}{6}$

6

Lição 35 – Problemas envolvendo equação de 1º grau

1. O número é 15.
2. O número é 10.
3. Restaram 10 horas.
4. Lázaro deve receber R\$ 130,00; Maria deve receber R\$ 180,00 (50 a mais que Lázaro); e Marta deve receber R\$ 250,00 (70 a mais que Maria).
5. A parte maior medirá 137,185 cm.

Dica: é preciso converter uma das unidades $\square$ ou passar metros para centímetros (274 m = 24700 cm) ou passar centímetros para metros (37 cm = 0,37 m).

6. O lado menor do retângulo mede 10 cm.
7. Há 18 galinhas.

Lição 36 – Equações de 2º grau com uma incógnita

1. As equações de 2º grau com uma incógnita são: a) , d) , e) , f) .

2.

a) $a = 10$; $b = 3$; $c = -1$

b) $a = 1$; $b = 2$; $c = -8$

c) $a = 1$; $b = -3$; $c = -4$

d) $a = 7$; $b = 10$; $c = 3$

e) $a = -4$; $b = 6$; $c = 0$

f) $a = 1$; $b = 0$; $c = -16$

g) $a = -6$; $b = 1$; $c = 1$

h) $a = 5$; $b = -10$; $c = 0$

3.

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

b) $4x^2 - 6x + 2 = 0$

c) $4x^2 - 25 = 0$

d) $-21x^2 + 7x = 0$

e) $-9x^2 + 1 = 0$

f) $\frac{1}{x^2} - 2x - \frac{1}{x} = 0$

g) $1,5x^2 + x + 0,2 = 0$

Lição 37 – Equação completa e equação incompleta

1. Os coeficientes b e c serem diferentes de zero.
2. Quando ou b = 0 ou c = 0, a equação do 2º grau é caracterizada como incompleta.

3.

- a) Completa
- b) Completa
- c) Incompleta
- d) Completa
- e) Incompleta
- f) Incompleta

Lição 38 – Equações de 2º grau: forma normal

1.

- a) $x^2 - x - 12 = 0$
 - b) $x^2 - 5x - 6 = 0$
 - c) $2x^2 - 8x + 4 = 0$
 - d) $2x^2 - 2x + 3 = 0$
 - e) $3x^2 - 2 = 0$
 - f) $2x^2 - 5x = 0$
 - g) $x^2 - 10x + 12 = 0$
 - h) $4x^2 + 1 = 0$
2. $x^2 + 2x - 35 = 0$

$$3. \quad x^2 - 3x - 70 = 0$$

$$x^2 - 3x - 70 = 0$$

$$4. \quad 4x^2 - 4x - 24 = 0$$

$$5. \quad n^2 - 3n - 20 = 0$$

Lição 39 – Resolvendo equações incompletas de 2º grau com uma incógnita

1.

$$a) \quad x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -2$$

$$b) \quad x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

$$c) \quad x = \frac{5}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5}{2}$$

$$d) \quad x = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{2}$$

$$e) \quad \sqrt{x} = \frac{10}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{10}{2}$$

f) Não há solução no conjunto dos reais.

$$g) \quad \sqrt{x} = \frac{6}{3} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{6}{3}$$

$$h) \quad x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -5$$

i) Não há solução no conjunto dos reais.

2.

$$a) \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

$$b) \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -5$$

$$c) \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{3}$$

$$d) \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$e) \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 4$$

$$f) \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{7}{2}$$

2

$$g) x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{4}$$

4

$$h) x = 0 \text{ ou } x = -\frac{7}{3}$$

$$i) x = 0 \text{ ou } x = -\frac{8}{3}$$

3.

$$a) x = -9 \text{ ou } x = 9$$

$$b) x = 0 \text{ ou } x = 9$$

$$c) x = 0 \text{ ou } x = 11$$

$$d) x = -6 \text{ ou } x = 6$$

$$e) x = 0 \text{ ou } x = 1$$

$$f) x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$g) x = \sqrt{6}$$

$$h) x = -2 \text{ ou } x = 2$$

$$i) x = -3 \text{ ou } x = 3$$

$$j) x = \frac{8}{5}$$

(lembre-se o x deve ser diferente de 0...)

$$4. y = 0 \text{ ou } y = 7$$

$$5. t = -3 \text{ ou } t = 3$$

6.

a) Pela equação $x = 0$ ou $x = 5$. Contudo, como se trata de medidas (e medidas são necessariamente diferentes de 0), o x só pode ser igual a 5.

$$b) 10$$

$$c) \frac{25}{6}$$

$$d) 40$$

$$e) 56,333... \text{ ou } \frac{169}{3}$$

7. As medidas são 19 e 21.

Lição 40 – O processo de completar quadrados

1.

a) +9

b) +25

c) +1

d) +16

e) + $\frac{25}{4}$

4

f) + $\frac{81}{4}$

4

g) +36

h) + $\frac{1}{4}$

4

2.

a) $x = 2$ ou $x = 4$

b) $x = 1$ ou $x = 9$

c) $x = -4$

d) $x = 3$

e) $x = -2$ ou $x = 3$

f) $x = 1$ ou $x = 2$

g) $x = -1$ ou $x = 5$

h) $x = 4$ ou $x = \frac{1}{2}$

2

i) $x = 4$ ou $x = 6$

j) $x = \frac{1}{2}$

0

u

$x =$

2

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

3

k) $x = 1$ ou $x = 7$

l) $x = \frac{1}{2}$

2

1.

a) $x = -1$ ou $x = \frac{1}{6}$

b) $x = 4$

$$c) y = \frac{4}{3}$$

$$d) x = \frac{3}{2}$$

$$e) t = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$f) x = 4 \text{ ou } x = 7$$

$$g) x = \frac{-3}{2}$$

$$h) x = \frac{1}{2}$$

$$i) x = -1 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}$$

$$j) x = \frac{2}{3}$$

$$0 \text{ u}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ou } t = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$2$$

$$2$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$0 \text{ u}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{5}{2}$$

$$2$$

$$\frac{5}{2}$$

$$0 \text{ u}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{4}{3}$$

$$2$$

$$0 \text{ u}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{4}{3}$$

$$3$$

2.

a) $\Delta = 25$ e, portanto, como o discriminante é maior que zero, há duas raízes reais.

b) $\Delta = 36$ e, portanto, como o discriminante é maior que zero, há duas raízes reais.

c) $\Delta = 0$ e, portanto, há apenas uma raiz real.

d) $\Delta = -11$ e, portanto, como o discriminante é menor que zero, NÃO HÁ raízes reais.

e) $\Delta = 0$ e, portanto, há apenas uma raiz real.

f) $\Delta = -14$ e, portanto, como o discriminante é menor que zero, NÃO HÁ raízes reais.

3.

a) $x = -3$ ou $x = 4$

b) $x = \frac{1}{3}$ ou $x = -\frac{1}{2}$

c) $x = -4$ ou $x = 6$

d) Não há solução real.

e) $x = 6$

f) $x = -1$ ou $x = \frac{1}{9}$

g) $x = 6$ ou $x = -3$

h) $x = 1$ ou $x = -\frac{2}{5}$

4. Para $x = -2$ ou para $x = -1$.

6

Lição 42 – Estudo do delta

1.

- a) Duas raízes reais ($\Delta > 0$).
 - b) Duas raízes reais ($\Delta > 0$).
 - c) Uma raiz real ($\Delta = 0$).
 - d) Não possui raiz real ($\Delta < 0$).
 - e) Uma raiz real ($\Delta = 0$).
 - f) Não possui raiz real ($\Delta < 0$).
2. Para $k = 4$ ou $k = -4$.
3. Para $a > 4$.

Lição 43 – Problemas envolvendo equações do 2º grau

1. O lado do azulejo mede $0,15 \text{ m} = 15 \text{ cm}$ $\left(\frac{3}{20} = 0,15 \right)$.

2. O número pode ser 0 ou 5.
3. O número pode ser 0 ou $\frac{1}{16}$.

16

4. O número pode ser 4 ou -9 .
5. Este número pode ser 3 ou $\frac{1}{3}$.

3

6. Este número é 6.

*Note que o exercício quer um número **positivo**.*

7. O número pode ser 2 ou $-\frac{1}{3}$.

1 . —
3

8. O terreno tem uma lateral de 25 m e frente de 12 m.

9.

a) O novo terreno tem 10 m de comprimento e 7 m de largura (aumentou-se 5 em cada).

b) 34

10. Quando somamos os 20 primeiros números inteiros positivos (quando $n = 20$).

11. A largura da moldura é 5 cm.

Lição 44 – Soma e Produto

1.

a) Soma = $\frac{-5}{3}$ e Produto = $\frac{2}{3}$ —

3

b) Soma = $\frac{-11}{3}$ e Produto = -1

2

c) Soma = $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ e Produto = $\frac{1}{9}$ —

d) Soma = $\frac{5}{7}$ e Produto = $\frac{-3}{7}$ —

e) Soma = $\frac{11}{-2} = -\frac{11}{2}$ e Produto = $\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ —

f) Soma = 0 e Produto = $\frac{-7}{11}$

11

g) Soma = $\frac{-5}{3}$ e Produto = 0

$$\text{h) Soma} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \quad \text{e Produto} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{-2}{-2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$2. (p + q)^{pq} = 1$$

3.

$$\text{a) } \frac{7}{5}$$

$$\text{b) } \frac{-11}{5}$$

$$\text{c) } \frac{-7}{11}$$

$$\text{d) } \frac{1}{5}$$

4.

a) Para $k = -18$.

b) Para $k = \frac{1}{3}$

5. As demonstrações estão nos tópicos “Soma das Raízes” e “Produto das Raízes”.

Lição 45 – Fatoração de equação do 2º grau

1.

a) $(x - 2)(x - 5)$

b) $(x + 3)(x + 1)$

c) $(x + 1)(x - 6)$

d) $(3x - 1)(x - 2)$

e) $(2x + 3)(2x + 1)$

f) $(x + 3)(5x - 2)$

g) $2(x - 5)^2$

h) $3(x - 1)^2$

2.

a) $x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$

b) $x^2 - x + \frac{3}{16}$

c) $x^2 - \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}$

d) $x^2 - \frac{34}{15}x + 1$

Lição 46 – Equações biquadradas

1.

a) $x_1 = -4$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $x_4 = 4$

$$\text{b) } x_1 = -\sqrt{3} \qquad , \quad x_2 = - \qquad , \quad x_3 = \qquad , \quad x_4 =$$

$$\text{c) } x \notin \mathbb{R}$$

$$\text{d) } m_1 = -2 \text{ e } m_2 = 2$$

e) $t_1 = -3$ e $t_2 = 3$

Lição 47 – Resolvendo equações irracionais

1. $S = \{2\}$

2. Para $x = 2$ ou $x = 4$.

3. $S = \{2\}$

4. $x = 5$ ou $x = -4$

5. $x = 1$

6. $S = \{1, 4\}$

7. $x = 4$ ou $x = -3$

8. $x = \frac{\sqrt{15 - 33}}{2}$

9. $S = \{2\}$

10. $x = 7$

(Utilize a mesma dica do exercício 6. Eleve a raiz ao quadrado “sozinha”. Passe o x para o lado esquerdo)

Lição 48 – Sistema de equações de 2º grau

1.

a) $(x, y) = (7, 4)$

b) $(x, y) = (5, 4)$

c) $(x, y) = (45, 29)$

d) $(x, y) = (17, 14)$

e) $(x, y) = (-2, 4)$

f) $(x, y) = (3, -9)$

g) $(x, y) = (-1, 2)$

h) $(x, y) = (4, 3)$

i) $(x, y) = (5, 2)$

j) $(x, y) = (, 3)$

k) $(x, y) = (3, 5)$

$$l) (x, y) = (3, 11)$$

2.

a) $(x_1, y_1) = (2, 1)$ e $(x_2, y_2) = (1, 2)$

b) $(x_1, y_1) = (-2, 2)$ e $(x_2, y_2) = (2, 2)$

c) $(x_1, y_1) = (2, 1)$ e $(x_2, y_2) = (1, 2)$

d) $(x_1, y_1) = (-5, -6)$ e $(x_2, y_2) = (6, 5)$

e) $(x_1, y_1) = (-15, -4)$ e $(x_2, y_2) = (4, 5)$

3

f) $(x, y) = (0, -1)$

g) $(x_1, y_1) = (1, 2)$ e $(x_2, y_2) = (-3, 4)$

h) $(x_1, y_1) = (-45, -14)$ e $(x_2, y_2) = (-9, 4)$

i) $(x_1, y_1) = (-4, -7)$ e $(x_2, y_2) = (-8, -1)$

3
-
1
9
3

j) $(x_1, y_1) = (\sqrt{3}, -1)$ e $(x_2, y_2) = (1, -1)$ e $(x_3, y_3) = (1, 1)$ e $(x_4, y_4) = (1, 2)$

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3} \quad \sqrt{2}$$

$$\sqrt{3} \quad \sqrt{2}$$

$$\sqrt{3} \quad \sqrt{2}$$

$$k) (x_1, y_1) = (-2, -3) \text{ e } (x_2, y_2) = (2, 3) \text{ e } (x_3, y_3) = (-3, -2) \text{ e } (x_4, y_4) = (3, 2)$$

Gabarito de Matemática

Etapa 9, Volume 4

Lição 49 – Inequações

1. Definição: sejam dados dois números quaisquer, a e b . Eles podem ser comparados de três formas:

a

$>$

b

(lê

-s

e

“a

m

ai

or

qu

e

b”

) a

$<$

b

(lê

-s

e

“a

m

en

2.

a) $-3 > -5$

<i>or</i>	-s
<i>qu</i>	<i>e</i>
<i>e</i>	"a
<i>b"</i>	<i>ig</i>
) a	ua
=	l a
b	<i>b"</i>
(lê	)

b) $\frac{3}{5} < \frac{7}{5}$

c) $-\frac{2}{7} > -\frac{3}{7}$

d) $0,75 = 0,75$

e) $2,98 > \frac{2,95}{7}$

f) $0,71 < \frac{71}{99}$

g) $-0,833333 < 0,83411$

h) $1,25 > 1,2345672$

i) $-0,333... = -\frac{1}{3}$

3. Inequações são as sentenças matemáticas que são expressas por uma desigualdade e que contêm incógnitas. Exemplos:

- $5 + x > 7$
- $3x > -2$
- $2x + 1 < 5x - 1$

4. $>, \geq, < \text{ e } \leq$.

- $a > b$ lê-se "a maior que b"
- $a \geq b$ lê-se "a maior que ou igual b"

- $a < b$ lê-se “a menor que b”
- $a \leq b$ lê-se “a menor que ou igual b”

5. O conjunto-universo reúne todos os valores que aquela incógnita poderia assumir. Ele é representado pela letra U. O conjunto-solução reúne aqueles valores que de fato solucionam a inequação. Ele é representado pela letra S.

6.

- a) Não faz parte do conjunto solução (x deve ser menor que 3 e $4 > 3$).
- b) Não faz parte do conjunto solução (x deve ser menor que 3 e não $x = 3$).
- c) Faz parte do conjunto solução (x deve ser menor que 3 e $2 < 3$).
- d) Faz parte do conjunto solução (x deve ser menor que e $0 < 3$).

7. $x > -8$

- a) Não faz parte do conjunto solução (x deve ser maior que -8 e $-10 < -8$).
- b) Não faz parte do conjunto solução (x deve ser maior que -8 e não $x = -8$).
- c) Faz parte do conjunto solução (x deve ser maior que -8 e $-7 > -8$).
- d) Faz parte do conjunto solução (x deve ser maior que -8 e $0 > -8$).

Lição 50 – Resolvendo inequações

1.

a) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$

b) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \}$

c) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{5}{2} \}$

|

d) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 5 \}$

e) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 6 \}$

f) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -38 \}$

|

|

$$g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -29\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -29\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -29\}$$

$$h) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$$

$$i) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -16\}$$

$$j) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$$

$$k) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -23\}$$

$$l) S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 7 \}$$

$$m) S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 7 \}$$

$$n) S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{219}{19} \}$$

()

$$2. \text{ O conjunto solução da inequação é } S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{11}{2} \}. \frac{11}{2} \text{ não é um número inteiro}$$

$$\left(\frac{11}{2} = 5,5 \right). \text{ O número inteiro que vem imediatamente antes é 5. Portanto, o maior valor}$$

inteiro que x pode assumir nesta inequação é 5.

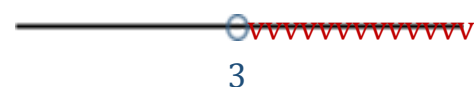
3. O conjunto solução da inequação é $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5 \}$. Os números inteiros e positivos que estão nesse conjunto solução são 5, 4, 3, 2, 1 e 0. Portanto, há 6 soluções inteiras e positivas para esta inequação.

$$4. \text{ O conjunto solução da inequação é } S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{61}{17} \}. \frac{61}{17} = 3,5882. \text{ O único par positivo}$$

que está nesse conjunto solução ($x < 3,5882$) é o 2. Portanto, só há uma solução par e positiva para esta inequação.

5.

a)



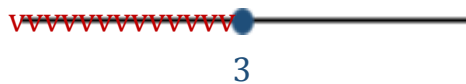
b)



c)



d)



6. Geometricamente a diferença entre um círculo e uma circunferência é que a circunferência é vazada, ao passo que um círculo é preenchido.

Lição 51 – Sistema de inequações

1.

a) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

b) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \{\}$

c) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

2.

a) $A \cap B = \{1, 3, 5\}$

b) $A \cap B = \{4, 03, 02, \dots\}$

3.

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -16\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 6\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3\}$

4. É o número

9. Resolução:

Queremos que o dobro do número seja menor que seu quádruplo menos 17, ou seja:

$$2x < 4x - 17$$

$$2x - 4x < -17$$

$$-2x < -17$$

Multiplique por -1 (lembre-se que o sinal é alterado)

$$-2x \cdot (-1) < -17 \cdot (-1)$$

$$2x > 17$$

$$x > \frac{17}{2}$$

$$x > 8,5$$

Ou seja, todos os números maiores que 8,5 satisfazem a condição. Lembre-se que os naturais são números inteiros (sem vírgula).

Queremos o menor natural possível, portanto precisamos pegar o natural mais próximo, o 9 (*o menor natural maior que 8*).

5. É o número 3.

Quando resolvemos a inequação, percebemos que o x deve ser menor que $\frac{7}{2}$.

2

Ou seja, x deve ser menor que $3,5 \left(\frac{7}{2} = 3,5 \right)$.

O maior inteiro possível é o mais próximo de 3,5, isto é, o 3 (precisa ser o maior número que seja menor que 3,5).

$$6. S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{4}\}$$

7. -3, -2 e -1.

Quando resolvemos a inequação, encontramos que o x deve ser maior ou igual a -3. Assim, os únicos inteiros negativos que estão no conjunto solução são: -3, -2 e -1.

8.

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 6\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x \leq 1\right\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x < 8\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$

$$i) S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < 5 \right\}$$

Lição 52 – Inequações simultâneas e problemas com inequações

1.

$$a) S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \}$$

$$b) S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \}$$

$$c) S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{4} \right\}$$

$$\square$$

$$\mid$$

$$d) S = \{ \} \text{ (não há solução)}$$

2. A solução da inequação simultânea é $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 3 \right\}$. Os números inteiros que

estão nesse intervalo são 0, 1, 2 e 3. Portanto, apenas 4 números inteiros satisfazem essa inequação simultânea.

3. A solução da inequação simultânea é $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{9}{10} < x \leq 8 \right\}$. Os números inteiros que

estão nesse intervalo são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. Portanto, apenas 8 números inteiros satisfazem essa inequação simultânea.

4. A solução da inequação simultânea é $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{7}{4} < x \leq \frac{15}{2} \right\}$ ou, trocando as frações por

seus valores decimais, $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 1,75 < x \leq 7,5 \right\}$. Os números NATURAIS (sem vírgula, positivos) que estão nesse intervalo são 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Portanto, apenas 6 números naturais satisfazem essa inequação simultânea.

5. Paulo deve vender no mínimo 17 dezenas de metal para faturar ao menos 100 reais. Resolução:

- Se Paulo vendeu 11 dezenas de madeira a R\$ 3,00 cada uma, ele já faturou R\$ 33,00 (3 x 11).
- Chame a quantidade de dezenas de metal que ele deve vender de “x”.
- O quanto ele faturará com as dezenas de metal, que custam R\$ 4,00 cada uma, será 4x (4 vezes a quantidade de dezenas vendidas).
- O que queremos é que a soma dessas duas vendas (dezenas de madeira + dezenas de metal) seja pelo menos 100 reais, ou seja, que seja igual ou maior que 100:

$$\text{Dezenas de madeira} + \text{dezenas de metal} \geq 100$$

$$33 + 4x \geq 100$$

$$4x \geq 100 - 33$$

$$4x \geq 67$$

$$x \geq \frac{67}{4}$$

$$x \geq 16,75$$

Como ninguém vende uma dezena e meia (só se vendem números inteiros), podemos dizer que o x deve ser maior que 17 (o próximo número inteiro depois de 16,75):

$$x \geq 17$$

Portanto, Paulo deve vender no mínimo 17 dezenas de metal para faturar ao menos 100 reais.

Lição 53 – Equações literais e grandezas

1.

a) $x = 1$

b) Equação impossível.

c) $x =$

$$\frac{2}{(\quad)}$$

2.

$$a$$

$$+$$

$$1$$

$$)$$

a) $x = \frac{b+a}{2}$

$$2$$

b) $x = -m$

c) $x = \frac{1}{-a}$

$$2$$

Note que:

$$\frac{-2}{-4} = \frac{2}{4} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}$$

3.

a) $\frac{1001}{1000}$

b) 3

c) $\frac{2001}{1000}$

4.

a) Diretamente proporcionais.

b) Diretamente proporcionais.

ATENÇÃO. A TABELA ESTÁ ERRADA. A CORREÇÃO ESTÁ A SEGUIR:

Altura do prédio (m)	10,5	14	17,5	21	24,5
Número de Andares	3	4	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$

c) Não proporcionais

d) Metros por minuto e o tempo de caminhada: inversamente proporcionais.

Metros por minuto e comprimento do passo: diretamente proporcionais. Metros por minuto e número de passos: inversamente proporcionais. Tempo de caminhada e comprimento de passo: inversamente proporcionais. Tempo de caminhada e número de passos: diretamente proporcionais.

Lição 54 – Funções

1. Custa R\$ 24,80.

2.

a) 55

b) 70

c) $5x$

A nota y depende do número x de testes acertados. y é função de x? Por quê?

R: Sim, porque a nota y está em função (depende) do número x de testes acertados.

3.

a) Em 2 horas, percorrerá 200 km.

b) $y = 100x$

c) Em 90 minutos, percorrerá 150

km. Resolução:

Note que “x” está em horas (definimos x como “horas”).

Para substituir QUALQUER valor na função, este valor deve estar em HORAS. 90 minutos deve ser convertido para horas.

- 1 hora tem 60 minutos.
- Meia hora (0,5 h) tem 30 minutos.
- 90 minutos = 60 minutos + 30 minutos = 1 hora + 0,5 hora = 1,5 h

Portanto, 90 minutos corresponde à 1,5 h (uma hora e meia). Substitua

1,5 na função:

$$y = 100x = y$$

$$= 100 \cdot 1,5$$

$$y = 150 \text{ km}$$

Portanto, em 90 minutos serão percorridos 150 km.

4.

a)

Quantidade de acólitos que decifraram	1	2	5	8	20	40
Prêmio para cada um	120	60	24	15	6	3

b) Da quantidade de acólitos que decifraram.

c) Seja “y”, o prêmio para cada um e “x”, a quantidade de acólitos que decifraram, a função é: $y = 120 : x$

5.

a) $y = -10$

b) $x = -5$

c) $x = \frac{20 - 3y}{5}$

d) $y = \frac{20 - 5x}{3}$

6.

a) Sim, pois y depende dos valores de x, ou seja, y é o valor dependente.

b) Não, pois os valores de x independem de y, ou seja, x é o valor independente.

7.

a) Em 10 minutos, ele percorre 2 000 metros.

b) $f(60) = 42\,000$ metros.

$f(60)$ é a distância percorrida em 60 minutos.

c) 136,51 minutos.

Note que 200 km equivale a 200 000 m. Qualquer valor colocado na distância ($f(x)$) deve ser em METROS (é o que foi definido na função). Portanto, substitua 200 000 e não 200.

Note também que o tempo é sempre um valor POSITIVO. Descarte valores negativos.

8.

a) $f(-2) = -1$

b) $f(3) = 5$
 $\left| \begin{array}{cc} 5 & 8 \\ 1 & 1 \end{array} \right|$

c) Não existe.

$$9. \frac{-99}{4}$$

Resolução:

Primeiro, calcule $f^{(2)}_5$ e $f^{(1)}_{-10}$.

$$\begin{array}{c|c} 5 & 10 \\ \hline & \end{array}$$

$$\begin{aligned} f^{(2)}_5 &= \frac{f^{(1)}_5 - f^{(1)}_2}{2} = \frac{\frac{f^{(0)}_5 - f^{(0)}_2}{2} - \frac{f^{(0)}_2 - f^{(0)}_{-10}}{2}}{2} = \frac{\frac{5 - 2}{2} - \frac{2 - (-10)}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{12}{2}}{2} = \frac{\frac{3 - 12}{2}}{2} = \frac{\frac{-9}{2}}{2} = -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c} 5 & 2 \\ \hline & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 5 & 2 \\ \hline & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 12 & 10 \\ \hline & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 10 & 2 \\ \hline & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 10 & 10 \\ \hline & \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{10} - \frac{5}{1} = \frac{2 - 5 \cdot 10}{10 \cdot 1} = \frac{2 - 50}{10} = \frac{-48}{10} \end{aligned}$$

Simplifique a fração.

$$\frac{-48 \div 2}{10 \div 2} = \frac{-24}{5}$$

Portanto, $f^{(2)}_5 = -\frac{24}{5}$

$$\begin{array}{c|c} 5 & 5 \\ \hline & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -10 \end{pmatrix}$$

[illegible]

$$\begin{array}{l} 10\ 1 \mid \quad (1 \qquad 10\ 2 \mid (1 \quad 1 \\ 10 \mid \quad \quad) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)_{-1}(-20) = (-1)_{+20} = (-1)_{+20 \cdot 20} = (-1)_{+400} = -1 + 400$$

$$\begin{array}{ccccccc} | & \overline{20} & | & \overline{1} & 20 & | & \overline{1} \\ | & | & & & & & \\ | & | & & & & & \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \cdot 20 \\ | \\ 20 \end{array}$$

() () () — — — —

() () () () () () () ()

Portanto, $f^{-1} = 399$

$$\left(\frac{1}{10} \mid \frac{1}{20} \right)$$

Agora faça $f^{(2)} - f^{(-1)}$:

5	10
()	()

$$\begin{array}{ccccccc} f(2) - f(-1) & = & (-24) - (-399) & = & (-24) - 399 & = & (-24 \cdot 4) - 399 = (-96) - 399 = -96 - 399 = -495 \\ |5| & - & |10| & |5| & - & \frac{\quad}{20} & \frac{\quad}{5} & \frac{\quad}{5 \cdot 4} & |20| & \underline{-495} \\ & & & & & 20 & 20 & & & \underline{-20} \end{array}$$

[illegible]

Simplifique a fração.

$$\frac{-495}{-99} : \frac{5}{20} = \frac{\quad}{54}$$

10. (Resposta pessoal)

11. d) $f(x) = 3x + 24$

12.

x	$f(x)$
0	-1
1	4
5	24
$\frac{3}{5}$	2
$-\frac{3}{5}$	-4

Lição 55 – Domínio, imagem e contradomínio de uma função

1. Domínio: {A, B, C} ; Contradomínio: {M, P, G, H}; Imagem: {M, P, G}.

2.

a) Domínio: {3, 4, 5, 6}

b) Imagem: {1, 3, 7}

c) $f(4) = 1$

d) $y = 7$

e) $x = 6$

f) $x = 3$ ou $x = 4$

g) $f(x)$ quando $x = 6$ é $f(6) = 3$.

h) $y = 1$

i) $x = 5$

Lição 56 – Função injetora, sobrejetora e bijetora

1. a) injetiva

Ela é injetiva porque os elementos do seu domínio estão associados a elementos diferentes do contradomínio.

Ela não é sobrejetiva porque seu contradomínio não é igual sua imagem. Sobra H no contradomínio (que não é imagem de ninguém).

Se ela não é sobrejetiva não pode ser bijetiva.

2. b) sobrejetiva

Ela não é injetiva porque elementos diferentes do seu domínio estão associados a um mesmo elemento do contradomínio (por exemplo B_1 e B_2 estão associados a B).

Ela é sobrejetiva porque o seu contradomínio é igual a sua imagem. Se ela é sobrejetiva e não é injetiva não pode ser bijetiva.

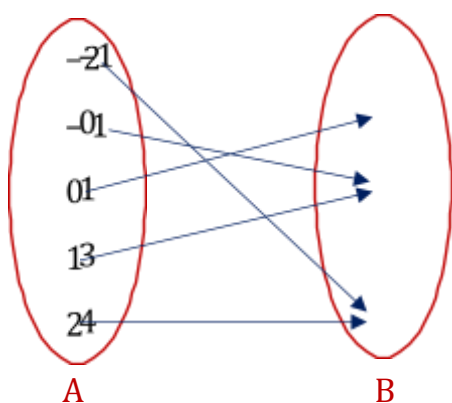
3. c) bijetiva

Ela é injetiva porque os elementos do seu domínio estão associados a elementos diferentes do contradomínio.

Ela é sobrejetiva porque o seu contradomínio é igual a sua imagem.

Portanto, se ela é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo, a função é bijetiva.

4. O diagrama $f: A \rightarrow B$:



Sim, $f: A \rightarrow B$ é uma função, pois cada elemento do domínio tem apenas uma imagem (e todos os elementos do domínio tem imagem).

Domínio = $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Contradomínio: $\{-1, 0, 1, 3, 4\}$

Imagem: $\{0, 1, 4\}$

A função não é nem injetora, nem sobrejetora e, portanto, nem bijetora.

5. $f(1) = 1^2 = 1 \cdot 1 = 1$

$$f(-1) = (-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

Como para diferentes elementos do domínio (-1 e 1) temos a mesma imagem (1), esta função não é injetora.

6. d) nem injetiva nem sobrejetiva.

Ela não é injetiva porque elementos diferentes do seu domínio estão associados a um mesmo elemento do contradomínio (por exemplo 2 e 5 estão associados a 0).

Ela não é sobrejetiva porque seu contradomínio não é igual sua imagem. Sobra 1 no contradomínio (que não é imagem de ninguém).

Como ela não é nem injetiva nem sobrejetiva, não pode ser bijetiva.

7. c) bijetiva

Ela é injetiva porque os elementos do seu domínio estão associados a elementos diferentes do contradomínio.

Ela é sobrejetiva porque o seu contradomínio é igual a sua imagem.

Portanto, se ela é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo, a função é bijetiva.

8.

a) É função, mas não é sobrejetora nem injetora. Não é injetora porque todos os elementos do domínio têm a mesma imagem. Não é sobrejetora porque sobram elementos do contradomínio que não são imagem de ninguém (Basílica de São Pedro e Basílica de São Paulo Fora dos Muros).

b) É função sobrejetora. Não é injetora porque alguns elementos do domínio têm a mesma imagem (os 10 alunos que gostam de Notre-Dame, por exemplo, têm a mesma imagem). É sobrejetora porque não sobra nenhum elemento do contradomínio (todo elemento do contradomínio é imagem de alguém).

c) Não é função, pois um dos elementos do domínio não possui imagem (Joãozinho não escolheu nenhuma).

d) Não é função, pois um dos elementos do domínio possui 3 imagens (Joãozinho escolheu 3).

9.

a) Injetora. O domínio é $D = \{2, 3, 4, 5\}$. O contradomínio é $CD = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. A imagem é $I = \{0, 1, 2, 3\}$.

b) Sobrejetora. O domínio é $D = \{-1, 0, 1\}$. O contradomínio é $CD = \{1, 0\}$. A imagem é $I = \{1, 0\}$.

c) Não é uma função, pois há elementos do domínio que não possuem imagem (0 não possui imagem).

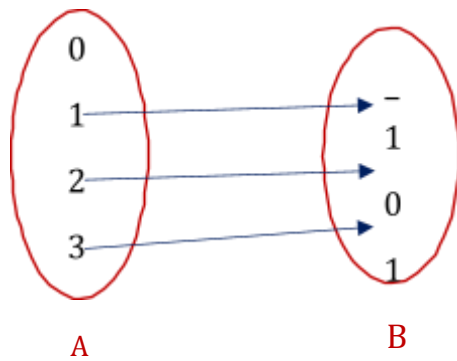
d) Não é uma função, pois um dos elementos do domínio (4) possui duas imagens.

e) Bijetora (sobrejetora e injetora ao mesmo tempo). Seu domínio é $D = \{1, 3, 4\}$. O contradomínio é $CD = \{2, 6, 8\}$. A imagem é $I = \{2, 6, 8\}$.

f) É uma função, pois todos os elementos do domínio têm imagem (ainda que seja a mesma imagem). Contudo, essa função não é injetora, pois os diferentes elementos do domínio não têm imagens diferentes. Também não é sobrejetora, pois o contradomínio não é igual

à imagem. Seu domínio é $D = \{2, 5, 10, 20\}$. O contradomínio é $CD = \{1, 0, 2\}$. A sua imagem é $I = \{2\}$.

10. O diagrama $f : A \rightarrow B$:

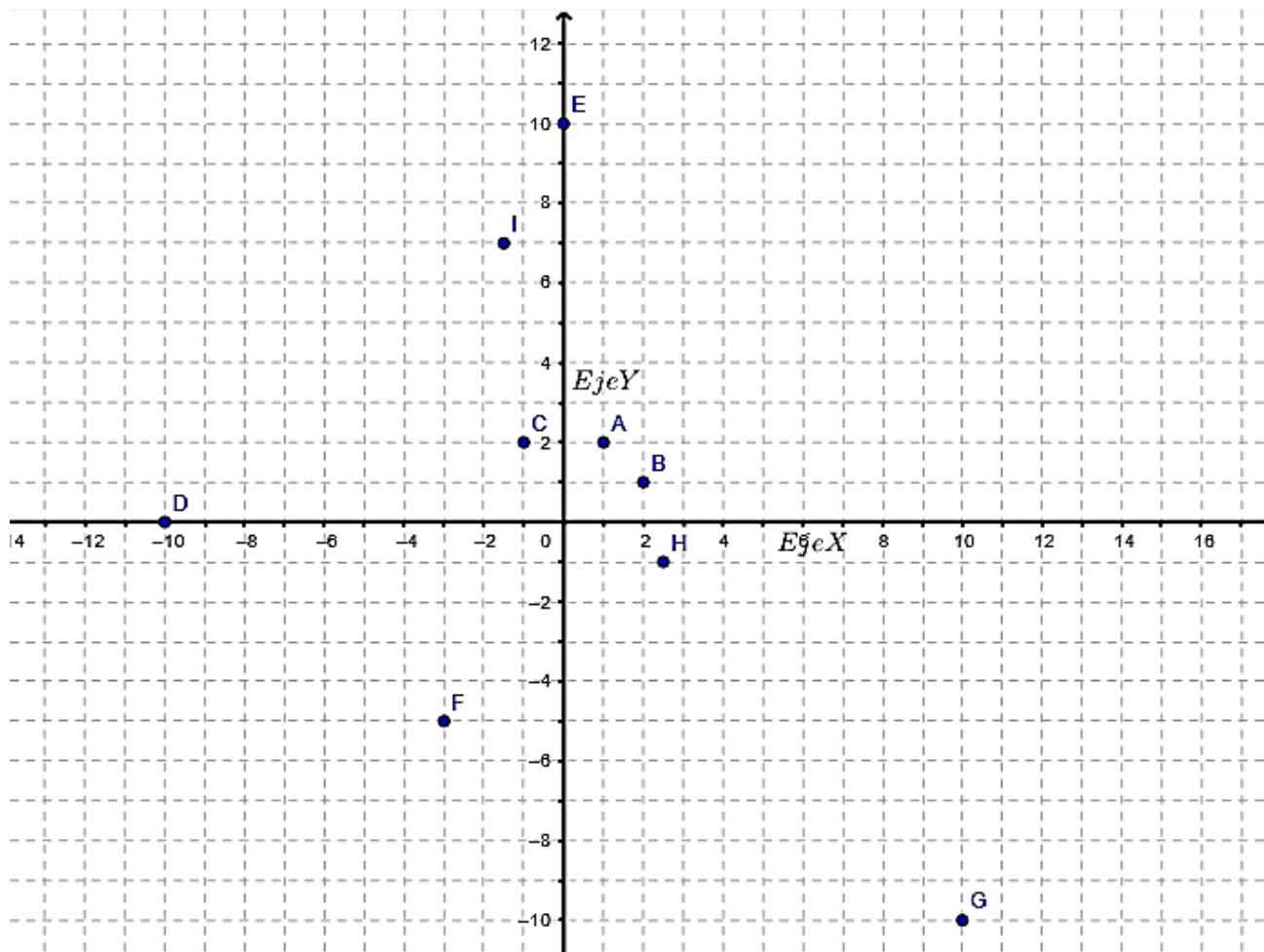


Não, a relação $f : A \rightarrow B$ NÃO é uma função, pois um elemento do domínio não tem uma imagem no contradomínio (0).

Lição 57 – Plano cartesiano

1. Eixo x: eixo das abscissas. Eixo y: eixo das ordenadas.

2.



3.

$$A = (2, 1)$$

$$B = (0, 3)$$

$$C = (-2, 1)$$

$$D = (0, -2)$$

$$E = (1, 0)$$

$$F = (4, 4)$$

$$G = (-4, -3)$$

4.

a) Primeiro quadrante.

b) Quarto quadrante.

c) Segundo quadrante.

d) Terceiro quadrante.

5.

a) $A = (4, 6)$

$$B = (-4, 6)$$

$$C = (-6, 4)$$

$$D = (-2, 4)$$

$$E = (-3, -2)$$

$$F = (3, -4)$$

$$G = (2, 4)$$

$$H = (6, 4)$$

b) Os pontos que têm maior ordenada são A e B.

c) Os pontos que possuem a mesma ordenada que H são: C, D e G.

d) A, B, C, D, G e H.

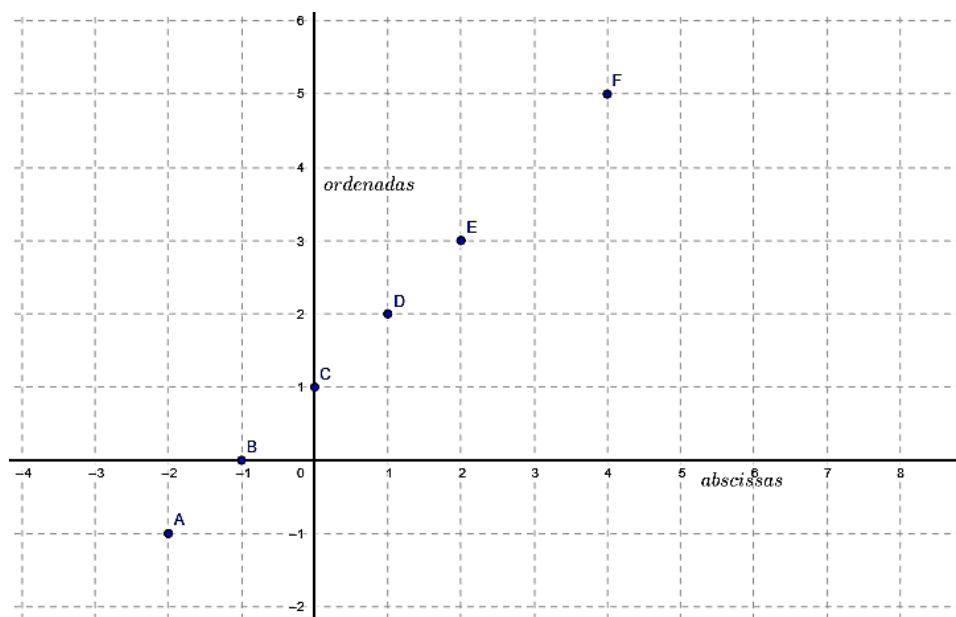
e) B, C, D e E.

Lição 58 – As funções e o plano cartesiano

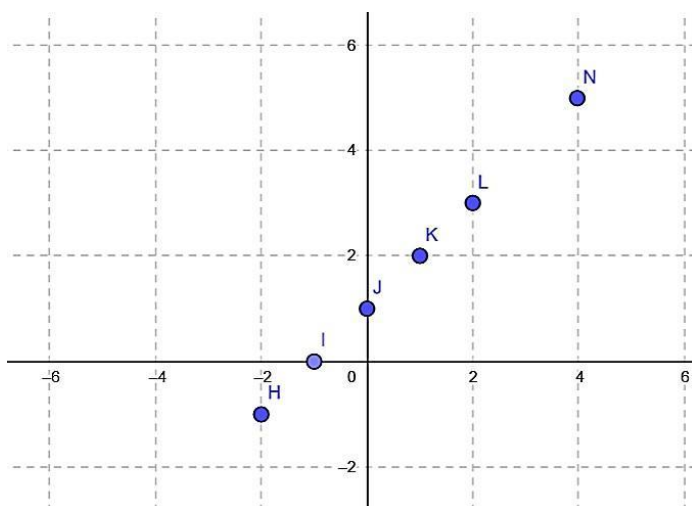
1. Apenas os gráficos b) e c) representam funções.

2.

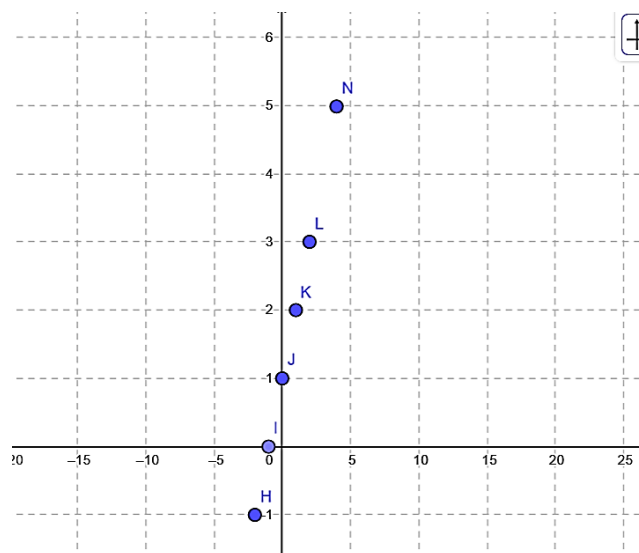
a) O gráfico construído no item a), deve servir de referência:



b)



c)

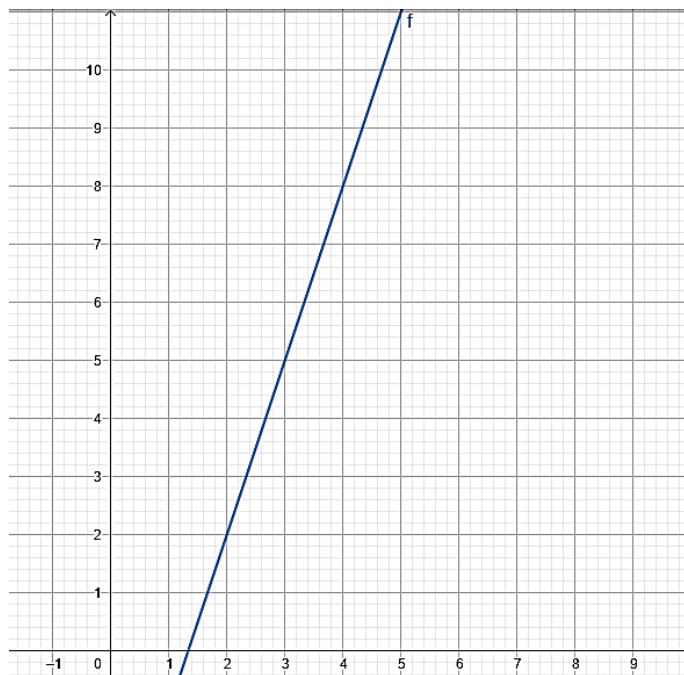


d) Como a) é nossa referência, percebemos que, em b), quando aumentamos a escala dos eixos, percebemos que os pontos ficam mais “juntinhos” do que na escala 1:1. Em c), quando aumentamos apenas a escala das abscissas, percebemos que a distância horizontal entre os pontos diminui bastante e a distância vertical entre os pontos permanece a mesma.

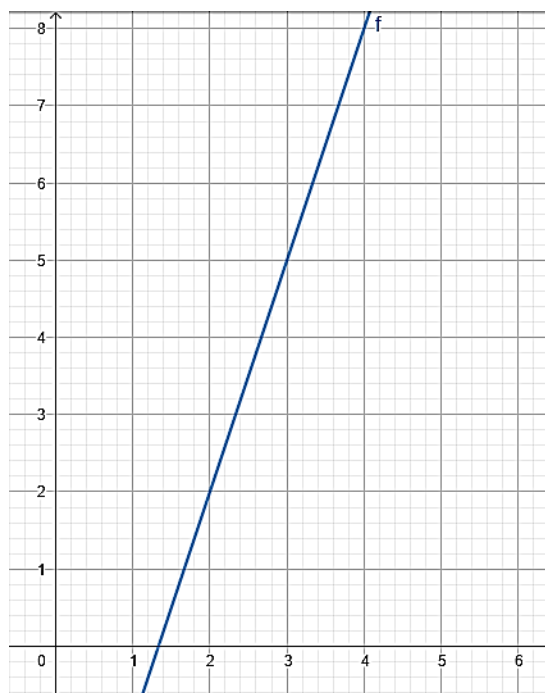
Lição 59 – Funções lineares

1.

a) A função é injetiva (injetora).



b) A função é bijetiva (bijetora)



2.

a) $C(x) = 120 + 0,40x$

b) $C(80) = 152$

c) $L(x) = 0,8x - 120$

Resolução:

Lucro(x) = quanto eu ganho por caneta – quanto gastei para produzir L(x)

$$= 1,20x - C(x)$$

$$L(x) = 1,20x - 120 - 0,40x$$

$$L(x) = 1,20x - 0,40x - 120$$

$$L(x) = 0,8x - 120$$

d) O lucro é 40 reais.

Resolução:

$$L(200) = 0,8x - 120 = 0,8 \cdot 200 - 120 = 160 - 120 = 40.$$

3.

a) $f(x) = 500 + 1,50x$

b) Ele ganhará 1400 reais se vender 600 jornais ($f(x) = 1400$ se $x = 600$).

4. O coeficiente “a” da função é chamado de coeficiente angular; ele está relacionado com a inclinação da reta em relação ao eixo x e também indica se a função será crescente ou decrescente. Se “a” for negativo, a função é decrescente e se “a” for positivo, a função é crescente. O coeficiente “b” da função é chamado de coeficiente linear e indica onde a função cortará o eixo y (das ordenadas. Ou seja, se $b = 4$, a função corta o eixo y (das ordenadas) em

4. Exemplos:

- $y =$

$$5x + 1 \quad a = 5$$

$$\text{e } b = 1.$$

A função é crescente ($a > 0$) e corta o eixo y no ponto (0, 1) (pois $b = 1$).

- $y = -2x$

$$+ 4 \quad a = -2 \text{ e } b$$

$$= 4$$

A função é decrescente ($a < 0$) e corta o eixo y no ponto (0, 4) (pois $b = 4$).

5. $f_{\frac{11}{2}} = -2$

6.

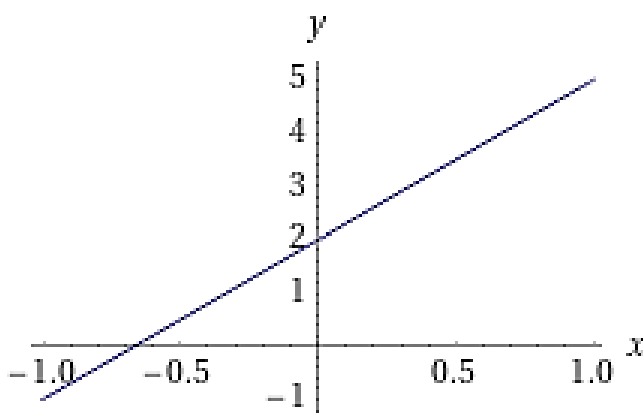
Lembre-se: a taxa de variação corresponde ao coeficiente "a"; onde a função cortará o eixo y corresponde ao coeficiente "b"; e onde a função cortará o eixo x corresponde à raiz da função (quando $y = 0$).

a) Função crescente (a

> 0). Taxa de variação (a): 3

Onde intercepta o eixo y (b): 2

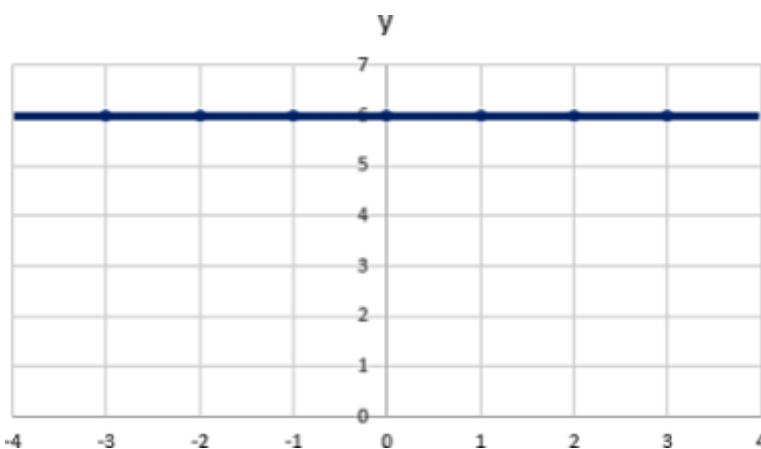
Onde intercepta o eixo x: $-\frac{2}{3}$



b) Função constante (a

= 0). Taxa de variação (a): 0

Onde intercepta o eixo y (b): 6



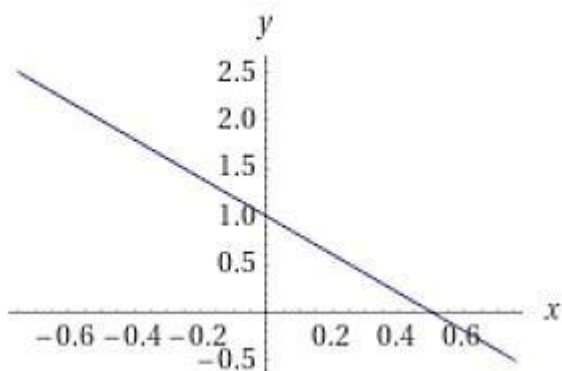
Onde intercepta o eixo x: não intercepta (é uma reta paralela à x, portanto, nunca interceptará esse eixo)

c) Função decrescente (a

< 0). Taxa de variação (a): -2

Onde intercepta o eixo y (b): 1

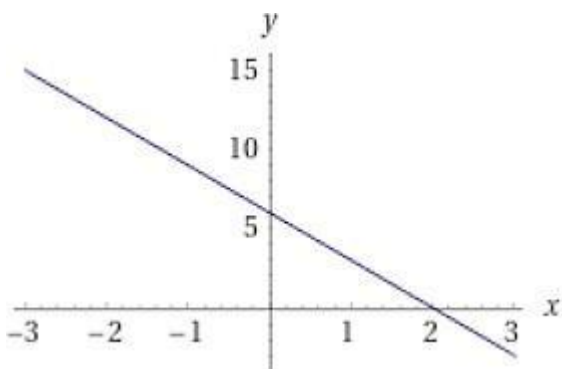
Onde intercepta o eixo x: $1 - \frac{1}{3}$



2

d) Função decrescente ($a < 0$). Taxa de variação (a): -3

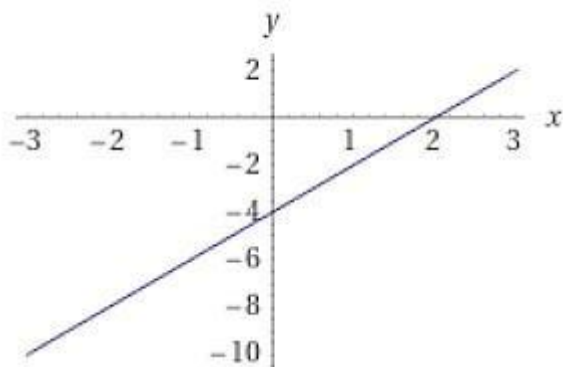
Onde intercepta o eixo y (b): 6 Onde intercepta o eixo x: 2



e) Função crescente ($a > 0$). Taxa de variação (a): 2

Onde intercepta o eixo y (b): -4

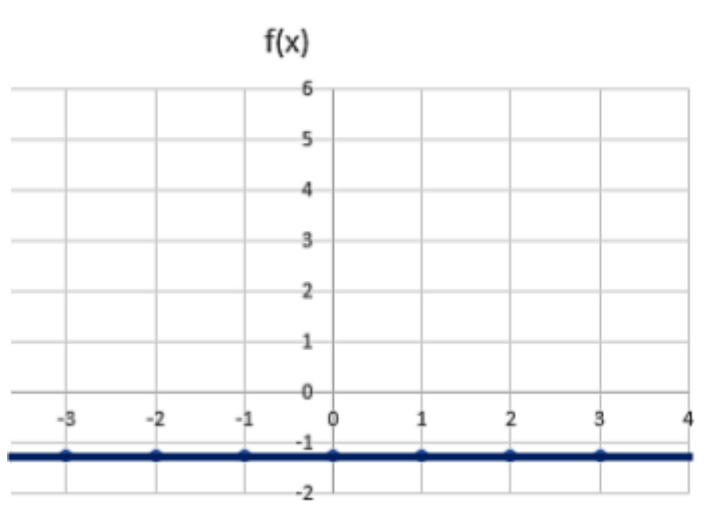
Onde intercepta o eixo x: 2



f) Função constante ($a = 0$). Taxa de variação (a): 0

Onde intercepta o eixo y (b): $1 - \sqrt{5}$

Onde intercepta o eixo x: não intercepta (é uma reta paralela à x, portanto, nunca interceptará esse eixo)



7. $x_0 = 30$.

Resolução:

Queremos saber em qual valor de x as funções se encontram (x_0).

Primeiro, precisamos saber qual a expressão de cada função a partir do gráfico. A

função A é do reservatório A.

A função B é do reservatório B.

- Função A: qual sua expressão?

Ela toca o eixo y em 720, portanto seu $b = 720$.

O problema nos diz que ela perde água numa *taxa constante* de 10 litros por hora. Essa *taxa constante* é o índice de *variação da função*, ou seja, é o próprio *coeficiente a*.

Como ela está perdendo, o índice é negativo. Portanto, $a = -10$.

Logo, a expressão para a função A é:

$$A(x) = -10x + 720$$

- Função B: qual sua expressão?

Ela toca o eixo y em 60, portanto seu $b = 60$.

O problema nos diz que ela ganha água numa *taxa constante* de 12 litros por hora. Essa *taxa constante* é o índice de *variação da função*, ou seja, é o próprio *coeficiente a*. Como ela está ganhando, o índice é positivo. Portanto, $a = 12$.

Logo, a expressão para a função B é:

$$B(x) = 12x + 60$$

Agora, queremos saber quando é que $A(x) = B(x)$, ou seja, quando elas se encontram. Basta igualar as duas expressões:

$$A(x) = B(x)$$

$$-10x + 720 = 12x + 60$$

$$-10x + 720 - 60 = 12x$$

$$-10x + 660 = 12x$$

$$660 = 12x + 10x$$

$$660 = 22x$$

$$22x = 660$$

$$x = \frac{660}{22}$$

$$x = 30$$

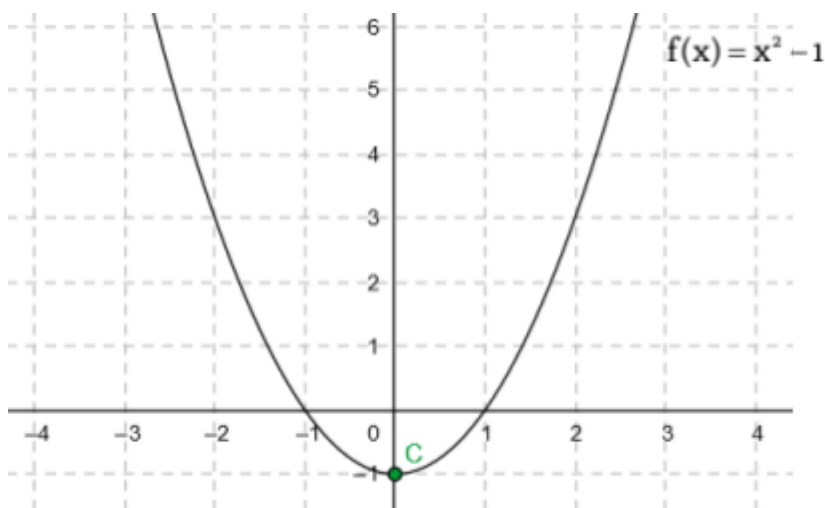
Portanto, elas se encontram quando $x = 0$. Logo, o ponto de encontro marcado no gráfico, $x_0 = 30$.

Lição 60 – Funções quadráticas

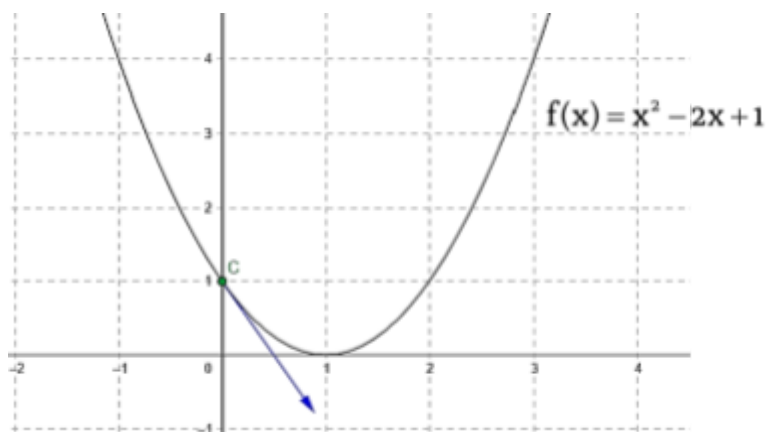
1. Uma equação é uma igualdade entre expressões algébricas, e apresenta no mínimo uma incógnita (um valor desconhecido). Resolver uma equação é encontrar o valor dessa incógnita. Já uma função é uma regra que relaciona cada elemento de um conjunto a um único elemento de um outro conjunto. Os valores desconhecidos das funções se denominam variáveis, pois podem mudar, diferentemente dos valores de uma equação, por exemplo. Na realidade uma função faz uso das equações para relacionar elementos de diferentes conjuntos.

2. Porque a palavra “parábola” deriva do latim “Parabola” ou do grego “Parábole” e significa “comparação”, formada por PARA “ao lado” + BALLEIN “jogar, atirar”. No gráfico os pontos parecem ser espelhados (simétricos) e por serem espelhados podem ser comparados, postos lado a lado. Além disso, a maioria dos objetos que são lançados ou atirados descrevem no ar uma figura muito parecida com a deste gráfico.

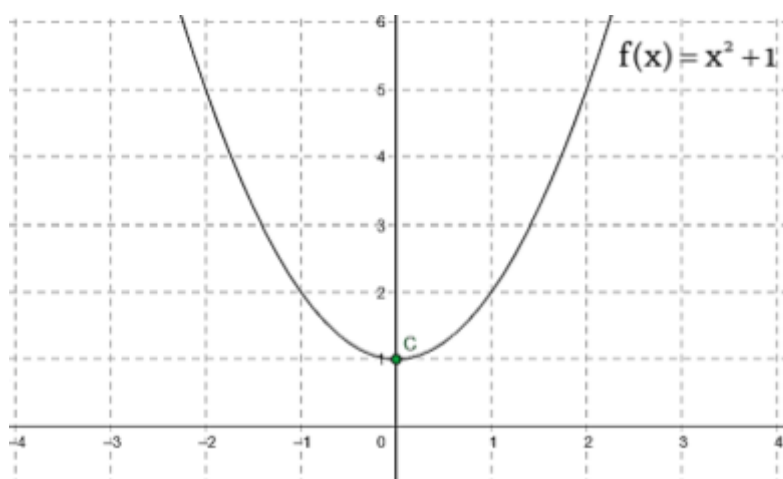
3. a)



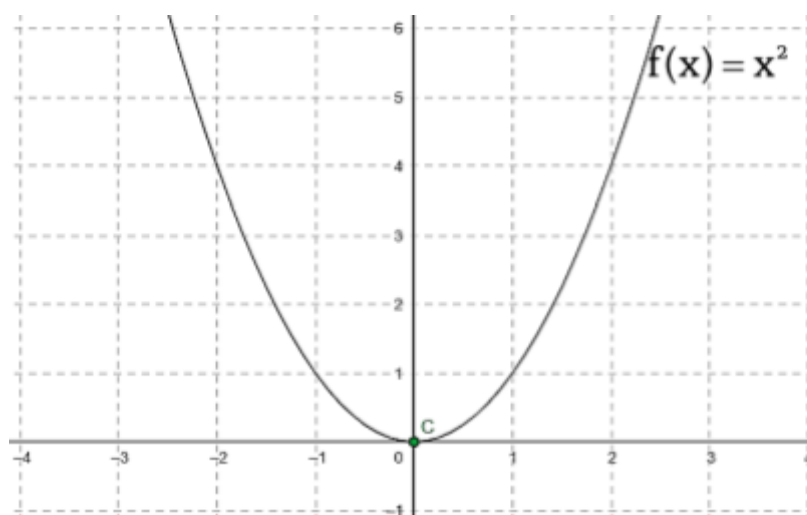
b)



c)



d)

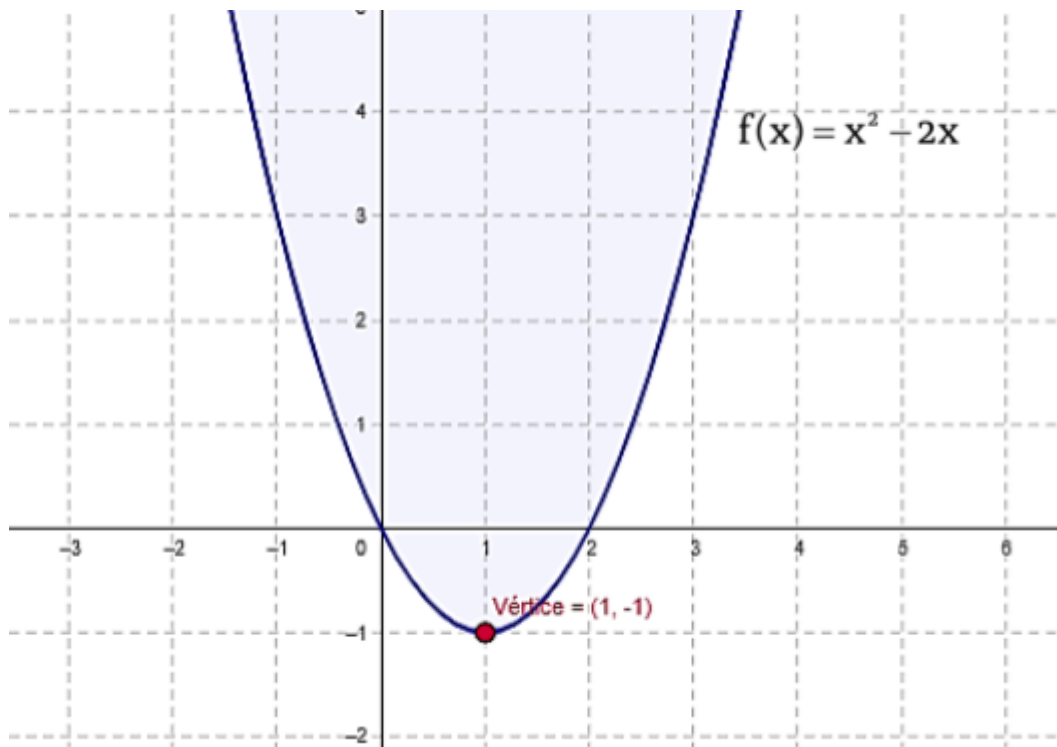


Lição 61 – Raízes da função quadrática

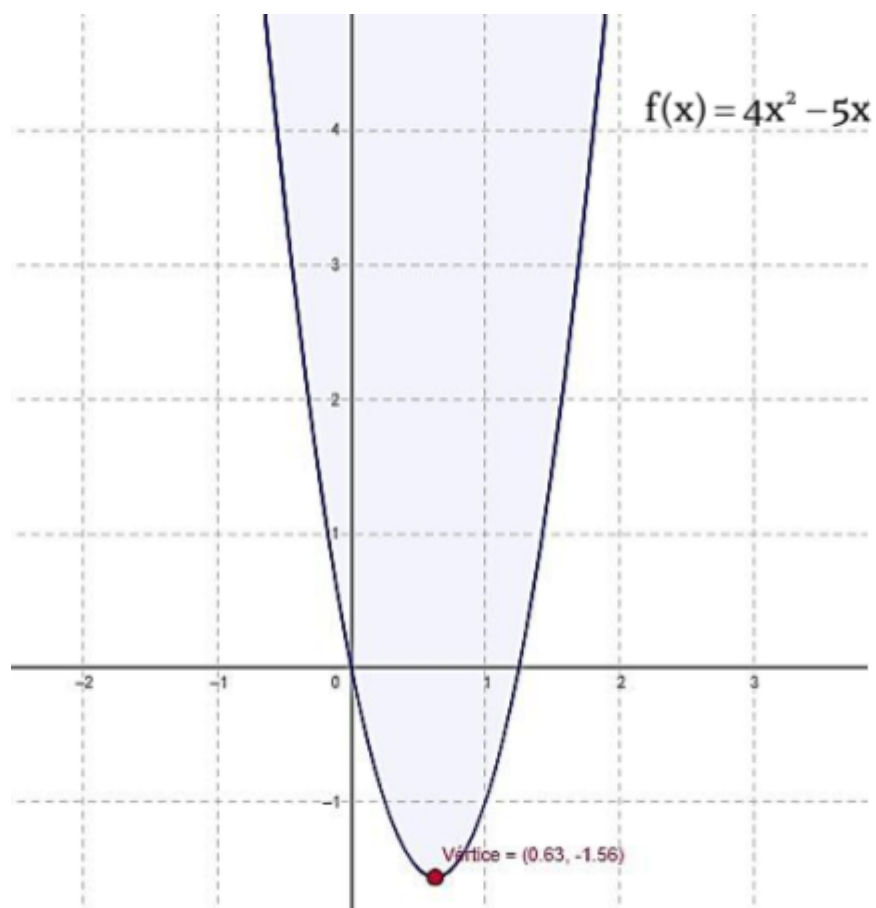
1. São os pontos em que a função passa pelo eixo x.

2.

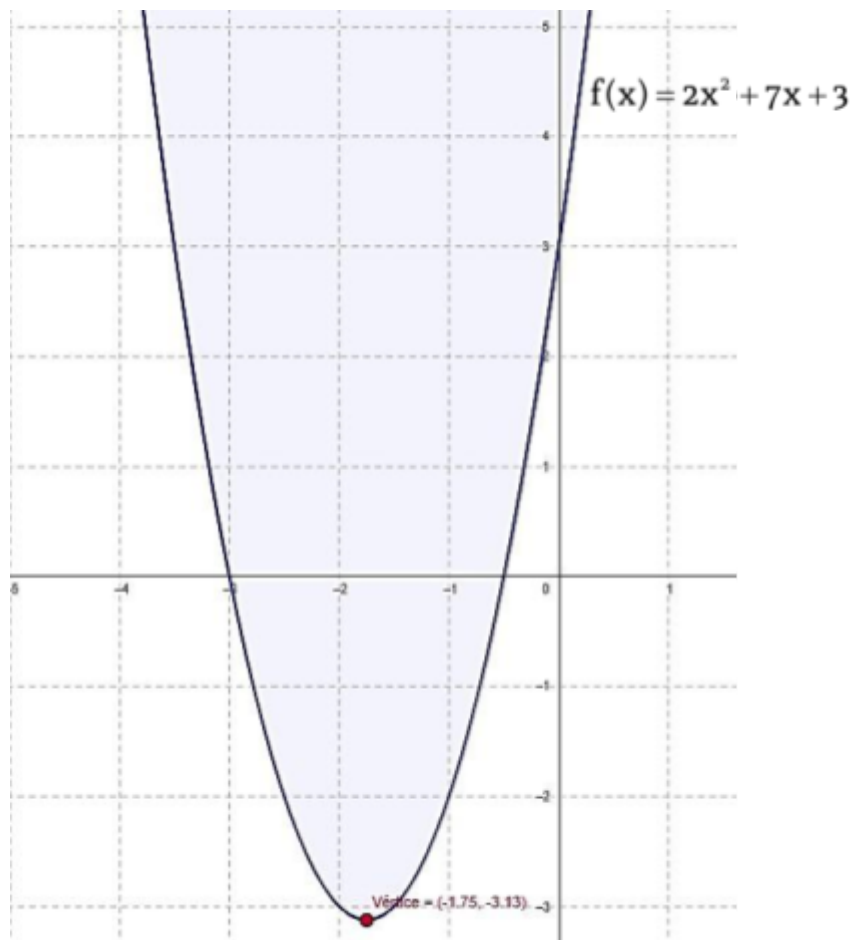
a) As raízes são (0,0) e (2,0).



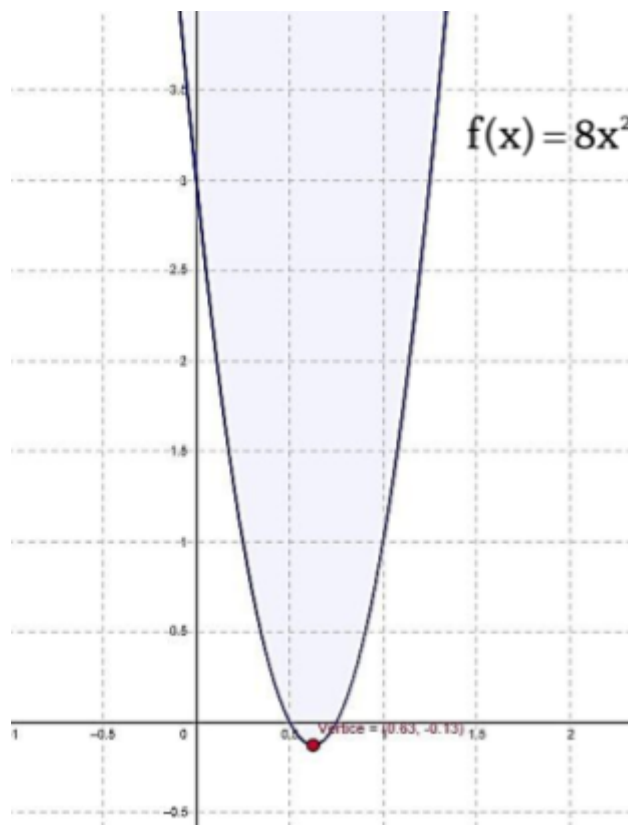
b) As raízes são (0,0) e $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$.



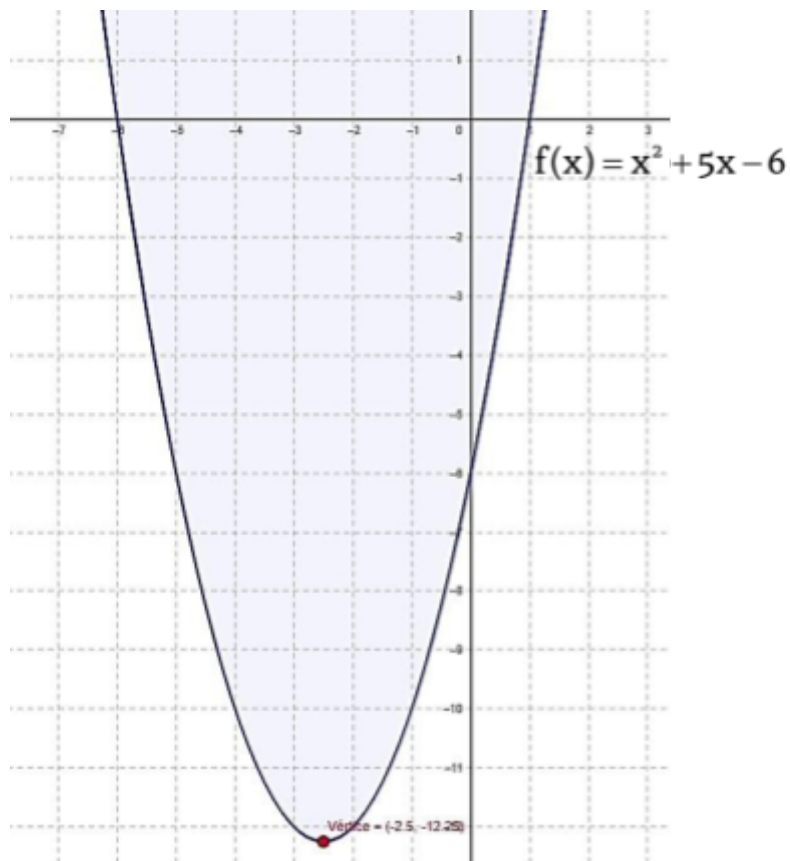
c) As raízes são $(-3,0)$ e $(-\frac{1}{2}, 0)$.



d) As raízes são $(1, 0)$ e $(3, 0)$.



e) As raízes são $(-6,0)$ e $(1,0)$.



3. Para $m < -3$.

Lembre-se: para que a função não tenha raízes reais, o delta deve ser negativo ($\Delta < 0$).

4. Para $k > 9$.

Lembre-se: para que a função tenha duas raízes reais, o delta deve ser positivo ($\Delta > 0$).

Lição 62 – Os coeficientes da função quadrática

1. O coeficiente “a” indica se a concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo. Se $a > 0$, a concavidade é voltada para cima. Se $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo. Já “b” indica como a parábola corta o eixo y. Se $b > 0$, a parábola corta o eixo y crescendo. Se $b < 0$, a parábola corta o eixo y decrescendo. E “c” indica onde a parábola corta o eixo y.

2. $m = 2$

3. $-\frac{7}{2}$

4.

a) $a < 0$; $b > 0$ e $c > 0$. $\Delta > 0$, pois a parábola possui duas raízes reais e distintas.

b) $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.

$\Delta < 0$, pois a parábola não possui raízes reais.

c) $a > 0$, $b < 0$ e $c > 0$.

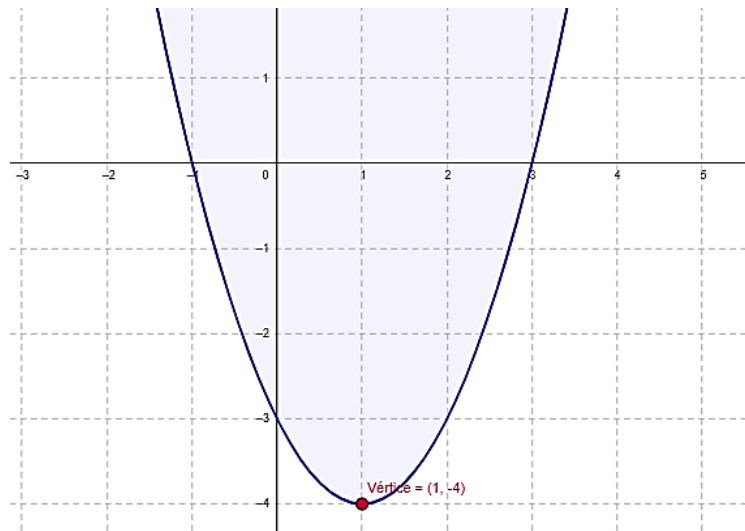
$\Delta > 0$, pois a parábola possui duas raízes reais e distintas.

d) $a < 0$, $b < 0$ e $c < 0$.

5.

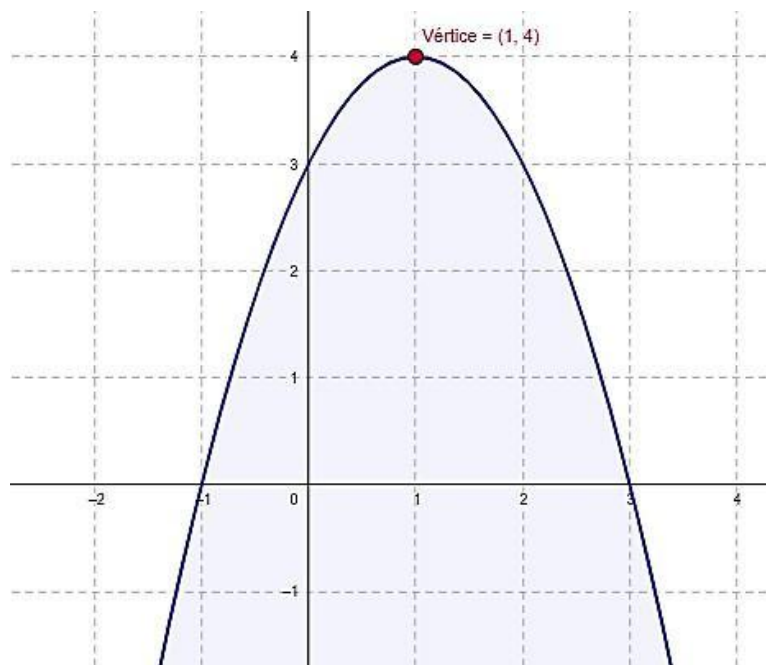
$\Delta = 0$, pois a parábola possui *apenas uma* raiz real.

a) A concavidade da parábola será para cima ($a > 0$), interceptará o eixo y em $(0, -3)$ decrescendo (pois, $b = -2$ e $c = -3$). Como $\Delta > 0$, a função possui duas raízes reais e distintas

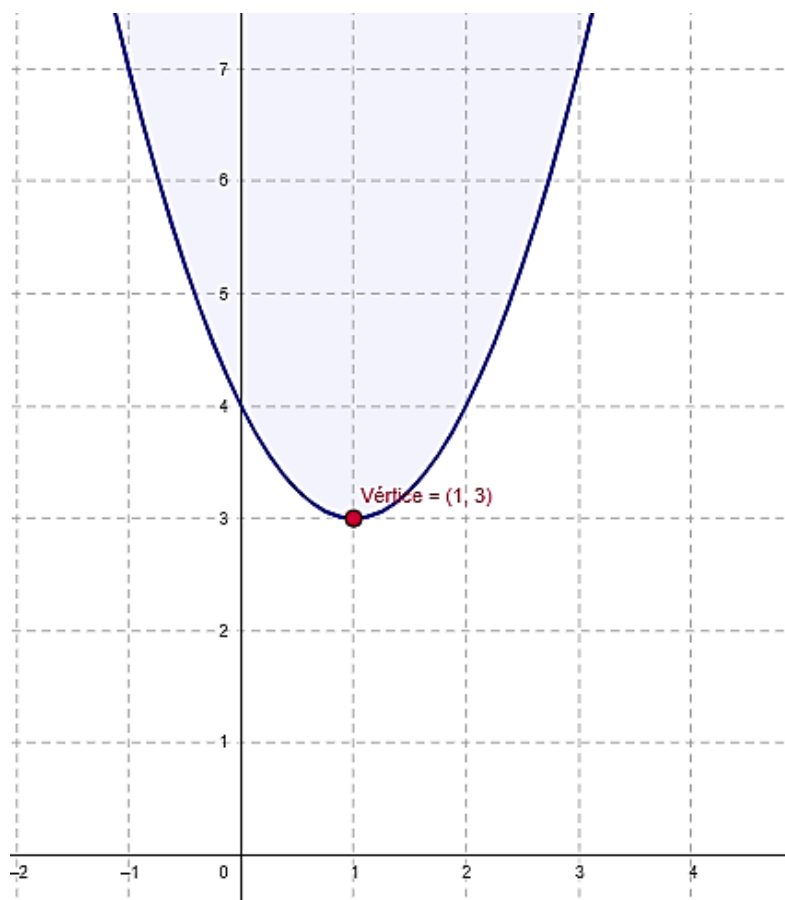


em: $(-1, 0)$ e $(3, 0)$.

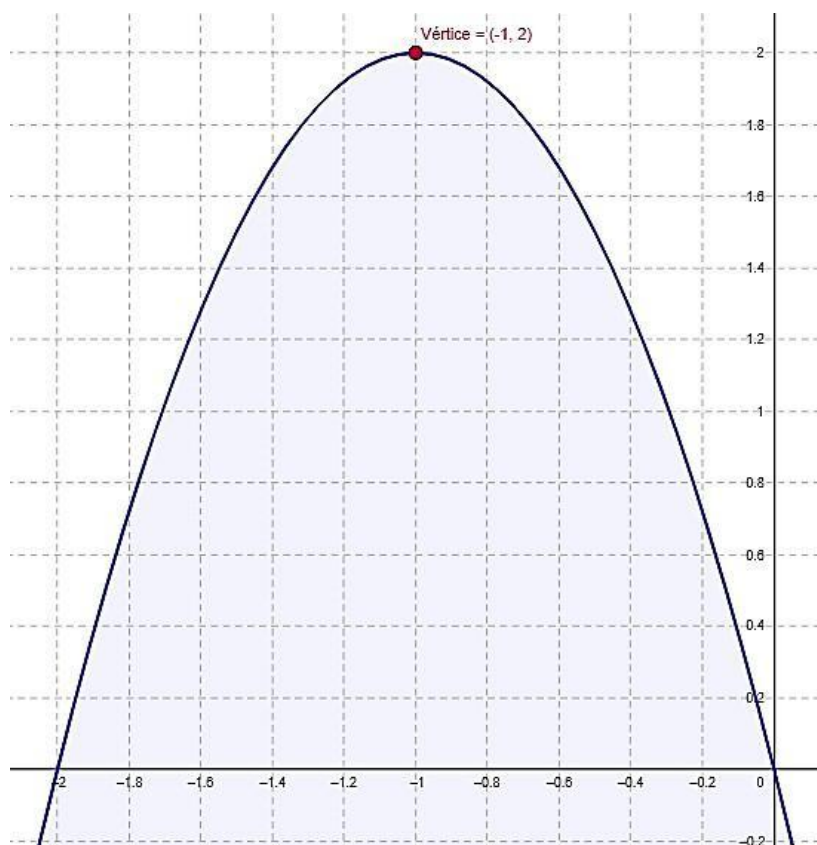
b) A concavidade da parábola será para baixo ($a < 0$), interceptará o eixo y em $(0, 3)$ crescendo (pois, $b = 2$ e $c = 3$). Como $\Delta > 0$, a função possui duas raízes reais e distintas: $(-1, 0)$ e $(3, 0)$.



c) A concavidade da parábola será para cima ($a > 0$), interceptará o eixo y em $(0,4)$ decrescendo (pois, $b = -2$ e $c = 4$). Como $\Delta < 0$, a parábola não terá raízes reais.



d) A concavidade da parábola será para baixo ($a < 0$), interceptará $(0,0)$ decrescendo (pois $b = -4$ e $c = 0$). Como $\Delta > 0$, a função possui duas raízes reais e distintas em: $(-2,0)$ e $(0,0)$.



6. O ponto de valor máximo ou mínimo de uma parábola é o vértice da parábola, ou seja, o ponto em que ela muda de sentido, onde se localiza seu eixo de simetria.

O valor máximo de uma função é o maior “y” que ela atinge, ou seja, ela cresce até determinado y e depois começa a decrescer. O valor máximo ocorre em parábolas com concavidade voltada para baixo ($a < 0$). O valor máximo de uma função é y_v .

O valor mínimo é o menor “y” que a função atinge, ou seja, ela decresce até esse y e depois começa a crescer. O valor mínimo ocorre em parábolas com concavidade voltada para cima ($a > 0$). O valor mínimo de uma função é também y_v .

7. O vértice da parábola é formado por um par ordenado que será identificado como (x_v, y_v) . Nas funções que possuem duas raízes reais, para encontrar o ponto x_v , basta fazer a média aritmética entre as raízes da função, ou seja:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Encontrado o ponto x_v , basta substituí-lo na função para encontrar o ponto y_v :

$$f(x_v) = ax^2 + bx + c$$

8.

a) $(0, -4)$.

b) $(5, 33)$

c) $(1, 1)$

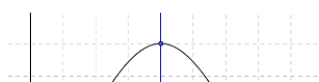
9.

a) O valor máximo da função é $y_v = 12$. O ponto de máximo é 2

b) O valor mínimo da função é $y_v = 0$. O ponto de mínimo é 1.

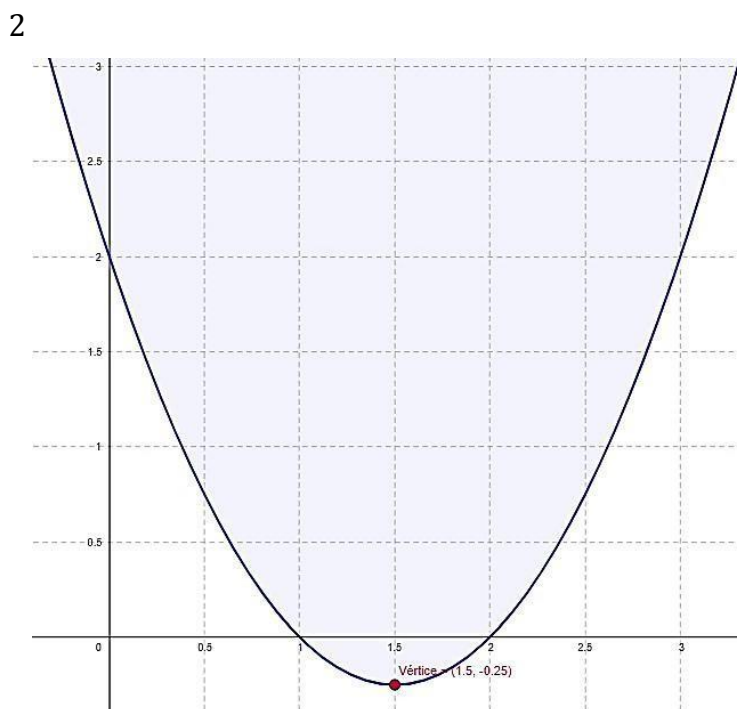
c) O valor máximo da função é $y_v = \frac{7}{18}$. O ponto de máximo é $\frac{4}{3}$.

10. O aluno deve tentar demonstrar sozinho. A demonstração está na própria lição:



11. Os zeros da função são em (1,0) e (2,0). O vértice é $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$. O valor mínimo é $-\frac{1}{4}$ e o

ponto de mínimo é $\frac{3}{2}$.



12. $v = 8$

13. A lei da função é $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

14. $m = -2$ ou $m = 1$.

Lição 63 – Sinal da função quadrática e inequações

1.

- Gráfico da questão 5)a): $f(x) < 0$, se $-1 < x < 3$ e $f(x) \geq 0$, se $x \geq 3$ ou $x \leq -1$
- Gráfico da questão 5)b): $f(x) < 0$, se $x < -1$ ou $x > 3$ e $f(x) \geq 0$, se $-1 \leq x \leq 3$
- Gráfico da questão 5)c): $f(x) > 0$, para qualquer x pertencente ao domínio da função.
- Gráfico da questão 5)d): $f(x) < 0$, se $x < -2$ ou $x > 0$ e $f(x) \geq 0$, se $-2 \leq x \leq 0$
- Gráfico da questão 11): $f(x) < 0$, se $1 < x < 2$ e $f(x) \geq 0$, se $x \geq 2$ ou $x \leq 1$

2.

$$\text{a) } S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ e } x > 2 \}$$

$$\text{b) } S = \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \}$$

$$c) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x \geq 1\}$$

$$|x \leq -3 \text{ ou } x \geq 1|$$

$$\mathbb{R} \quad 3$$

$$-\infty$$

$$\{ \quad \}$$

$$d) S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 4\}$$

$$\{ \quad 2 \quad \}$$

$$e) S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$$

$$|1 \leq x \leq 3|$$

$$4 \quad 2$$

$$-\infty$$

$$\{ \quad \}$$

$$3. \quad k = 5$$

$$4. \quad m = -3 \text{ ou } m = 3.$$

5.

a) F

b) V

c) V

d) F

e) V

f) V

Lição 64 – Avaliação

1.

a)

Quantidade de acólitos que decifraram	1	2	5	8	20	40
Prêmio para cada um	120	60	24	15	6	3

b) Da quantidade de acólitos que decifraram.

c) Seja “y”, o prêmio para cada um e “x”, a quantidade de acólitos que decifraram, a função

é: $y = 120 : x$

2.

a) $y = -10$

b) $x = -5$

$$c) x = \frac{20 - 3y}{5}$$

$$d) y = \frac{20 - 5x}{3}$$

3.

x	f(x)
0	-1
1	4
5	24
$\frac{3}{5}$	2
$-\frac{3}{5}$	-4

4. a) injetiva

Domínio = {A, B, C}

Contradomínio = {M, P, G, H}

Imagem = {M, P, G}

5.

a) Injetora. O domínio é $D = \{2, 3, 4, 5\}$. O contradomínio é $CD = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. A imagem é $I = \{0, 1, 2, 3\}$.

b) Sobrejetora. O domínio é $D = \{-1, 0, 1\}$. O contradomínio é $CD = \{1, 0\}$. A imagem é $I = \{1, 0\}$.

c) Não é uma função, pois há elementos do domínio que não possuem imagem (0 não possui imagem).

d) Não é uma função, pois um dos elementos do domínio (4) possui duas imagens.

e) Bijetora (sobrejetora e injetora ao mesmo tempo). Seu domínio é $D = \{1, 3, 4\}$. O contradomínio é $CD = \{2, 6, 8\}$. A imagem é $I = \{2, 6, 8\}$.

f) É uma função, pois todos os elementos do domínio têm imagem (ainda que seja a mesma imagem). Contudo, essa função não é injetora, pois os diferentes elementos do domínio não têm imagens diferentes. Também não é sobrejetora, pois o contradomínio não é igual à imagem. Seu domínio é $D = \{2, 5, 10, 20\}$. O contradomínio é $CD = \{1, 0, 2\}$. A sua imagem é $I = \{2\}$.

6.

a) Eixo x: eixo das abscissas. Eixo y: eixo das ordenadas.

b) 1º quadrante: x e y positivos.

2º quadrante: x negativo e y positivo.

3º quadrante: x e y negativos.

4º quadrante: x positivo e y negativo.

c) Por convenção, x está orientado da esquerda para a direita e y de baixo para cima. Isso quer dizer que em x os números positivos estão à direita do ponto zero, e em y os números positivos estão acima do zero. O espaço entre os números precisa ser sempre igual na escala x, e precisa ser sempre igual na escala y, embora não precise ser igual entre as retas (o espaço entre os números em X pode ser de 2 cm e entre os números de Y podem ser de 3cm; o importante é que em cada reta o padrão seja obedecido)

7.

$$A = (2, 1)$$

$$B = (0, 3)$$

$$C = (-2, 1)$$

$$D = (0, -2)$$

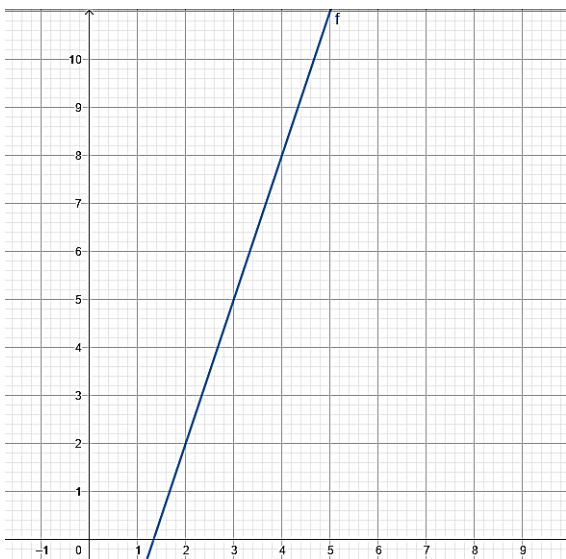
$$E = (1, 0)$$

$$F = (4, 4)$$

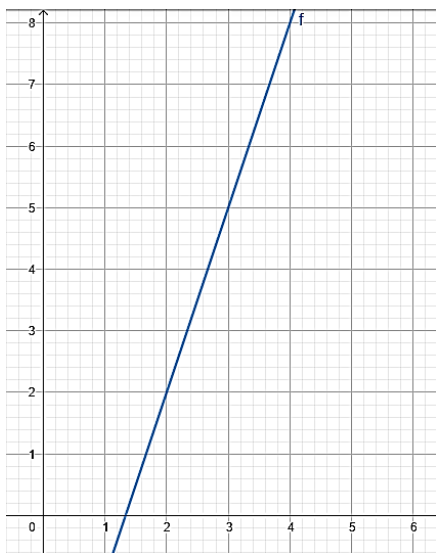
$$G = (-4, -3)$$

8.

a) A função é injetiva (injetora).



b) A função é bijetiva (bijetora)



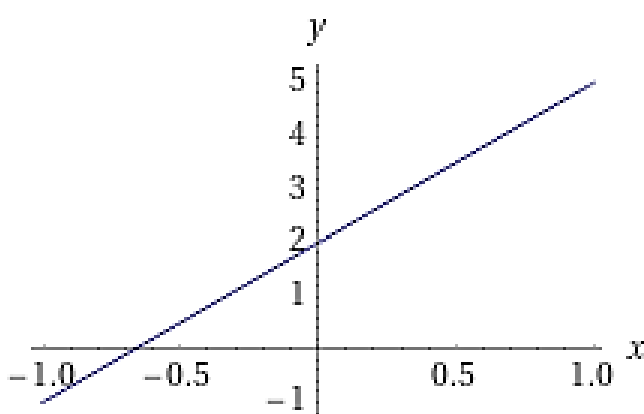
9.

Lembre-se: a taxa de variação corresponde ao coeficiente "a"; onde a função cortará o eixo y corresponde ao coeficiente "b"; e onde a função cortará o eixo x corresponde à raiz da função (quando $y = 0$).

a) Função crescente ($a > 0$). Taxa de variação (a): 3

Onde intercepta o eixo y (b): 2

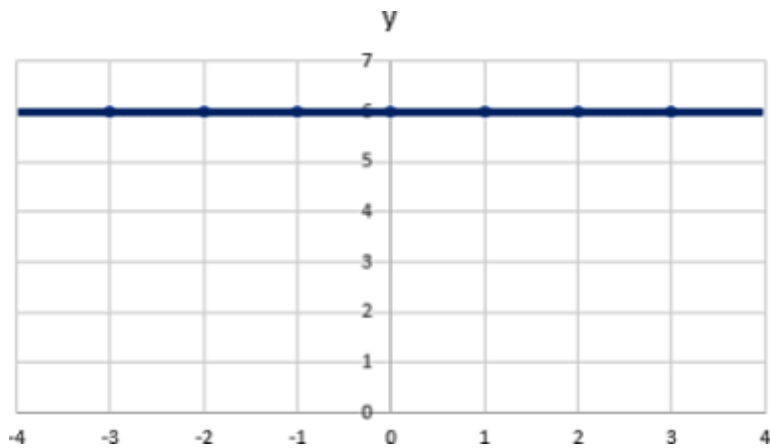
Onde intercepta o eixo x: $-\frac{2}{3}$



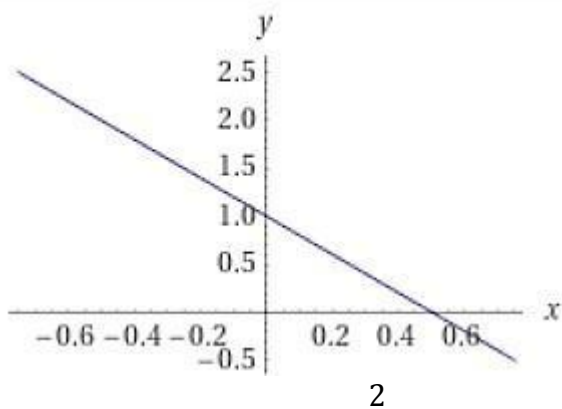
b) Função constante ($a = 0$). Taxa de variação (a): 0

Onde intercepta o eixo y (b): 6

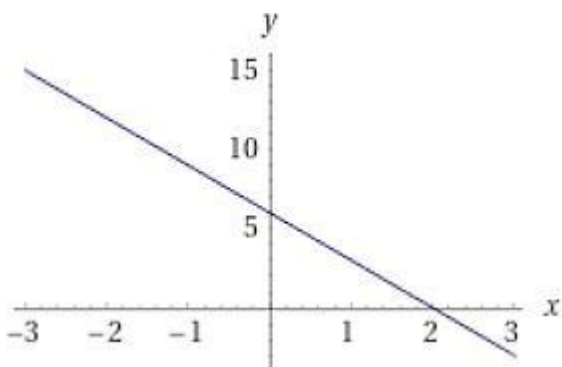
Onde intercepta o eixo x: não intercepta (é uma reta paralela à x, portanto, nunca interceptará esse eixo)



- c) Função decrescente ($a < 0$). Taxa de variação (a): -2
 Onde intercepta o eixo y (b): 1
 Onde intercepta o eixo x : 1 –



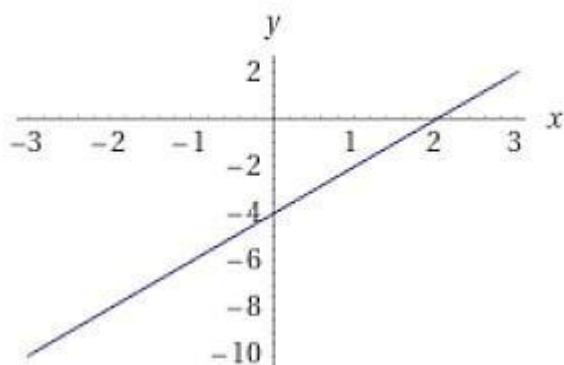
- d) Função decrescente ($a < 0$). Taxa de variação (a): -3
 Onde intercepta o eixo y (b): 6 Onde intercepta o eixo x : 2



- e) Função crescente ($a > 0$). Taxa de variação (a): 2

Onde intercepta o eixo y (b): -4

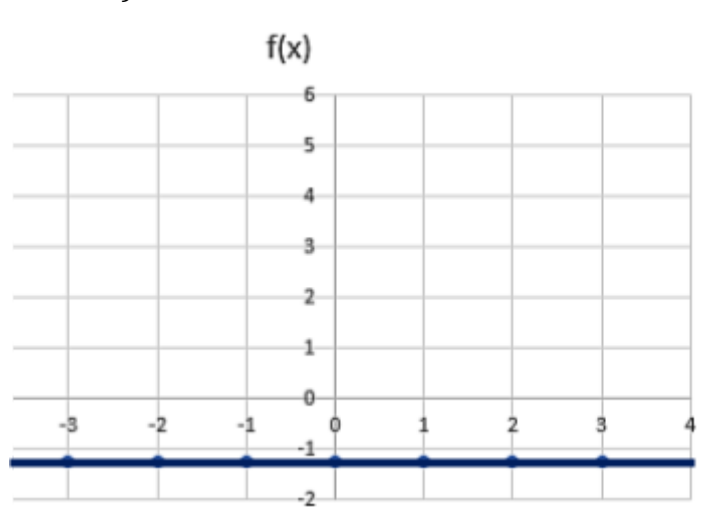
Onde intercepta o eixo x: 2



f) Função constante (a = 0). Taxa de variação (a): 0

Onde intercepta o eixo y (b): $1 - \sqrt{5}$

Onde intercepta o eixo x: não intercepta (é uma reta paralela à x, portanto, nunca interceptará esse eixo)



10.

a) $x = -1$ ou $x = \frac{1}{6}$

b) $x = 4$

c) $y = \frac{4}{3}$

d) $x = \frac{3}{2}$

0

u

$\frac{x}{1} = \frac{1}{2}$

-

$$e) t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{ou } t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$2$$

$$2$$

$$f) x = 4 \text{ ou } x = 7$$

$$g) x = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{0}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{5} = \frac{2}{2}$$

$$h) x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{0}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{3} = \frac{2}{4}$$

$$i) x = -1 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}$$

$$j) x = \frac{2}{3}$$

$$\frac{0}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{4} = \frac{2}{3}$$

11.

$$a) \text{ Soma} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{e Produto} = \frac{2}{3}$$

$$b) \text{ Soma} = -\frac{11}{2}$$

$$\text{e Produto} = -1$$

$$c) \text{ Soma}$$

$$= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

- -

$$\text{e Produto} = \frac{1}{9}$$

$$d) \text{ Soma} = \frac{5}{7}$$

$$\text{e Produto} = -\frac{3}{7}$$

$$e) \text{ Soma} = \frac{11}{-2} = -\frac{11}{2}$$

$$\text{e Produto} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$f) \text{ Soma} = 0 \quad \text{e Produto} = -\frac{7}{2}$$

$$-2 \quad 2$$

$$g) \text{ Soma} = -\frac{5}{8}$$

$$\text{e Produto} = 0$$

$$8$$

$$h) \text{ Soma} = \frac{-1}{-1} = \frac{1}{1}$$

$$\text{e Produto} = \frac{1}{-1} = -\frac{1}{1}$$

$$-2 \quad 2$$

$$\frac{-2 \quad 2}{-2 \quad 2}$$

Gabarito Passo a passo de Matemática

9º ano, Volume 5

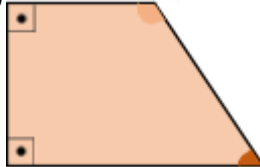
Lição 65 – Ângulos

1. Que tipo de ângulos você encontra em cada figura?

a)

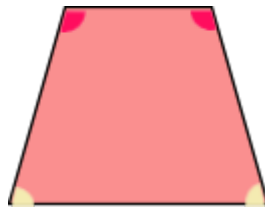


c)



b)

d)



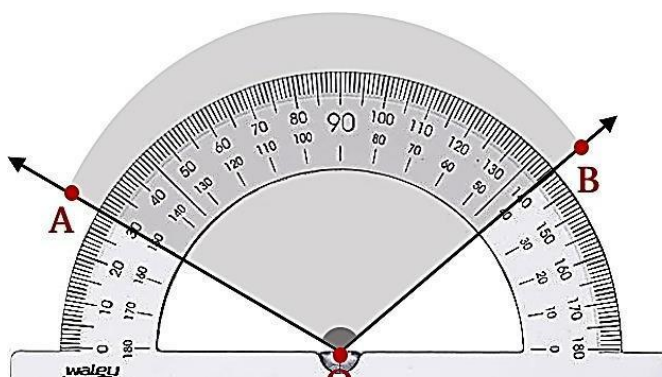
R. a) Quatro ângulos retos.

b) Dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos.

c) Dois ângulos retos, um agudo e um obtuso.

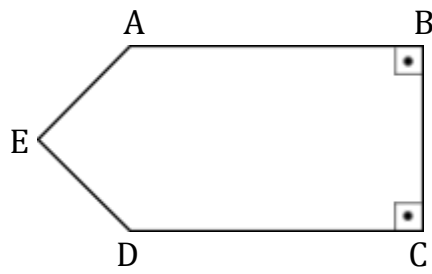
d) Dois ângulos retos, um agudo e um obtuso.

2. Qual é a medida do ângulo AÔB?



$$\text{R. } \hat{A}OB = 140 - 30 = 110^\circ.$$

3. Identifique na figura:



a) Os ângulos retos.

R. B e C.

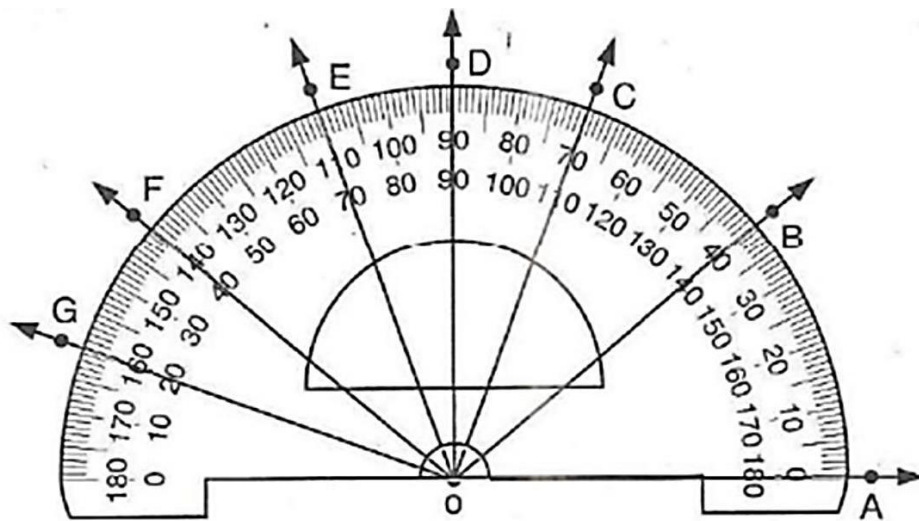
b) Os ângulos agudos.

R. E.

c) Os ângulos obtusos.

R. A e D.

4. Escreva as medidas em graus dos ângulos indicados pelo transferidor:



a) $\widehat{AOB}$

R. 40° .

b) $\widehat{AOC}$

R. 70° .

c) $\widehat{AOD}$

R. 90° .

d) $\hat{A}OE$

R. 110° .

e) $\hat{A}OF$

R. 140° .

g) $\hat{A}OG$

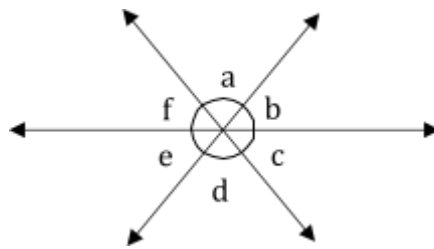
R. 160° .

Lição 66 – Ângulos opostos pelo vértice

1. Demonstre com suas palavras o teorema que diz que os ângulos OPV são congruentes.

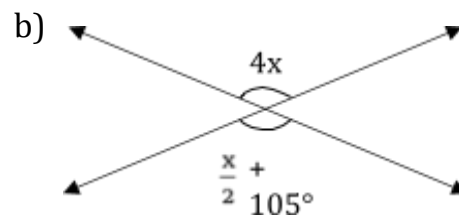
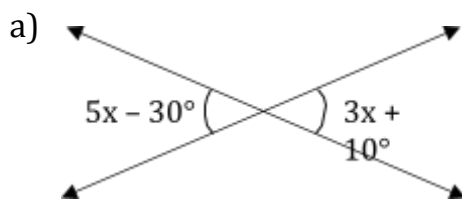
R. A resposta é pessoal, mas deve seguir a lógica da demonstração da apostila.

2. Quais são os três pares de ângulos opostos pelo vértice?



R. $\hat{a}$ é O.P.V de $\hat{d}$; $\hat{b}$ é O.P.V de $\hat{e}$; $\hat{c}$ é O.P.V de $\hat{f}$.

3. Calcule x:



R. a)

$$5x - 30 = 3x + 10$$

$$5x - 3x = 10 + 30$$

$$2x = 40$$

$$x = \frac{40}{2}$$

$$x = 20$$

a)

$$4x = \frac{x}{2} + 105$$

$$[4x - \frac{x}{2} + 105] \cdot 2$$

$$8x = x + 210$$

$$8x - x = 210$$

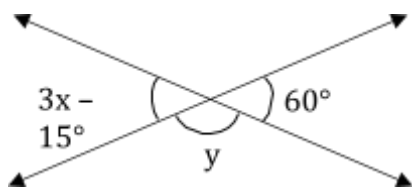
$$7x = 210$$

$$x = \frac{210}{7}$$

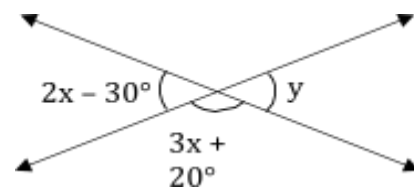
$$x = 30$$

4. Calcule x e y:

a)



b)



R. a)

$$3x - 15 = 60$$

$$3x = 60 + 15$$

$$3x = 75$$

$$x = \frac{75}{3}$$

$$x = 25$$

$$y + 60 = 180$$

$$y = 180 - 60$$

$$y = 120$$

b)

$$2x - 30 + 3x + 20 = 180$$

$$5x + 10 = 180$$

$$5x = 180 - 10$$

$$x = \frac{170}{5}$$

$$x = 34$$

$$2x - 30 = y$$

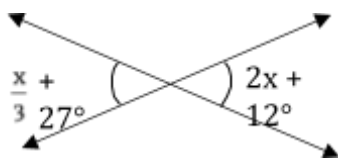
$$2 \cdot 34 - 30 = y$$

$$68 - 30 = y$$

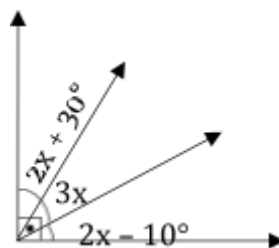
$$y = 38.$$

5. Calcule x:

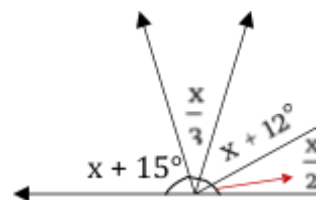
a)



b)



c)



R. a)

$$\frac{x}{3} + 27 = 2x + 12$$

$$[\frac{x}{3} + 27 = 2x + 12] \cdot 3$$

$$x + 81 = 6x + 36 \quad 6x - x = 81 - 36$$

$$5x = 45$$

$$x = \frac{45}{5}$$

$$x = 9$$

b)

$$2x + 30 + 3x + 2x - 10 = 90$$

$$7x + 20 = 90$$

$$7x = 90 - 20$$

$$7x = 70$$

$$x = 10$$

c)

$$\left[x + 15 + \frac{x}{3} + x + 12 + \frac{x}{2} = 180 \right] \cdot 6$$

$$6x + 90 + 2x + 6x + 72 + 3x = 1080$$

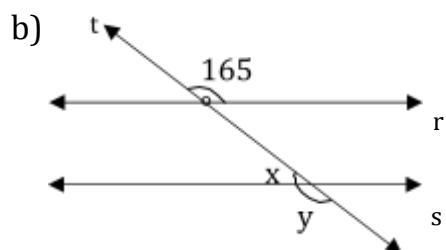
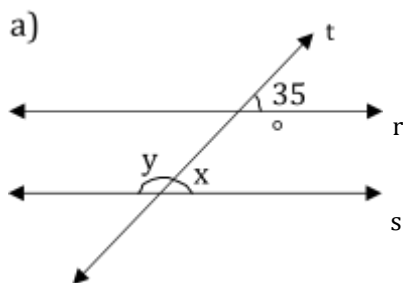
$$17x + 162 = 1080$$

$$17x = 1080 - 162$$

$$x = \frac{918}{17}$$

$$x = 54.$$

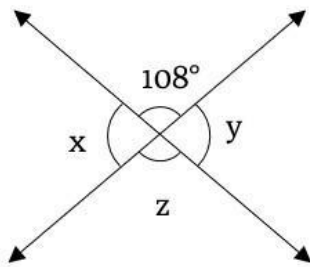
6. Sabendo que $r \parallel s$, determine os ângulos indicados pelas letras:



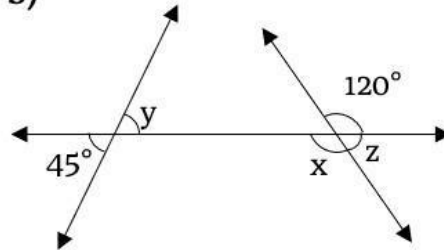
R. Resolver essa questão depois de estudar a lição de título “Ângulos alternos”.

7. Calcule os ângulos indicados pelas letras:

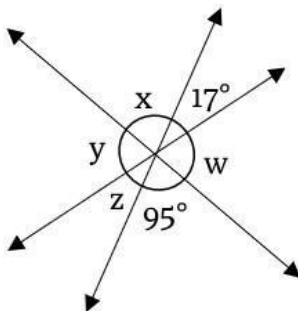
a)



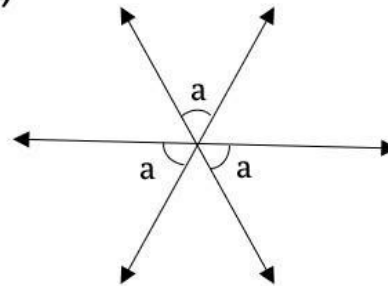
b)



c)



d)



R.

a) 108° é O.P.V de $\hat{z}$, portanto $\hat{z} = 108^\circ$

Além disso, sabemos que 108° é o ângulo suplementar de $\hat{x}$ e de $\hat{y}$. Portanto, temos:

$$\hat{x} = \hat{y} = 180 - 108$$

$$\hat{x} = \hat{y} = 72^\circ$$

b) 45° é O.P.V de $\hat{y}$, portanto $\hat{y}$

$= 45^\circ$. 120° é O.P.V de $\hat{x}$, portanto $\hat{x}$

$= 120^\circ$.

Além disso, sabemos que 120° é o ângulo suplementar de $\hat{z}$. Portanto, temos:

$$\hat{z} = 180 - 120$$

$$\hat{z} = 60^\circ$$

c) 17° é O.P.V de $\hat{z}$, portanto $\hat{z}$

$= 17^\circ$. 95° é O.P.V de $\hat{x}$, portanto $\hat{x}$

$= 95^\circ$.

Além disso, sabemos $17^\circ + w + 95^\circ$ é igual a 180. Resolvendo essa equação, temos:

$$17 + w + 95 = 180$$

$$w = 180 - 17 - 95$$

$$w = 68^\circ$$

d) Todos os ângulos dessa figura possuem a mesma medida. Basta aplicar o princípio do O.P.V para perceber. Sabemos que em um círculo, a soma de todos os ângulos é sempre 360° . Portanto, temos:

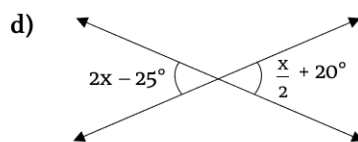
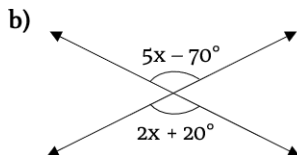
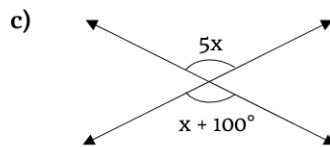
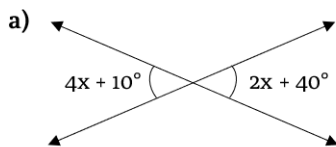
$$a + a + a + a + a + a = 360$$

$$6a = 360$$

$$a = \frac{360}{6}$$

$$a = 60^\circ$$

8. Calcule:



R. Em todos os casos, os ângulos são O.P.V. Portanto, precisamos os igualar e resolver as equações:

a)

$$4x + 10 = 2x + 40$$

$$4x - 2x = 40 - 10$$

$$2x = 30$$

$$x = \frac{30}{2}$$

$$x = 15$$

b)

$$5x - 70 = 2x + 20$$

$$5x - 2x = 20 + 70$$

$$3x = 90$$

$$x = \frac{90}{3}$$

$$x = 30.$$

c)

$$5x = x + 100$$

$$5x - x = 100$$

$$4x = 100$$

$$x = \frac{100}{4}$$

$$x = 25$$

d)

$$2x - 25 = \frac{x}{2} + 20$$

$$[2x - 25 = \frac{x}{2} + 20] \cdot 2$$

$$4x - 50 = x + 40$$

$$4x - x = 40 + 50$$

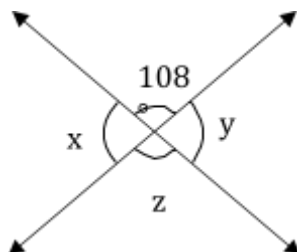
$$3x = 90$$

$$x = \frac{90}{3}$$

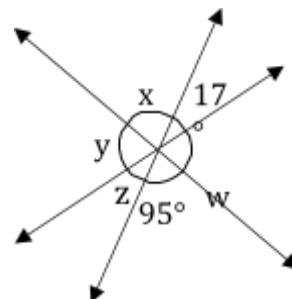
$$x = 30$$

9. Calcule os ângulos indicados pelas letras:

a)



b)

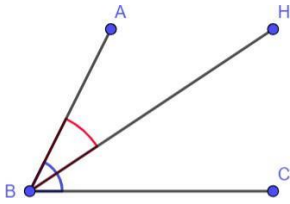


R. Exercício repetido. Ver passo a passo na questão 7.

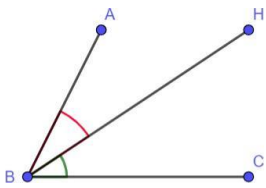
Lição 67 – Ângulos adjacentes

1. Defina o que são ângulos consecutivos e dê dois exemplos.

R. Dois ângulos são consecutivos quando possuem o mesmo vértice e um lado comum.



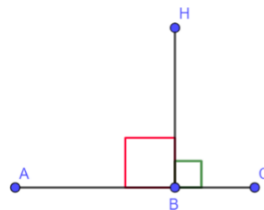
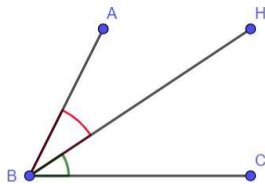
Os ângulos ABC e CBH são consecutivos pois possuem em comum o vértice B e o lado BC.



Os ângulos ABH e CBH são consecutivos pois possuem em comum o vértice B e o lado BH.

2. Defina o que são ângulos adjacentes e dê dois exemplos.

R. Dois ângulos são adjacentes quando são consecutivos e não possuem pontos internos.



3. Dois ângulos correspondentes, determinados por duas retas paralelas interceptadas por uma transversal, medem $2x + 40^\circ$ e $-3x + 90^\circ$.

a) Determine o valor de x.

b) Determine a medida de cada um dos ângulos

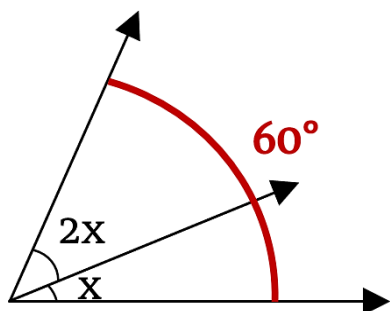
dados. R. Isso só foi ensinado na lição 68.

4. Dois ângulos opostos pelo vértice medem $3x - 75^\circ$ e $x + 15^\circ$. Determine o valor de x ?

R. Se são O.P.V

5. Determine o valor de x :

a)



R.

a)

$$2x + x = 60$$

$$3x = 60$$

$$x = \frac{60}{3}$$

$$x = 20$$

b)

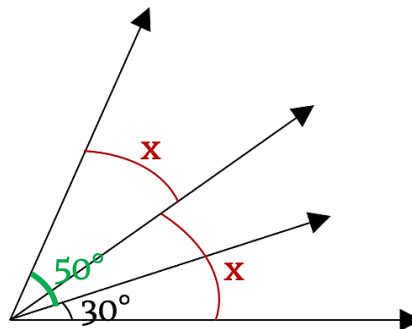
$$x + x = 50 + 30$$

$$2x = 80$$

$$x = \frac{80}{2}$$

$$x = 40^\circ$$

b)

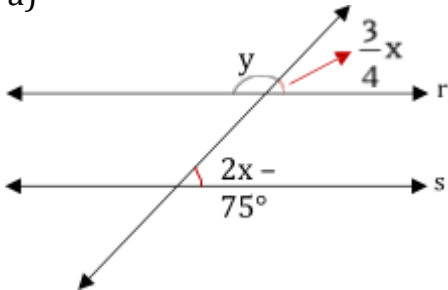


Lição 68 – Ângulos correspondentes

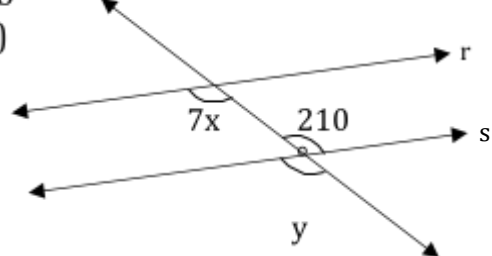
Nota: as lições 68 e 69 estão invertidas. Portanto, deve-se estudar primeiro a lição 69, para depois estudar a lição 68.

1. Em cada caso, determine o valor de x e y , sabendo que $r \parallel s$.

a)



b)



R.a) Os ângulos de medidas $2x - 75$ e $\frac{3x}{4}$ são correspondentes. Portanto:

$$2x - 75 = \frac{3x}{4}$$

$$[2x - 75 = \frac{3x}{4}] \cdot 4$$

$$8x - 300 = 3x$$

$$8x - 3x = 300$$

$$5x = 300$$

$$x = \frac{300}{5}$$

$$x = 6$$

Os ângulos de medidas y e $\frac{3x}{4}$ são suplementares. Portanto:

$$y + \frac{3x}{4} = 180$$

Como $x = 6$, temos:

$$y + \frac{3}{4} \cdot 6 = 180$$

$$y + \frac{18}{4} = 180$$

$$y = 180 - \frac{18}{4}$$

$$y = \frac{702}{4} = 175,5^\circ$$

b) Os ângulos de medidas $7x$ e 210° são correspondentes. Portanto:

$$R. 7x = 210$$

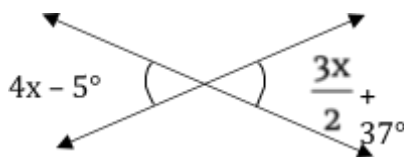
$$x = \frac{210}{7}$$

$$x = 30.$$

Os ângulos 210° e y são O.P.V. Portanto,

$$y = 210^\circ$$

2. Determine a medida de x .



R.

$$\begin{array}{rcl} 3x & & \\ 2 + 37 & \text{---} & \\ 3x & \text{---} & \end{array}$$

$$4x - 5 =$$

$$[4x - 5 = \quad \quad \quad 2 + 37] \cdot 2$$

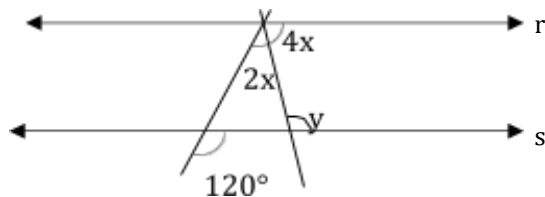
$$8x - 10 = 3x + 74$$

$$8x - 3x = 74 + 10$$

$$5x = 84$$

$$x = \frac{84}{5} = 16,8$$

3. Na figura seguinte, as retas r e s são paralelas. Qual é a medida do ângulo y ?



a) 100°

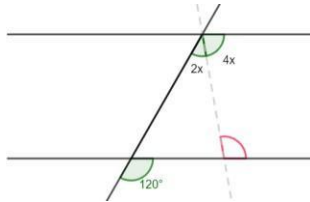
b) 110°

c) 120°

d) 130°

e) 140°

R. Observando o desenho é possível notar que o ângulo gerado pela soma de $2x$ e $4x$ é correspondente ao ângulo de medida 120° . Portanto, $2x + 4x = 120$



Sendo assim, temos que $x = 20$, pois:

$$2x + 4x = 120$$

$$6x = 120$$

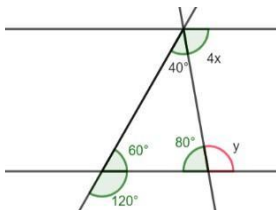
$$x = \frac{120}{6}$$

$$x = 20$$

Se $x = 20$, então $2x = 2 \cdot 20 = 40^\circ$.

Sabemos que o suplemento de 120° é 60° . Assim, sabemos a medida de dois ângulos do triângulo que foi formado pelas transversais. Portanto, para saber o valor do terceiro, basta subtrair de 180° as medidas já conhecidas. Assim, temos:

$$180 - 40 - 60 = 80^\circ$$



Sabemos ainda que 80° e y são suplementares. Assim:

$$80^\circ + y = 180^\circ$$

$$y = 180 - 80$$

$$y = 100^\circ$$

Resposta: alternativa a.

4. (UFMA) Dois ângulos opostos pelo vértice medem $(3x + 10^\circ)$ e $(x + 50^\circ)$. Um deles mede:

- a) 20°
- b) 70°
- c) 30°
- d) 80°
- e) 50°

R. Se são O.P.V, então possuem a mesma medida. Portanto, temos:

$$3x + 10 = x + 50$$

$$3x - x = 50 - 10$$

$$2x = 40$$

$$x = \frac{40}{2}$$

$$x = 20$$

Se $x = 20$, então a medida dos ângulos é:

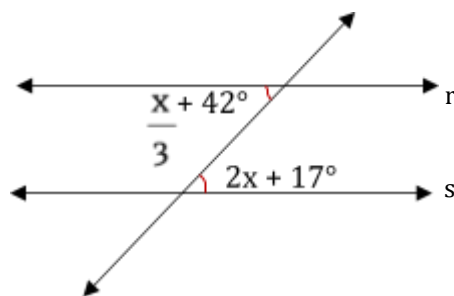
$$3x + 10 = 3 \cdot 20 + 10 = 60 + 10 = 70^\circ$$

$$x + 50 = 20 + 50 = 70^\circ$$

Portanto, a alternativa correta é a letra b.

Lição 69 – Ângulos alternos

1. Na figura ao lado, determine o valor de x , sabendo que $r \parallel s$.



R. Como r e s são paralelas, os ângulos $\frac{x + 42}{3}$ e $2x + 17$ são alternos internos, e portanto, são congruentes. Assim, temos:

$$\frac{x}{3} + 42 = 2x + 17$$

$$[\frac{x}{3} + 42 = 2x + 17] \cdot 3$$

$$x + 126 = 6x + 51$$

$$6x - x = 126 - 51$$

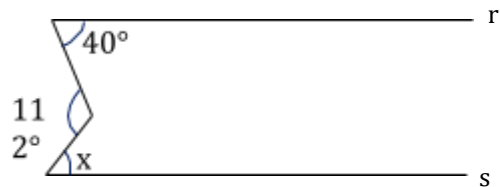
$$5x = 75$$

$$x = \frac{75}{5}$$

$$x = 15$$

2. (Unimontes-MG) Se $r \parallel s$, então o valor de x , na figura abaixo, é: x

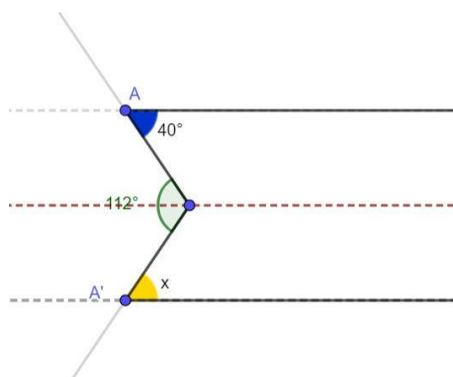
- a) 52°
- b) 68°
- c) 72°
- d) 58°



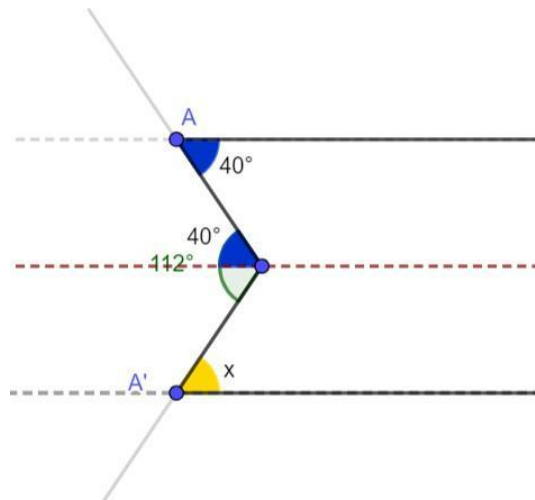
R. Vamos fazer um esquema em cores para facilitar a visualização da solução.



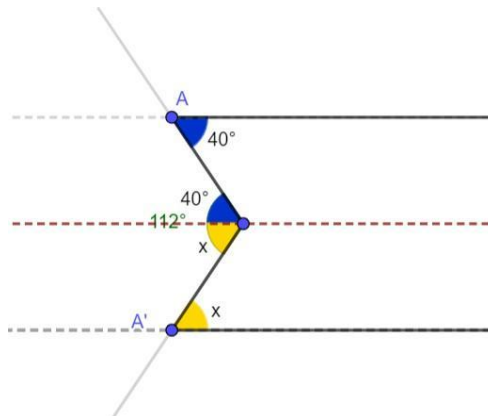
Traçando uma paralela a r e s pelo vértice do ângulo de 120° , temos:



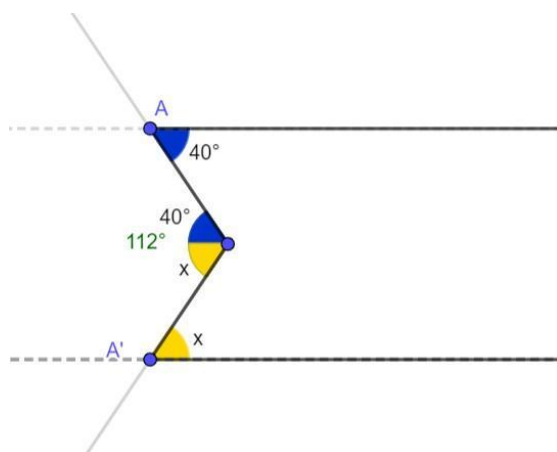
Ao traçar a paralela, é possível observar que uma parte do ângulo de 120° é um ângulo alterno ao ângulo de 40° . Assim, temos:



Da mesma forma, é possível observar que a outra parte do ângulo de 120° é um ângulo alterno ao ângulo de x° . Assim, temos:



Portanto, o ângulo de 120° é formado pela soma de 40° e x° :



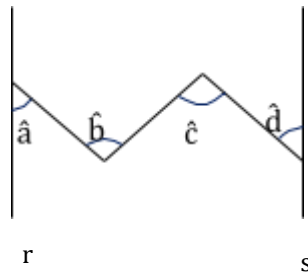
Portanto, temos:

$$40 + x = 120$$

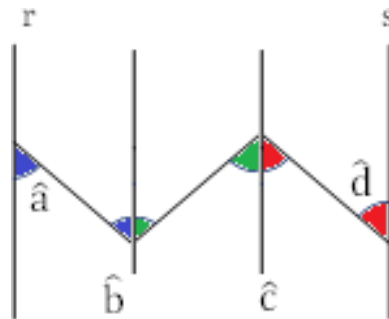
$$x = 120 - 40$$

$$x = 80^\circ$$

3. Na figura, as retas r e s são paralelas. O ângulo $\hat{a}$ mede 42° , o ângulo $\hat{b}$ mede 71° e o ângulo $\hat{d}$ mede 33° . Determine a medida do ângulo $\hat{c}$.



R. Como $\hat{a}$ mede 42° , $\hat{b} = \hat{a} + \text{ângulo pintado de verde}$ e $\hat{b}$ mede 71° então o ângulo pintado de verde é igual a 29° .

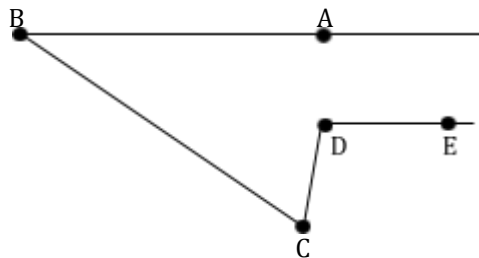


O ângulo $\hat{c} = \text{o ângulo verde} + \text{o ângulo vermelho}$. Como o ângulo vermelho é o ângulo $\hat{d}$ então, temos que:

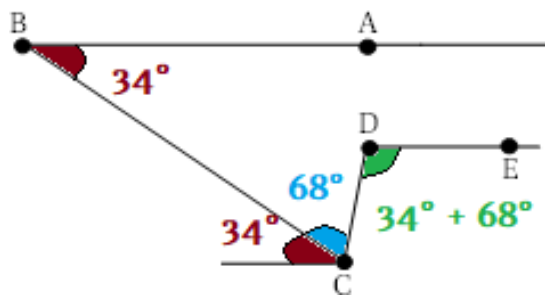
$$\hat{c} = \text{o ângulo verde} + \text{o ângulo vermelho}$$

$$\hat{c} = 29^\circ + 33^\circ = 62^\circ$$

4. Na figura, $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{DE}$. Sendo $\widehat{BCD} = 68^\circ$ e $\widehat{ABC} = 34^\circ$, calcule a medida do ângulo $\widehat{CDE}$.



R. Traçando uma paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ passando por C temos a seguinte imagem:



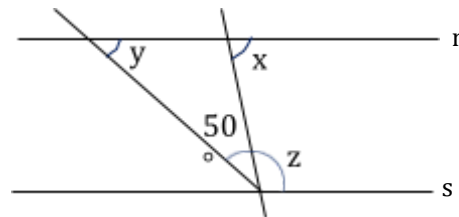
Como $\widehat{CDE}$ é alterno interno a soma do ângulo vinho e do ângulo azul, temos que:

$$\widehat{CDE} = 34^\circ + 68^\circ = 102^\circ$$

Lição 70 – Ângulos colaterais

1. As retas r e s da figura são paralelas. Sabendo que $x + 2y + 2z = 340^\circ$, qual é o valor, em graus, de y ?

- a) 30°
- b) 35°
- c) 40°
- d) 45°
- e) 50°



R.

É possível notar que, se desconsiderarmos uma das retas transversais (a que gerou os ângulos x e z), teremos que y é colateral do ângulo $50^\circ + z$. Assim, temos:

$$y + 50^\circ + z = 180^\circ$$

$$y + z = 180^\circ - 50^\circ$$

$$y + z = 130^\circ$$

$$z = 130^\circ - y$$

Além disso, os ângulos x e z são colaterais. Assim, temos:

$$x + z = 180$$

Como $z = 130 - y$, podemos substituir z na fórmula $x + z = 180$, encontrando o seguinte valor de x :

$$x + 130 - y =$$

$$180$$

$$x = y + 50$$

$$x = y + 50$$

Substituindo x e z em $x + 2y + 2z = 340^\circ$, temos:

$$x + 2y + 2z = 340^\circ$$

$$(y + 50) + 2y + 2 \cdot (130 - y) =$$

$$340$$

$$340$$

$$y + 310 = 340$$

$$y = 340 - 310$$

$$y = 30^\circ$$

Resposta: Alternativa a.

2. Na figura, ABCD é um retângulo e $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$. A medida de $\widehat{DAC}$ é a metade da medida de $\widehat{BAC}$.

Determine o valor de $a - b$.

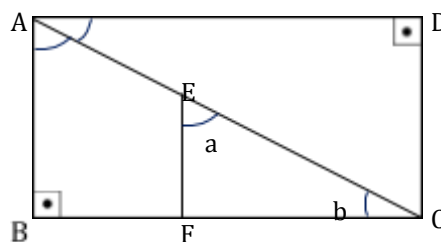
a) 10°

b) 20°

c) 30°

d) 45°

e) 50°



R. Como EF e AB são paralelas, os ângulos $\widehat{BAC}$ e $\widehat{FEC} = a$ são correspondentes. Assim:

$$a = \widehat{BAC}$$

Sabemos que o ângulo $\hat{A}$ mede 90° , por se tratar de um retângulo. Sabemos ainda que:

E que:

$$\frac{\widehat{D} + \widehat{A} + \widehat{C} + \widehat{B} + \widehat{A} + \widehat{C}}{2} = 90^\circ$$

$$\frac{\widehat{D} + \widehat{A} + \widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{B} + \widehat{A} + \widehat{C}}{2}$$

2

Para encontrar o valor de $\widehat{BAC}$, basta substituir $\widehat{DAC}$:

$$\widehat{DAC} + \widehat{BAC} = 90^\circ$$

$$\frac{\widehat{BAC}}{2} + \widehat{BAC} = 90^\circ$$

$$\frac{3\widehat{BAC}}{2} = 90^\circ$$

$$3\widehat{BAC} = 90^\circ \cdot 2$$

$$\widehat{BAC} = \frac{180}{3}$$

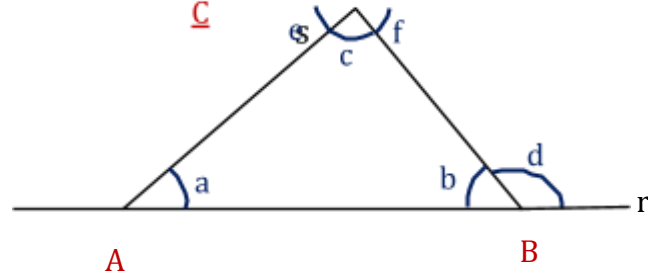
$$\widehat{BAC} = 60^\circ$$

Se $\widehat{BAC} = 60^\circ$, então $a = 60^\circ$ e $\widehat{DAC} = 30^\circ$.

Como EF e AB são paralelas, o ângulo EFC mede 90° . Portanto, se $a = 60^\circ$ e o outro ângulo mede 90° , então $b = 30^\circ$.

Assim, o valor de $a - b = 60 - 30 = 30^\circ$.

3. Na figura, as retas r e s são paralelas.



Sabendo que $a = (2x + 5^\circ)$, $d = (9x - 10^\circ)$ e $f = (3x + 10^\circ)$, determine:

a) x

R. Sabemos que os ângulos f e d são colaterais e que, portanto, são suplementares.
Assim, temos:

$$f + d = 180$$

$$(3x + 10) + (9x - 10) = 180$$

$$\begin{aligned}
 &3x + \\
 &10 + \\
 &9x - 10 \\
 &= 180 \\
 \\
 &12x = \\
 &180
 \end{aligned}$$

b) a e b R.

$$a = 2x + 5$$

$$a = 2 \cdot 15 + 5$$

$$a = 30 + 5$$

$$a = 35$$

$$\begin{aligned}
 12x &= 180 \\
 x &= 15
 \end{aligned}$$

Os ângulos b e d são suplementares. Descobrimos o valor de d , descobrimos o valor de b .

$$d = 9x - 10$$

$$d = 9 \cdot 15 - 10$$

$$d = 135 - 10$$

$$d = 125^\circ.$$

$$\text{Assim, } b = 180 - 125 = 55^\circ.$$

c) $a + b + c$

R. Os ângulos a , b e c são os ângulos internos do triângulo. Assim, temos que $a + b + c = 180^\circ$.

d) Como você classificaria os ângulos $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ACB}$ quanto às suas medidas?

R. Os ângulos a e b são acutângulos. O ângulo c é um ângulo reto, pois:

$$a + b + c = 180$$

$$35 + 55 + c =$$

$$180$$

$$90 + c = 180$$

$$c = 180 - 90$$

$$c = 90$$

e) De acordo com a soma de suas medidas, como são chamados os ângulos $\widehat{BAC}$ e $\widehat{ABC}$?

R. Os ângulos a e b são complementares, pois sua soma é 90° .

Lição 71 – Ângulos externos

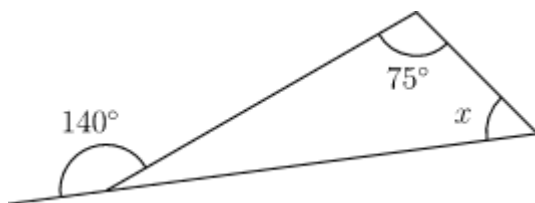
1. Defina com suas palavras o que é ângulo externo.

R. Comparar definição do aluno com a definição da apostila.

2. Defina o teorema do ângulo externo.

R. O teorema do ângulo externo enuncia que, fixado um triângulo, a medida de cada ângulo externo é igual à soma das medidas dos seus internos não adjacentes.

3. Calcule o valor x no triângulo abaixo.



R. Como 140° é um ângulo externo, temos que a soma dos ângulos internos não adjacentes a ele precisam ser iguais a 140° . Portanto, temos:

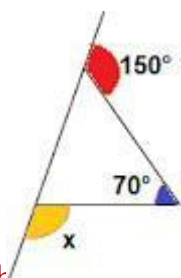
$$x + 75 = 140$$

$$x = 140 - 75$$

$$x = 65^\circ$$

4. Calcule o valor de x :

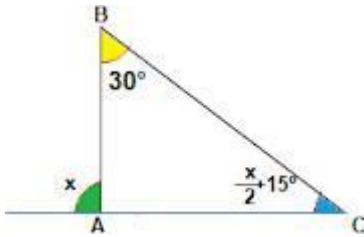
a)



R. Sabemos que o ângulo interno adjacente ao ângulo de 150° deve medir 30° , pois deve ser o suplemento de 150° . Portanto, temos a medida de dois ângulos internos: 30° e 70° . Pelo teorema do ângulo externo, temos:

$$x = 30 + 70 = 100^\circ$$

b)



R. Pelo teorema do ângulo externo, temos:

$$x = \left(\frac{x}{2} + 15\right) + 30$$

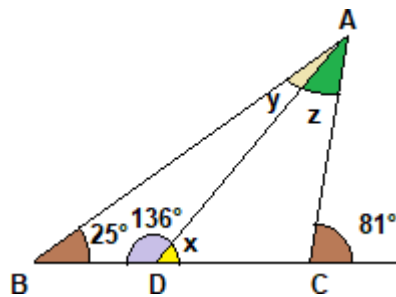
$$\left[x = \frac{x}{2} + 15 + 30 \right] \cdot 2$$

$$2x = x + 30 + 60$$

$$2x - x = 90$$

$$x = 90^\circ$$

5. Determine as medidas x, y e z indicadas na figura abaixo.



R. Os ângulos x e 136° são suplementares. Portanto, a medida de x é:

$$x + 136 = 180$$

$$x = 180 - 136$$

$$x = 44^\circ$$

A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° . Portanto, no triângulo ABD, temos:

$$y + 25 + 136 = 180$$

$$y + 161 = 180$$

$$y = 180 - 161$$

$$y = 19^\circ.$$

Pelo teorema do ângulo externo, temos que a soma de x e z devem ser iguais a 81° . Como já sabemos a medida de x, temos:

$$x + z =$$

$$81^\circ 44' + z$$

$$= 81$$

$$z = 81 - 44$$

$$z = 37.$$

Lição 72 – Circunferência

1. Defina:

a) Circunferência.

R. Circunferência é a figura geométrica formada por todos os pontos de um plano que distam igualmente de um ponto fixo desse plano.

b) Raio.

R. Qualquer segmento que une o centro a um ponto da circunferência se chama raio.

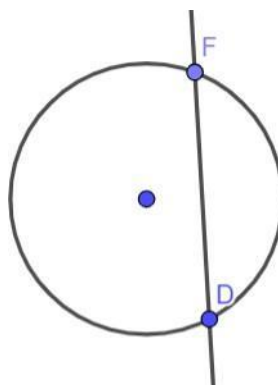
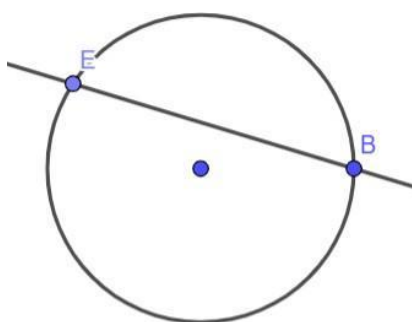
c) Diâmetro

R. A corda que passa pelo centro da circunferência chama-se diâmetro. O diâmetro é a maior corda da circunferência.

Lição 73 – Posição relativa de uma reta a uma circunferência

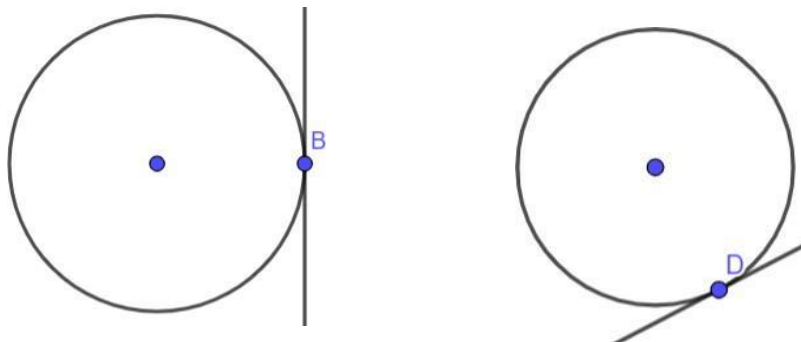
1. Defina reta secante na circunferência e dê dois exemplos.

R. Reta secante é a reta que corta a circunferência em dois pontos distintos.



2. Defina reta tangente na circunferência e dê dois exemplos.

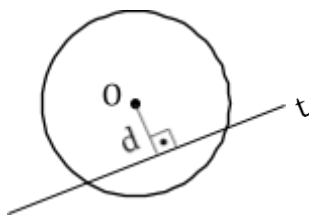
R. Reta tangente é a reta que passa por apenas um ponto da circunferência.



3. Defina reta externa na circunferência e dê dois exemplos.

R. Reta externa é toda reta que não possui ponto comum com a circunferência, isto é, não passa por ela.

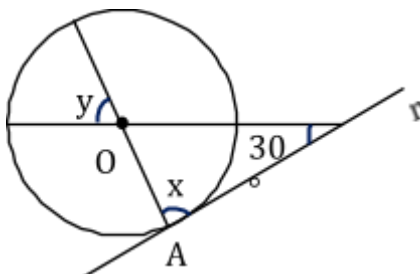
4. Uma reta t é secante a uma circunferência de centro O e 10 cm de raio. Indicando por d a distância do ponto O à reta t , qual é o maior valor inteiro que d pode assumir?



R. O maior valor inteiro que d pode assumir é 9 cm.

Lição 74 – Propriedade da reta tangente

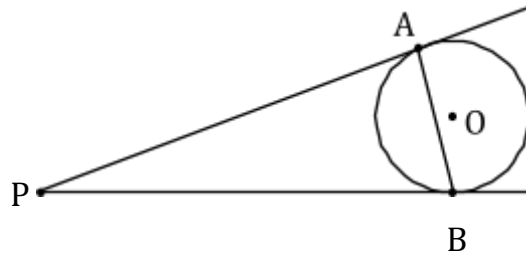
1. Na figura, a reta r é tangente à circunferência. Determine as medidas x e y .



R. A reta tangente forma um ângulo reto com o raio da circunferência. Portanto, x é um ângulo reto, isto é, $x = 90^\circ$.

No triângulo, sabemos que $x = 90^\circ$ e que o outro ângulo mede 30° . Portanto, o ângulo superior do triângulo mede $180 - 90 - 30 = 60^\circ$. Como esse ângulo é $\widehat{O.P.V}$ e y , então $y = 60^\circ$

2. Na figura, a medida do segmento PA é expressa por x , e a medida do segmento AB é expressa por y . Qual é o polinômio que expressa o perímetro do triângulo PAB?



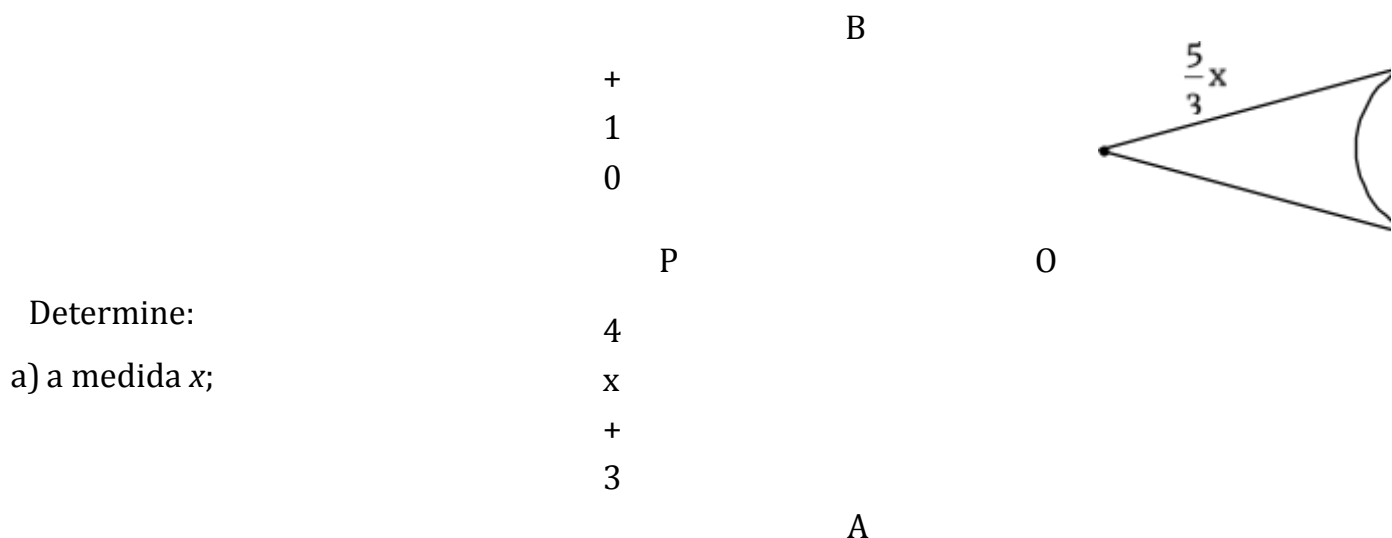
R. Sabemos que os segmentos PA e PB são congruentes. Portanto, $PA = PB = x$. O perímetro é a soma de todos os lados. Portanto, temos:

$$\text{Perímetro de PAB} = PA + PB + AB$$

$$\text{Perímetro de PAB} = x + x + y$$

$$\text{Perímetro de PAB} = 2x + y$$

3. Observe a figura.



Determine:

- a) a medida x ;

R. Sabemos que os segmentos PA e PB são congruentes. Portanto:

$$\frac{5}{3}x + 10 = 4x + 3$$

$$\left[\frac{5}{3}x + 10 = 4x + 3 \right] \cdot 3$$

$$5x + 30 = 12x + 9$$

$$30 - 9 = 12x - 5x$$

$$7x = 21$$

$$x = \frac{21}{7}$$

$$x = 3.$$

b) a medida do segmento PA;

$$PA = 4x + 3$$

$$PA = 4 \cdot 3 + 3$$

$$PA = 12 + 3$$

$$PA = 15$$

c) a medida do segmento PB;

R. Como $PA = PB$, então $PB = 15$.

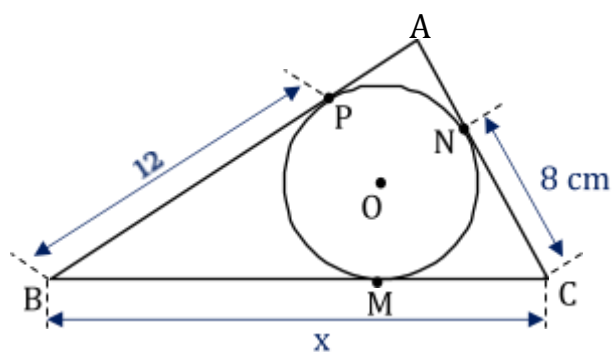
d) o perímetro do quadrilátero PAOB, se o comprimento do raio é 7 cm. R.

$$\text{Perímetro PAOB} = PA + PB + AO + OB$$

$$\text{Perímetro PAOB} = 15 + 15 + 7 + 7$$

$$\text{Perímetro PAOB} = 44 \text{ cm.}$$

4. Observe a figura.



Determine a medida:

a) x do lado BC do triângulo ABC.

R. Os três lados tangenciam a circunferência. Pelas propriedades da tangente, temos:

$$BP \equiv BM$$

Como BP mede 12 *u.m.*, então $BM = 12$.

Da mesma maneira, temos:

$$CM \equiv CN$$

Como CN mede 8 *u.m.*, então $CM = 8$.

Assim, o lado BC mede:

$$BC = BM + CM$$

$$x = 12 + 8$$

$$x = 20.$$

b) do segmento AN, caso o perímetro do triângulo ABC seja 46 cm.

R. Chamemos AN por y. Pela propriedade da tangente, temos que $AN \equiv AP = y$. Assim, o perímetro do triângulo ficaria da seguinte maneira:

$$\text{Perímetro ABC} = AB + BC + AC$$

$$46 = (12 + y) + 20 + (8 + y)$$

$$46 = 12 + y + 20 + 8 + y$$

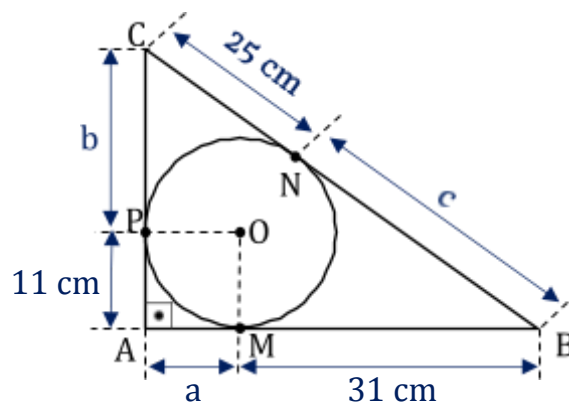
$$46 = 2y + 40$$

$$2y = 46 - 40$$

$$y = \frac{6}{2}$$

$$y = 3$$

5. Observe a figura a seguir.



Determine:

a) as medidas a , b e c indicadas na figura;

R. Pelas propriedades da tangente, temos:

$$CP \equiv CN$$

$$b = 25 \text{ cm}$$

$$AM \equiv AP$$

$$a = 11 \text{ cm}$$

$$BN \equiv BM$$

$$c = 31 \text{ cm}$$

b) o perímetro do triângulo ABC.

R.

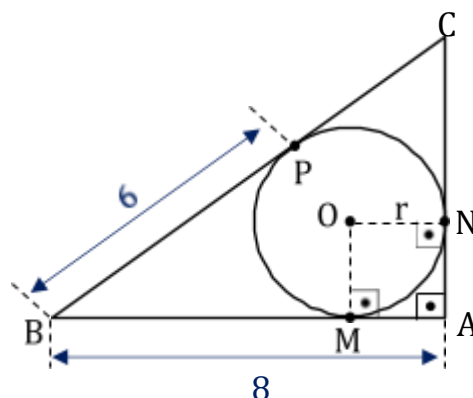
$$\text{Perímetro ABC} = AB + BC + AC$$

$$\text{Perímetro ABC} = (11 + 31) + (31 + 25) + (25 + 11)$$

$$\text{Perímetro ABC} = 42 + 56 + 36$$

$$\text{Perímetro ABC} = 134 \text{ cm.}$$

6. Considerando a figura, determine:



a) o comprimento r do raio da circunferência;

R. Pelas propriedades da tangente, temos que $BP \equiv BM$. Portanto, $BM = 8$.

Como $BA = 8$, e também que $BA = BM + MA$, temos que $MA = 2$.

Se o lado do quadrado mede 2 u.m. , então o raio, que é um lado do quadrado, também mede 2 u.m.

b) o perímetro do quadrado ANOM;

R. Perímetro = $4 \cdot \text{lado} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ u.m.}$

c) a expressão algébrica que representa o perímetro do triângulo ABC, se a medida do segmento PC é a .

R. Se $PC = a$, então $PN = a$.

Sendo assim, o perímetro ABC é:

$$\text{Perímetro ABC} = BA + BC + AC$$

$$\text{Perímetro ABC} = 8 + (6 + a) + (2 + a)$$

$$\text{Perímetro ABC} = 8 + 6 + a + 2 + a$$

$$\text{Perímetro ABC} = 2a + 16$$

d) o perímetro do quadrilátero BMOP.

R.

$$\text{Perímetro BMOP} = BM + OM + OP + BP$$

$$\text{Perímetro BMOP} = 6 + 2 + 2 + 6$$

$$\text{Perímetro BMOP} = 16.$$

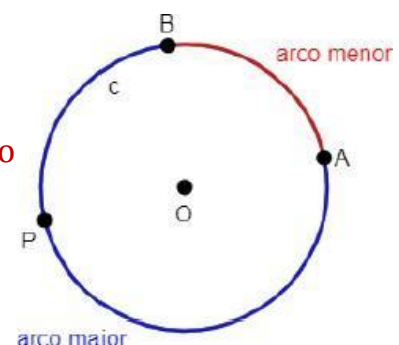
Lição 75 – Arco de circunferência

1. Defina arco em uma circunferência e dê dois exemplos.

R. Seja uma circunferência c representada abaixo com dois pontos distintos, A e B. Os pontos A e B dividem a circunferência em duas partes, e cada uma dessas partes é chamada arco de circunferência.

2. O que é o arco maior e o arco menor em uma circunferência?

R. Uma circunferência c com pontos A e B sempre delimitarão arcos, um maior e outro menor.



3. Defina:

a) Diâmetro

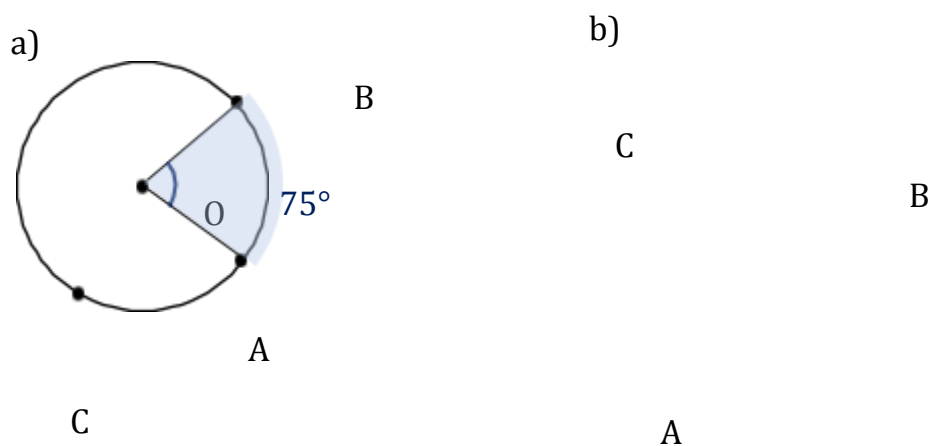
R. Ver definição dada no exercício da lição 72.

b) semicircunferência.

R. Quando as extremidades do arco são extremidades de um mesmo diâmetro, cada um dos arcos se denomina semicircunferência.

Lição 76 – Ângulo central

1. Em cada uma das figuras, dê a medida do arco AB e a do arco ACB:



R.

a)

Arco AB = 75°

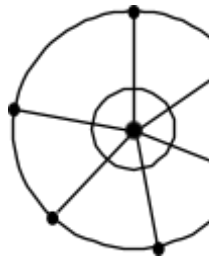
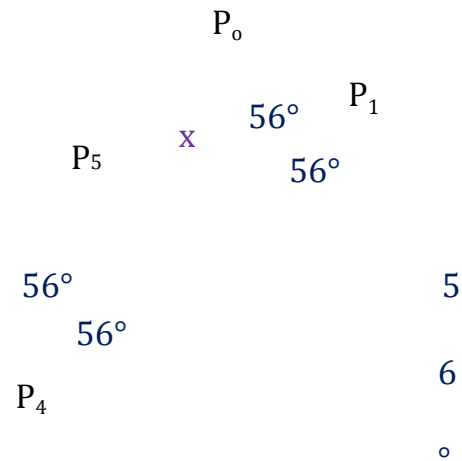
Arco ACB = $360^\circ - 75^\circ = 285^\circ$.

b)

Arco AB = 90°

Arco ACB = $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.

2. Observando a figura, dê o valor da medida x .



R.

$$x + 56 + 56 + 56 + 56 + 56 = 360$$

$$x + 280 = 360$$

$$x =$$

$$36$$

$$0 -$$

$$28$$

$$0$$

$$x =$$

$$80$$

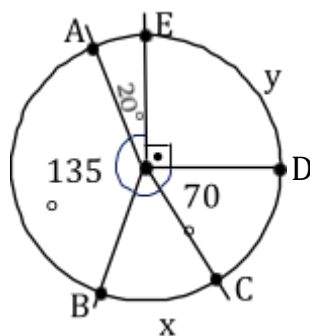
P

2

P

3

3. Na figura a seguir, calcule o valor de x (medida do arco BC) e o valor de y (medida do arco DE).



R. Percebemos que $y = 90^\circ$. Assim, temos:

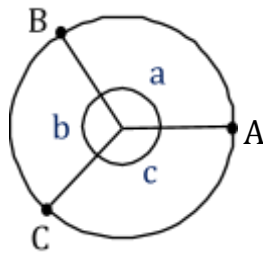
$$x + 70 + 90 + 20 + 135 = 360$$

$$x + 315 = 360$$

$$x = 360 - 315$$

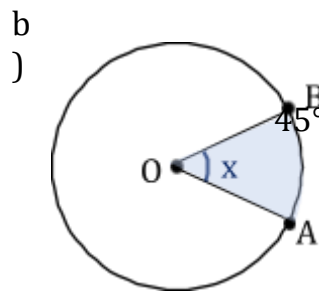
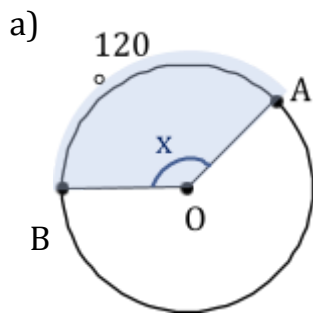
$$x = 45^\circ$$

4. Na figura, temos que $a = b = c$, em que a , b e c são as medidas dos ângulos centrais associados a cada arco. Determine a medida dos arcos AB, BC e CA.



R. Como os três ângulos são iguais, significa que a circunferência de 360° foi dividida em três partes iguais. Portanto, cada um dos ângulos, mede $360 : 3 = 60^\circ$. Portanto, essa é a medida de cada um dos ângulos.

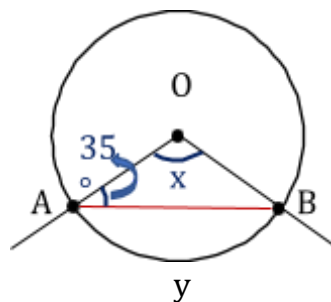
5. Em cada uma das figuras a seguir, calcule a medida x do ângulo central associado ao arco menor AB.



R. a) $x = 120^\circ$.

b) $x = 45^\circ$.

6. Sabendo que o triângulo OAB da figura é isósceles, determine a medida x do ângulo central $\widehat{AOB}$ e a medida y do arco AB associado a esse ângulo central.



R. AO e OB possuem a mesma medida. Portanto, o triângulo OAB é isósceles, e os ângulos de sua base têm a mesma medida. Assim, $\widehat{OAB} \equiv \widehat{OBA} = 35^\circ$. Agora, sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° , temos:

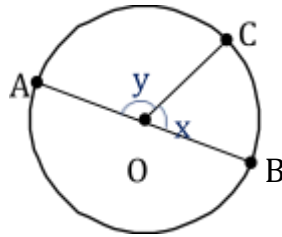
$$\angle OAB + \angle OBA + \angle AOB = 180^\circ$$

$$35 + 35 + x = 180^\circ$$

$$x = 180 - 70$$

$$x = 110^\circ$$

7. Sabendo que o arco BC mede 80° , calcule o valor da expressão $y - x$.



R. Sabemos que o ângulo x mede 80° , pela medida de seu arco BC. Pela imagem, é possível observar que y e x são suplementares. Portanto, temos:

$$y + x = 180$$

$$y + 80 =$$

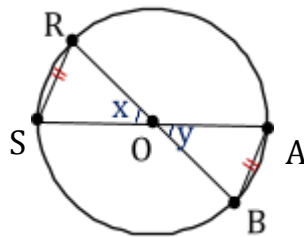
$$180$$

$$y = 180 - 80$$

$$y = 100^\circ.$$

Assim, $y - x = 100 - 80 = 20^\circ$

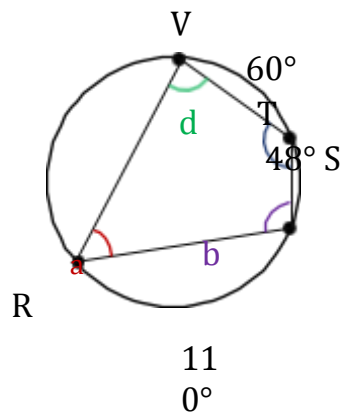
8. Na figura a seguir, as cordas AB e RS são congruentes. Você pode afirmar que os triângulos AOB e ROS são congruentes? Em caso afirmativo, que caso de congruência justifica sua resposta?



R. Sim, são congruentes pelo caso L.L.L.

Lição 77 – Ângulo inscrito

1. Determine as medidas a , b , c e d , indicadas na figura.



R. O ângulo d mede o mesmo que o arco RT.

$$d = \frac{\widehat{RT}}{2}$$

$$d = \frac{\widehat{RS} + \widehat{ST}}{2}$$

$$d = \frac{110 + 48}{2}$$

$$d = \frac{158}{2} = 79^\circ$$

O ângulo a mede o mesmo que o arco VS.

$$a = \frac{\widehat{VS}}{2}$$

$$a = \frac{\widehat{VT} + \widehat{TS}}{2}$$

$$a = \frac{60 + 48}{2}$$

$$a = \frac{108}{2} = 54^\circ$$

O arco RV mede:

$$RV + 110 + 48 + 60 = 360$$

$$RV + 218 = 360$$

$$RV = 360 - 218$$

$$RV = 142^\circ$$

O ângulo b mede o mesmo que o arco RT.

$$b = \frac{RT}{2}$$

$$b = \frac{RV + VT}{2}$$

$$b = \frac{142 + 60}{2}$$

$$b = \frac{202}{2} = 101^\circ$$

O ângulo c mede o mesmo que o arco SV.

$$c = \frac{SV}{2}$$

$$c = \frac{SR + RV}{2}$$

$$c = \frac{110 + 142}{2}$$

$$c = \frac{252}{2} = 126^\circ$$

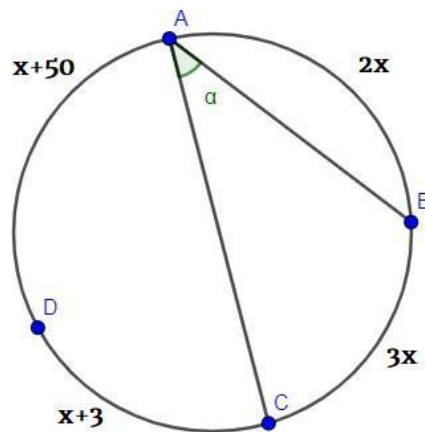
2. Em uma circunferência a medida do arco AB é $\text{med}(\text{AB}) = 2x$; a medida do arco BC é $\text{med}(\text{BC}) = 3x$; a medida do arco CD é $\text{med}(\text{CD}) = x + 3$; e a medida do arco DA é $\text{med}(\text{DA}) = x + 50^\circ$. Determine a medida do ângulo inscrito:

a) $\widehat{\text{BAC}}$;

b) $\widehat{\text{BCD}}$.

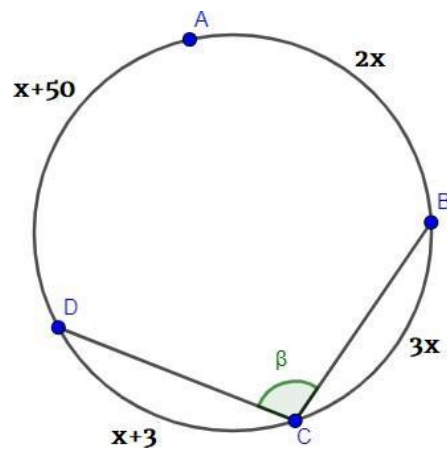
R.

a) O ângulo $\widehat{BAC}$ é da seguinte forma;



$$\widehat{BAC} = \frac{3x}{2}$$

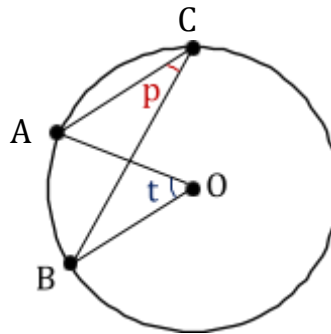
b) O ângulo $\widehat{BCD}$ é da seguinte forma;



$$\widehat{BCD} = \frac{2x + x + 50}{2} = \frac{3x}{2} + 25$$

Lição 78 – Casos de congruência – Parte II

1. Qual é a relação de igualdade entre as medidas dos ângulos p e t indicados na figura?



R. Sabemos que o arco AB mede o mesmo que o ângulo $\hat{t}$:

$$\text{Arco AB} = \hat{t}$$

Sabemos ainda que o ângulo $\hat{p}$ mede o mesmo que metade do arco AB. Assim, temos:

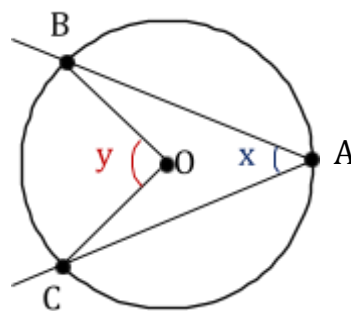
$$\hat{p} = \frac{\text{Arco AB}}{2}$$

Substituindo Arco AB, por $\hat{t}$, temos:

$$\hat{p} = \frac{\hat{t}}{2}$$

Assim, a relação entre os dois ângulos é que o ângulo $\hat{p}$ mede o mesmo que a metade do ângulo $\hat{t}$ (ou dizendo de outro modo: a medida do ângulo $\hat{t}$ é o dobro da medida do ângulo $\hat{p}$).

2. A medida do arco BC é 92° . Determine as medidas x e y indicadas na figura.

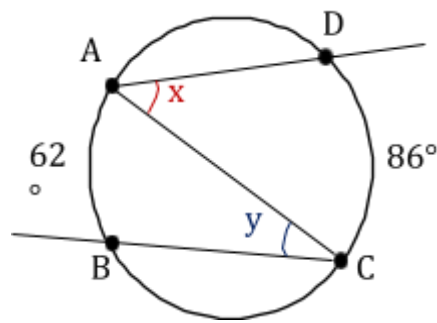


R. Se a medida do arco é 92° , então:

$$\hat{y} = 92^\circ$$

$$\hat{x} = \frac{92}{2} = 46^\circ$$

3. Considerando a figura abaixo, calcule o valor da expressão $x - y$.



R. Se a medida do arco AB é 22° , então: $\frac{62}{2} = 31^\circ$
 $\hat{y} =$

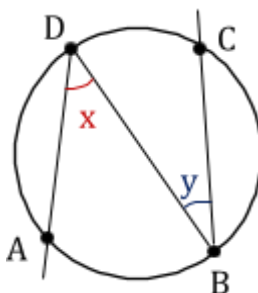
Se a medida do arco DC é 86° , então: $\frac{86}{2} = 43^\circ$
 $\hat{x} =$

Portanto, $x - y = 43 - 31 = 12^\circ$

4. A medida do arco AB corresponde a $\frac{1}{5}$ da medida da circunferência (em graus), enquanto a medida do arco CD corresponde a $\frac{1}{6}$ da medida da circunferência (em

6

graus). Determine as medidas x e y indicadas na figura.



R. Toda circunferência possui 360° . Portanto, se o arco AB corresponde a $\frac{1}{5}$ dessa circunferência, então sua medida é:

$$\text{Arco } AB = \frac{1}{5} \text{ de } 360^\circ$$

$$\text{Arco } AB = \frac{1}{5} \cdot 360^\circ$$

$$360^\circ$$

$$\textit{Arco } AB = \overline{5} = 72^\circ$$

Como a medida do arco é 72° , então a medida de x é:

$$\hat{x} = \frac{72}{2} = 36^\circ$$

Se o arco CD corresponde a $\frac{1}{6}$ dessa circunferência, então sua medida é:

$$\text{Arco CD} = \frac{1}{6} \text{ de } 360^\circ$$

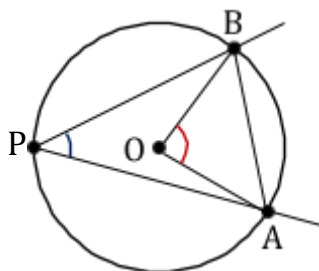
$$\text{Arco CD} = \frac{1}{6} \cdot 360^\circ$$

$$\text{Arco CD} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

Como a medida do arco é 60° , então a medida de y é:

$$\hat{y} = \frac{60}{2} = 30^\circ$$

5. Na circunferência da figura abaixo, a corda AB determina na circunferência um arco que mede 82° .



Sabendo que O é o centro e P um ponto qualquer da circunferência, determine a medida do ângulo:

a) AOB

R. Como a medida do arco é 82° , então a medida de AOB é:

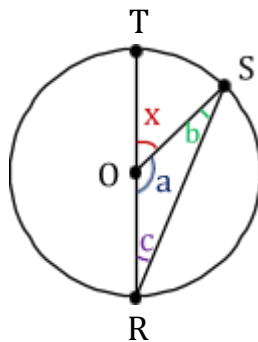
$$\hat{AOB} = 82^\circ$$

b) APB

R. Como a medida do arco é 82° , então a medida de APB é:

$$\hat{APB} = \frac{82}{2} = 41^\circ$$

6. Sabendo que RS mede 140° , calcule o valor de x , a , b e c .



R. O valor de a é o próprio valor do arco. Assim, $\hat{a} = 140^\circ$.

Os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{x}$ são suplementares, como podemos observar pelo desenho. Assim, temos:

$$\hat{a} + \hat{x} = 180^\circ$$

$$140^\circ + \hat{x} = 180^\circ$$

$$\hat{x} = 180^\circ - 140^\circ$$

$$\hat{x} = 40^\circ$$

Como o ângulo $\hat{x} = 40^\circ$, então o arco $ST = 40^\circ$.

Como o arco $SR = 40^\circ$, então o ângulo $\hat{c}$ mede:

$$\hat{c} = \frac{40}{2} = 20^\circ$$

Agora, como $\hat{a} = 140^\circ$ e $\hat{c} = 20^\circ$, então $\hat{b}$:

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$$

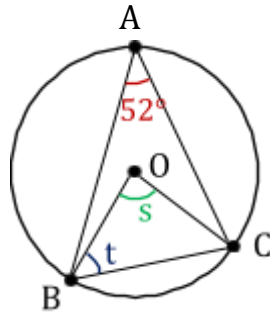
$$140 + \hat{b} + 20 = 180^\circ$$

$$160 + \hat{b} = 180^\circ$$

$$\hat{b} = 180^\circ - 160^\circ$$

$$\hat{b} = 20^\circ$$

7. Observando a circunferência da figura, determine as medidas s e t indicadas.



R. O arco BC mede o dobro do ângulo de 52° . Portanto, temos:

$$\text{Arco BC} = 2 \cdot 52^\circ$$

$$\text{Arco BC} = 104^\circ.$$

Se o arco BC mede 104° , então o ângulo s mede 104° .

$$\hat{s} = 104^\circ$$

O triângulo OBC é isósceles, pois os lados OB e OC são iguais, uma vez que ambos equivalem ao raio da circunferência. Portanto, os ângulos da base são iguais, o que significa que o ângulo que está no vértice C também mede t . Assim, a soma dos três ângulos desse triângulo é a seguinte:

$$\hat{s} + \hat{t} + \hat{t} = 180^\circ$$

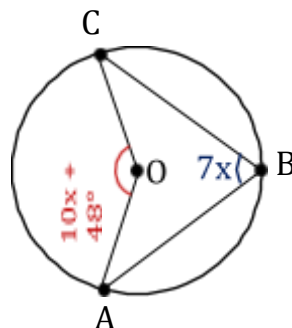
$$104 + 2\hat{t} = 180^\circ$$

$$2\hat{t} = 180^\circ - 104^\circ$$

$$\hat{t} = \frac{76}{2}$$

$$\hat{t} = 38^\circ$$

8. Dada a circunferência a seguir, determine as medidas dos ângulos AOC e ABC.



R.

$$AOC = 2 \cdot ABC$$

$$10x + 48 = 2 \cdot 7x$$

$$10x + 48 = 14x$$

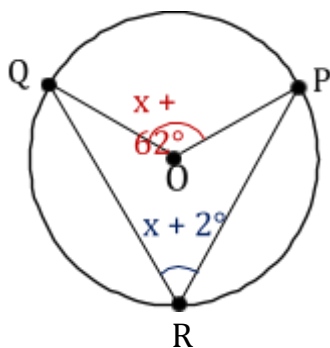
$$14x - 10x = 48$$

$$4x = 48$$

$$x = \frac{48}{4}$$

$$x = 12$$

9. Qual é a medida do ângulo inscrito na figura a seguir?



R.

$$POQ = 2 \cdot PRQ$$

$$x + 62 = 2 \cdot (x + 2)$$

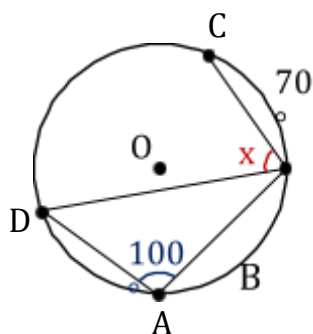
$$x + 62 = 2x + 4$$

$$2x - x = 62 - 4$$

$$x = 58$$

Portanto, o ângulo inscrito mede: $x + 2 = 58^\circ + 2^\circ = 60^\circ$.

10. Observando esta figura, determine a medida do arco CD e a medida x do ângulo DBC.



R. Como o ângulo $\widehat{DAB}$ mede 100° , então o arco DB mede o dobro de 100° , isto é, 200° . Como o arco DB é composto pelos arcos DC e CB, e CB mede 70° , então o arco DC mede:

$$DB = DC + CB$$

$$200^\circ = DC + 70^\circ$$

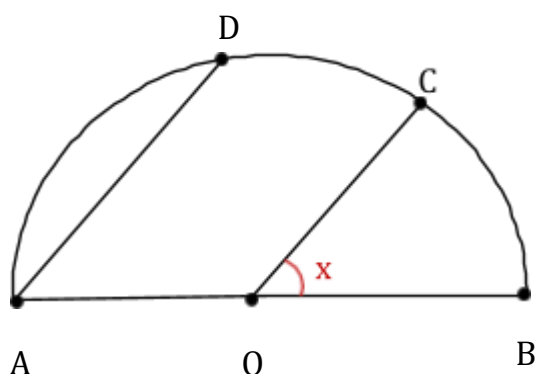
$$DC = 200^\circ - 70^\circ$$

$$DC = 130^\circ$$

Agora que sabemos o valor de DC, então x valerá metade desse valor.

$$x = \frac{130}{2} = 65^\circ$$

11. Uma semicircunferência tem centro O e diâmetro $\overline{AB}$, com $\overline{OC} \parallel \overline{AD}$. A medida do arco CD é 45° . Determine a medida x indicada na figura a seguir:



R. Como $\overline{OC} \parallel \overline{AD}$, temos que o raio OA é uma transversal dos segmentos. Assim, aplicando o que aprendemos acerca das paralelas cortadas por uma transversal, é possível observar que o ângulo $\widehat{OAD}$ é congruente ao ângulo $\widehat{x}$.

O ângulo $O\hat{A}D$ tem sua medida equivalente a metade do arco DB, e o arco DB é composto por dois arcos menores: CD e BC. Assim, temos:

$$O\hat{A}D = \frac{DB}{2} = \frac{CD + BC}{2} = \frac{4}{2} + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$$

Sabemos que o ângulo $\hat{x}$ tem mesma medida do arco CB. Então,

$$x = CB$$

Oras, sabemos também que o ângulo x tem a mesma medida de $O\hat{A}D$. Portanto, temos:

$$x = O\hat{A}D$$

$$\begin{aligned} CB &= \frac{45 + CB}{2} \\ 2 \cdot CB &= 45 \\ + CB & \\ 3CB &= 45 \\ CB &= 15^\circ \end{aligned}$$

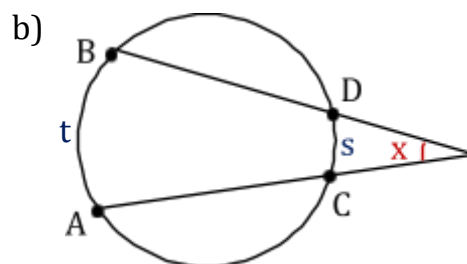
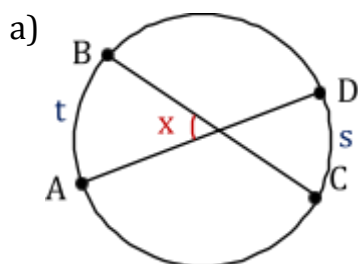
Portanto, $x = 45^\circ$

Lição 79 – Mediatriz de um segmento

1. Construa um ângulo inscrito e central no GeoGebra.

Lição 80 – Congruência em um triângulo isósceles e retângulo

1. Em cada uma das figuras, vamos indicar por t a medida do arco AB e por s a medida do arco CD. Determine a medida x em função de t e s .



R. a) x é um ângulo inscrito. Então, seus lados delimitam um arco cuja medida é o

dobro da sua (ou, em outras palavras: a medida do ângulo é metade da medida do arco). Assim, temos:

$$x = \frac{t}{2}$$

Além disso, o ângulo x tem um O.P.V, cujos lados delimitam o arco de medida s . Então, podemos também associar x ao arco de medida s da mesma forma.

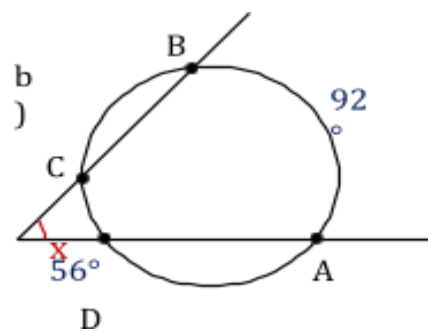
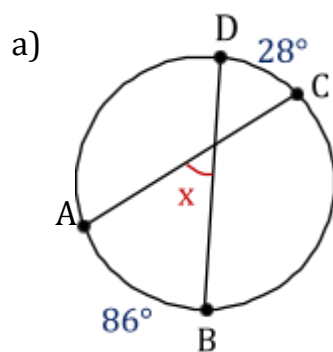
$$x = \frac{s}{2}$$

Portanto, a medida de x , em função de t e s fica:

$$x = \frac{t}{2} + \frac{s}{2} = \frac{t+s}{2}$$

$$b) x = \frac{t}{2} - \frac{s}{2} = \frac{t-s}{2}$$

2. Determine a medida x em cada uma das figuras (a medida dos arcos está indicada na cor azul):

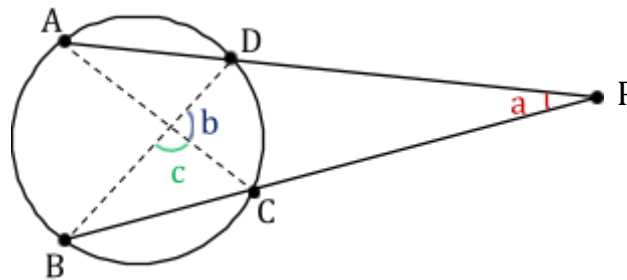


R.

$$a) x = \frac{86}{2} + \frac{28}{2} = 43 + 12 = 55^\circ$$

$$b) x = \frac{92}{2} - \frac{56}{2} = 46 - 28 = 18^\circ$$

3. Determine as medidas a , b e c indicadas na figura, sabendo que a medida do arco AB é 125° e a medida do arco CD é 65° .



R. Como os lados do ângulo b delimitam o arco CD, temos que sua medida é metade da medida do arco CD. Assim, temos:

$$b = \frac{CD}{2} +$$

$$\frac{AB}{2} -$$

$$b = \frac{65}{2} + \frac{125}{2} -$$

$$b = 32,5^\circ + 62,5^\circ = 95^\circ$$

Pelo desenho é possível notar que os ângulos b e c são suplementares. Portanto, a medida de c é:

$$b + c =$$

$$180$$

$$95 + c$$

$$= 180$$

Como a é um ângulo externo, temos:

$$c = 180 - 95$$

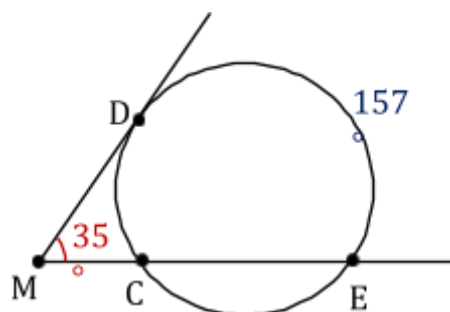
$$c = 85^\circ$$

$$a = \frac{AB}{2} -$$

$$\frac{CD}{2} = \frac{125}{2} -$$

$$\frac{65}{2} = 62,5 - 32,5 = 30^\circ$$

4. Se o arco DE mede 157° , quanto mede o arco CD na figura a seguir?



R. Como $M = 35^\circ$ é um ângulo externo, CD
temos:

$$DE = \frac{CD}{2}$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{157}{2} - \frac{C}{2} \\ 35 &= \frac{157}{2} - \frac{D}{2} \\ [35 &= \frac{157}{2} - \frac{CD}{2}] \cdot 2 \end{aligned}$$

$$70 = 157 - CD$$

$$CD = 157 - 70$$

$$CD = 87^\circ$$

Gabarito de Matemática

9º ano, Volume 6

Lição 81 – Posição relativa entre duas retas

1. Quais são as posições relativas entre duas retas? Explique cada uma delas utilizando dois exemplos para cada uma.

R.

Paralelas: as retas r e s são ditas paralelas se não possuem nenhum ponto em comum, até ao infinito.

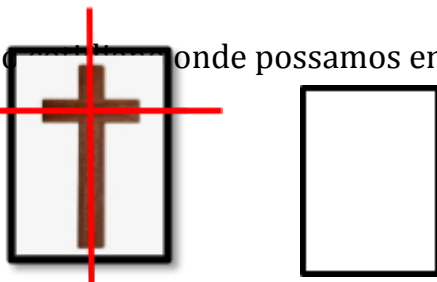


Concorrentes: r e s são ditas concorrentes se possuem um ponto em comum.

X

2. Dê exemplos de onde possamos encontrar estes dois tipos de posições entre retas

R. Resposta pessoal.



Lição 82 – Feixe e transversal do feixe de paralelas

1. O que é um feixe de paralelas? O que é uma transversal a um eixo de retas paralelas? Faça um desenho em seu caderno e utilize-o para responder.

R. Um feixe de retas paralelas é o conjunto de retas coplanares¹ paralelas entre si.

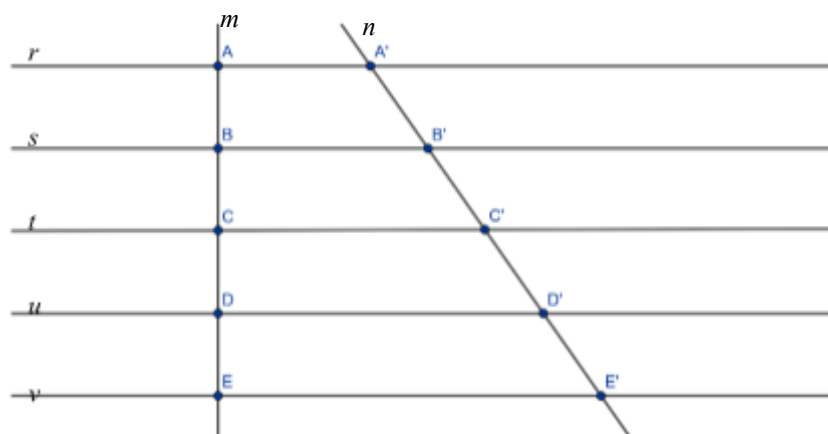
Uma reta que concorre com todas as retas do feixe de paralelas é dita transversal do feixe de paralelas.

Lição 83 – Segmentos correspondentes e comensuráveis

1. O que são pontos e segmentos correspondentes? Faça um desenho em seu caderno e utilize-o para responder.

R. Sejam dadas duas transversais a um feixe de paralelas. Os pontos correspondentes são os pontos que pertencem a uma mesma paralela e transversais diferentes.

São segmentos correspondentes os segmentos cujas extremidades são pontos correspondentes entre essas duas transversais.



Os pontos A e A', B e B', C e C', D e D' e E e E' são correspondentes.

Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$, $\overline{AD}$ e $\overline{A'D'}$, $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$, $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$ são correspondentes, entre outros.

¹ Coplanares: que estão no mesmo plano.

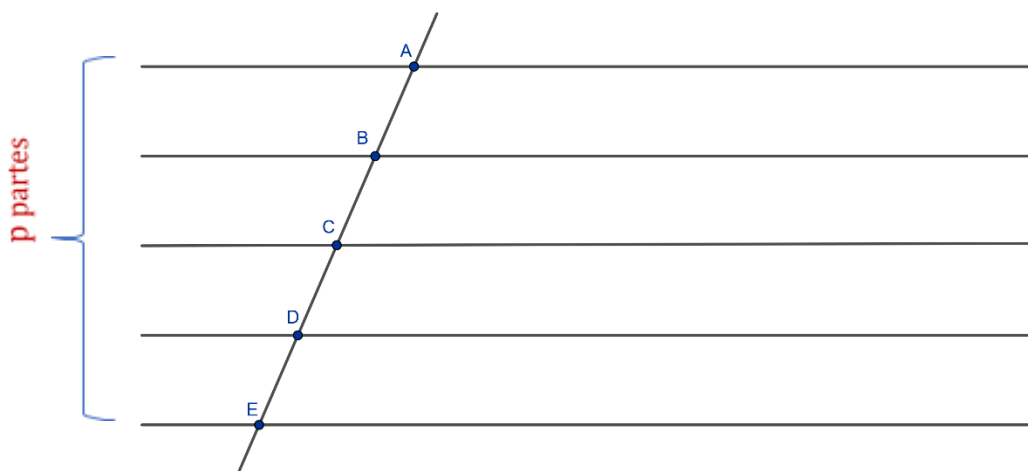
2. O que significa que um segmento seja comensurável?

R. Os segmentos de retas, diferentemente das retas que são infinitas, podem ser medidos, ou seja, comensurados. Para tanto, é preciso tomar uma unidade de medida como referência. Medir um segmento significa descobrir quantas vezes esse segmento contém a unidade de medida ou segmento unitário.

Lição 84 – Teorema

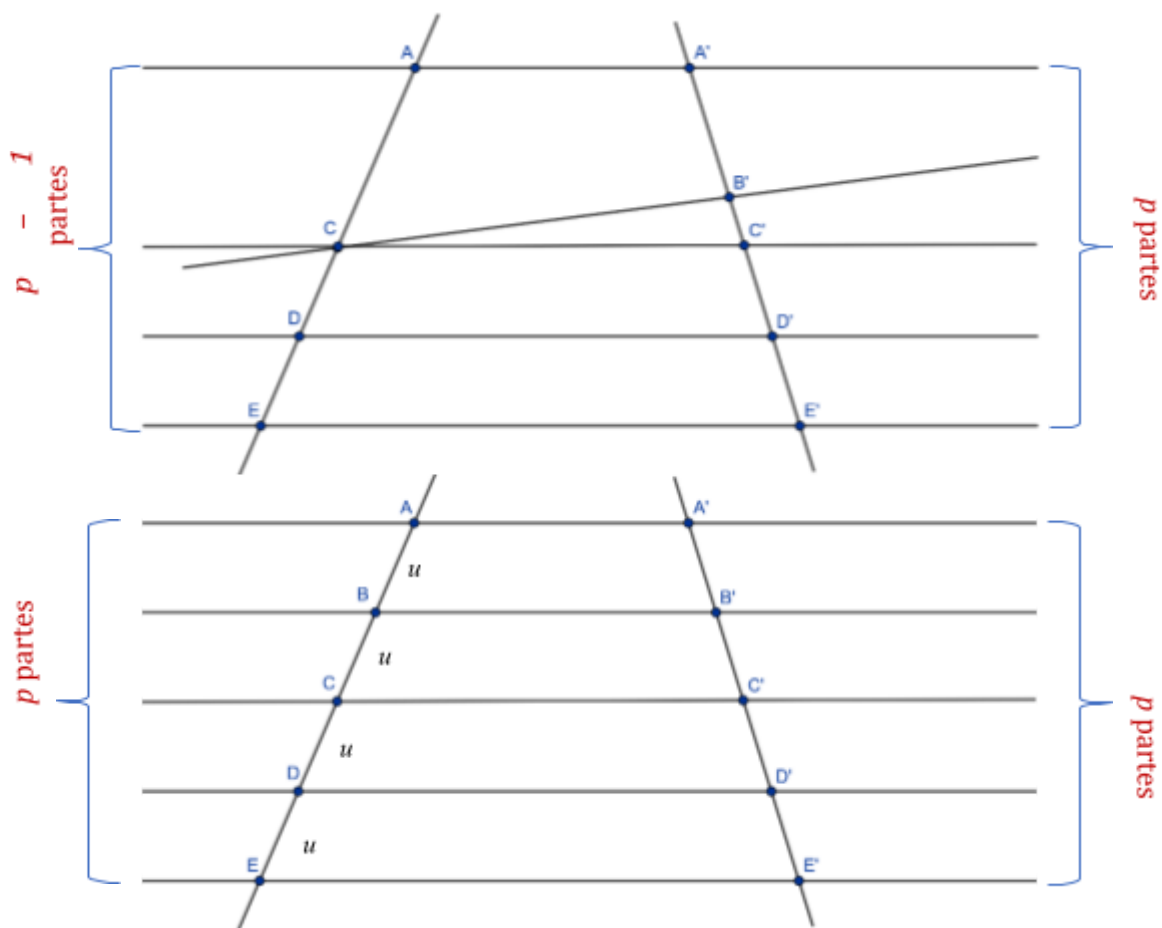
1. Demonstre que, “se o feixe determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal” em seu caderno (sem consulta).

R. Considere o seguinte feixe de paralelas e uma transversal, de tal forma que a transversal seja dividida em p partes e que todos os segmentos da transversal sejam congruentes:



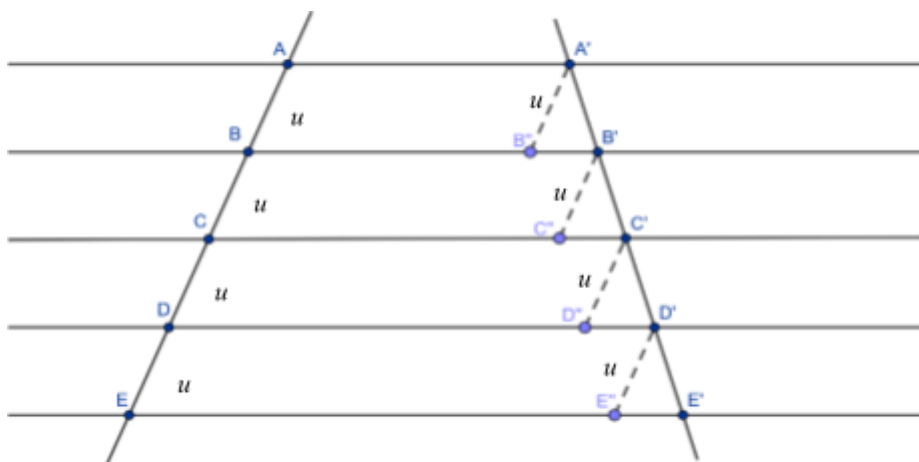
Inicialmente, fica evidente que, se todos os segmentos são congruentes, ou seja, se têm o mesmo comprimento, as paralelas estão todas à mesma distância entre si.

Seja agora traçada outra transversal. Primeiramente, é importante notar que, se a primeira transversal foi dividida em p partes, então a segunda transversal também será dividida em p partes. Caso contrário, o eixo das paralelas precisaria ter pelo menos duas retas concorrentes, o que é um absurdo, pois elas são paralelas.



Portanto, se o segmento $\overline{AE}$ é dividido em p partes e é correspondente ao segmento $\overline{A'E'}$, então o segmento $\overline{A'E'}$ também será dividido em p partes, todas também congruentes entre si.

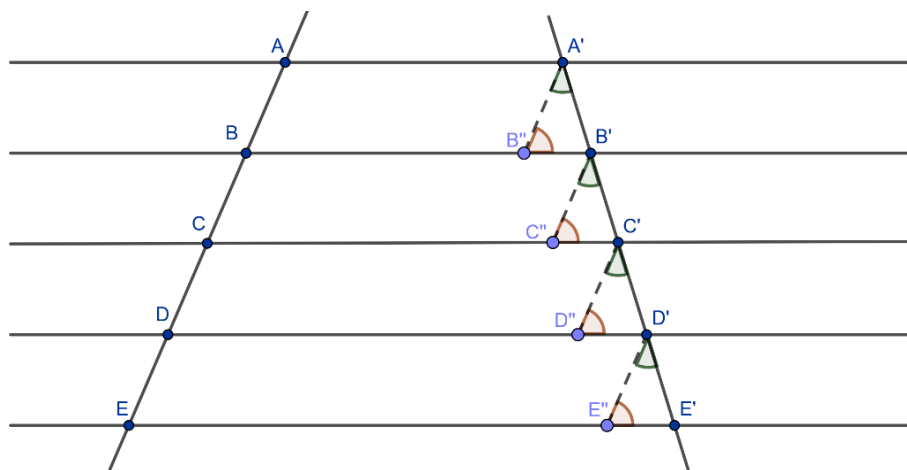
Ora, para provar que os segmentos da segunda transversal são congruentes, imagine retas paralelas à primeira transversal, cada uma com origem num ponto correspondente a um ponto da primeira transversal.



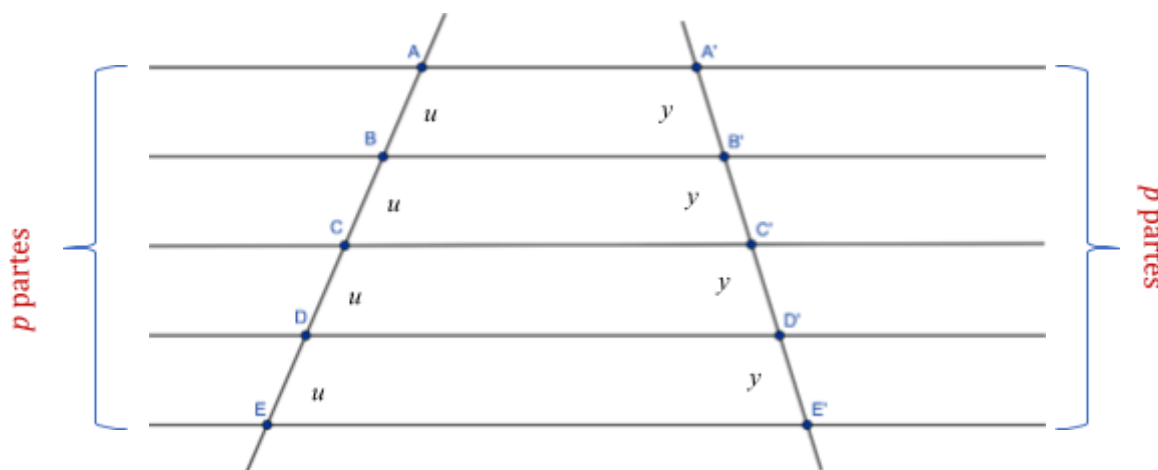
Ora, perceba que foram formados quatro paralelogramos: $AA'B''B$, $BB'C''C$, $CC'D''D$, $DD'E''E$. Como são paralelogramos, os lados paralelos são congruentes. Logo, $AB \equiv A'B''$, $BC \equiv B'C''$, $CD \equiv C'D''$ e $DE \equiv D'E''$, todos de medida u .

Perceba ainda que os triângulos possuem todos os seus lados dois a dois paralelos:

- Lado $A'B'' //$ Lado $B'C''$ e Lado $A'B' //$ Lado $B'C'$. Logo, os ângulos A' e B' são congruentes. O mesmo se verifica para todos os triângulos. Logo, $A' \equiv B' \equiv C' \equiv D'$.
- Lado $A'B'' //$ Lado $B'C''$ e Lado $B''B' //$ Lado $C''C'$. Logo, os ângulos B'' e C'' são congruentes. O mesmo se verifica para todos os triângulos. Logo, $B'' \equiv C'' \equiv D'' \equiv E''$.



Ora, todos os triângulos possuem dois ângulos congruentes e os lados entre eles também congruentes. Portanto, pelo caso de congruência A.L.A.², os triângulos são todos congruentes, o que significa que os lados $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ e $D'E'$ também são todos congruentes. Isso demonstra o enunciado do teorema: se o feixe determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

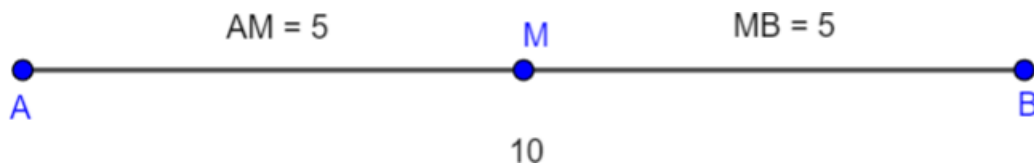


² Um triângulo é congruente a outro se, e somente se, houver correspondência entre seus vértices de tal forma que seus três lados e seus três ângulos sejam congruentes. Entretanto, existem os chamados *casos de congruência* que permitem determinar se dois triângulos são congruentes analisando somente algumas características.

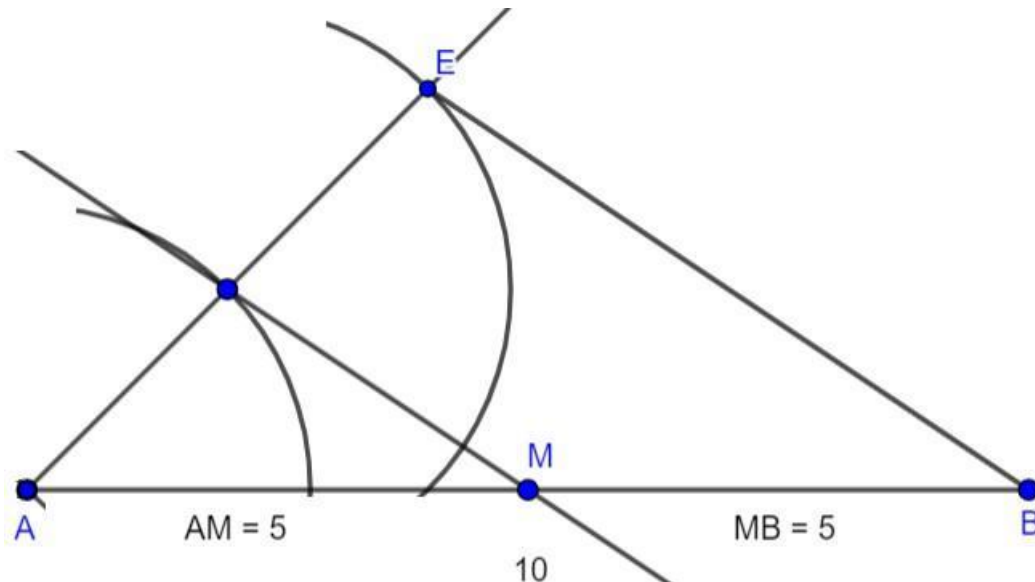
2. Construa:

- a) Um segmento de 10 cm e divida-o em duas partes congruentes com a régua. Depois, divida-o em duas partes utilizando um compasso. O que acontece? Por quê?

R. Construção com a régua



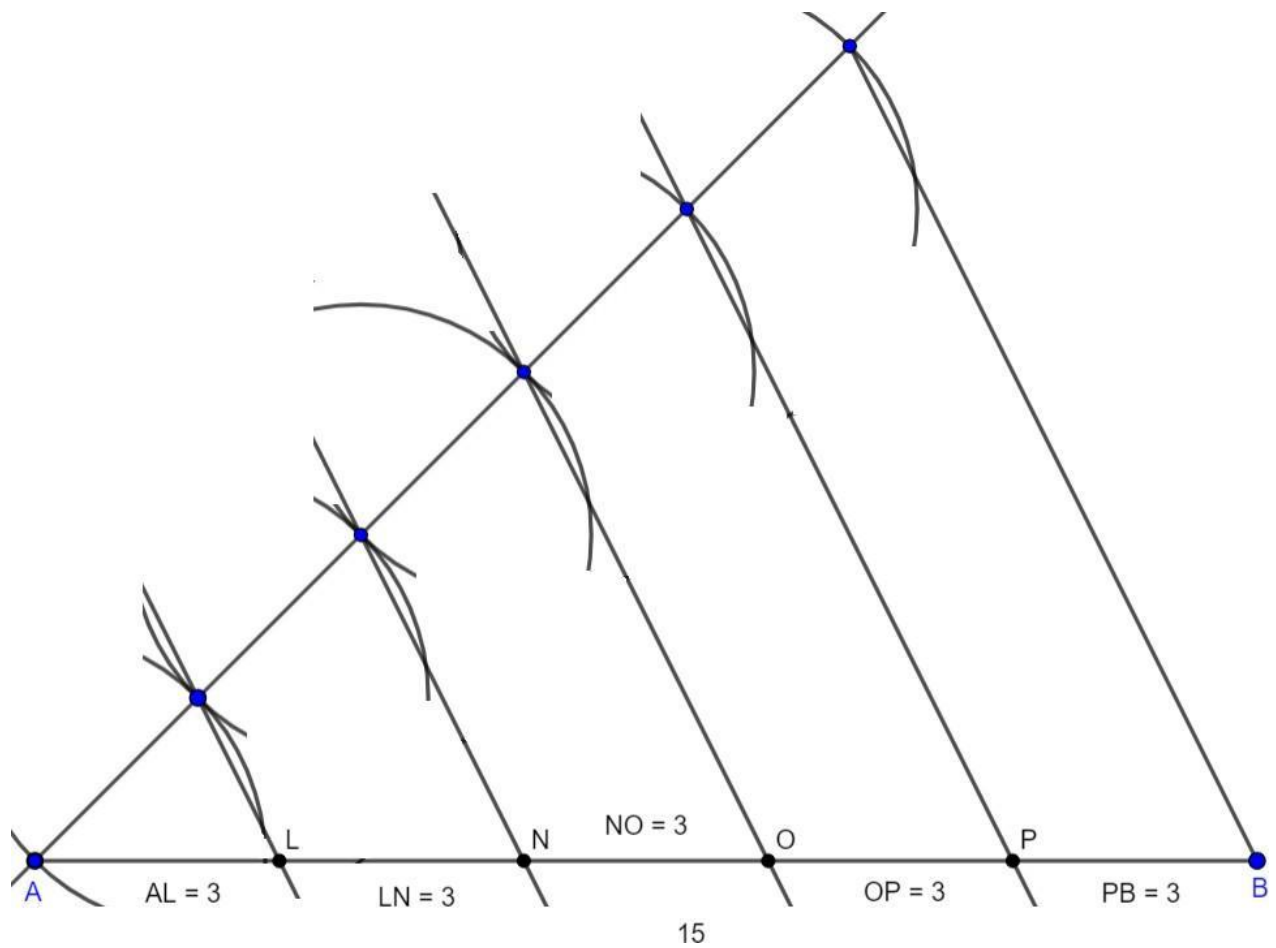
Construção com o compasso



A divisão tanto pela régua quanto pelo compasso divide o segmento $\overline{AB}$ no mesmo ponto, o ponto M, que no caso é o ponto médio de AB e isso ocorre por conta do teorema desta lição.

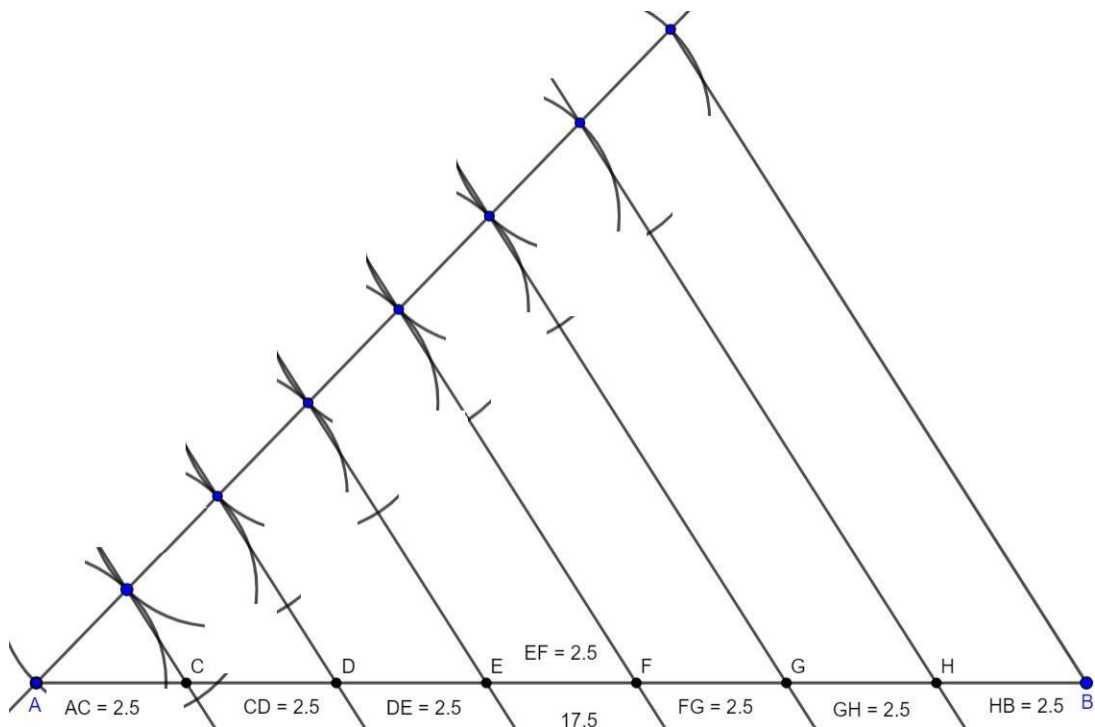
- b) Um segmento de 15 centímetros e divida-o em 5 partes congruentes utilizando compasso e régua. Quanto se espera que seja a medida de cada parte?

R. Cada parte medirá 3 centímetros.



c) Um segmento de 17,5 cm em 7 partes congruentes utilizando um compasso e régua. Quanto se espera que seja a medida de cada parte?

R. Cada parte medirá 2,5 centímetros.



Lição 85 – Segmentos proporcionais

1. Dado um segmento $\overline{AB}$ de 15 cm, encontre um ponto P tal que a razão entre $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ seja de 2 : 3 . Quanto deve ter cada medida?

R. Seja um segmento $\overline{AB}$, de medida 15 cm, de tal forma que se queira encontrar um ponto P nele, de tal forma que a razão entre eles seja 2 : 3. Para encontrar o ponto P, é preciso, antes de tudo, dividir o segmento em partes iguais. Como a razão que se deseja encontrar é de 2 : 3, então o segmento deve ser dividido em $2 + 3 = 5$ partes iguais, de tal forma que o ponto P terá duas partes à sua esquerda e três partes à sua direita. Ora, o que se quer então é um P de tal forma que:



Portanto, P está em um lugar de tal forma que $\overline{AP} = 6$ e $\overline{BP} = 9$, pois:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

2. Determine a razão entre dois segmentos dadas as suas medidas:

a) 10 cm e 4 cm

$$\text{R. } \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

b) $7x^3$ e $5x$

$$\text{R. } \frac{7x^3}{5x} = \frac{7x^2}{5}$$

c) $21x$ e $15x$

$$\text{R. } \frac{21x}{15x} = \frac{7}{5}$$

3. Determine a razão entre os números:

a) 28 e 40

$$\text{R. } \frac{28}{40} = \frac{7}{10} = 0,7$$

b) 700 e 1.000

$$\text{R. } \frac{700}{1000} = \frac{7}{10} = 0,7$$

4. De acordo com a definição de números proporcionais, você pode afirmar que os números 28, 40, 700 e 1000, nessa ordem, são proporcionais?

R. Os números 28, 40, 700 e 1000 são proporcionais, pois a razão dos primeiros é igual a razão dos dois últimos.

$$\frac{28}{40} = \frac{700}{1000}$$

5. Defina segmentos proporcionais e dê um exemplo.

R. Pelas definições de proporção e de razão de segmentos, podemos dizer que quatro segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$, nessa ordem, são proporcionais quando a razão entre as medidas dos dois primeiros for igual à razão entre as medidas dos dois últimos.

$$\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}, \overline{GH} \text{ são proporcionais} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$$

Lição 86 – Teorema de Tales

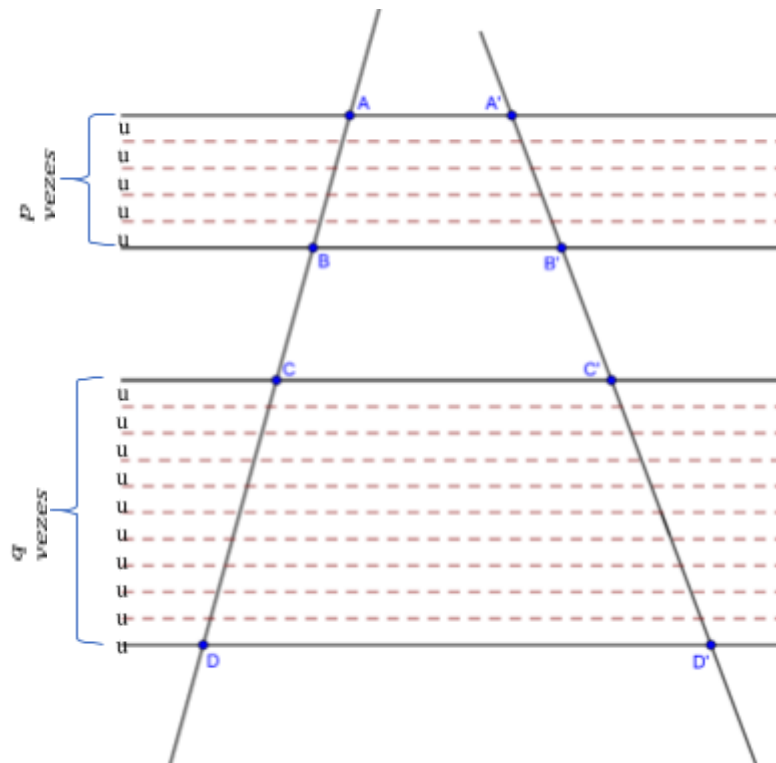
1. O que enuncia o Teorema de Tales? Demonstre-o em seu caderno (sem consulta).

R. Teorema de Tales: dadas duas transversais em um feixe de retas paralelas, a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os dois segmentos correspondentes da outra transversal.

Demonstração: É preciso demonstrar que a razão entre dois segmentos de uma transversal é igual à razão entre dois segmentos da outra transversal. Escrevendo na forma de razão, o que se quer provar é que:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Ora, tome o seguinte feixe de paralelas e as duas transversais:



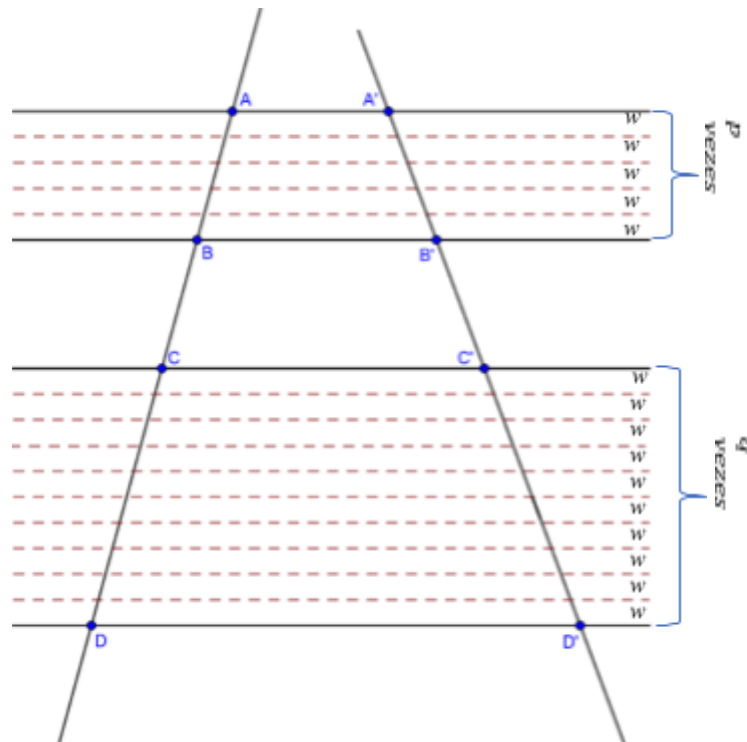
Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis, então existe um segmento de medida u contido p vezes em $\overline{AB}$ e q vezes em $\overline{CD}$. Logo, a razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p \cdot u}{q \cdot u} = \frac{p}{q}$$

Além disso, como visto anteriormente, se o feixe de paralelas divide uma das transversais em p partes, então divide também a outra em p partes. Portanto, sendo $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ comensuráveis, também são divididos em p e q partes. Então existe um segmento de medida w contido p vezes em $\overline{A'B'}$ e q vezes em $\overline{C'D'}$. Logo, a razão entre $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ é:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p \cdot w}{q \cdot w} = \frac{p}{q}$$

$$\overline{C'D'} = q \cdot w = q$$



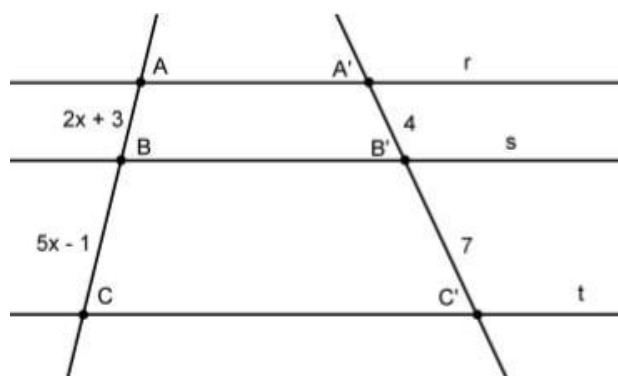
Ora, as razões entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ na primeira transversal e as razões entre os segmentos correspondentes $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ da segunda transversal são iguais. Logo,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q} \text{ e } \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p}{q} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

Sendo assim, está demonstrado que, “dadas duas transversais em um feixe de retas paralelas, a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os dois segmentos correspondentes da outra transversal”, ou seja, eles são proporcionais.

2. Determine o valor de x nas figuras abaixo sabendo que $r \parallel s \parallel t$.

a)



R. Pelo Teorema de Tales, temos que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

$$\frac{2x+3}{5x-1} = \frac{4}{7}$$

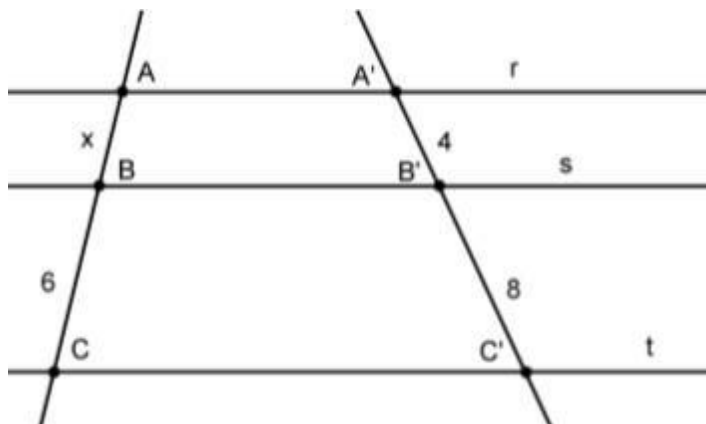
$$14x+21 = 20x-4$$

$$14x-20x = -4-21$$

$$-6x = -25$$

$$x = \frac{25}{6}$$

b)



R. Pelo Teorema de Tales, temos que:

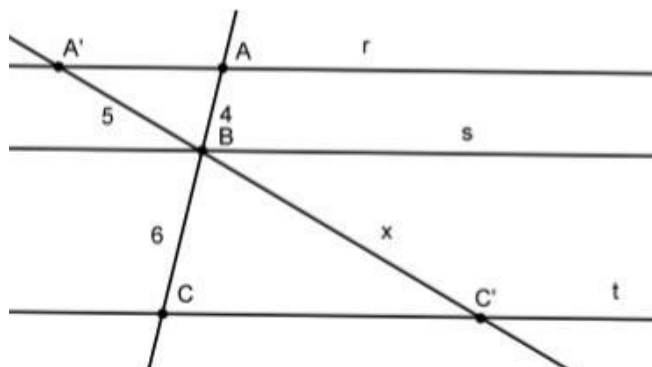
$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

$$\frac{x}{6} = \frac{4}{8}$$

$$8x = 24$$

$$x = \frac{24}{8} = 3$$

c)



R. Pelo Teorema de Tales, temos que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B}{BC'}$$

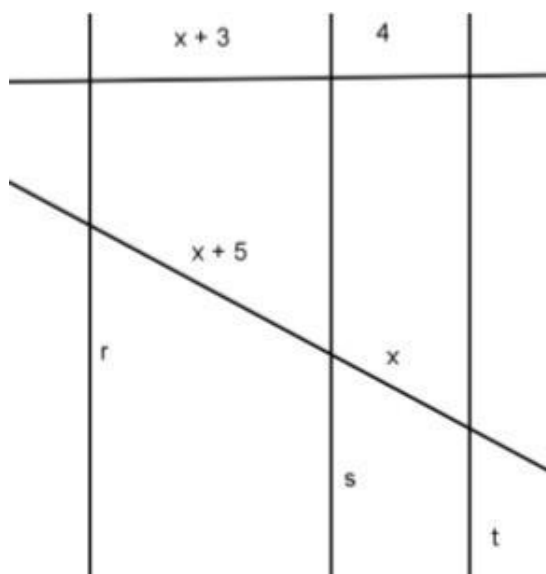
$$\frac{4}{6} = \frac{5}{x}$$

$$4x = 30$$

$$x = \frac{30}{4} = 7,5$$

$$4$$

d)



R. Pelo Teorema de Tales, temos que:

$$\frac{x+5}{x} = \frac{x+3}{4}$$

$$4x + 20 = x^2 + 3x$$

$$-x^2 + x + 20 = 0$$

Calculando o bashkara, temos que:

$$-x^2 + x + 20 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4(-1)(20)$$

$$\Delta = 1 + 80 = 81$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm 9}{-2}$$

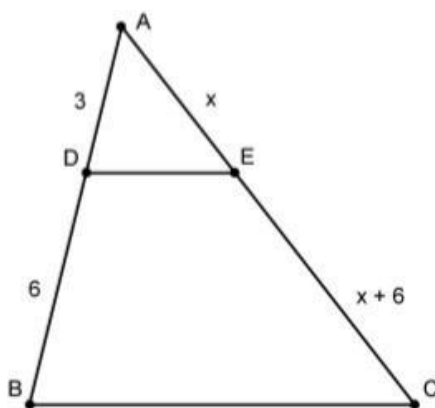
Resolvendo em duas partes, temos que:

$$x = \frac{-1 + 9}{-2} = -4 \quad \text{e} \quad x = \frac{-1 - 9}{-2} = 5$$

Como não existe medidas negativas, então $x = 5$.

Lição 87 – Aplicação do teorema de Tales

- Determine o valor de x na figura abaixo, sabendo que $\overline{DE}$ é paralelo à base $\overline{BC}$ do triângulo ABC.



R. Pelo Teorema de Tales, temos que:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

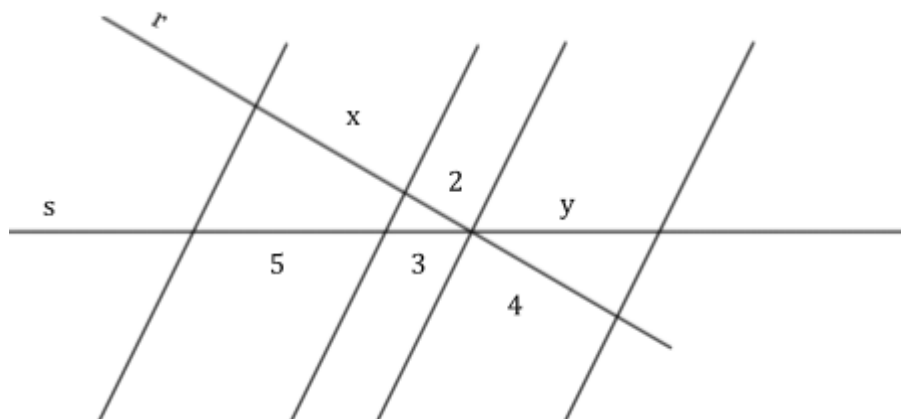
$$\frac{3}{6} = \frac{x}{x+6}$$

$$3x + 18 = 6x$$

$$-3x = -18$$

$$x = 6$$

2. Sendo r e s transversais de um feixe de paralelas, calcule x e y :



R. Vamos primeiramente calcular x . Usando teorema de Tales, temos:

$$\frac{x}{2} = \frac{5}{3}$$

$$3x = 10$$

$$x = \frac{10}{3}$$

Agora, iremos calcular y .

$$2 = 3$$

$$4 \quad y$$

— —

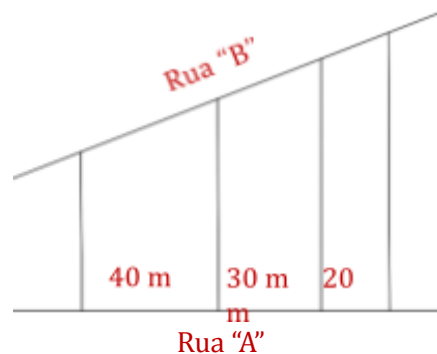
$$2y = 12$$

$$y = \frac{12}{2} = 6$$

—

2

3. Três terrenos têm frente para a rua "A" e para a rua "B", como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua "A". Qual é a medida de frente para a rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua é de 180m?



Dica: lembre-se de que, se duas razões são proporcionais então, a razão entre as somas dos antecedentes e dos consequentes também é proporcional:

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \text{ então } \frac{a+c}{b+d}$$

R. A frente para a Rua B do terreno de fundo 40 m mede x, a frente para a Rua B do terreno de fundo 30 m mede y e a frente para a Rua B do último terreno mede z. Pelo enunciado, temos que $x + y + z = 180$ m.

Pelo Teorema de Tales, temos que $\frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{z}{20}$.

Pela dica, temos que

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \text{ então } \frac{a+c}{b+d}$$

Assim, podemos utilizar essa propriedade com a proporção que já encontramos.

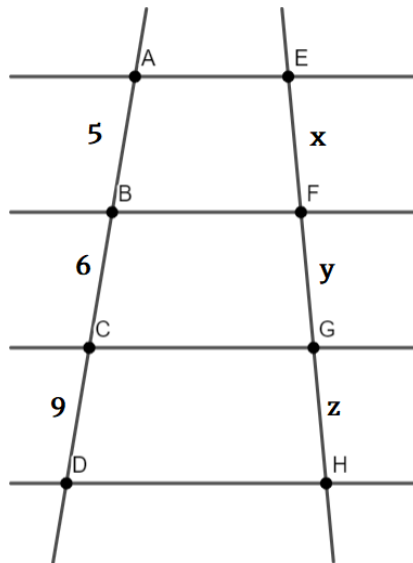
$$\frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{z}{20} = \frac{x+y+z}{40+30+20} = \frac{180}{90} = 2$$

Como $\frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{z}{20} = 2$ temos que $x = 80$, $y = 60$ e $z = 40$.

40 30 20

4. Um feixe de quatro paralelas determina, sobre uma transversal, três segmentos consecutivos, que medem 5 cm, 6 cm e 9 cm. Calcule o comprimento dos segmentos determinados pelo feixe em outra transversal, sabendo que o segmento desta, compreendido entre a primeira e a quarta paralela, mede 60 cm.

R. Primeiramente vamos desenhar o enunciado.



Pelo enunciado, temos que $x + y + z = 60$ e pelo Teorema de Tales temos que:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{9}$$

Utilizando a mesma propriedade do exercício anterior, temos que:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{9} = \frac{x+y+z}{5+6+9} = \frac{60}{20}$$

Com isso, temos

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{9} = 3$$

$$x = 15, y = 18, z = 27$$

Logo, $x = 15$, $y = 18$ e $z = 27$.

Lição 88 – Semelhança

1. Qual é a condição para que dois objetos sejam considerados semelhantes na matemática?

R. Para a matemática, dois objetos serão *semelhantes* se, e somente se, a razão entre os segmentos homólogos³ for constante, isto é, se houver proporção entre eles, e se os ângulos homólogos forem congruentes.

³ Homólogos: *homo* = igual, *logos* = o que estão em certa relação. Que ocupam o mesmo lugar, que são correspondentes.

2. Indique cinco semelhanças encontradas no cotidiano.

R. Resposta pessoal.

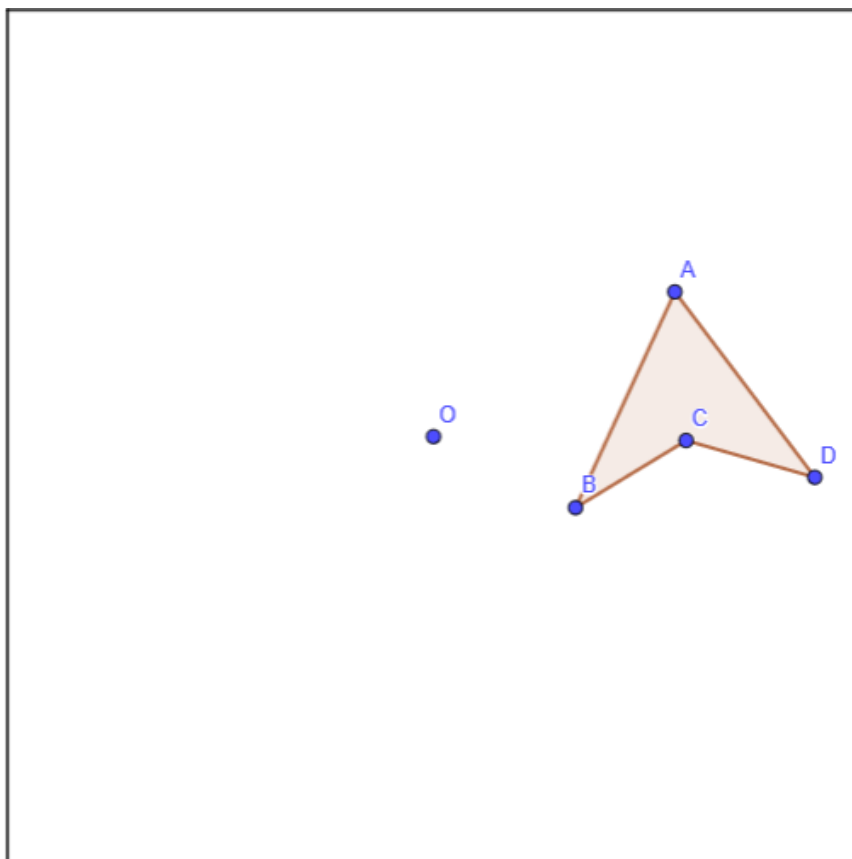
Lição 89 – Transformações de semelhança

1. O que são as transformações de semelhança? Quais são elas? Para que servem?

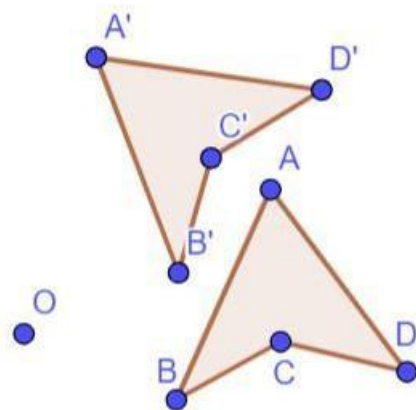
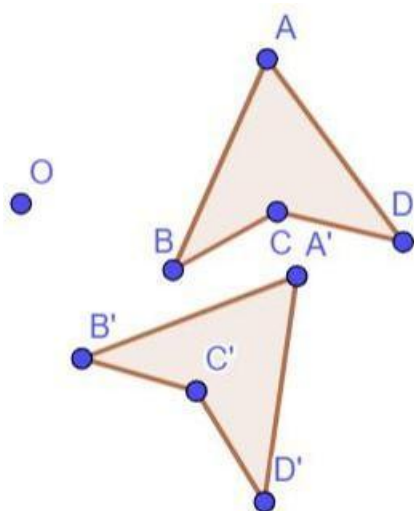
R. As figuras semelhantes não podem sobrepor-se uma à outra. Para se sobreporem, devemos transformar uma das figuras de maneira que mantenha sua forma original. Estas transformações são ditas transformações de semelhança, e são elas: rotação, translação, reflexão e ampliação e redução.

2. Rotacione:

a) O triângulo ABC ao redor do ponto O em 45° .

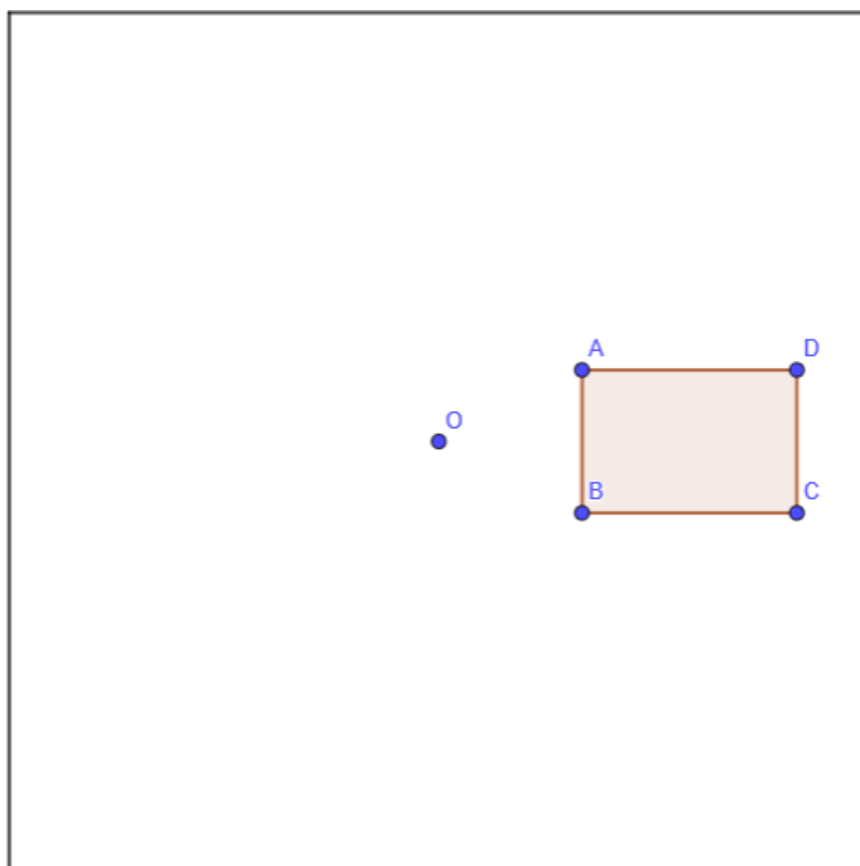


R. Rotação de 45° no sentido anti-horário

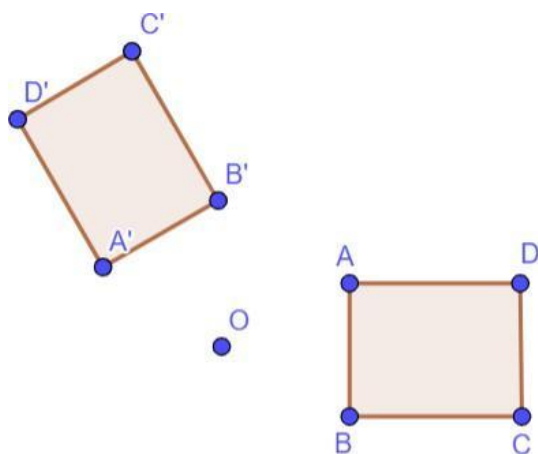


Rotação de 45° no sentido horário

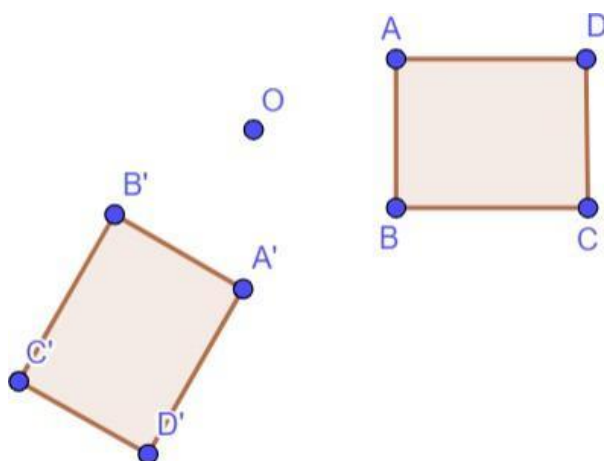
b) O retângulo $ABCD$ ao redor do ponto O em 120° .



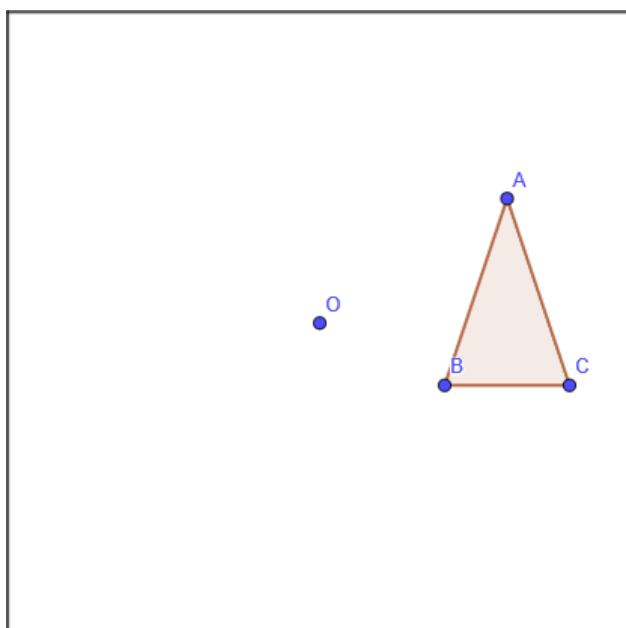
R. Rotação de 120° no sentido anti-horário



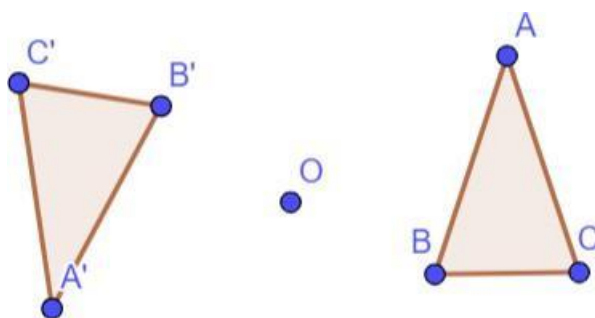
Rotação de 120° no sentido horário



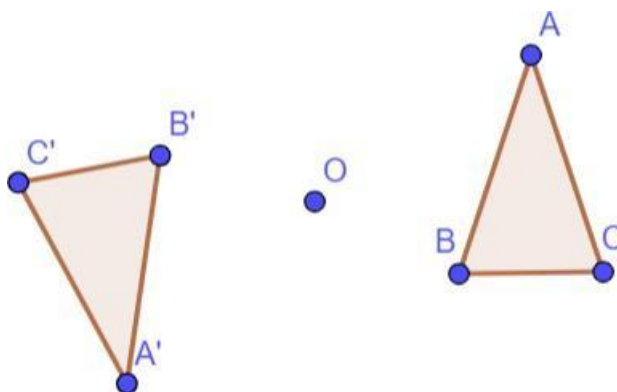
c) A figura ABCD ao redor do ponto O em 190° .



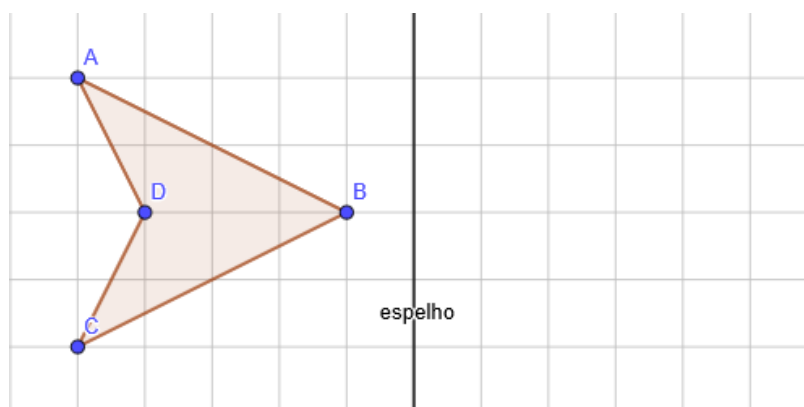
R. Rotação de 190° no sentido anti-horário



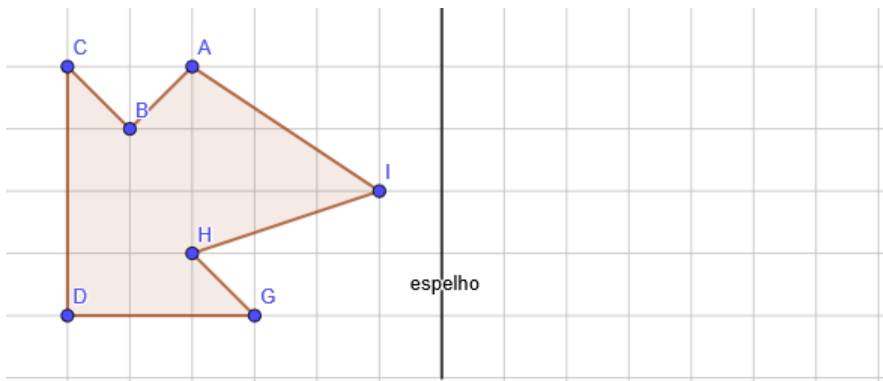
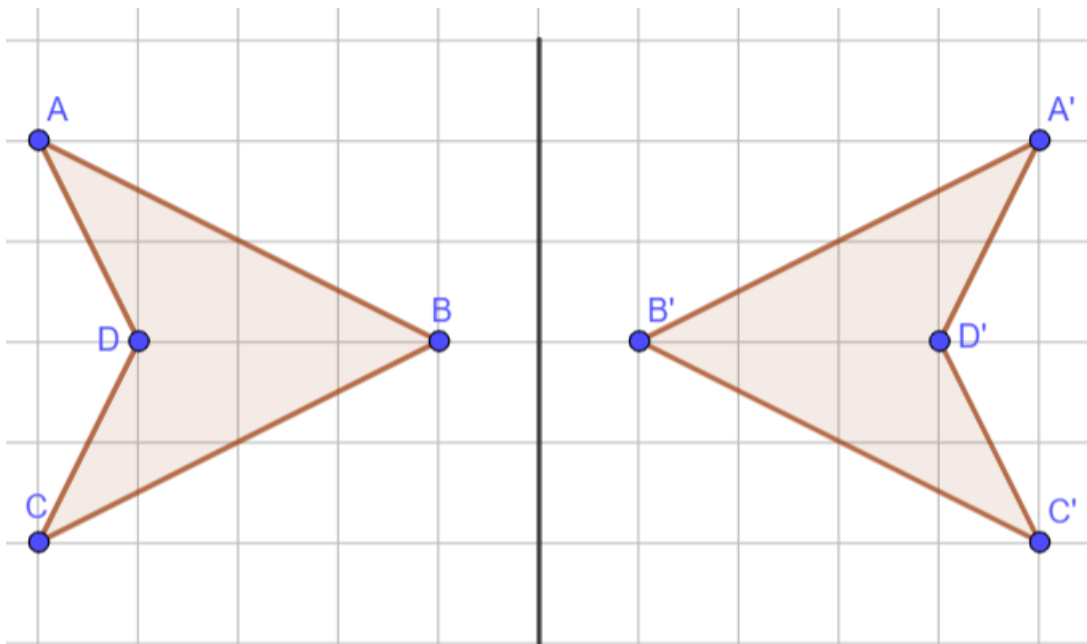
Rotação de 190° no sentido horário



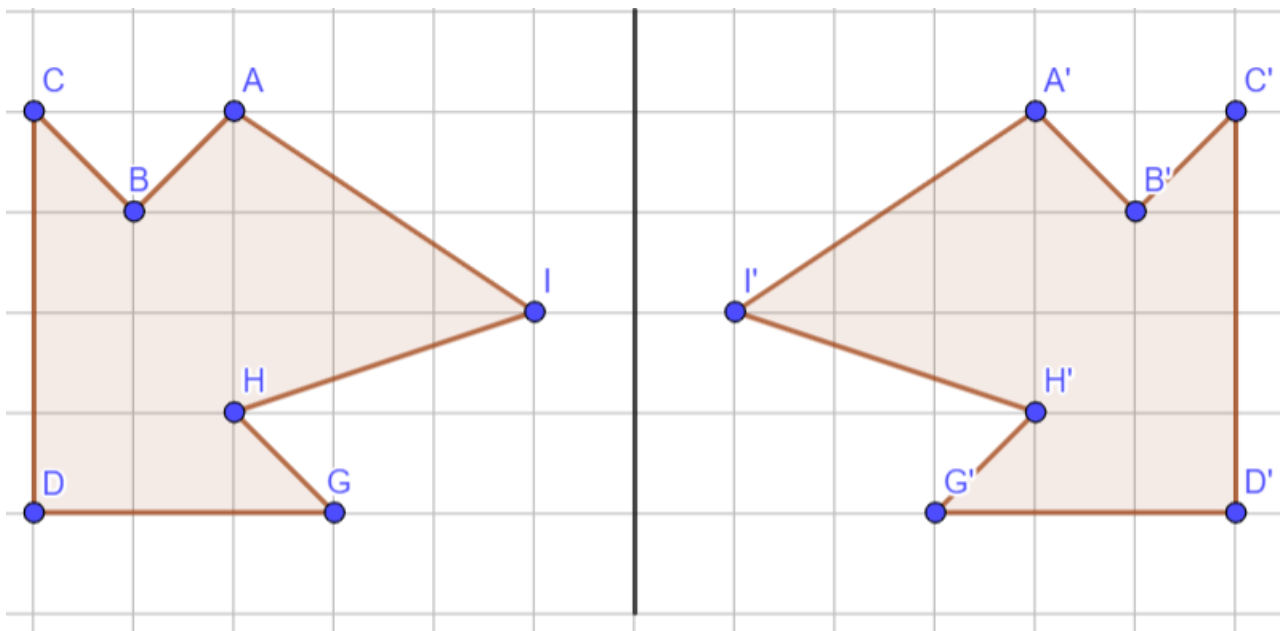
3. Aplique a transformação de reflexão nas figuras abaixo:

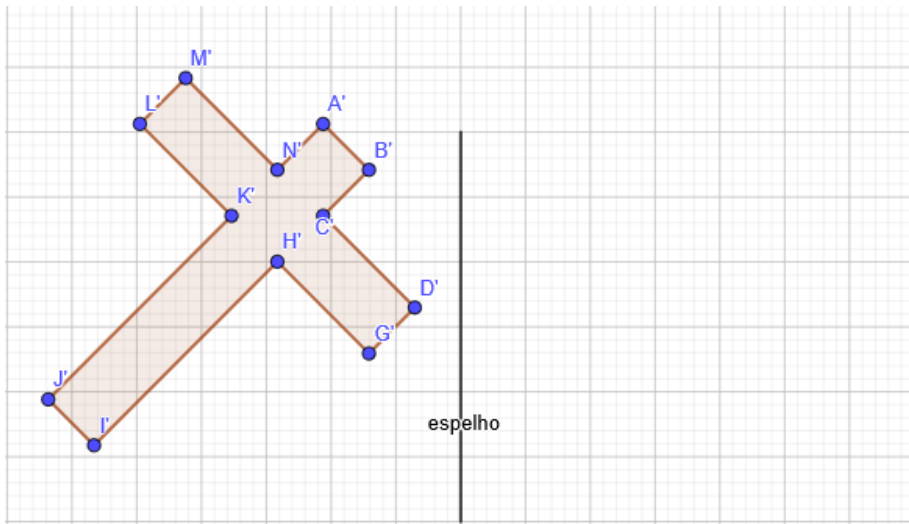


R.

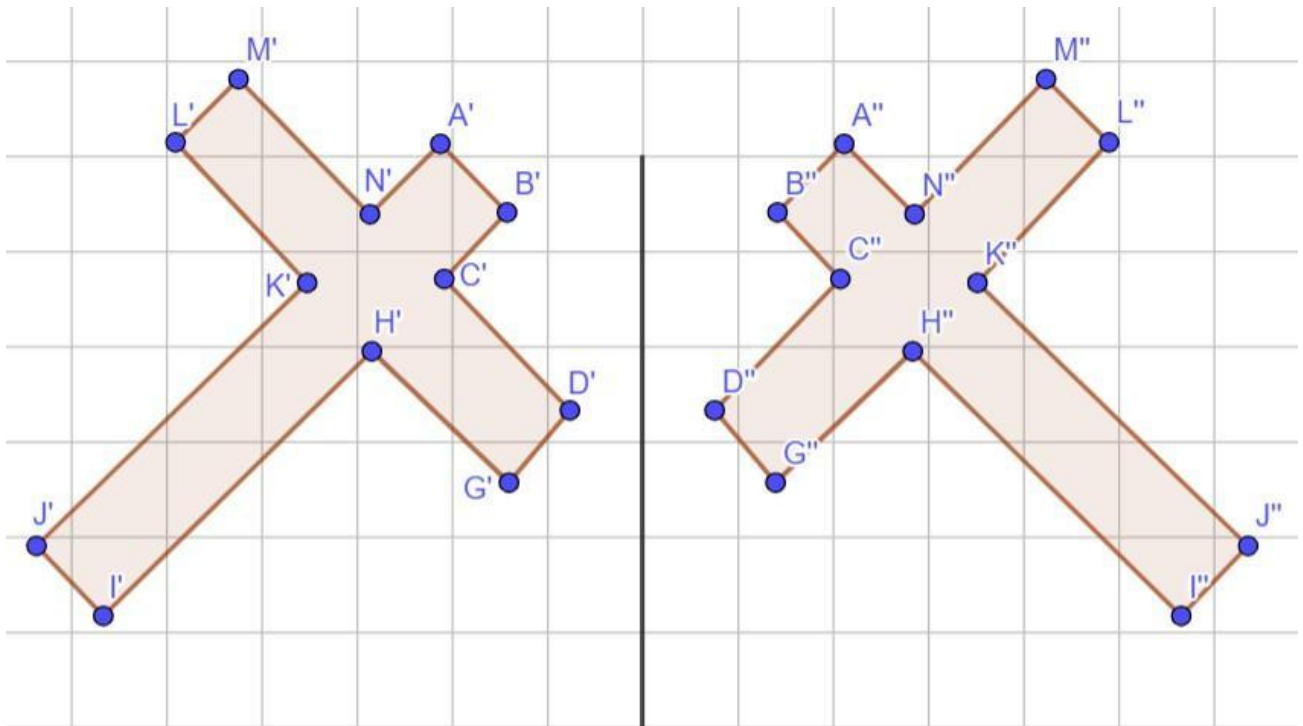


R.





R.

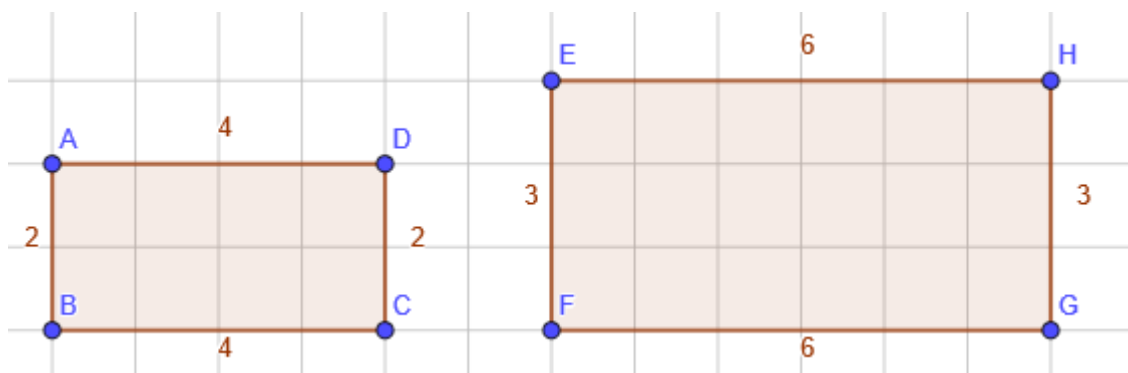


4. Observe o exemplo:

a) Para aumentar em 1,5 (uma vez e meia) um retângulo cujas base e altura medem 4 e 2 respectivamente, basta multiplicar a base e a altura por 1,5 para encontrar as medidas do retângulo aumentado:

Base do retângulo aumentado: $4 \cdot 1,5 = 6$

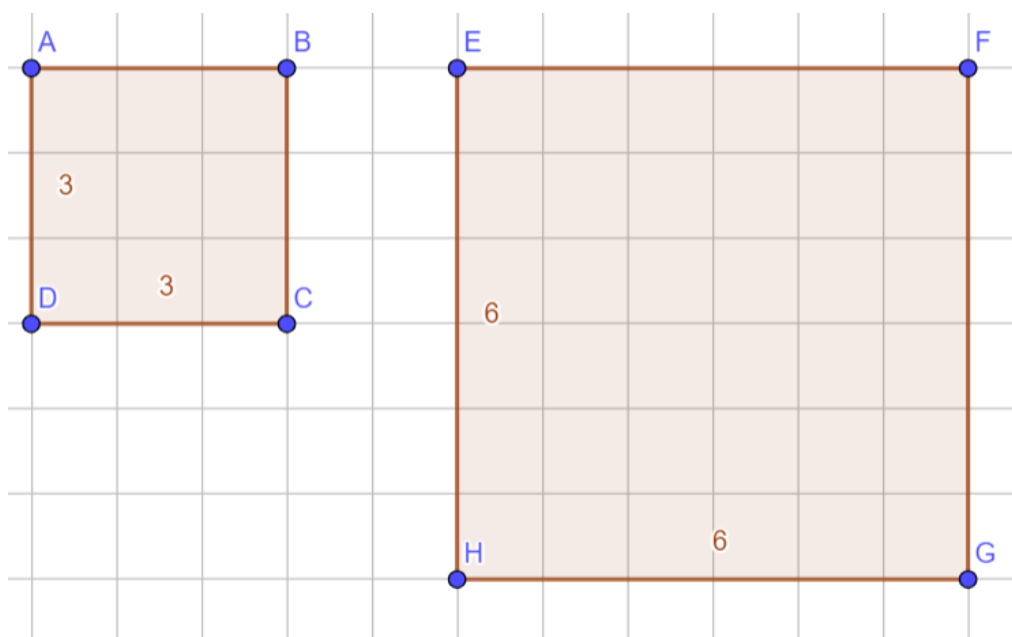
Altura do retângulo aumentado: $2 \cdot 1,5 = 3$



Agora, construa (utilizando a régua):

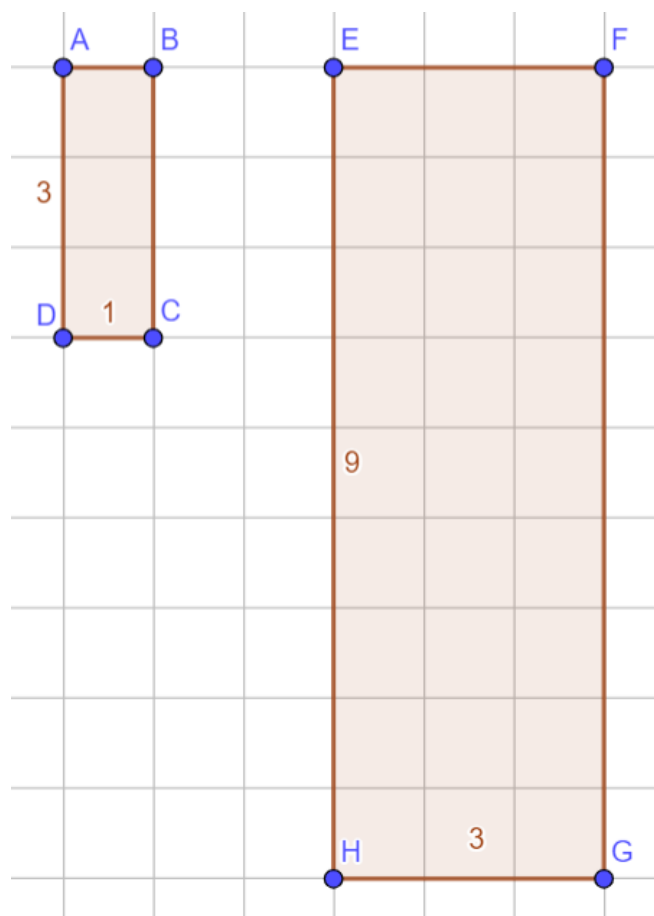
a) O dobro de quadrado de 3 cm.

R.



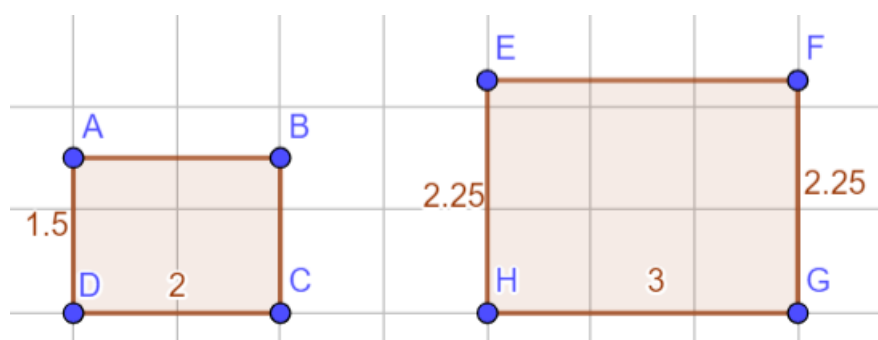
b) Um retângulo de base 1 e altura 3 aumentado 3 vezes.

R.



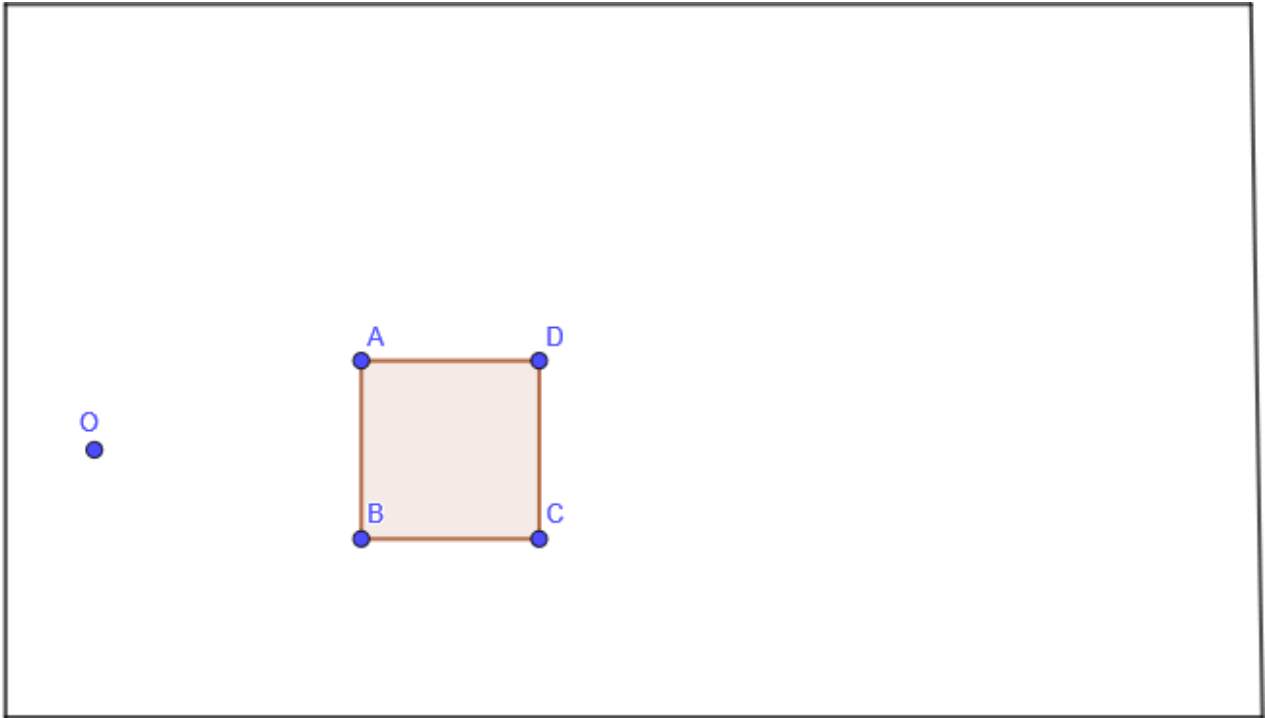
c) Um retângulo de base 2 e altura 1,5 aumentado 1,5 (uma vez e meia).

R.

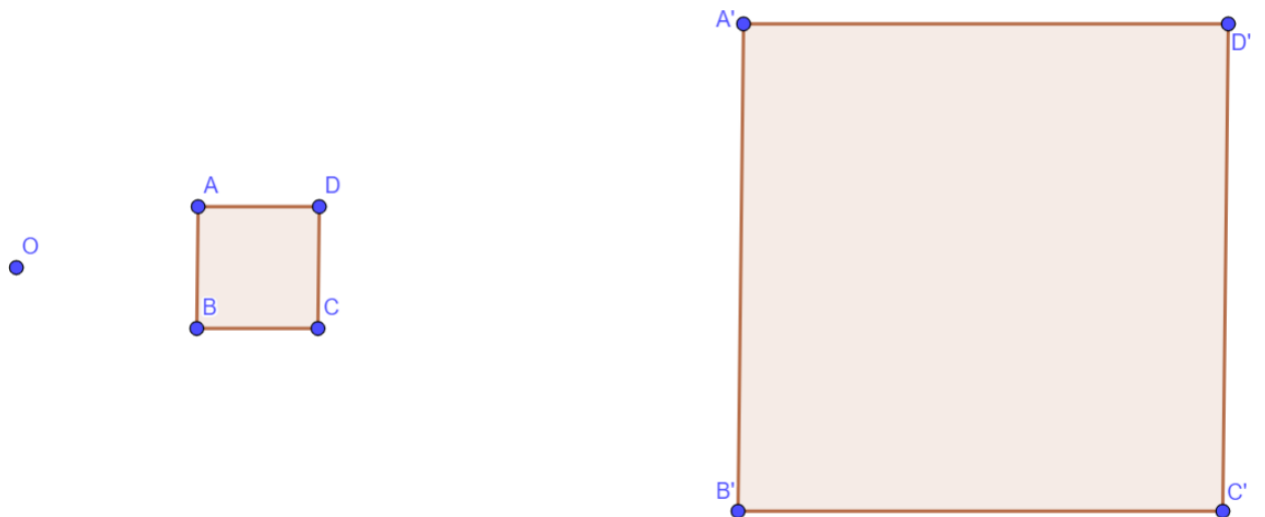


Lição 90 – Ampliação de figuras por homotetia

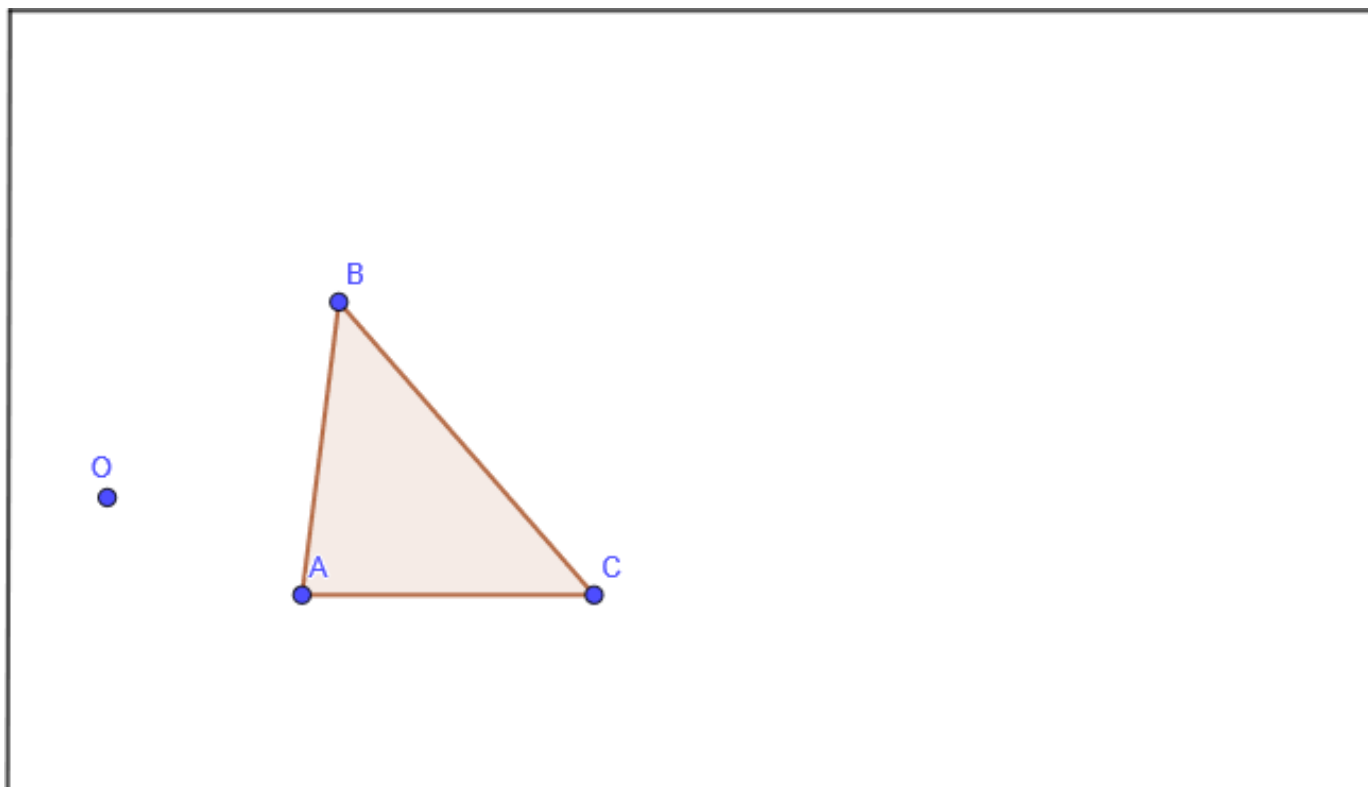
1. Amplie, por homotetia,
 - a) O quadrado ABCD 4 vezes.



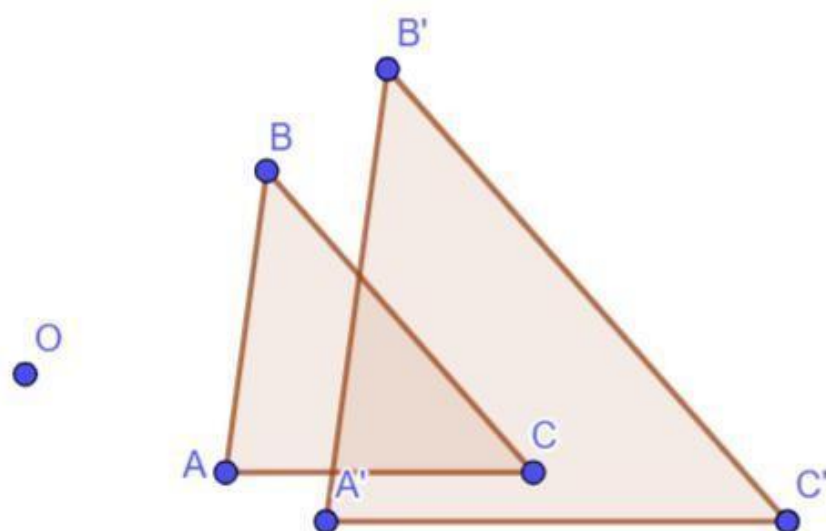
R.



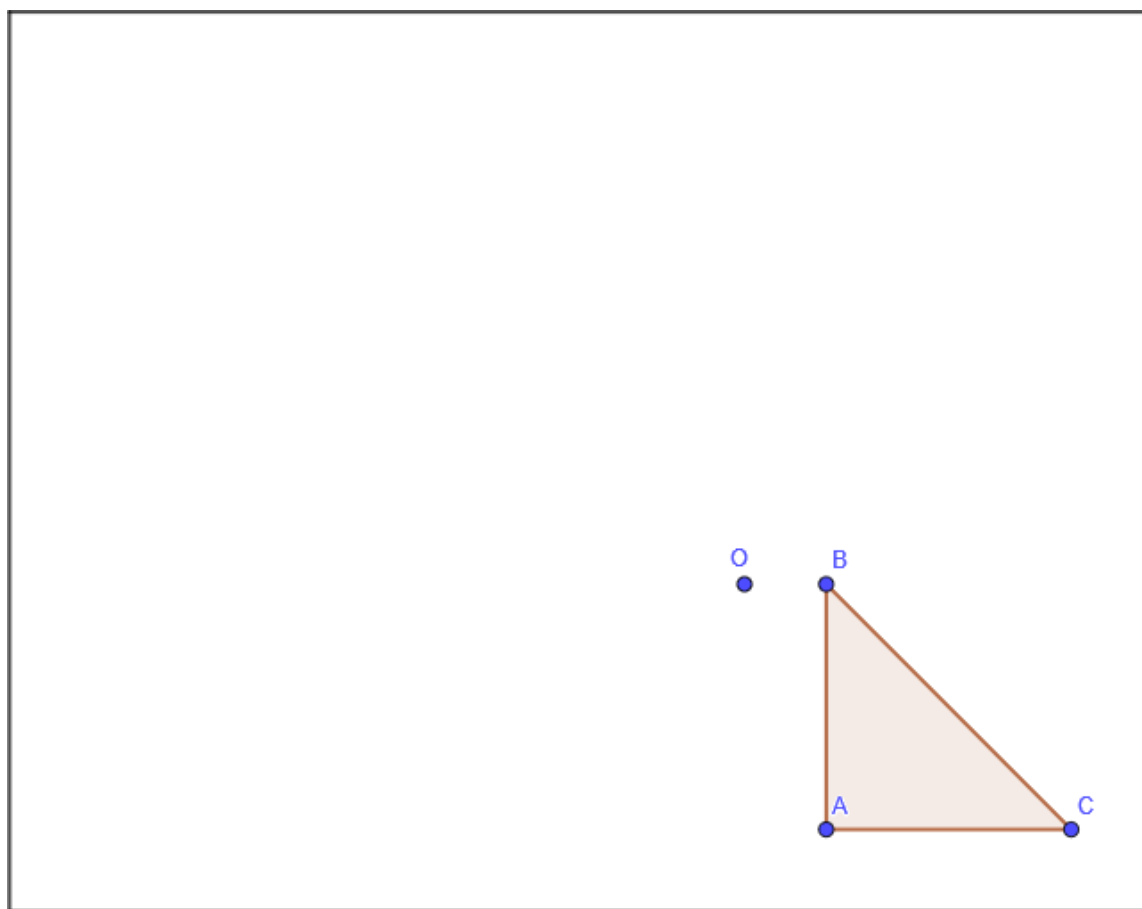
b) O triângulo ABC 1,5 (uma vez e meia).



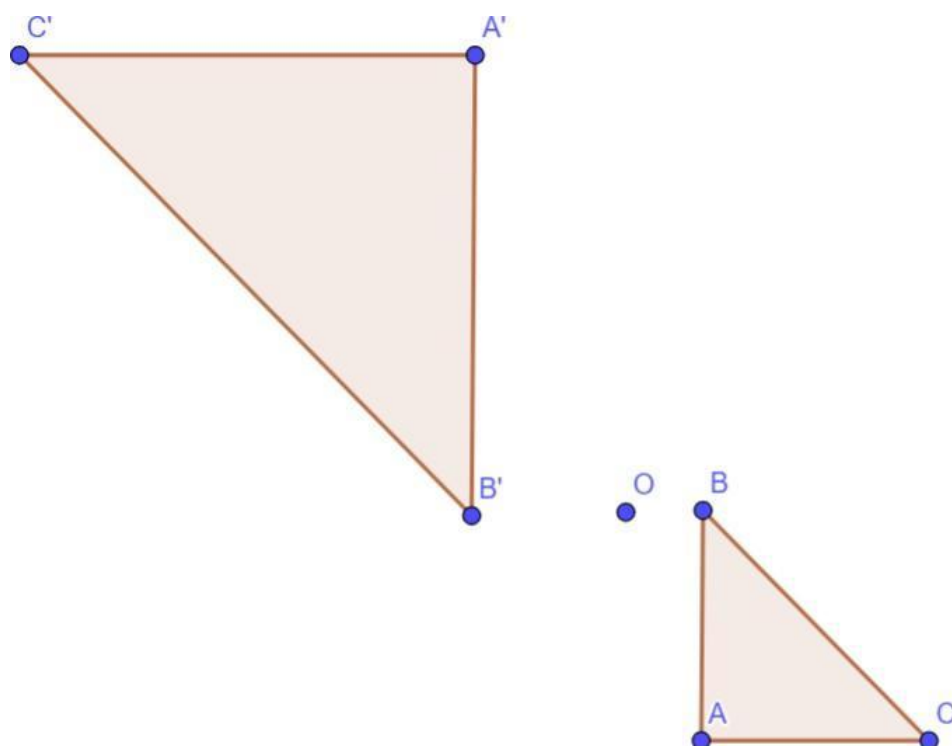
R.



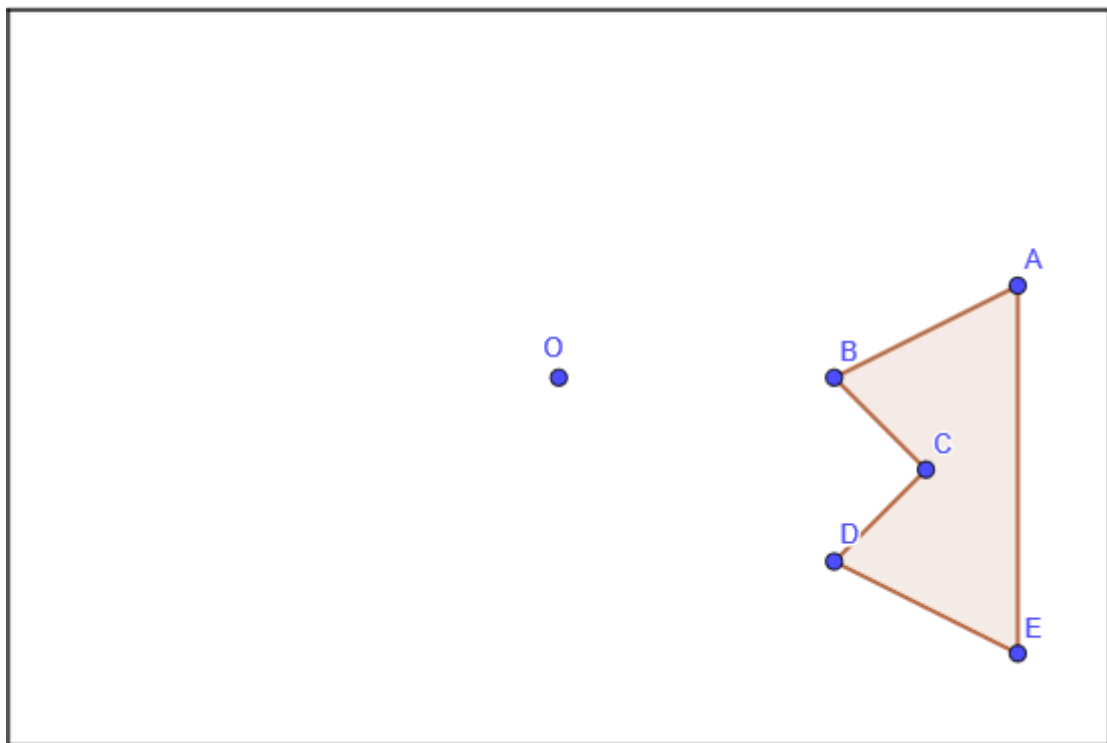
c) O triângulo ABC para $k = -2$.



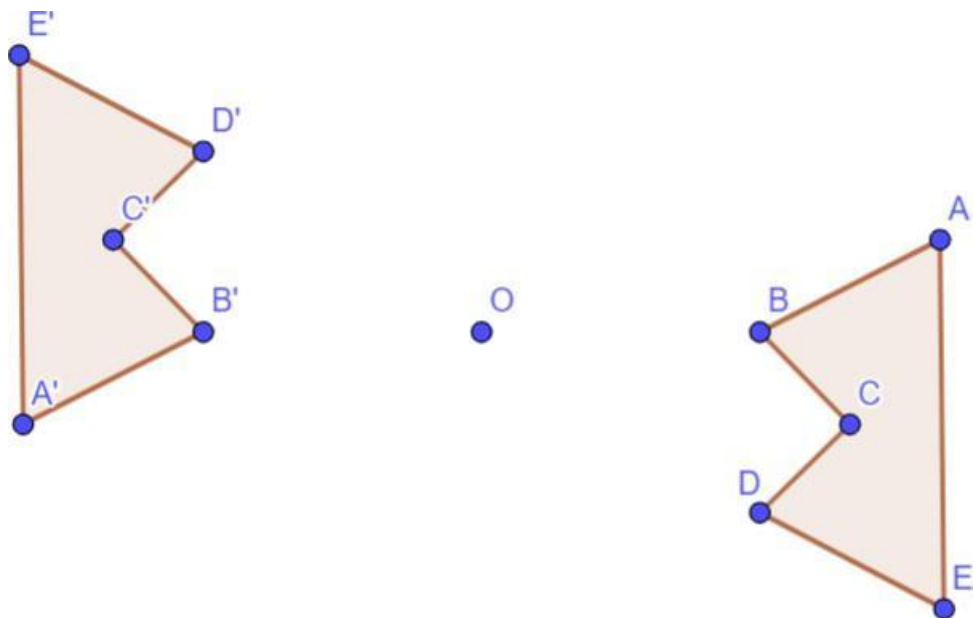
R.



d) A figura ABCDE para $k = -1$.



R.



Lição 91 – Relações da semelhança

1. Quais são as relações de semelhança e o que diz cada uma delas?

R. O estudo de relações de semelhança na matemática diz respeito a como dois entes⁴ matemáticos se relacionam entre si. Aqui, os entes considerados serão os triângulos. Podem estabelecer-se entre dois triângulos três principais relações:

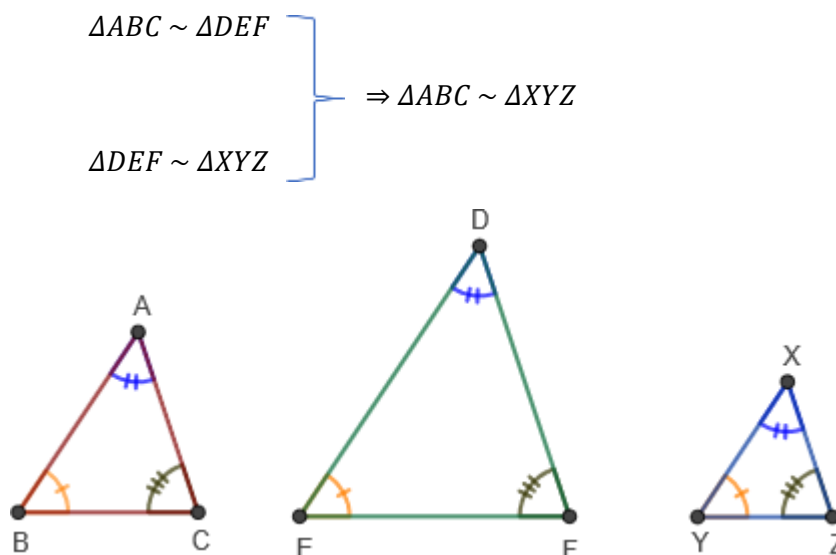
Reflexiva: um triângulo sempre é semelhante a si mesmo:

$$\triangle ABC \sim \triangle ABC$$

Simétrica: se o triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF, então o triângulo DEF é semelhante ao triângulo ABC:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Leftrightarrow \triangle DEF \sim \triangle ABC$$

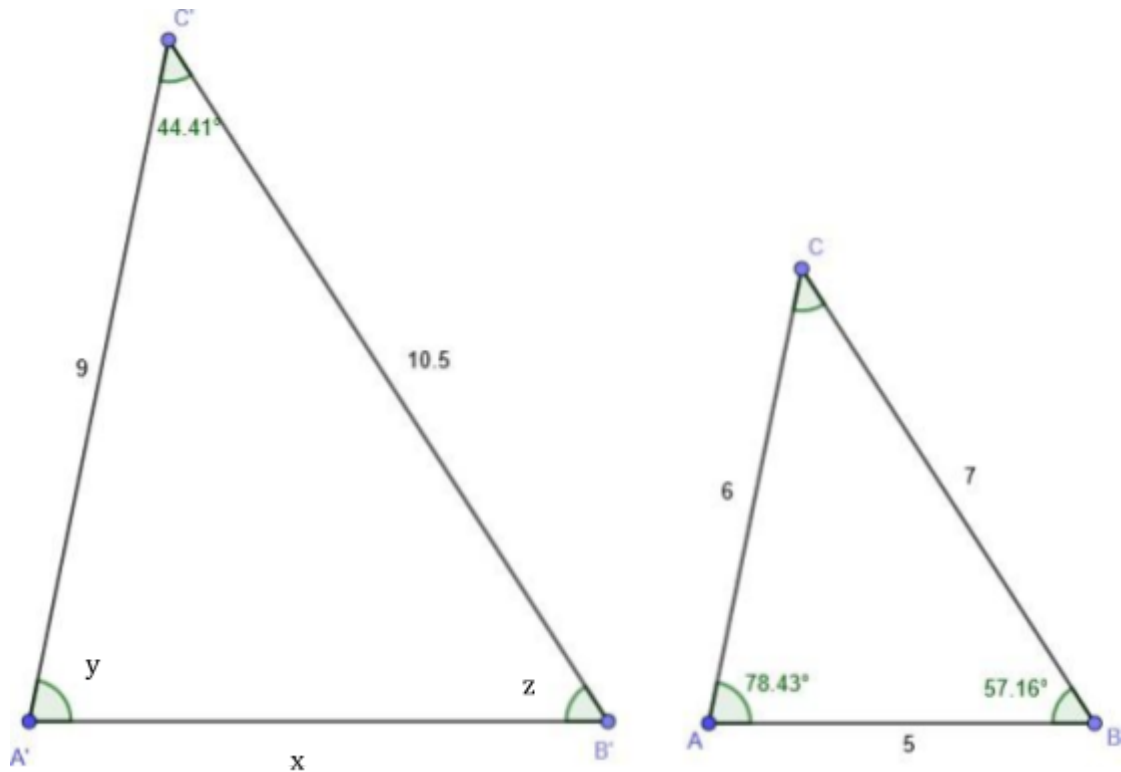
Transitiva: se o triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF, e o triângulo DEF é semelhante ao triângulo XYZ, então os triângulos ABC e XYZ são semelhantes:



⁴Ente é tudo aquilo que existe, coisa, objeto, pessoa. Por ente matemático deve-se, portanto, compreender tudo aquilo que pertence ao estudo da matemática: os conjuntos numéricos, as funções, as formas geométricas, etc.

2. Sabendo que os triângulos abaixo são semelhantes, indique quais são os valores das incógnitas.

a)



R. Como os ângulos homólogos são congruentes, temos que $y = 78.43^\circ$ e $z = 57.16^\circ$.

Em relação aos lados, temos que a $\frac{9}{6} = \frac{10.5}{7} = \frac{x}{5}$.

seguinte proporção Calculando o valor

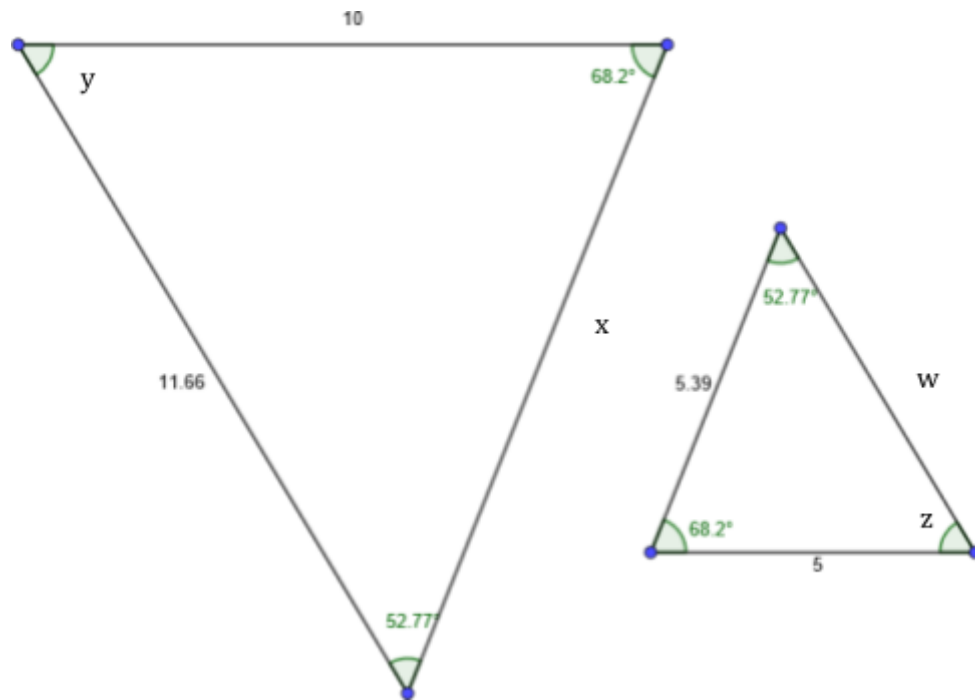
de x, obtemos o seguinte:

$$\frac{9}{6} = \frac{x}{5}$$

$$6x = 45$$

$$x = \frac{45}{6} = \frac{15}{2}$$

b)



R. Como os ângulos homólogos são congruentes, temos que $y = z$. Utilizando a soma dos ângulos internos de um triângulo temos que:

$$52,77 + 68,2 + y = 180^\circ$$

$$y = 180^\circ - 52,77 - 68,2$$

$$y = 59,03$$

Em relação aos lados, temos que a seguinte proporção $\frac{10}{5} = \frac{11,66}{5,39} = \frac{x}{w}$.

Calculando o valor de x, obtemos o seguinte:

$$\frac{10}{5} = \frac{x}{5,39}$$

$$2 = \frac{x}{5,39}$$

$$x = 2 \cdot 5,39$$

$$x = 10,78$$

$$x = 10,78$$

Calculando o valor de w, obtemos o seguinte:

$$\frac{10}{5} = \frac{11,66}{w}$$

$$2 = \frac{11,66}{w}$$

$$w = \frac{11,66}{2}$$

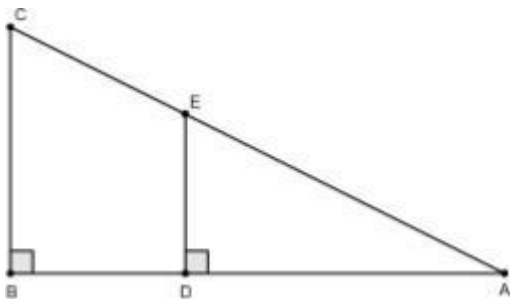
$$w = 5,83$$

Lição 92 – Teorema fundamental da semelhança de triângulos

1. O que enuncia o Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos? Copie a demonstração em seu caderno e procure refazê-la sem consultar a apostila ou o caderno.

R. Teorema fundamental da semelhança de triângulos: se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

2. Observe a figura abaixo e responda:



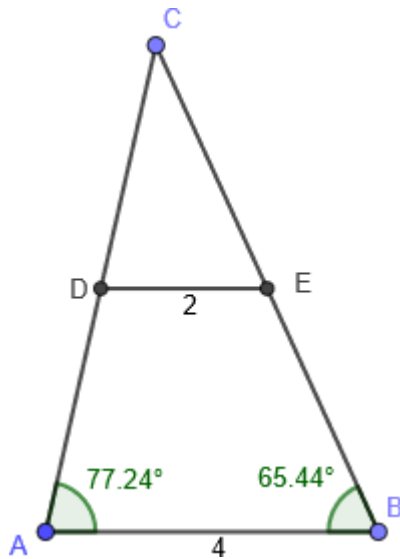
a) Os triângulos ABC e ADE são semelhantes?

R. Pelo Teorema fundamental da semelhança de triângulos os triângulos ABC e ADE são semelhantes

b) Se são semelhantes, quais são os lados homólogos?

R. Os lados homólogos são: $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$ e $\overline{CA}$ e $\overline{EA}$.

3. Sabendo que $DE \parallel AB$, e que $AC = 6$, $CE = 3,25$, diga:



a) Quanto mede $\overline{CD}$. R.

A
B

=
A
C
D
E

C
D

$$4 = 6$$

$$2 \cdot CD$$

$$4 \cdot CD = 12$$

$$\overline{CD} = \frac{12}{4} = 3$$

$$4$$

b) Quanto mede C . R.

$$A + B + C = 180$$

$$77,24 + 65,44 + C = 180$$

$$C = 180 - 142,68$$

$$C = 37,32$$

c) Quanto mede D e E .

R. O ângulo D é homólogo a ao ângulo A , logo $D = 77,24^\circ$. O

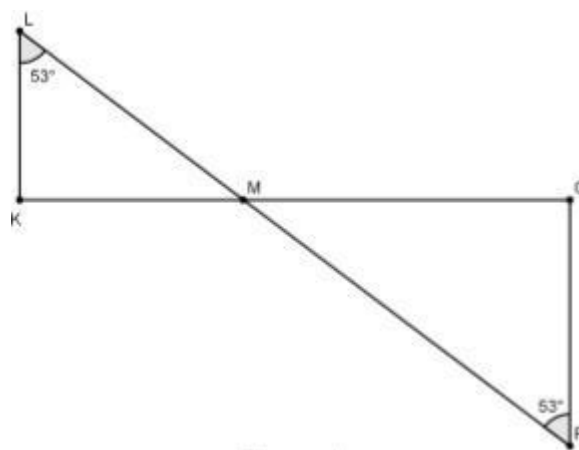
ângulo E é homólogo ao ângulo B , logo $E = 65,44^\circ$.

d) Quanto mede $\overline{CB}$. R.

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{C}{B} \\ \frac{D}{E} &= \frac{C}{E} \\ \frac{4}{2} &= \frac{CB}{3,25} \\ 2 \cdot CB &= 13 \\ \overline{CB} &= \frac{13}{2} = 6,5 \end{aligned}$$

Lição 93 – Casos de semelhança – Parte I

1. Determine se os triângulos KLM e MPQ são semelhantes.

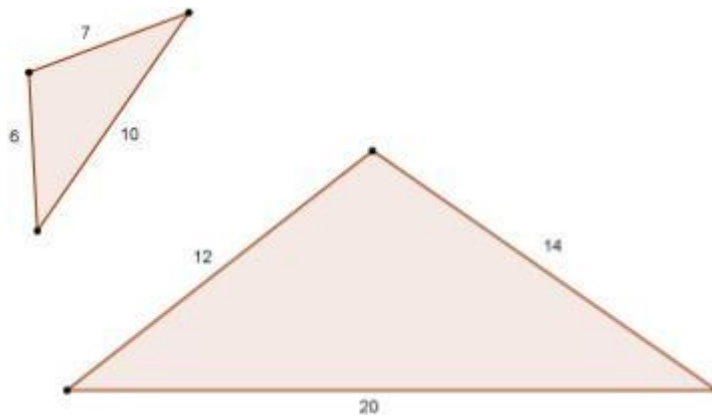


R. Os triângulos KLM e MPQ são semelhantes pelo caso AA, pois

$$\angle KLM \equiv \angle QPM = 53^\circ$$

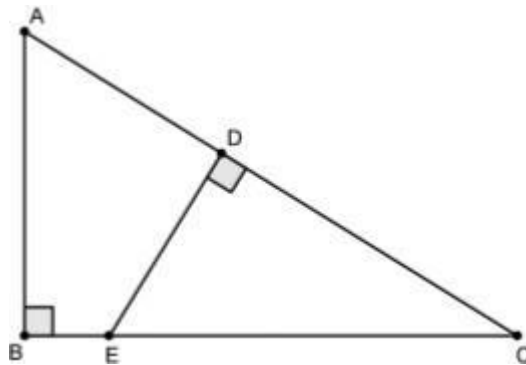
$$\text{LMK} \equiv \text{PMQ(OPV)}$$

2. Qual é a razão de semelhança dos triângulos abaixo?



R. A razão de semelhança é 2, pois $\frac{20}{10} = \frac{12}{6} = \frac{14}{7} = 2$.

3. Sabendo que $\overline{AB} = 15$, $\overline{BC} = 20$, $\overline{AD} = 10$ e $\overline{DC} = 15$, determine a medida de $\overline{DE}$ na figura abaixo.



R. Pelo caso AA, os triângulos ABC e EDC são semelhantes, com isso, temos que:

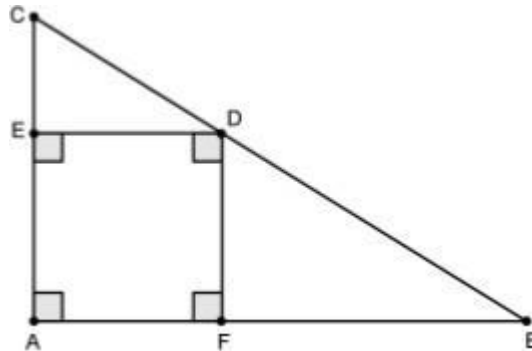
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$$

$$\frac{15}{\overline{DE}} = \frac{20}{15}$$

$$20 \cdot \overline{DE} = 225$$

$$\overline{DE} = \frac{225}{20} = 11,25$$

4. Na figura abaixo, temos $\overline{AC} = 4$ e $\overline{AB} = 6$. Determine o perímetro do quadrado AEDF.



R. Como não sabemos a medida do lado do quadrado, usaremos $\overline{ED} \equiv \overline{AE} = x$. Assim,
 $\overline{CE} = \overline{AC} - \overline{EA} = 4 - x$.

Os triângulos ABC e EDC são semelhantes pelo caso AA, com isso temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{4}{4 - x}$$

$$4x = 24 - 6x$$

$$10x = 24$$

$$x = \frac{24}{10} = 2,4$$

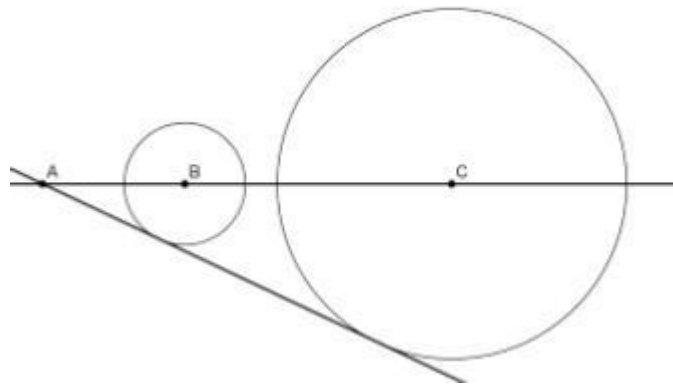
10

Como sabemos o valor dos lados do quadrado, determinaremos o valor do perímetro.

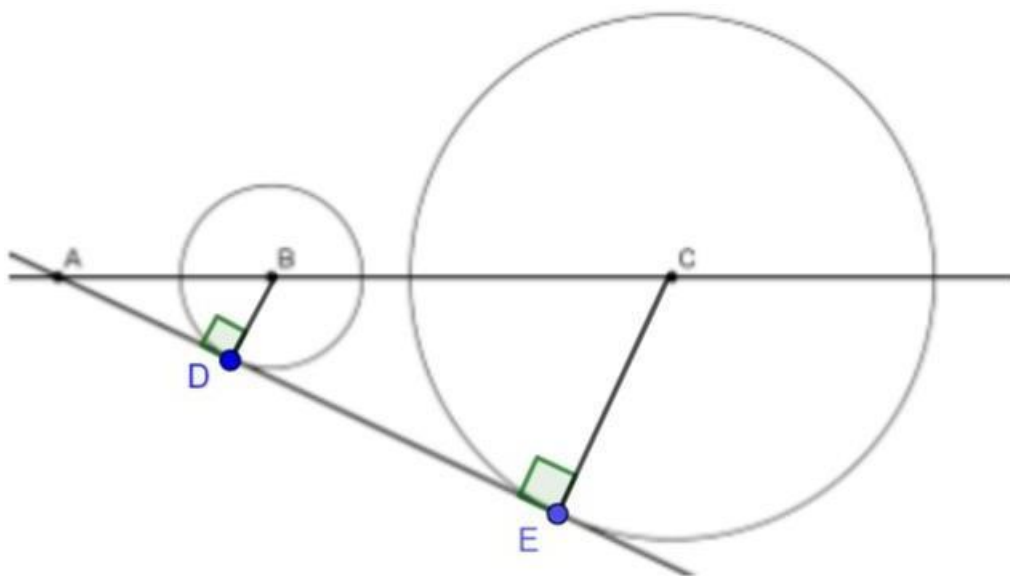
$$p = 2,4 + 2,4 + 2,4 + 2,4 = 9,6$$

5. Na figura abaixo, tem-se uma reta que passa pelos pontos A, B e C e outra que passa por A e é tangente⁵ às circunferências de centros B e C e raios 3 cm e 5 cm. Se $\overline{AB} = 7$ cm, determine $\overline{BC}$.

⁵ Reta tangente é a reta que toca a circunferência em apenas um ponto. O raio da circunferência é perpendicular à reta tangente.



R. Traçando o raio e encontrando a intersecção entre a reta tangente e as circunferências, temos a seguinte imagem.



Pelo caso AA, os triângulos ABD e ACE são semelhantes, com isso, temos que:

— —

$$\frac{EC}{BD} = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{7}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{7 + \overline{BC}}{7}$$

—

$$3 \cdot \overline{BC} + 21 = 35$$

—

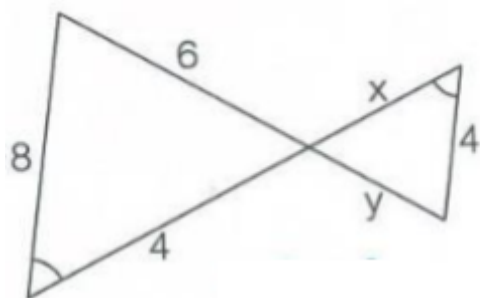
$$3 \cdot \overline{BC} = 14$$

$$\overline{BC} = \frac{14}{3}$$

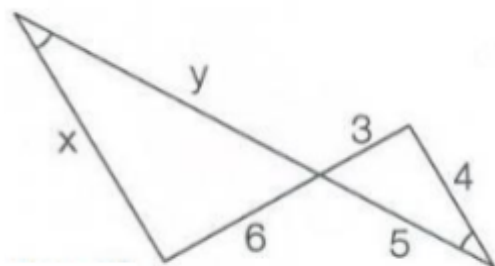
Lição 94 – Casos de semelhança – Parte II

1. Determine x e y nas figuras:

a)



b)



R. a) Como os dois triângulos são semelhantes pelo caso AA, temos:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{6}{3} = 2$$

$$4 \quad 5 \quad 3$$

Calculando o x , temos que:

$$\frac{x}{4} = 2$$

$$4$$

$$x = 8$$

Calculando o y , temos que:

$$\frac{y}{5} = 2$$

$$5$$

$$y = 10$$

b) Como os dois triângulos são semelhantes pelo caso AA, temos:

$$\frac{4}{x} = \frac{6}{y} = \frac{8}{4} = 2$$

Calculando o x, temos que:

$$4 = 2$$

—

$$x$$

$$x = 4 = 2$$

—

$$2$$

Calculando o y, temos que:

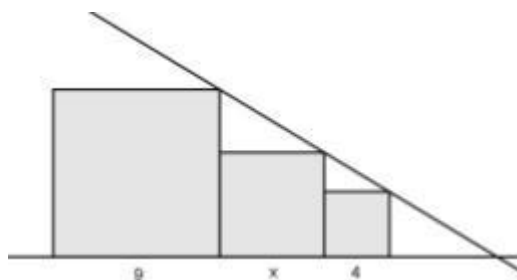
$$\frac{6}{2} = 2$$

$$y$$

$$y = \frac{6}{2} = 3$$

$$2$$

2. Determine x na figura abaixo, na qual existem três quadrados de lados 9, x e 4.



R. Os triângulos azul e vermelho são semelhantes



Então temos que:

$$\frac{9-x}{x} = \frac{x-4}{4}$$

$$x^2 - 4x = -4x + 36$$

$$x^2 - 4x + 4x = 36$$

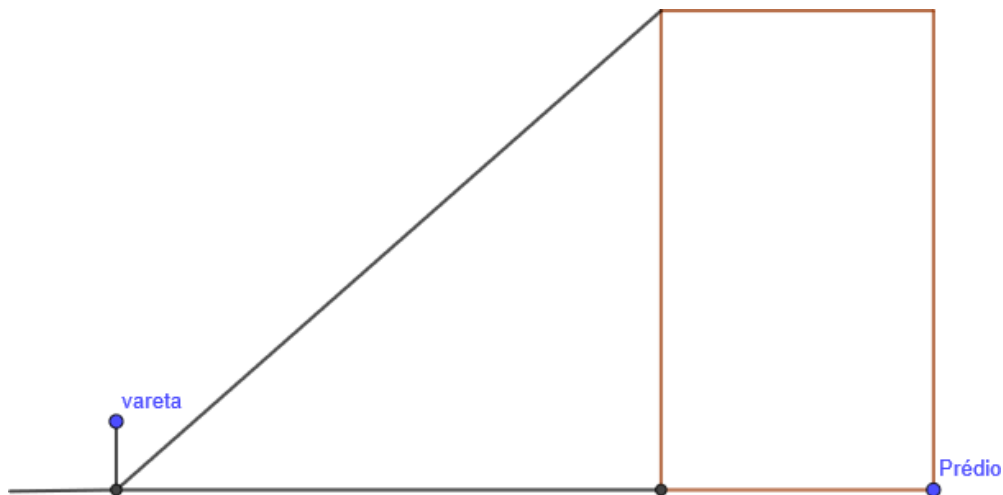
$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$

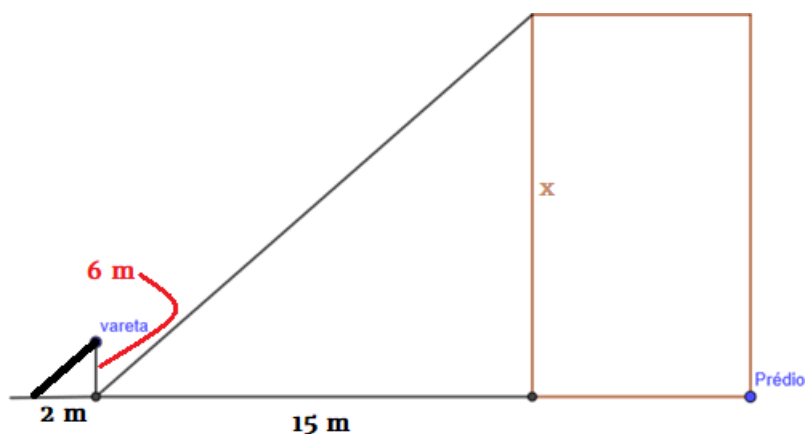
O valor de x é igual a 6, pois $x = -6$ não é possível, já que o lado do triângulo ou os lados do quadrado não podem ser negativos.

3. Determine a altura de um prédio cuja sombra tem 15 m no mesmo instante em que uma vara de 6 m fincada em posição vertical tem uma sombra de 2 m.

Esquema:



R. Vamos montar o esquema com as informações.



Como os dois triângulos são semelhantes, então temos que:

$$\frac{x}{6} = \frac{15}{2}$$

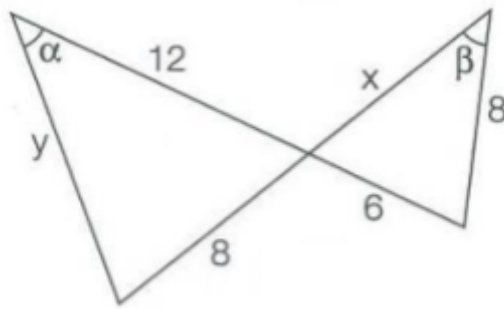
$$2x = 90$$

$$x = 45$$

Portanto, a altura do prédio é de 45 metros.

4. Se $\alpha = \beta$, determine x e y nos casos:

a)



R. Se $\alpha = \beta$ os dois triângulos são semelhantes pelo caso AA, pois além dessa igualdade temos ângulos opostos pelo vértice.

Com isso, temos a seguinte relação $\frac{12}{8} = \frac{8}{y}$.

$$\frac{x}{6} = \frac{8}{8}$$

Logo,

$$\frac{12}{8} = \frac{8}{y}$$

$$\frac{x}{6} = \frac{6}{8}$$

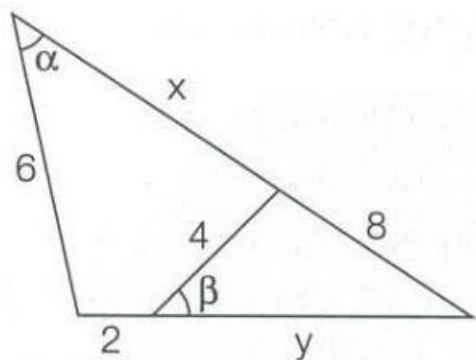
$$8x = 72$$

$$6y = 64$$

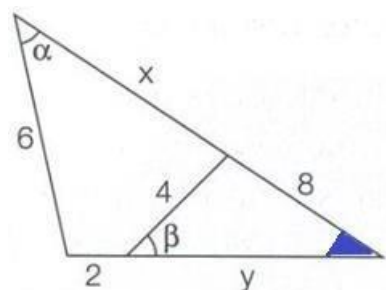
$$x = 9$$

$$y = \frac{32}{3}$$

b)



R. O triângulo maior e o triângulo menor semelhantes pelo caso AA, pois $\alpha = \beta$ e o ângulo em azul é comum nos dois triângulos.



Assim, temos que:

$$\frac{x+8}{y} = \frac{2+y}{8} = \frac{6}{4}$$

Vamos encontrar o valor de y:

$$\frac{2+y}{8} = \frac{6}{4}$$

$$4$$

$$8 +$$

$$4y =$$

$$48$$

$$4y = 40$$

$$y = 10$$

Agora, iremos encontrar o valor de x:

$$\frac{x+8}{y} = \frac{2+y}{8}$$

$$\frac{x+8}{10} = \frac{2+10}{8}$$

$$\frac{x+8}{10} = \frac{12}{8}$$

$$8x + 64 = 120$$

$$8x = 56$$

$$x = 7$$

5. Escreva o segundo caso de semelhança nos triângulos e demonstre-o.

R. Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos dois lados homólogos de outro triângulo, e o ângulo entre estes lados é congruente, então estes triângulos são semelhantes.



Demonstração: Ora, este caso de semelhança afirma que, se dois lados de um triângulo são proporcionais aos dois lados homólogos de outro triângulo e o ângulo entre estes lados é congruente (e esta é a hipótese), então os triângulos são semelhantes (e esta é a tese).

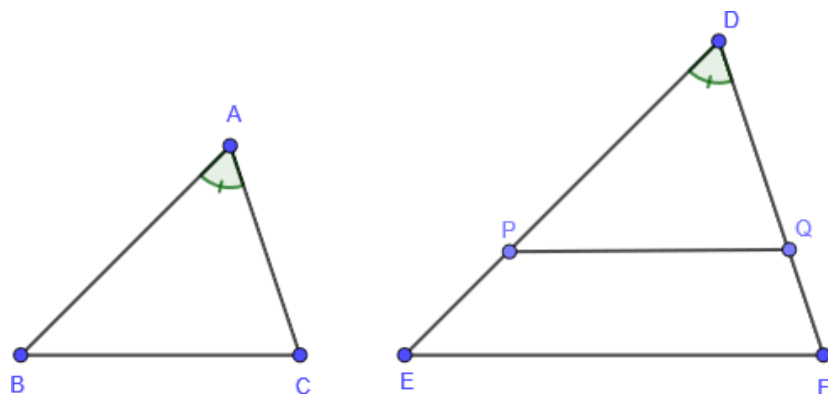
Matematicamente, fica da seguinte forma:

Hipótese	Tese
----------	------

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} \quad e \quad \hat{A} \equiv \hat{D} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Lê-se: Se $\frac{DE}{AB}$ está para $\frac{DF}{AC}$ assim como $\hat{A}$ está para $\hat{D}$, e o ângulo A é congruente ao D , então os triângulos ABC e DEF são semelhantes.

Por suposição, considere que os triângulos não sejam congruentes, e que $DE > AB$. Tome então um ponto P em DE tal que $DP \equiv AB$, em um ponto Q em DF tal que $DQ \equiv AC$.



Feita esta construção, é possível notar que os triângulos ABC e DPQ são congruentes pelo caso L.A.L, pois:

$$AB \equiv DP \text{ (por construção)}$$

$$\hat{A} \equiv \hat{D} \text{ (por hipótese)}$$

$$AC \equiv DQ \text{ (por construção)}$$

Agora, por hipótese afirmar que: $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$. Entretanto, como $\triangle DPQ \equiv \triangle ABC$, é

possível

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$$

$$\overline{\overline{DE}} = \overline{\overline{DE}} = \overline{\overline{DF}} = \overline{\overline{DF}}$$

$$AB \quad DP \quad AC \quad DQ$$

O Teorema de Tales afirma que duas retas paralelas determinam sob duas transversais segmentos proporcionais. A recíproca⁶ do Teorema de Tales diz que, dadas duas retas concorrentes, se elas forem cortadas por outras duas retas r e s , de tal forma que se formem em cada uma segmentos proporcionais, então estas duas retas r e s são paralelas. Considerando $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$ como duas retas concorrentes

(concorrentes em D), como $\frac{DE}{DF} = \frac{DP}{DQ}$, isso significa que PQ e EF são

paralelas. Se elas

$\frac{DP}{DQ} = \frac{DE}{DF}$

são paralelas, pelo Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos tem-se que:

$$\triangle DEF \sim \triangle DPQ$$

Entretanto, $\triangle DPQ$ é congruente ao triângulo ABC , o que implica serem eles semelhantes. Ora, pela propriedade transitiva da semelhança, se $\triangle DEF$ é semelhante a $\triangle DPQ$, e $\triangle DPQ$ é semelhante a $\triangle ABC$, então:

$$\triangle DEF \sim \triangle ABC$$

Dessa forma, fica demonstrado que, se dois triângulos possuem dois lados proporcionais e o ângulo determinado por eles for congruente, então estes triângulos são semelhantes. Consequentemente, os outros dois triângulos são congruentes, e o outro lado é proporcional.

Lição 95 – Casos de semelhança – Parte III

1. O que são os casos de semelhança? Copie as demonstrações de cada caso em seu caderno.

R. Os casos de semelhança são relações mínimas que dois triângulos precisam apresentar para serem semelhantes.

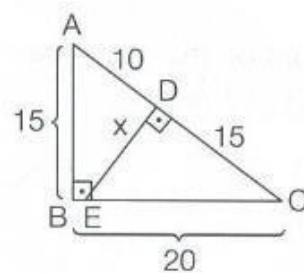
⁶ Um teorema é sempre formado por uma hipótese e uma tese “Se A, então B”. A recíproca deste teorema inverte a

hipótese e põe a tese “Se B, então A”.

2. Dada a figura, determine o valor de x .

R. Os triângulos ABC e EDC são semelhantes pelo caso AA, pois são dois triângulos retângulos e o ângulo C é comum nos dois. Assim, temos que:

$$\frac{15}{x} = \frac{20}{15}$$



Vamos encontrar o valor de x :

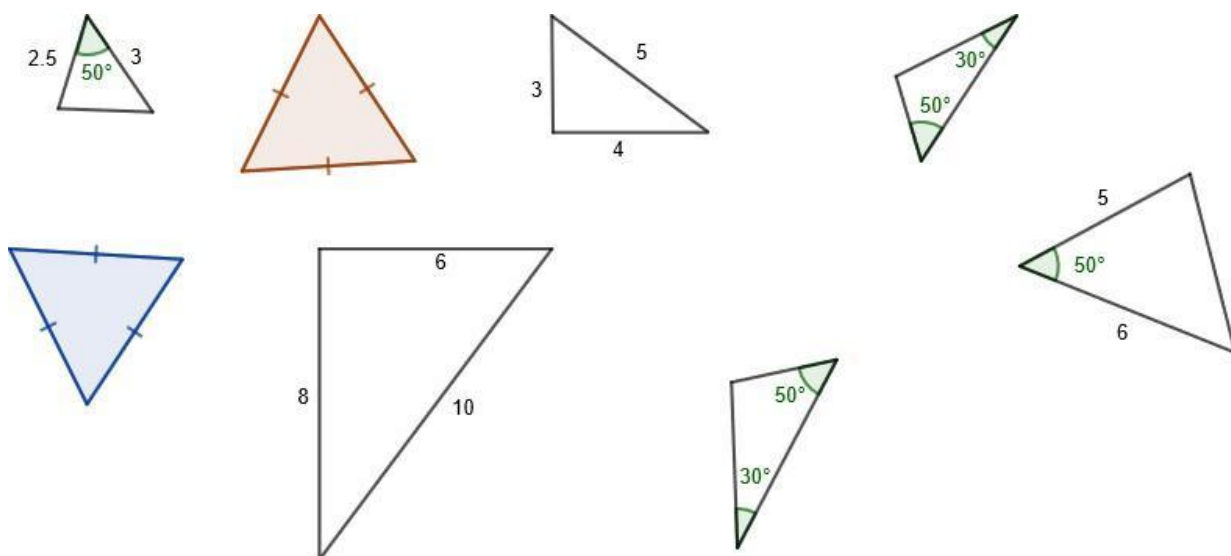
$$\frac{15}{x} = \frac{20}{15}$$

$$20x = 225$$

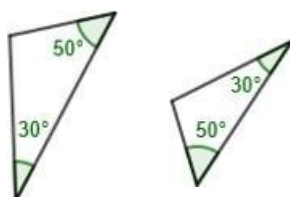
$$x = \frac{225}{20}$$

$$x = 11,25$$

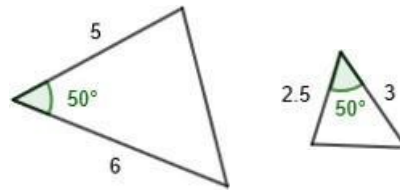
3. Dados oito triângulos, indique os pares de triângulos semelhantes e o caso de semelhança correspondente.



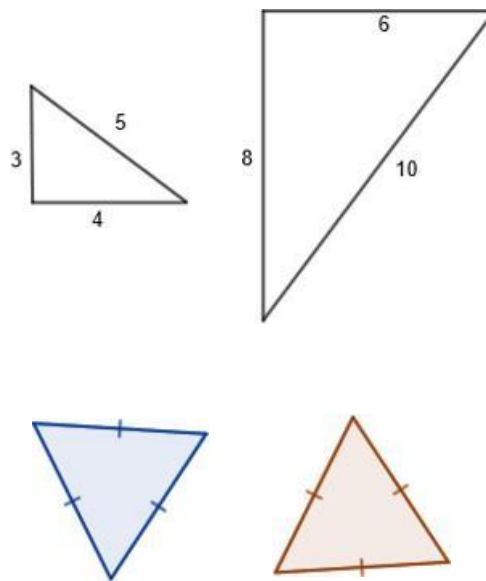
R. Os triângulos abaixo são semelhantes pelo caso AA.



Os triângulos abaixo são semelhantes pelo LAL



Os triângulos abaixo são semelhantes pelo LLL



Lição 96 – Avaliação

1. Defina:

a) Ângulo

R. É a reunião de duas semirretas de mesma origem.

b) Ângulo obtuso

R. É o ângulo cuja medida é maior que 90° .

c) Retas perpendiculares

R. São retas concorrentes e formam entre si quatro ângulos retos.

d) Ângulos opostos pelo vértice

R. Sejam duas retas concorrentes formando quatro ângulos. Analisando dois a dois, é possível notar que esses ângulos ou estão lado a lado ou só possuem um único ponto em comum, que também é o ponto de encontro das duas retas. Quando dois ângulos possuem essa última característica, eles são chamados de ângulos opostos pelo vértice.

e) Ângulos adjacentes

R. Dois ângulos são adjacentes quando são consecutivos e não possuem pontos internos.

f) Ângulos correspondentes

R. Dois ângulos que ocupam a mesma posição nas retas paralelas são chamados de correspondentes. Eles apresentam a mesma medida.

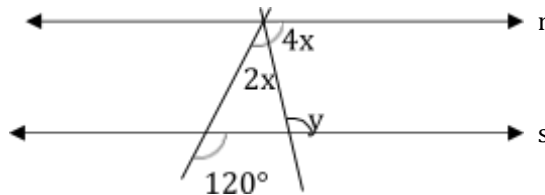
g) Ângulos alternos internos

R. Sejam duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Os ângulos alternos internos são pares de ângulos não adjacentes que estão em lados opostos em relação à reta transversal e na parte interna das paralelas.

h) Ângulos colaterais

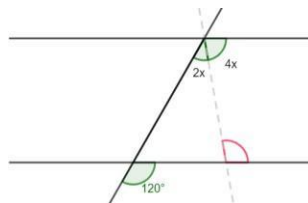
R. Sejam duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Ângulos colaterais são pares de ângulos não adjacentes localizados no mesmo lado da reta transversal.

2. Na figura seguinte, as retas r e s são paralelas. Qual é a medida do ângulo y ?



- a) 100°
- b) 110°
- c) 120°
- d) 130°
- e) 140°

R. Observando o desenho é possível notar que o ângulo gerado pela soma de $2x$ e $4x$ é correspondente ao ângulo de medida 120° . Portanto, $2x + 4x = 120$



Sendo assim, temos que $x = 20$, pois:

$$2x + 4x = 120$$

$$6x = 120$$

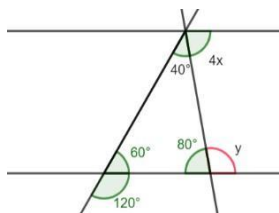
$$x = \frac{120}{6}$$

$$x = 20$$

Se $x = 20$, então $2x = 2 \cdot 20 = 40^\circ$.

Sabemos que o suplemento de 120° é 60° . Assim, sabemos a medida de dois ângulos do triângulo que foi formado pelas transversais. Portanto, para saber o valor do terceiro, basta subtrair de 180° as medidas já conhecidas. Assim, temos:

$$180 - 40 - 60 = 80^\circ$$



Sabemos ainda que 80° e y são suplementares. Assim:

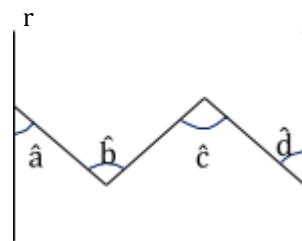
$$80^\circ + y = 180^\circ$$

$$y = 180 - 80$$

$$y = 100^\circ$$

Resposta: alternativa a.

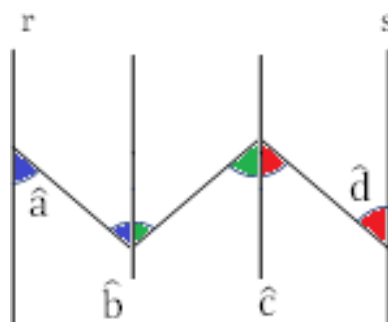
3. Na figura, as retas r e s são paralelas. O ângulo $\hat{a}$ mede 42° , o ângulo $\hat{b}$ mede 71° e o ângulo $\hat{d}$ mede 33° . Determine a medida do ângulo $\hat{c}$.



R. Como $\hat{a}$ mede 42° , $\hat{b} = \hat{a} + \text{ângulo pintado de verde}$ e $\hat{b}$ mede 71° então o ângulo pintado de verde é igual a 29° .

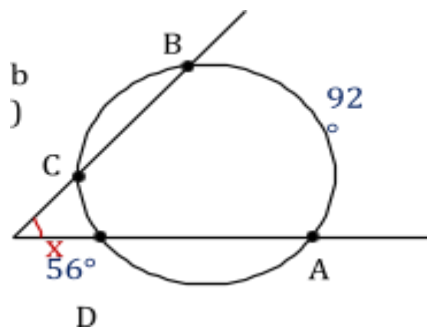
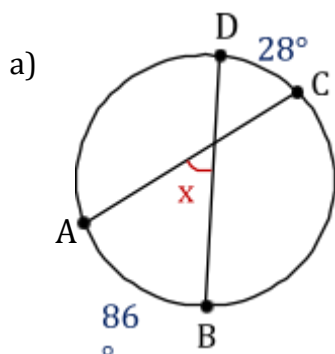
O ângulo $\hat{c} = \text{o ângulo verde} + \text{o ângulo vermelho}$. Como o ângulo vermelho é o ângulo $\hat{d}$ então, temos que:

$$\hat{c} = \text{o ângulo verde} + \text{o ângulo vermelho}$$



$$\hat{c} = 29^\circ + 33^\circ = 62^\circ$$

4. Determine a medida x em cada uma das figuras (a medida dos arcos está indicada em cor azul):

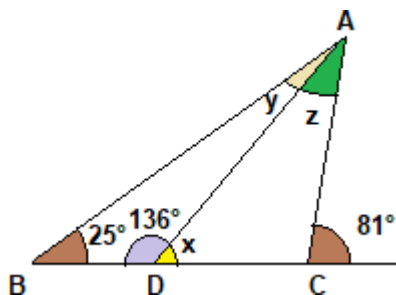


R.

$$a) x = \frac{86}{2} + \frac{28}{2} = 43 + 14 = 57^\circ$$

$$b) x = \frac{92}{2} - \frac{56}{2} = 46 - 28 = 18^\circ$$

5. Determine as medidas x , y e z indicadas na figura abaixo.



R. Os ângulos x e 136° são suplementares. Portanto, a medida de x é:

$$x + 136 = 180$$

$$x = 180 - 136$$

$$x = 44^\circ$$

A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° . Portanto, no triângulo ABD, temos:

$$y + 25 + 136 = 180$$

$$y + 161 = 180$$

$$y = 180 - 161$$

$$y = 19^\circ.$$

Pelo teorema do ângulo externo, temos que a soma de x e z devem ser iguais a 81° . Como já sabemos a medida de x , temos:

$$x + z =$$

$$81^\circ 44 + z$$

$$= 81$$

$$z = 81 - 44$$

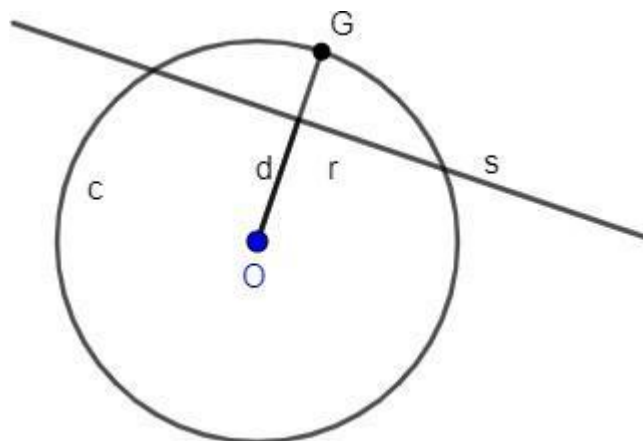
$$z = 37.$$

6. Defina com palavras e com desenho as três posições relativas entre uma reta e uma circunferência.

R. As três posições relativas entre uma reta e uma circunferência são: reta secante, reta tangente e reta externa.

Reta secante: Quando a reta s corta a circunferência em dois pontos distintos, s é chamada reta secante à circunferência.

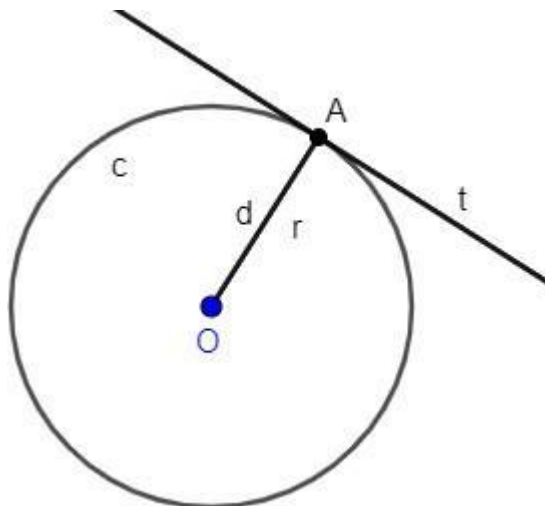
Note que a distância d do centro à reta s é menor que o comprimento r do raio, ou seja, $d < r$.



Reta Tangente: Quando a reta t passa por apenas um ponto em comum com a circunferência, o ponto A, t é chamada reta tangente à circunferência.

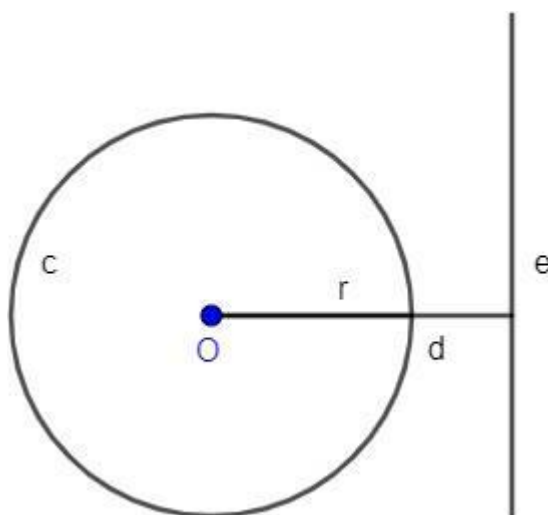
Note que a distância d do centro à reta t é igual ao comprimento r do raio, ou seja, $d = r$.

Observação: o ponto A é chamado de ponto de tangência.



Reta externa: Quando a reta não passa por nenhum ponto em comum com a circunferência, é chamada reta externa à circunferência.

Note que a distância d do centro à reta é maior que o comprimento r do raio, ou seja, $d > r$.



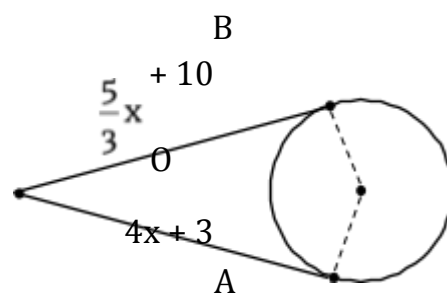
7. Observe a figura e determine:

a) a medida x ;

b) a medida do segmento PA;

c) a medida do segmento PB;

d) o perímetro do quadrilátero PAOB, se o comprimento do raio é 7 cm.



R. a) Pela propriedade da reta tangente, temos que:

$$\frac{5}{-x} + 10 = 4x + 3$$

$$3$$

$$\frac{5}{-x} - 4x = 3 - 10$$

$$3$$

$$\frac{5}{-x} - \frac{12}{x} = -7$$

$$\frac{3}{-x} - \frac{12}{x} = -7$$

$$-\frac{7}{3}x = -7$$

$$-7x = -21$$

$$x = \frac{-21}{-7} = 3$$

$$-7$$

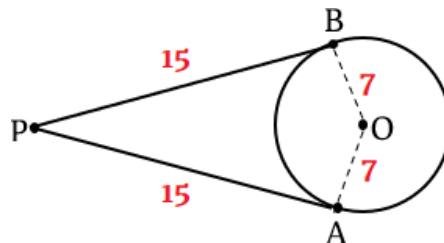
—

b) $PA = 4x + 3 = 4 \cdot 3 + 3 = 15$.

— — —

c) Como $PA \equiv PB$ então $PB = 15$.

d) Com os resultados encontrados na letra b e c e com o enunciado, temos o seguinte desenho:



Calculando o perímetro do quadrilátero PAOB, temos:

$$p = 15 + 15 + 7 + 7$$

$$= 44$$

V

60°

8. Determine as medidas a , b , c e d indicadas na figura.

d

c b

T

48° S

a

110°

R

R. O ângulo d é um ângulo inscrito, então temos que:

$$d = \frac{RT}{2}$$

$$d = \frac{RS + ST}{2}$$

$$d = \frac{110 + 48}{2}$$

$$d = \frac{158}{2} = 79^\circ$$

O ângulo a é um ângulo inscrito, então temos que:

$$a = \frac{ST}{2}$$

$$a = \frac{ST + TV}{2}$$

$$a = \frac{48 + 60}{2}$$

$$a = \frac{108}{2} = 54^\circ$$

O arco VR mede:

$$VR + 110 + 48 + 60 = 360$$

$$VR + 218 = 360$$

$$VR = 360 - 218$$

$$VR = 142^\circ$$

O ângulo b é um ângulo inscrito, então temos que:

$$b = \frac{TR}{2}$$

$$b = \frac{TV + VR}{2}$$

$$b = \frac{60 + 142}{2}$$

$$b = \frac{202}{2} = 101^\circ$$

O ângulo c é um ângulo inscrito, então temos que:

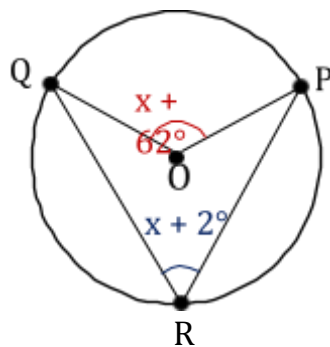
$$c = \frac{VS}{2}$$

$$c = \frac{VR + RS}{2}$$

$$c = \frac{142 + 110}{2}$$

$$c = \frac{252}{2} = 126^\circ$$

9. Qual é a medida do ângulo inscrito na figura a seguir?



R. O ângulo QRP é o ângulo inscrito e o ângulo POQ é o ângulo central. Os dois ângulos possuem a seguinte relação:

$$QRP = \frac{POQ}{2}$$

$$x + 2 = \frac{x + 62}{2}$$

$$2x + 4 = x + 62$$

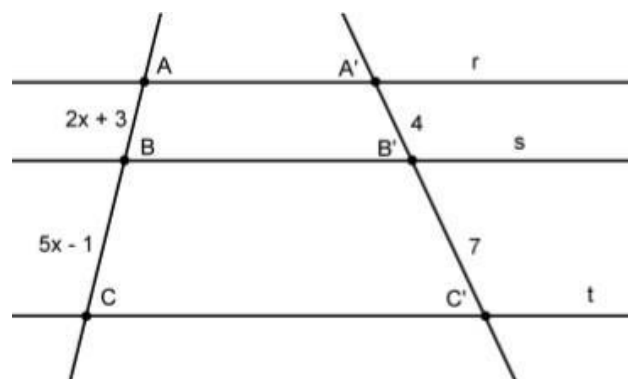
$$2x - x = 62 -$$

$$4x = 58^\circ$$

Após encontrarmos o valor de x calcularemos a medida do ângulo inscrito.

$$QRP = x + 2 = 58 + 2 = 60^\circ$$

10. Enuncie o Teorema de Tales e determine o valor de x nas figuras abaixo sabendo que $r \parallel s \parallel t$.



R. Teorema de Tales: dadas duas transversais em um feixe de retas paralelas, a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os dois segmentos correspondentes da outra transversal.

Ora, pelo teorema de Tales, a razão entre dois segmentos de uma transversal é proporcional à razão entre os dois segmentos correspondentes da outra transversal. Logo,

$$\frac{2x + 3}{5x - 1} = \frac{4}{7}$$

$$14x + 21 = 20x - 4$$

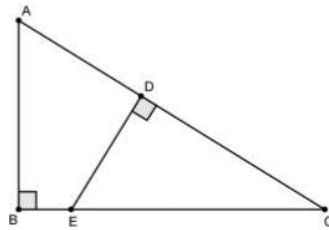
$$14x - 20x = -4 - 21$$

$$-6x = -25 \cdot (-1)$$

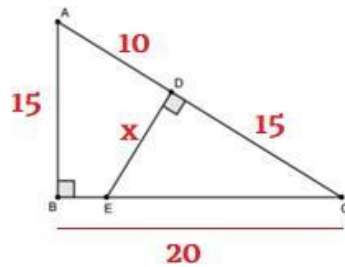
$$6x = 25$$

$$x = \frac{25}{6}$$

11. Sabendo que $AB = 15$, $BC = 20$, $AD = 10$ e $DC = 15$, determine a medida de DE na figura abaixo.



R. Dadas as informações do enunciado, temos a seguinte imagem:



Os triângulos ABC e EDC são semelhantes pelo caso AA, pois os ângulos $B \equiv D = 90^\circ$ e o ângulo C é comum nos dois triângulos. Assim, temos que:

$$\frac{15}{x} = \frac{20}{15}$$

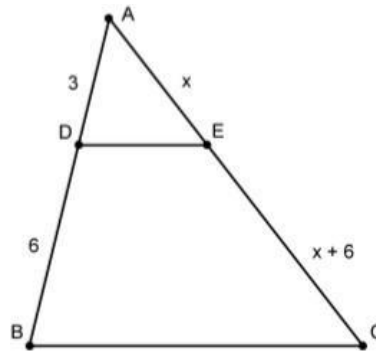
$$20x = 225$$

$$x = \frac{225}{20} = 11,25$$

$$20$$

Portanto, $DE = 11,25$.

12. Determine o valor de x na figura abaixo, sabendo que $\overline{DE}$ é paralelo à base $\overline{BC}$ do triângulo ABC.



R. Como DE é paralelo a BC, pelo Teorema fundamental da semelhança de triângulos os triângulos ADE e ABC são semelhantes. Assim, temos que:

$$\frac{3}{6} = \frac{x}{x+6}$$

$$3x + 18 = 6x$$

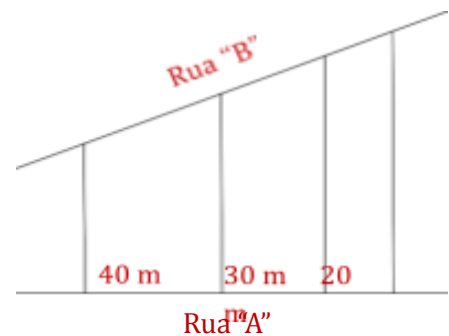
$$3x - 6x = -18$$

$$-3x = -18 \cdot (-1)$$

$$3x = 18$$

$$x = \frac{18}{3} = 6$$

13. Três terrenos têm frente para a rua "A" e para a rua "B", como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua "A". Qual é a medida de frente para a rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua é de 180m?



R. A frente para a Rua B do terreno de fundo 40 m mede x, a frente para a Rua B do terreno de fundo 30 m mede y e a frente para a Rua B do último terreno mede z. Pelo enunciado, temos que $x + y + z = 180$ m.

Pelo Teorema de Tales, temos que $\frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{z}{20}$.

$$40 \quad 30 \quad 20$$

Pela dica, temos que

$$= \frac{c}{d} \text{ então } \frac{a+c}{b+d}$$

Assim, podemos utilizar essa propriedade com a proporção que já encontramos.

$$\frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{z}{20} = \frac{x+y+z}{40+30+20} = \frac{180}{90} = 2$$

Como $x = y = z = 2$ temos que $x = 80$, $y = 60$ e $z = 40$.

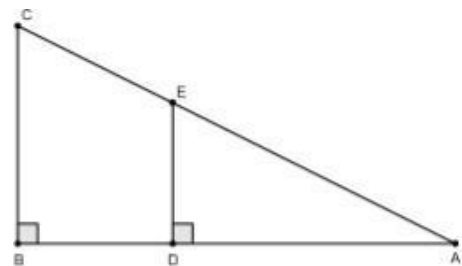
$$\frac{40}{40} = \frac{30}{30} = \frac{20}{20}$$

14. Observe a figura abaixo e responda:

a) Os triângulos ABC e ADE são semelhantes?

b) Se são semelhantes, quais são os lados homólogos?

c) Enuncie o teorema fundamental da semelhança.



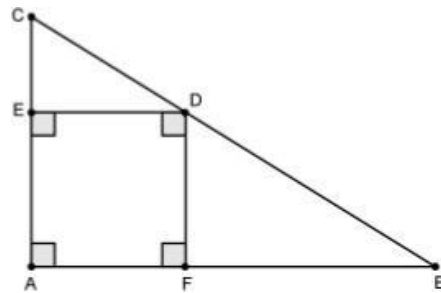
R. a) Sim, são semelhantes.

b) Os lados homólogos são:

- $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$
- $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$
- $\overline{CA}$ e $\overline{EA}$

c) Teorema fundamental da semelhança de triângulos: se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

15. Na figura abaixo, temos $AC = 4$ e $AB = 6$. Determine o perímetro do quadrado AEDF.



R. Como não sabemos a medida do lado do quadrado, usaremos $ED \equiv AE = x$. Assim,
 $\overline{CE} = \overline{AC} - \overline{EA} = 4 - x$.

Os triângulos ABC e EDC são semelhantes pelo caso AA, com isso temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{4}{4 - x}$$

$$4x = 24 - 6x$$

$$10x = 24$$

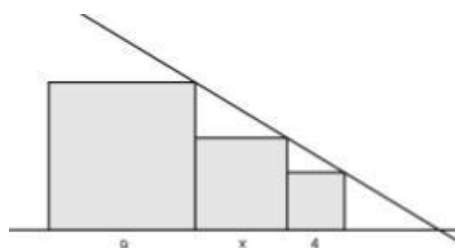
$$x = \frac{24}{10} = 2,4$$

10

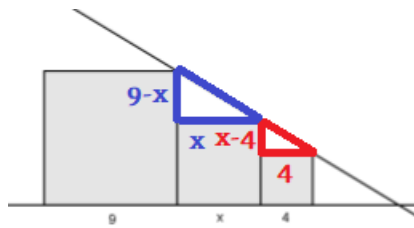
Como sabemos o valor dos lados do quadrado, determinaremos o valor do perímetro.

$$p = 2,4 + 2,4 + 2,4 + 2,4 = 9,6$$

16. Determine x na figura abaixo, na qual existem três quadrados de lados 9, x e 4.



R. Os triângulos azul e vermelho são semelhantes



Então temos que:

$$\frac{9-x}{x} = \frac{x-4}{4}$$

$$x^2 - 4x = -4x +$$

$$36 \quad x^2 - 4x + 4x$$

$$= 36 \quad x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$

O valor de x é igual a 6, pois x = -6 não é possível, já que o lado do triângulo ou os lados do quadrado não podem ser negativos.

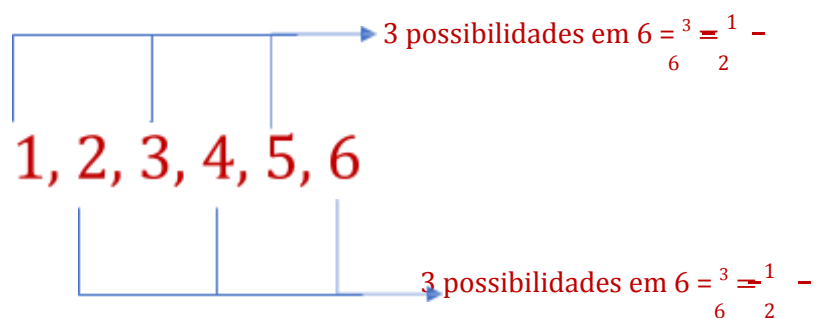
Gabarito de Matemática

9º ano, Volume 7

Lição 97 – A mesma chance de vitória

1. Considere o lançamento de um dado, no qual você deverá escolher os números ímpares e seu oponente os números pares. Qual é a possibilidade de cada um vencer? Faça uma representação do problema com desenhos, frações e porcentagens.

R. Como em um dado existem 6 números, dos quais 3 são ímpares e 3 são pares, cada um tem 50% de chance de vitória.



2. Considere o lançamento de um dado, no qual você deverá escolher 4 números e seu oponente 2 números. Qual é a possibilidade de cada um vencer? Faça uma representação do problema com desenhos, frações e porcentagens.

R. Como são 6 possibilidades, ao escolher 4 números, tenho $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ de possibilidade de

vitória, o que corresponde a 66%. Como meu oponente escolheu 2 números, ele tem 2 chances em 6, isto é, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ de chance de ganhar.

3. Em uma partida de futebol, o capitão de cada time deve escolher uma das faces de uma moeda. O que vencer, escolhe começar com a bola ou o lado do campo preferido. Assim, um escolhe *cara* e o outro *coroa*. O árbitro lança a moeda para cima, e assim que ela cai, observa a face voltada para cima. Responda: a chance de vitória é igual para os dois capitães? Faça uma representação do problema com desenhos, frações e porcentagens.

R. Sim, se a moeda não for viciada, os dois têm a mesma possibilidade de ganhar, uma vez que ao lançar a moeda o resultado pode ser “cara” ou “coroa”, não admitindo uma terceira possibilidade. Assim, cada resultado admite a possibilidade 50%, ou seja, existe 1 possibilidade em 2 (duas) de ser cara, e 1 possibilidade em 2 (duas) de ser coroa.

4. Lance uma moeda 50 vezes para o alto e observe, em cada um das vezes, a face que cair virada para cima. Anote os resultados em uma folha. Represente a quantidade de vezes que caiu *cara* utilizando uma fração e porcentagens. O resultado se aproxima daquilo que foi discutido no exercício anterior?

R. Espera-se que o resultado obtido corresponda ao esperado, isto é, que cada face caia o mesmo número de vezes voltada para cima, isto é, aproximadamente 25 vezes cada uma. Por ser um experimento com poucas repetições, é possível que a face “cara” caia 40 vezes voltada para cima, o que pode indicar que a moeda tenha algum defeito de balanceamento.

Lição 98 – Probabilidade

1. Qual é a definição de probabilidade? Explique.

R. Probabilidade é a observação de um experimento aleatório, ambos, observação e experimento, definidos anteriormente. *Probabilidade é a observação de um experimento aleatório*: um experimento aleatório é todo experimento que, repetido em condições idênticas, pode apresentar resultados diferentes. Definidos anteriormente, quer dizer que não é uma observação qualquer de um experimento aleatório qualquer, senão que uma observação definida de um experimento definido.

2. O que é o espaço amostral? E o que é um evento?

R. Espaço amostral é a coleção de todos os eventos possíveis e esperados de um experimento. Uma vez que o experimento é realizado, denominamos o resultado por evento.

3. Qual é o espaço amostral do lançamento de um dado? E qual é a probabilidade da face com o número 5 cair voltada para cima?

R. Lançamento do dado = [1, 2, 3, 4, 5, 6].

A probabilidade da face 5 cair voltada para cima é de 1 (uma) para 6 (seis): $\frac{1}{6}$

4. Considere o seguinte experimento: lançar dois dados para cima e somar as faces que caírem voltadas para cima. Pense e responda:

a) Qual seria o espaço amostral desse experimento?

R: O espaço amostral se constitui de todas as possibilidades de um experimento. Como um dado possui os números de 1 a 6, o espaço amostral se constituirá de todas as somas possíveis entre os números de 1 a 6.

E: [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

b) Liste todas as possibilidades de soma como um par ordenado, conforme o exemplo a seguir: 4 = (1, 3), (3, 1), (2, 2)

Soma 4		
Dado 1	Dado 2	
1	3	Par ordenado: (1, 3)
3	1	Par ordenado: (3, 1)
2	2	Par ordenado: (2, 2)

R:

2 = (1, 1).

3 = (2, 1), (1, 2).

4 = (1, 3), (2, 2), (3, 1).

5 = (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1).

6 = (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1).

7 = (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1).

8 = (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2).

9 = (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3).

10 = (4, 6), (5, 5), (6, 4).

11 = (5, 6), (6, 5).

12 = (6, 6).

c) Qual é o total de possibilidades?

R: Temos um total de 36 possibilidades.

d) Você acredita que todos os eventos possuem a mesma probabilidade de ocorrência? Preencha a tabela a seguir e observe qual é o número que aparece mais vezes. Que podemos concluir?

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

R. O evento “Soma = 7” tem maior probabilidade de acontecer, uma vez que a quantidade de combinações possíveis com esse resultado é maior que a quantidade de combinações com resultado 12, por exemplo. Uma vez que o primeiro dado é lançado, existe sempre uma possibilidade do número do segundo dado somar 7. Por exemplo: se caiu 1 no primeiro dado, no segundo dado ainda pode cair 2; se caiu 3 no primeiro dado, no segundo dado ainda pode cair 4. Agora, para que o resultado seja igual a 12, por exemplo, no primeiro dado é preciso cair, necessariamente, o número 6. Se já não caiu 6, já desconsideramos a probabilidade de cair 12. Ou, por exemplo, o número 8. Se no primeiro dado cair o número 1, não existe mais possibilidade da soma ser igual a 8.

5. Entre os números inteiros de 0 a 20, selecionam-se apenas os números ímpares.

a) Qual é o espaço amostral?

R. E: [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19].

b) Quantos elementos, no total, há nesse espaço amostral?

R. Dez.

c) Deseja-se selecionar um deles. Qual é a probabilidade que cada número possui de ser retirado?

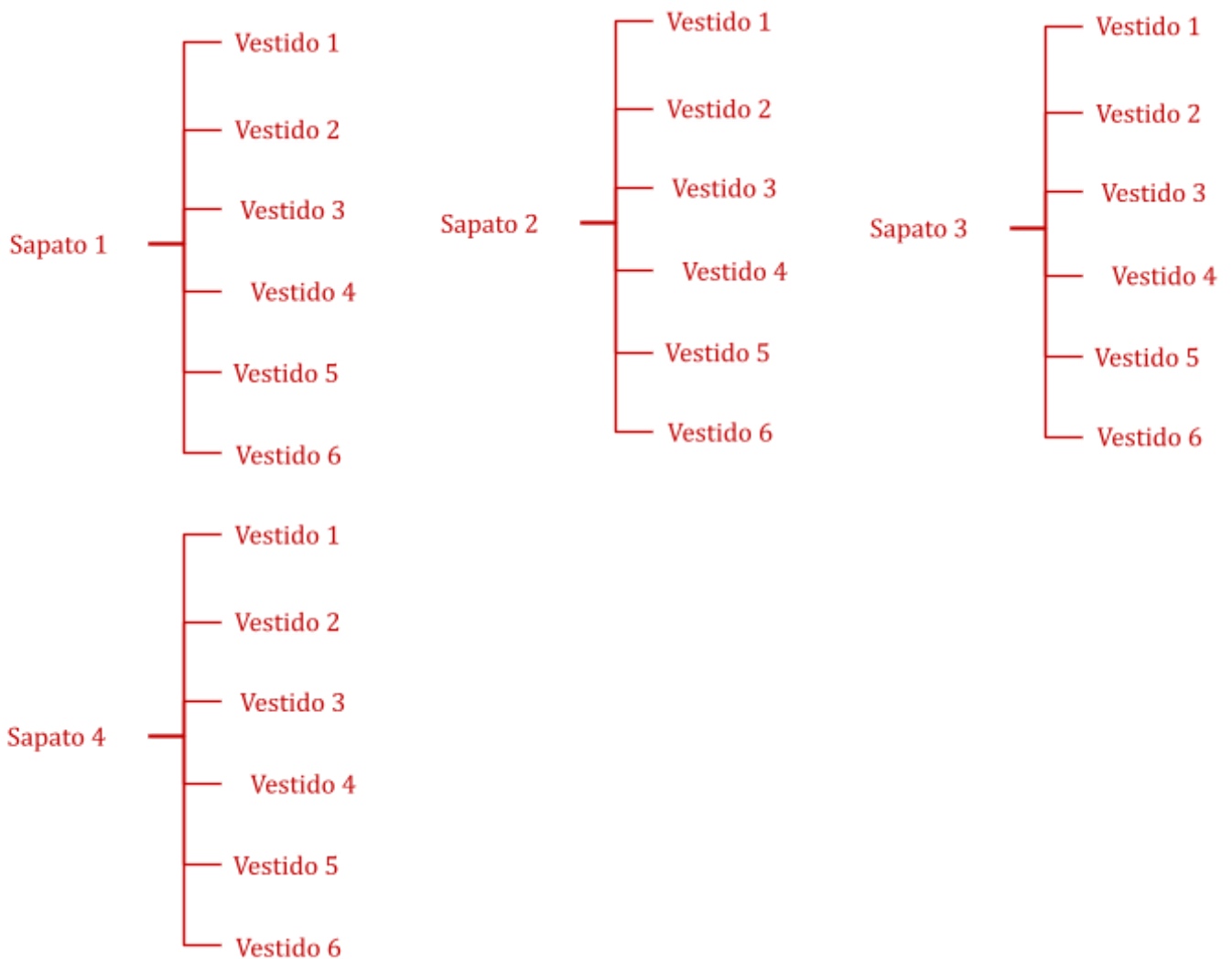
R. Como são dez possibilidades, cada número possui 1 (uma) chance em 10: $\frac{1}{10}$, que em porcentagens pode ser representado como $1 : 10 = 0,10 = 10\%$ de chance.

Lição 99 – Princípio Fundamental da Contagem

1. Maria precisa escolher um conjunto vestido-sapato para sua formatura. Se ela dispõe de 4 pares de sapatos e 6 vestidos para escolher, de quantos modos pode formar o conjunto? Encontre o resultado pelo Princípio Fundamental da Contagem e construa a árvore de possibilidades.

R. Pelo P.F.C, existem 4 possibilidades diferentes para se escolher os sapatos e 6 possibilidades diferentes para se escolher os vestidos, o que é o mesmo que encontrar o produto entre 4 e 6:

$$4 \cdot 6 = 24 \text{ possibilidades.}$$



2. Quantos são os números de três algarismos em que os três algarismos são ímpares? Ou seja: de quantos modos podemos formar um número de três algarismos usando apenas os algarismos ímpares?

Para resolver esse problema, responda às questões a seguir.

a) Quais são os algarismos ímpares? Quantos são?

R. 1, 3, 5, 7, 9.

b) Quantas são as possibilidades para o algarismo da centena?

R. 5 possibilidades.

c) Para cada centena, quantas são as possibilidades para a dezena?

R. 5 possibilidades.

d) Para cada centena e cada dezena, quantas são as possibilidades para a unidade?

R. 5 possibilidades.

e) Quantas são as possibilidades para formar o número?

R. Se cada uma das casas pode admitir 5 possibilidades, pelo PFC temos: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ possibilidades.

3. Quantos são os números de três algarismos distintos em que os três algarismos são ímpares? Siga o roteiro do exercício anterior, mas fique atento: quando for escolher o algarismo das dezenas, ele não poderá ser igual ao das centenas; o das unidades não poderá ser igual a nenhum dos anteriores.

R. Como os três algarismos precisam ser distintos, a situação muda. Os algarismos ímpares são: 1, 3, 5, 7 e 9, ou seja, cinco algarismos. Se na casa das centenas for colocado o algarismo 1, restam apenas quatro possibilidades para a casa das dezenas. Após colocar um algarismo na casa das dezenas, restam apenas 3 possibilidades para a casa das unidades. Assim, pelo PFC, temos: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ possibilidades.

4. Numa loja há quatro portas de entrada.

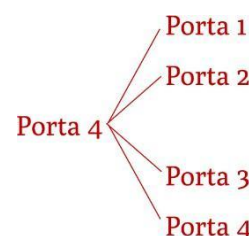
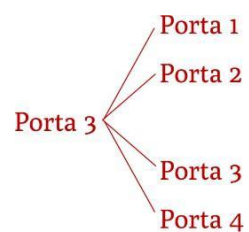
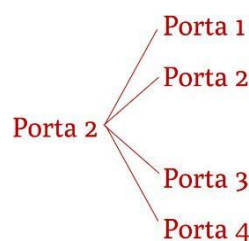
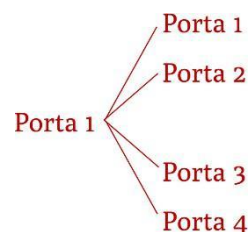
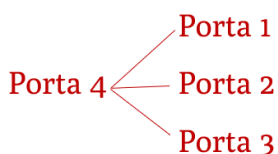
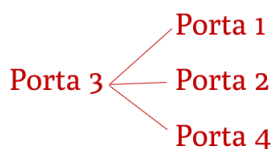
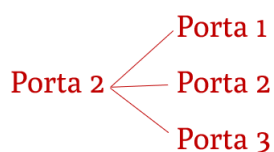
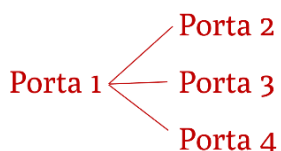
a) Quantas são as possibilidades de entrar por uma porta e sair por outra?

R. Se há 4 maneiras de entrar, e não podemos sair pela mesma porta de entrada, devemos considerar que há 3 maneiras de sair. Pelo PFC, temos: $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades de entrar por uma porta e sair por outra.

b) Quantas são as possibilidades de escolha das portas para entrar e sair da loja, podendo usar a mesma porta?

R. Como são 4 possibilidades para entrar e 4 possibilidades para sair, pelo PFC, temos: $4 \cdot 4 = 16$ possibilidades de entrar e sair por qualquer uma das portas.

c) Construa a árvore de possibilidades dos dois itens anteriores. R.



5. Uma moeda é lançada algumas vezes e a sequência de resultados, cara ou coroa, de cada lançamento é anotada.

Quantas sequências diferentes podem ser formadas:

a) se forem feitos 2 lançamentos?

R. Como são duas possibilidades para cada lançamento, e serão feitos dois lançamentos, temos, pelo PFC: $2 \cdot 2 = 4$ possibilidades. Vamos listar cada uma delas, considerando C para cara, e K para coroa:

(C, C) , (C, K) , (K, C) , (K, K).

b) se forem feitos 3 lançamentos?

R: Como são duas possibilidades para cada lançamento, e serão feitos três lançamentos, temos, pelo PFC: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ possibilidades. Vamos listar cada uma delas, considerando C para cara, e K para coroa:

(C, C, C) , (C, C, K) , (C, K, C) , (C, K, K)

(K, K, K) , (K, K, C) , (K, C, K) , (K, C, C)

c) se forem feitos 4 lançamentos?

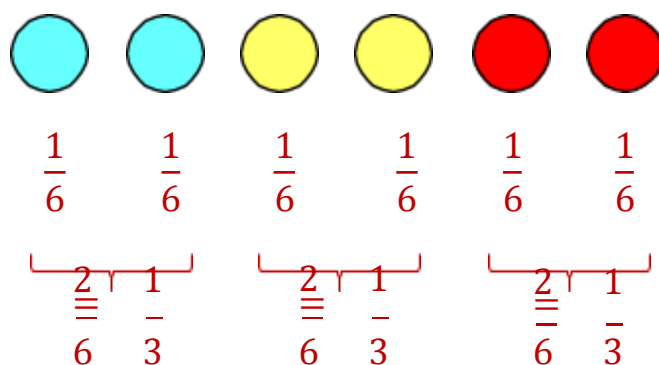
R. Como são duas possibilidades para cada lançamento, e serão feitos quatro lançamentos, temos, pelo PFC: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ possibilidades.

Lição 100 – Calculando a probabilidade

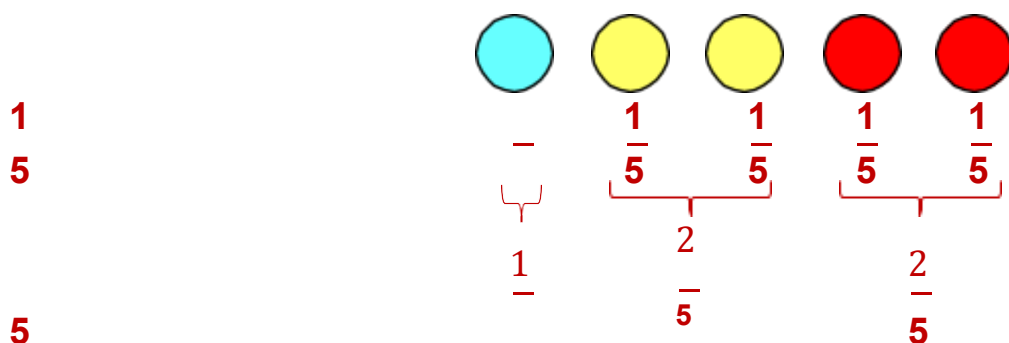
1. Pense no último problema da urna com bolinhas coloridas e responda:

a) A probabilidade de saírem duas bolinhas da mesma cor é menor do que qualquer outro tipo de combinação. Você consegue explicar o porquê?

R. No problema, havia 6 bolinhas, e cada par possuía uma cor: azul, amarela e vermelha. Como cada bolinha possui 1 (uma) possibilidade em 6, podemos dizer que cada cor possui 1 (uma) possibilidade em três:



Após retirar uma bolinha azul, por exemplo, a probabilidade de tirar uma azul na segunda vez é menor, pois teremos mais bolinhas de outras cores. Como restam 5 bolinhas, as probabilidades mudariam para o seguinte:



- b) Se você tivesse que escolher entre as possibilidades: Combinação 1: duas cores iguais.
Combinação 2: azul e amarela (independente da ordem).
Combinação 3: azul e vermelha (independente da ordem).
Combinação 4: vermelha e amarela (independente da ordem).

Existe alguma razão para escolher entre a combinação 1 e a combinação 2? E entre as combinações 1, 2 e 3?

R. Entre a combinação 1 e 2, o mais sensato seria escolher a combinação 2. No espaço amostral desse experimento, temos 9 possibilidades, das quais apenas uma satisfaz a combinação 1, e das quais duas satisfazem a combinação 2.

Já entre as combinações 1, 2 e 3, não existe razão especial para escolher entre as combinações 2 e 3, bastando não escolher a combinação 1.

2. No sorteio de um número natural de 1 a 20 sabe-se que saiu um número de dois algarismos. Qual a probabilidade de que tenha saído um múltiplo de 4.

R. O espaço amostral desse experimento é constituído de todos os números de 2 algarismos compreendidos entre 1 e 20. São eles: [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20].

São 11 possibilidades. Destas 11 possibilidades, temos 3 números múltiplos de 4: 12, 16 e 20. Portanto, a probabilidade desse evento acontecer é de 3 para 11: $\frac{3}{11}$.

3. Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

R. Como temos 100 números, a probabilidade de sortear um número de 1 a 20 é de 20 para 100: $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$, o mesmo que dizer que é de 20%.

4. Em um grupo de 20 pessoas temos a seguinte situação:

	Maior de idade	Menor de idade
Homem	7	2
Mulher	8	3

Qual é a probabilidade de ao sortear uma pessoa ao acaso ela seja:

a) uma mulher?

R. Nesse grupo de 20 pessoas, temos 9 homens e 11 mulheres. Portanto, a probabilidade de selecionar uma mulher será de $\frac{11}{20}$.

b) um homem menor de idade?

R. Nesse grupo de 20 pessoas, apenas 2 homens são menores de idade. Portanto, a probabilidade desse evento acontecer é de $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

c) uma mulher maior de idade?

R. Nesse grupo de 20 pessoas, apenas 8 mulheres são maiores de idade. Portanto, a probabilidade desse evento acontecer é de $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

d) maior de idade, sabendo que a pessoa sorteada é homem?

R. Uma vez que sabemos que o sorteado é homem, nosso espaço amostral muda, passando a considerar os homens. Se temos 9 homens, dos quais 7 são maiores de idade, a probabilidade desse evento acontecer é de: $\frac{7}{9}$.

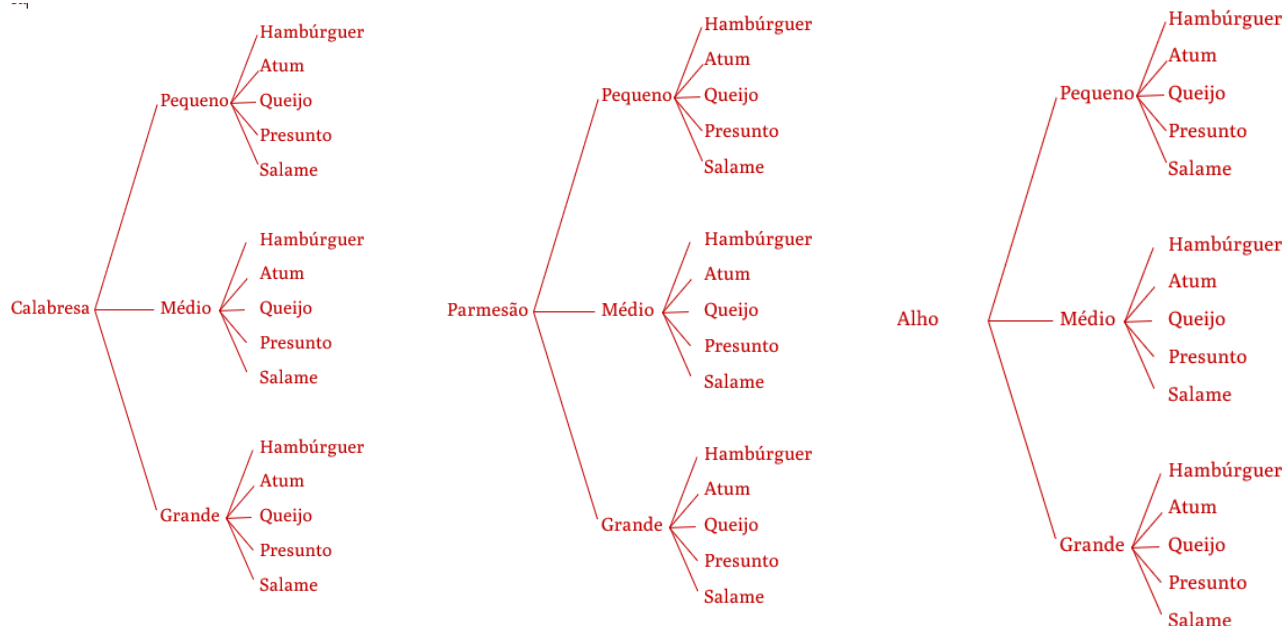
5. Para montar um sanduíche, os clientes de uma lanchonete podem escolher:

- 1 entre 3 tipos de pão: calabresa, parmesão ou de alho.
- 1 entre 3 tamanhos de pão: pequeno, médio ou grande;
- 1 entre os 5 tipos de recheio: hambúrguer, atum, queijo, presunto ou salame.

Calcule:

a) Quantos sanduíches distintos podem ser montados? Construa a árvore de possibilidades

R.



São 45 possibilidades.

b) O número de sanduíches distintos que um cliente pode montar, sabendo que ele não gosta de calabresa, prefere sanduíches pequenos e não pode comer salame.

R. Para escolher o sabor, ele passa a ter 2 possibilidades; para escolher o tamanho, apenas uma; para escolher o recheio, apenas 4 possibilidades. Portanto, pelo PFC, temos: $2 \cdot 1 \cdot 4 = 8$ possibilidades.

Lição 101 – Soma das probabilidades

1. O pai de Carlos e Felipe comprou uma bicicleta nova para os filhos. Para decidir quem seria o primeiro a dar uma volta no brinquedo novo, Carlos sugeriu ao seu irmão tirar no par ou ímpar. As regras são simples: cada irmão deve escolher simultaneamente um número de 1 a 5 (inclusive) e depois somar os dois números escolhidos. Caso o resultado seja par, Felipe vence; caso seja ímpar, quem vence é Carlos. Qual é a probabilidade de cada um dos irmãos vencer?

R. Vamos listar todas as possibilidades:

+	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

Analisando o espaço amostral, é possível notar que 13 resultados são pares e 12 resultados são ímpares, totalizando assim 25 possíveis resultados. As probabilidades de vitória, são:

Par: $\frac{13}{25}$

Ímpar: $\frac{12}{25}$

Assim, a probabilidade de ganhar escolhendo “par” ($13 : 25 = 0,52 = 52\%$) é maior do que a probabilidade de ganhar escolhendo “ímpar” ($12 : 25 = 0,48 = 48\%$).

2. Uma moeda honesta é jogada três vezes. Qual a probabilidade de aparecer pelo menos uma cara?

R. Vamos listar as possibilidades. Considere C para cara e K para coroa. Veja: (C,

C, C) (K, K, K)

(C, C, K) (K, K, C)

(C, K, C) (K, C, K)

(C, K, K) (K, C, C)

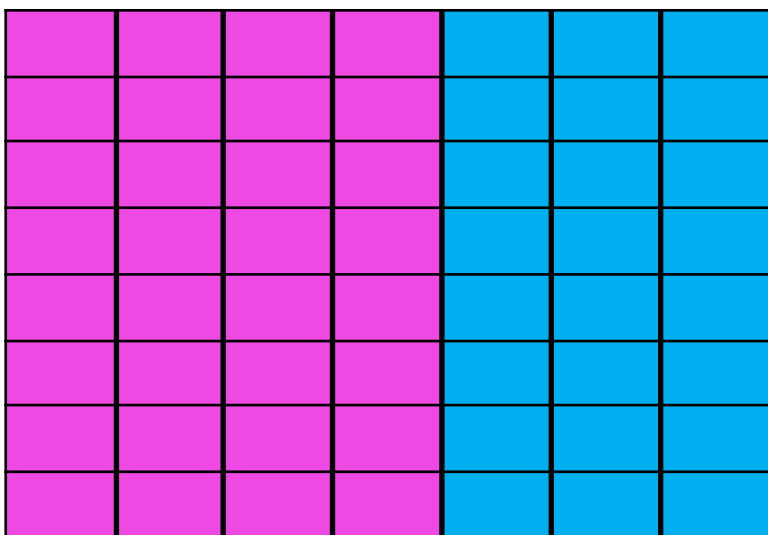
Das 8 possibilidades, 7 contém ao mesmo uma cara. Portanto, a probabilidade é de $\frac{7}{8} = 0,875 = 87,5\%$.

3. Em uma sala do sexto ano, ao sortearmos uma pessoa ao acaso, a probabilidade dessa pessoa ser uma garota é de $\frac{4}{7}$. Se existem entre 55 e 60 alunos na sala, calcule quantos são os garotos.

R. Como o problema se trata de contagem de pessoas, o número precisa ser exato. Assim, o número compreendido entre 55 e 60 precisa ser múltiplo de 7, pois é preciso que seja possível dividir esse grupo em 7 partes, das quais 3 partes são meninos e 4 partes são meninas. 56 é o único número compreendido entre 55 e 60 que é múltiplo de 7. Portanto, podemos concluir que há 56 pessoas no total. Para saber quantos meninos temos, basta descobrir a quantas pessoas $\frac{3}{7}$ correspondem.

$$\frac{3}{7} \cdot 56 = \frac{168}{7} = 24$$

Veja abaixo uma representação do problema:



4. Um ciclo completo de um semáforo demora 120 segundos. Em cada ciclo, o semáforo está no verde durante 50 segundos, no amarelo durante 10 segundos e no vermelho durante 60 segundos. Se o semáforo for visto ao acaso, qual é a probabilidade de que não esteja no verde?

R. Vamos calcular a probabilidade do semáforo estar verde: $\frac{60}{120} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$.

Como a soma das probabilidades é sempre igual a 100% (ou igual a 1, se considerada em decimais), portanto a probabilidade de não estar verde é igual a $100\% - 50\% = 50\%$.

5. Uma caixa contém 10 bolas do mesmo material, tamanho e com a mesma massa, sendo 1 azul, 5 amarelas, 1 preta e 3 vermelhas. Uma bola é retirada dessa caixa ao acaso e observa-se sua cor.

a) Quantos resultados possíveis tem o espaço amostral desse experimento?

R. 4 resultados: [azul, amarelo, preto, vermelho]

b) Quantos desses resultados são favoráveis ao evento “sair uma bola vermelha”?

R. 3 resultados são favoráveis.

c) Qual é a probabilidade de sair uma bola vermelha?

R. Como 3 bolas vermelhas, num total de 10 bolinhas, temos: $\frac{3}{10} = 0,3 = 30\%$ de —

possibilidade de sortear uma bolinha vermelha.

d) Qual é a probabilidade de não sair uma bola vermelha?

R. Como a soma das probabilidades é sempre igual a 1 (ou igual a 100%, se considerado em porcentagens), temos que a possibilidade de não sair vermelha é de $1 - 0,3 = 0,7 = 70\%$, dado que sair vermelha é igual a 30%.

e) Qual é a probabilidade de sair uma bola amarela?

R. Como 5 bolinhas são amarelas, de um total de 10 bolinhas, temos que as bolinhas amarelas correspondem a metade, e portanto, 50% de probabilidade de serem sorteadas.

Lição 102 – Probabilidade condicional

1. Observe os experimentos que foram realizados e classifique os eventos como eventos dependentes ou eventos independentes:

a) Dois dados foram lançados. Sabendo que o dado 1 caiu com a face 5 voltada para cima, deseja-se saber a probabilidade de cair a face 3 no dado 2.

R. Eventos independentes.

b) Um dado e uma moeda foram lançados para cima. Uma vez que caiu a face 3 voltada para cima, deseja-se saber a probabilidade de cair “coroa” no lançamento da moeda.

R. Eventos independentes.

c) Uma carta foi retirada no baralho. Sabendo que a carta é de ouros, deseja-se saber a probabilidade dessa carta ser uma dama.

R. Eventos dependentes.

d) De uma urna com 2 bolinhas vermelhas e 2 bolinhas azuis foram retiradas duas bolinhas, sem reposição. Sabendo que a primeira delas é vermelha, deseja-se saber a probabilidade da segunda bolinha também ser vermelha.

R. Eventos dependentes.

2. Uma pessoa retirou uma dama de um baralho de 52 cartas e, a seguir, retirou uma segunda carta. Qual é a probabilidade de que essa segunda carta também seja uma dama?

R. Em um baralho de 52 cartas existem 4 damas. Assim, a probabilidade de se retirar uma dama é dada por: $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Agora, uma vez que uma dama foi retirada, a probabilidade de se retirar outra dama será de $\frac{3}{51}$, ou seja, uma probabilidade menor do que a inicial.

3. Em uma urna há 9 bolas: três vermelhas, quatro amarelas e duas azuis. Retira-se uma primeira bola, que não é amarela. Ao retirar-se ao acaso uma segunda bola, qual é a probabilidade de que ela seja amarela?

R. Vamos calcular a probabilidade inicial de cada uma das cores:

Vermelha: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Amarela: $\frac{4}{9}$

Azul: $\frac{2}{9}$

Uma vez que uma bola foi retirada, restam apenas 8 na urna. Sabendo que não foi uma amarela, significa que ainda temos 4 bolas amarelas. Portanto, se há 8 bolas no total, das quais 4 são amarelas, podemos afirmar que existe a probabilidade de 50% de sair uma bola amarela na segunda retirada.

4. Um dado honesto é lançado três vezes consecutivas. Qual é a probabilidade de surgirem os resultados a seguir, em qualquer ordem?



R. Cada lançamento de dado apresenta 6 possibilidades. Como o dado será lançado 6 vezes, o total de possibilidades pode ser encontrado pelo PFC: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ possíveis combinações. Agora, vamos considerar os casos favoráveis. No primeiro lançamento, temos 3 possibilidades. Uma vez que um dos resultados já saiu, consideramos que o segundo lançamento tem apenas 2 possibilidades (os outros dois números que ainda não foram tirados). Portanto, para o terceiro lançamento resta apenas uma possibilidade (o terceiro número que ainda não foi sorteado). Assim, temos: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possíveis combinações destes três números. Ou seja, são 6 combinações de um total

de 216. Portanto, temos $\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$ (Uma chance em 36 de tirar esses três números seguidos).

seguidos.

5) Uma urna contém 3 bolas idênticas numeradas de 1 a 3 e outra urna contém 5 bolas idênticas numeradas de 1 a 5. Ao retirar aleatoriamente uma bola de cada urna, qual é a probabilidade de a soma dos pontos ser:

a) maior que 4?

R. Pelo PFC, temos 3 maneiras diferentes de sortear a primeira bolinha, e 5 maneiras diferentes de sortear a segunda bolinha. Portanto, temos $3 \cdot 5 = 15$ possibilidades de combinações. Deste total, as possibilidades da soma ser maior que 4 são:

(1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5)

Portanto, das 15 possibilidades, 9 delas resultam em uma soma maior que 4. A

probabilidade desse evento é $\frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0,6 = 60\%$ de chance de acontecer.

b) zero?

R. Nenhuma.

c) menor ou igual a 2?

R. Existe apenas uma combinação que satisfaz essa condição: (1, 1). Portanto, a probabilidade desse evento acontecer é de $\frac{1}{15}$.

d) de 2 a 8?

R. 100%, pois todas as somas se enquadram nesse intervalo.

6. Uma turma de alunos foi entrevistada, e foram coletados dados como o sexo dos alunos e o fator Rh do sangue de cada um.

Sexo	Rh negativo	Rh positivo	total
Feminino	5	17	22
Masculino	4	14	18
Total	9	31	40

Se um estudante desta turma é sorteado, pede-se determinar a probabilidade de que ele tenha fator Rh positivo, sabendo que é do sexo:

a) feminino.

R. Como temos 22 mulheres, a probabilidade de ser Rh positivo, sabendo que é uma mulher, é de 17 em 22: $\frac{17}{22}$.

b) masculino.

R. Como temos 18 homens, a probabilidade de ser Rh positivo, sabendo que é um homem, é de 14 em 18: $\frac{14}{18} = \frac{7}{9}$.

c) Qual é a probabilidade de ter Rh positivo, sabendo que o aluno escolhido foi um homem?

R. Questão igual anterior.

d) Qual é a probabilidade de sortear uma mulher?

R. Do total de 40 pessoas, 22 são mulheres. Portanto, a probabilidade de sortear uma mulher é $\frac{22}{40} = \frac{11}{20} = 0,55 = 55\%$.

7. Sorteando um número natural de 1 a 30:

a) qual é a probabilidade de o número sorteado ser par?

R. Entre os números de 1 a 30, quinze são pares e quinze são ímpares. Portanto, a probabilidade de é de $\frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$.

b) qual é a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 3?

R. Os múltiplos de 3 são: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 e 30, o que corresponde ao total de 10 números. Portanto, a probabilidade de ser múltiplo de três é: $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

c) qual é a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 6?

R. Os múltiplos de 6 são: 6, 12, 18, 24 e 30, o que corresponde ao total de 5 números.

Portanto, a probabilidade de ser múltiplo de seis é: $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

d) qual é a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 6, sabendo que ele é um número par?

R. Se já sabemos que o número par, nosso espaço amostral foi reduzido:

[2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30]

Nesse espaço amostral de 15 números, os números que são múltiplos de 6 são: 6, 12, 18, 24 e 30, isto é, cinco números. Portanto, a probabilidade de ser múltiplo de 6,

sabendo que é par, é dada por: $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Lição 103 – Estatística

1. Classifique as variáveis abaixo em qualitativas ou quantitativas

a) Número de partidas num torneio esportivo.

R. Quantitativa.

b) Diâmetro interno de uma tubulação.

R. Quantitativa.

c) Cor dos cabelos.

R. Qualitativa.

d) Número de filhos de um casal.

R. Quantitativa.

e) Número de ações negociadas num dia na bolsa de valores.

R. Quantitativa.

f) Teor alcóolico de uma bebida.

R. Quantitativa.

g) Sexo de um filhote nascido no zoológico.

R. Qualitativa.

2. Considere a seguinte situação imaginária: para indicar a média de altura do povo brasileiro, decidiu-se considerar apenas os habitantes do estado de São Paulo, por ser o estado mais numeroso do país. No entanto, sabe-se que os brasileiros da região norte do país são considerados os mais altos de todo o país, em média de 1,90m para homens, e 1,80 m para mulheres. Se a pesquisa levar em consideração apenas o estado paulista, ela descreverá bem a realidade do Brasil? Se a altura dos homens e mulheres da região norte fosse levada em consideração, a média iria subir ou diminuir?

R. Pelo fato do estado de São Paulo ser o mais numeroso, a pesquisa descreverá bem a realidade do Brasil, embora não totalmente fidedigna. Agora, se a altura dos homens e mulheres do norte fossem consideradas, a média certamente aumentaria.

3. Assinale a alternativa apenas com variáveis qualitativas.

- a) cor dos cabelos e idade.
- b) altura e cor dos olhos.
- c) peso e grau de instrução
- d) cor dos cabelos e grau de instrução.
- e) peso e idade.

4. Assinale a alternativa apenas com variáveis quantitativas.

- a) número de alunos em uma sala de aula e cor dos olhos destes alunos.
- b) idade e cor da pele.
- c) grau de instrução e nacionalidade.
- d) altura e idade.
- e) cor dos olhos e nacionalidade.

5. Como podemos classificar as variáveis qualitativas?

- a) nominal e ordinal.
- b) contínua e ordinal.
- c) discreta e continua.
- d) discreta e nominal.
- e) ordinal e discreta.

6. Como podemos classificar as variáveis quantitativas?

- a) nominal e ordinal.
- b) contínua e ordinal.
- c) discreta e contínua.
- d) discreta e nominal.
- e) ordinal e discreta.

7. Qual variável abaixo é qualitativa nominal?

- a) grau de instrução.
- b) cor dos olhos.
- c) idade.
- d) altura.
- e) peso.

Lição 104 – Frequências

1) No lançamento de um dado várias vezes, a frequência relativa de todos os números precisa ser igual. Lance um dado 20 vezes para cima e anote a frequência de cada face voltada para cima. Indique qual é a frequência absoluta e a frequência relativa de cada uma das faces. Seu resultado foi conforme o que era esperado?

R. Experimento pessoal, mas a frequência relativa de cada uma das faces é de 1 para 6, ou seja: $\frac{1}{6} = 0,167$.

2. Foi feita uma pesquisa sobre o número de pessoas que moram na mesma habitação em uma pequena vila.

Quantidade de moradores por domicílio	
Quantidade de moradores	Frequência absoluta
1	16 casas, 16 moradores
2	16 casas, 32 moradores.
3	20 casas, 60 moradores
4	8 casas, 32 moradores
Mais de 4	5 casas, 20 moradores

a) Qual é o total de moradores da vila?

R. $16 + 32 + 60 + 32 + 20 = 160$ moradores.

b) Quantos moradores vivem sozinhos?

R. 16 moradores.

c) Qual é a porcentagem dos domicílios com apenas 2 moradores?

R. Temos 65 casas, sendo 16 com apenas 2 moradores. Portanto, temos: $\frac{16}{65} = 0,246 = 24,6\%$.

d) Qual é a frequência relativa (em %) de cada classe de domicílios? R.

1 morador: $\frac{16}{65} = 0,246 = 24,6\%$.

2 moradores: $\frac{16}{65} = 0,246 = 24,6\%$.

3 moradores: $\frac{20}{65} = 0,308 = 30,8\%$.

4 moradores: $\frac{8}{65}$

$= 0,123 = 12,3\%$.

5 moradores: $\frac{5}{65}$

$= 0,077 = 7,7\%$.

Lição 105 – Medidas de Tendência Central

1. Sara fez três provas de matemática no primeiro bimestre. Suas notas foram 7, 8 e 9. Determine sua média em matemática neste bimestre.

R. $Média = \frac{7+8+9}{3} = \frac{24}{3} = 8$.

A média de Sara foi 8.

2. Um atleta, em treinamento para as olimpíadas, corre quatro vezes por semana, sendo que nas segundas-feiras, ele percorre 5km; nas terças, 7km; nas quintas 8km; e, por fim, nos sábados, 8km. Determine:

a) a distância média por dia de treino que esse atleta percorre.

R. $Média = \frac{5+7+8+8}{4} = \frac{28}{4} = 7$.

b) a distância média por dia da semana que esse atleta percorre.

$$\text{R. Média por dia da semana} = \frac{28}{7} = 4.$$

c) a distância percorrida para que sua média por dia da semana seja 6km, se ele decide correr também aos domingos.

R. Como são 7 dias em uma semana, para que a média seja de 6 km, o total de quilômetros percorridos precisa ser o número que, dividido por 7, é igual a 6 km. Portanto, o número de quilômetros percorridos na semana deve ser $7 \cdot 6 = 56$ quilômetros.

3. Uma empresa no primeiro semestre de 2016.

Mês	Faturamento (R\$)
jan	4.000
fev	12.000
mar	8.500
abr	7.500
maio	10.000
jun	12.000

Determine:

a) a média mensal de faturamento.

$$\text{R. Média} = \frac{4.000 + 12.000 + 8.500 + 7.500 + 10.000 + 12.000}{6} = \frac{54.000}{6} = 9.000$$

A média de faturamento foi igual a R\$ 9 000,00.

b) o faturamento total do segundo semestre para que o faturamento médio mensal no ano de 2016 seja R\$10.000, 00.

R. Como temos 12 meses em um ano, para que o faturamento médio mensal seja de 10 000, o faturamento anual precisaria ser de $12 \cdot 10.000 = 120.000$ reais. Se no primeiro semestre o faturamento foi de R\$ 54 000,00, é preciso que o faturamento do segundo semestre seja igual a $120.000 - 54.000 = 66.000$ reais.

4. Deseja-se comprar lentes para óculos. As lentes devem ter espessuras mais próximas possíveis da medida 3mm. No estoque de uma loja, há lentes de espessuras: 3, 10mm; 3, 021mm; 2, 96mm; 2, 099mm e 3, 07mm. Determine a espessura média dessas medidas.

$$R. Média = \frac{3,10 + 3,021 + 2,96 + 2,099 + 3,07}{5} = \frac{14,25}{5} = 2,85 \text{ mm.}$$

5. Em 2015, um vendedor recebeu três valores de salário diferentes: R\$2.000,00, por mês, de janeiro a maio; \$2.500, 00, por mês, de junho a agosto; R\$3.100, 00, por mês, de setembro a dezembro. Qual foi o salário médio desse vendedor em 2015?

R.

$$\begin{aligned} Média &= \frac{2000 + 2000 + 2000 + 2000 + 2000 + 2500 + 2500 + 2500 + 3100 + 3100 + 3100 + 3100}{12} \\ &= \frac{29\ 900}{12} \\ &= 2\ 491,667 \end{aligned}$$

O salário médio desse vendedor é de R\$ 2491,667.

Lição 106 – Medidas de Tendência Central

1. Em uma turma de sétimo ano, as notas obtidas pelos alunos na prova de matemática foram: 13, 34, 45, 26, 19, 27, 48, 63, 81, 76, 52, 86, 92, 98. Determine:

R. Vamos ordenar os dados em ordem crescente:

13, 19, 26, 27, 34, 45, 48, 52, 63, 76, 81, 86, 92, 98.

a) a moda.

R. Não tem moda.

b) a média.

$$R. Média = \frac{13 + 19 + 26 + 27 + 34 + 45 + 48 + 52 + 63 + 76 + 81 + 86 + 92 + 98}{14} = \frac{760}{14} \approx 54,29.$$

c) a mediana.

R. Como são 14 informações, a mediana será encontrada pela média entre os termos centrais, isto é, os 7º e 8º termos.

$$\textit{Mediana} = \frac{48 + 52}{2} =$$

$$\frac{100}{2} = 50 \rule{1cm}{0.4pt}$$

2. Uma microempresa tem 10 funcionários que trabalham em 3 funções diferentes. O salário mensal deles é mostrado no quadro a seguir:

Salário mensal	Frequência
R\$ 11 500,00	2
R\$ 2 000,00	2
R\$ 1 500,00	6

a) Calcule a média aritmética dos salários.

$$R. \text{ Média} = \frac{2 \cdot 11\,500 + 2 \cdot 2\,000 + 6 \cdot 1\,500}{10} = \frac{23\,000 + 4\,000 + 9\,000}{10} = \frac{36\,000}{10} = 3\,600$$

A média é de R\$ 3600,00.

b) Obtenha a mediana dos salários dessa microempresa.

R. Como temos 10 informações, a mediana se dá pela média entre os termos da 5ª e 6ª posição. Ao ordenar em ordem crescente, os seis primeiros termos correspondem ao dado de R\$ 1500,00 (o mesmo se daria se a ordem fosse decrescente, mas nesse caso os seis últimos, do quinto ao décimo, é que seriam correspondentes ao valor de 1500). Portanto, a mediana é R\$ 1500,00:

$$\text{Mediana} = \frac{1500 + 1500}{2} = \frac{3000}{2} = 1500$$

c) Obtenha a moda dos salários dessa microempresa.

R. A moda de salários é de R\$ 1500,00, pois esse dado aparece 6 vezes numa pesquisa que tem 10 informações.

d) qual valor retrata melhor a realidade dos salários dessa microempresa: A média aritmética, a moda ou a mediana dos salários mensais?

R. A mediana ou a moda, pois a média aritmética é jogada para cima por causa de dois salários altos. Como a maioria recebe apenas R\$ 1500,00, a mediana e a moda representam melhor a realidade salarial desta empresa.

3. Observe a tabela a seguir, que mostra o número de anos de escolaridade, a partir do 1o ano do Ensino Fundamental, de um grupo de 40 funcionários de uma empresa:

Quantidade de funcionários por anos de escolaridade	
Anos de escolaridade	Frequência
9	5
13	7
15	12
16	16

a) Qual é a moda do número de anos de escolaridade nessa empresa?

R. A moda é de 16 anos, pois é o dado que aparece com mais frequência.

b) E a média aritmética?

$$R. \text{ Média} = \frac{5 \cdot 9 + 7 \cdot 13 + 12 \cdot 15 + 16 \cdot 16}{40} = \frac{45 + 91 + 180 + 256}{40} = \frac{572}{40} = 14,3.$$

c) E a mediana?

R. Como são 40 informações, a mediana se dará pela média entre as 20ª e 21ª posições. O 9 ocupa até a posição 5; o 13 ocupa as posições de 6 a 18; o 15 ocupa as posições de 19 a 30. Portanto, a mediana será 15, pois os termos 20ª e 21ª é 15:

$$\frac{15 + 15}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

4. Observe as notas, cujo valor máximo era 10, obtidas em uma avaliação realizada em cinco municípios sobre a qualidade de vida da população:

2,0 3,0 3,0 9,0 9,0

a) Calcule a média, a moda e a mediana correspondentes aos dados apresentados.

$$R. \text{ Média} = \frac{2 + 3 + 3 + 9 + 9}{5} = \frac{26}{5} = 5,2$$

Mediana = 3

Moda = 3 e 9 (bimodal).

b) Suponha que tenha sido divulgado na imprensa que o município cuja nota foi 3,0 foi bem avaliado, pois ficou exatamente “no meio” entre a mais alta e a mais baixa das notas atribuídas aos municípios pesquisados. Essa notícia foi bem-intencionada?

R. Não, pois esse dado está abaixo da média. Ele só pode ser considerado como “meio” se considerada a mediana, mas está muito distante das boas cidades (9), e distante da média (5,2).

5. Considere o conjunto de valores abaixo.

$$3 - 5 - 5 - 5 - 7 - 8$$

a) Calcule a média aritmética, a moda e a mediana desse conjunto de valores.

$$R.Média = \frac{3+5+5+5+7+8}{6} = \frac{33}{6} = 5,5.$$

Moda = 5.

Mediana: como temos 6 informações, a mediana é encontrada pela média entre os termos das posições 3ª e 4ª. $Mediana = \frac{5+5}{2} = 5$

b) Acrescente o número 16 ao conjunto de valores e calcule novamente a média aritmética, a moda e a mediana. Qual das medidas sofreu maior alteração?

$$R.Média = \frac{3+5+5+5+7+8+16}{7} = \frac{49}{7} = 7.$$

Moda = 5.

Mediana: como temos 7 informações, a mediana é encontrada pelo termo da posição 4. Portanto, a mediana é 4.

O dado que sofreu a maior alteração foi a média.

Lição 107 – Medidas de Tendência Central

1. Rubens foi fazer na calculadora a média de suas quatro notas de matemática. O resultado obtido foi 8, mas ele percebeu que havia digitado uma nota errada, trocando 5 por 7. Qual o valor correto para a média?

R. Para calcular a média devemos somar todos os valores e dividir pelo número de parcelas somadas. Supondo que a soma verdadeira das notas seja x , o aluno acabou utilizando $x + 2$, pois aumentou dois pontos na soma total ao trocar 5 por 7. Assim, ao dividir $x + 2$ por 4, que é o número de notas, ele obteve 8. Portanto, temos:

$$\frac{x + 2}{4} = 8$$

$$x + 2 = 8 \cdot 4$$

$$x = 32 - 2$$

$$x = 30$$

Portanto, a soma real das notas é igual a 30. Se a soma real das 4 notas é igual a 30, a média verdadeira é dada por $30 : 4 = 7,5$.

2. Em uma competição de tiro ao alvo, existem 10 pontuações diferentes, de 1 a 10. São dados 20 tiros por participante e a pontuação de cada participante é aquela que foi mais atingida por ele. Qual foi a medida estatística para definir a pontuação de cada participante?

a) media.

b) mediana.

c) moda.

3. Em um concurso, os candidatos aprovados para a segunda fase são aqueles que tirarem uma nota superior a nota central, depois de colocar todas as notas em ordem crescente. Qual a medida estatística utilizada para classificar os candidatos deste concurso para a segunda fase?

a) media.

b) mediana.

c) moda.

4. Qual medida de tendência central mais adequada no seguinte caso: Estão disponíveis dados mensais sobre a incidência de envenenamento por picada de cobra. Deseja-se planejar a compra mensal de antídoto.

R. A média seria a medida de tendência central mais adequada. Explico: se a mediana for escolhida, só conseguimos garantir vacinas para metade do ano, ficando sem antídotos na outra metade. A média é a melhor opção porque temos variação de casos a cada mês; então, se sobram vacinas em um mês, pode ser que elas sejam usadas no próximo mês, se tiver um aumento de casos. Assim, a média nos dá uma noção de quantas picadas, mais ou menos, acontece por mês.

5. Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar os seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas irá comprar, analisa o lucro (em milhões de reais) de cada uma delas, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresente o maior lucro médio anual. O quadro apresenta o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo do tempo (em anos) de existência de cada empresa. Qual das empresas ele deve escolher?

Empresa	Lucro	Tempo
F	24	3,0
G	24	2,0
H	25	2,5
M	15	1,5
P	9	1,5

R. Vamos calcular o lucro anual de cada empresa. Empresa

$F = 24 : 3 = 8$ milhões por ano.

Empresa G = $24 : 2 = 12$ milhões por ano. Empresa

H = $25 : 2,5 = 10$ milhões por ano. Empresa M = 15

: $1,5 = 10$ milhões por ano. Empresa P = $9 : 1,5 = 6$

milhões por ano.

Assim, a empresa que dá mais lucro anual é a empresa G e, portanto, seria o melhor investimento.

Lição 108 – Medidas de Tendência Central

1. Um professor de Matemática registrou as 35 notas dos seus alunos no quadro abaixo. Organize, no caderno, uma tabela com esses dados, especificando as notas e as frequências.

8	7	6	7	3	5	4	8	3
6	6	10	7	7	5	6	9	4
4	5	4	9	8	9	10	9	7
9	3	8	10	6	8	7	5	

R.

Nota	Frequência
3	3
4	4
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	3

2. Para controlar a presença dos alunos em um curso de inglês, o diretor fez um levantamento diário da quantidade de faltas em um mês

	Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira
Semana 1	3 faltas	5 faltas	2 faltas	4 faltas	8 faltas
Semana 2	6 faltas	2 faltas	0 falta	16 faltas	Feriado
Semana 3	14 faltas	6 faltas	2 faltas	5 faltas	11 faltas
Semana 4	7 faltas	4 faltas	4 faltas	6 faltas	10 faltas
Semana 5	8 faltas	5 faltas	5 faltas	-	--

a) Quais são a média e a moda das faltas diárias?

R. A moda é de 5 faltas.

Média

$$= \frac{3 + 6 + 14 + 7 + 8 + 5 + 2 + 6 + 4 + 5 + 2 + 2 + 4 + 5 + 4 + 16 + 5 + 6 + 8 + 11 + 10}{22} = \frac{133}{22} \cong 6,05$$

Média = 22

b) Elabore um quadro que associe os dias da semana à quantidade de alunos faltantes. Depois, calcule a média do número de faltas por dia da semana.

R.

Dia da semana	Faltas
Segunda-feira	38
Terça-feira	22
Quarta-feira	13
Quinta-feira	31
Sexta-feira	29

Média de faltas na segunda-feira: $\frac{38}{5} = 7,6$

Média de faltas na terça-feira: $\frac{22}{5} = 4,4$

Média de faltas na quarta-feira: $\frac{13}{5} = 2,6$

Média de faltas na quinta-feira: $\frac{31}{4} = 7,75$

Média de faltas na sexta-feira: $\frac{29}{3} \cong 9,67$

3. Um dado foi lançado 15 vezes e os resultados obtidos estão representados na tabela abaixo:

Determine:

a) a moda.

R. Número 2.

b) a mediana.

R. Como o dado foi lançado 15 vezes, a mediana se encontra na posição 8. O número 1 ocupa as posições de 1 a 3; o número 2, as posições de 4 a 8. Portanto, a mediana também é 2.

Número	Frequência
1	3
2	4
3	0
4	2
5	3
6	3

4. Em uma escola com 200 alunos, as idades são distribuídas de acordo com a tabela ao lado:

Idade	Quantidade
10	20
11	35
12	30
13	45
14	32
15	38

Determine:

a) a moda.

R. 13 anos.

b) a mediana.

R. Como temos 200 alunos, a mediana é dada pela média aritmética entre os termos das posições 100 e 101.

10anos: posições de 1 a 20.

11 anos: posições de 21 a 55.

12 anos: posições de 56 a 85

13 anos: posições de 86 a 130.

Portanto, as posições 100 e 101 são ocupadas pelo número 13. Sendo assim, a mediana também será 13 anos.

c) a média.

$$R.Média = \frac{10 \cdot 20 + 11 \cdot 35 + 12 \cdot 30 + 13 \cdot 45 + 14 \cdot 32 + 15 \cdot 38}{200}$$

$$Média = \frac{200 + 385 + 360 + 585 + 448 + 570}{200}$$

$$Média = \frac{2548}{200} = 12,74$$

5. Em um concurso, são aprovados para a segunda fase todos que acertam uma quantidade maior de questões que o número mediano de questões acertadas por todos os candidatos. Observe o resultado da primeira fase na tabela, que mostra a quantidade de candidatos por número de acertos.

Número de acertos	Número de candidatos
0	20
1	35
2	30
3	45
4	35
5	40
6	60
7	65
8	60
9	50
10	35

Qual será a quantidade mínima de acertos para passar para a segunda fase?

R. Para saber o número de participantes precisamos somar os dados da segunda coluna da tabela. Ao somar todos esses números, temos como resultado 475 participantes. A mediana será o número que se encontra na posição:

$475 : 2 = 237,5$, ou seja, o número da posição 238.

0: ocupa as posições de 1 a 20.

1: ocupa as posições de 21 a 55.

2: ocupa as posições de 56 a 85.

3: ocupa as posições de 86 a 130.

4: ocupa as posições de 131 a 165.

5: ocupa as posições de 166 a 205.

6: ocupa as posições de 206 a 265.

Portanto, o termo que ocupará a posição de número 238 é o número 6. Assim, só passarão para a segunda fase aqueles que tirarem uma nota superior a 7 (pois o enunciado nos diz que só passam para a segunda fase aqueles que atingem uma nota superior a mediana).

6. Foi feito um levantamento de dados sobre a idade (em anos completos) dos funcionários de uma fábrica. Observe:

De 18 a 20 anos
284 funcionários

De 21 a 23 anos
316 funcionários

De 24 a 26 anos
420 funcionários

De 27 a 29 anos
304 funcionários

De 30 a 32 anos		
160 funcionários		

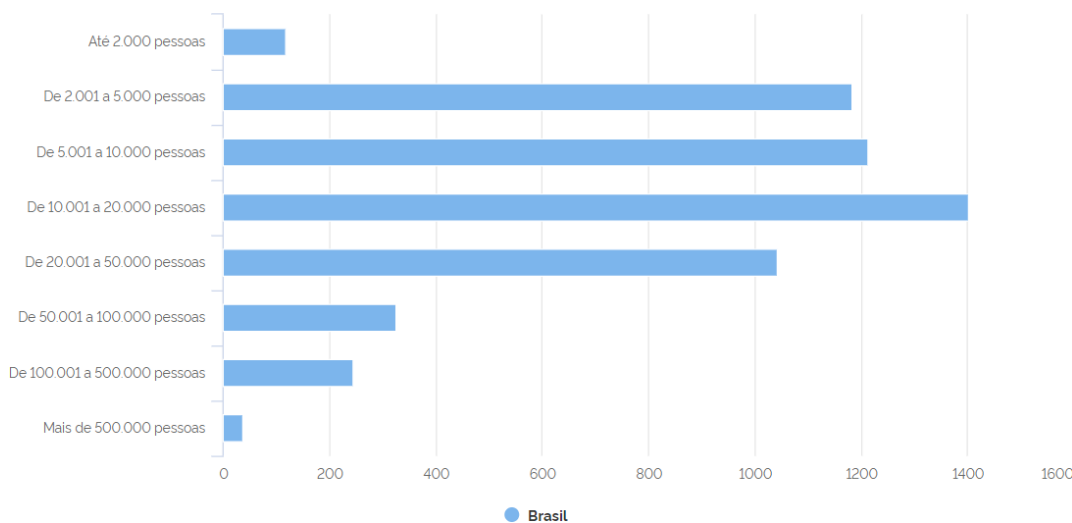
Organize, no caderno, uma tabela com esses dados, especificando as classes e as frequências.

R.

Idade	Quantidade de funcionários
De 18 a 20 anos	284 funcionários
De 21 a 23 anos	316 funcionários
De 24 a 26 anos	420 funcionários
De 27 a 29 anos	304 funcionários
De 30 a 32 anos	160 funcionários

Lição 109 – Gráficos

1. O último censo do Brasil, realizado em 2010, buscou classificar o número de municípios por tamanho da população.



De acordo com os dados fornecidos pelo gráfico, responda:

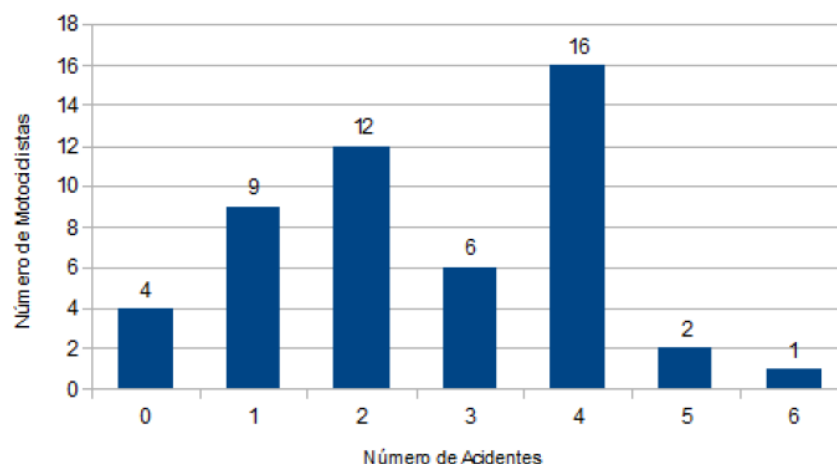
a) Qual é a moda da pesquisa?

R. A moda são as cidades que possuem de 10 001 a 20 000 pessoas.

b) Pesquise a população da sua cidade. Em qual das barras sua cidade se classifica?

R. Resposta pessoal.

2. O gráfico a seguir mostra o resultado de uma pesquisa sobre o número de acidentes ocorridos com 50 motociclistas de uma determinada empresa, no período de 1 ano.



Determine:

- a) a média de acidentes por motocicleta. R.

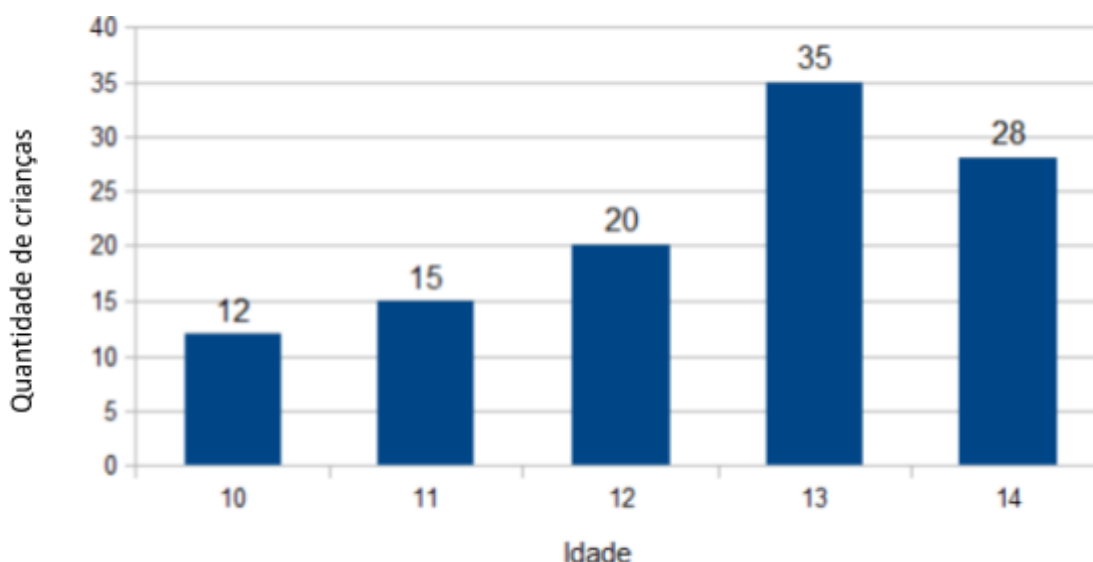
$$\text{Média} = \frac{0,4+1,9+2,12+3,6+4,16+5,2+6,1}{50} = \frac{9+24+18+64+10+6}{50} = \frac{131}{50} = 2,62 \text{ acidentes.}$$

- b) a média mensal de acidentes.

R. Como um ano possui 12 meses, precisamos dividir o valor total de acidentes, 131, por 12.

$$\frac{131}{12} \cong 10,92 \text{ acidentes por mês.}$$

3. Um grupo de famílias homeschoolers fez um levantamento das idades das crianças de seu grupo. O gráfico abaixo mostra os dados que foram levantados.



Determine:

- a) a idade mediana

R. Como temos 110 crianças, a mediana se dá pela média aritmética entre os termos das posições 55 e 56.

10: ocupa as posições de 1 a 12.

11: ocupa as posições de 13 a 27.

12: ocupa as posições de 28 a 47.

13: ocupa as posições de 48 a 82.

As posições 55 e 56 são ocupadas pelo número 13. Portanto, a mediana será 13.

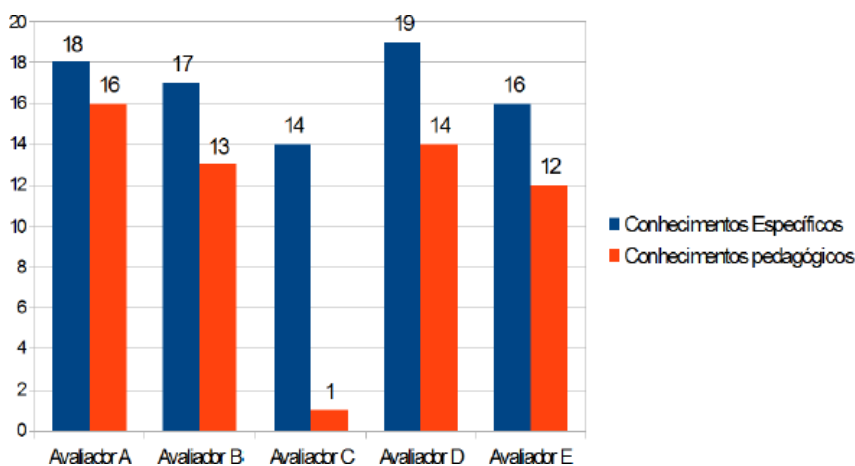
b) a idade média.

$$R. \text{ Média} = \frac{10 \cdot 12 + 11 \cdot 15 + 12 \cdot 20 + 13 \cdot 35 + 14 \cdot 28}{110} = \frac{120 + 165 + 240 + 455 + 392}{110} = \frac{1372}{110} \cong 12,5$$

c) a moda.

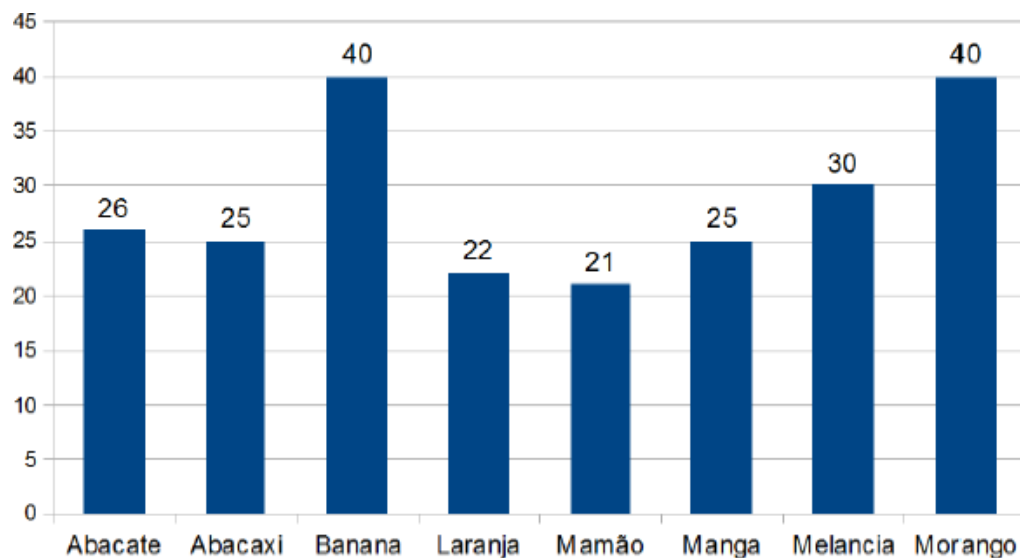
R. 13 anos.

4. As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por 5 membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos de área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos. A média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora. Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor. Determine a nova média utilizando este critério.



$$\text{Média} = \frac{18 + 16 + 17 + 13 + 14 + 14 + 120}{8} = 15$$

5. O Brasil é o quarto maior produtor mundial de alimentos, produzindo mais do que o necessário para alimentar sua população. Entretanto, grande parte da produção é desperdiçada. O gráfico mostra o percentual do desperdício de frutas nas feiras do estado de São Paulo. Considerando os dados do gráfico, determine a média aritmética, a moda e a mediana desses dados.



R. Essa amostral é bimodal, com números de 25 e 40 como moda.

$$\begin{aligned}
 \text{Média} &= \frac{26 + 25 + 40 + 22 + 21 + 25 + 30 + 40}{8} = \frac{229}{8} = 28,625.
 \end{aligned}$$

Como temos 8 frutas diferentes, a mediana se dá pela média aritmética entre os termos que ocupas as posições 4 e 5. Organizando esses dados, temos:

$$\begin{aligned}
 &21 \quad 22 \quad 25 \quad 25 \quad 26 \quad 30 \quad 40 \quad 40 \\
 \text{Média} &= \frac{25 + 26}{2} = \frac{51}{2} = 25,5
 \end{aligned}$$

Lição 110 – Gráfico de Setor

1. Numa sessão de cinema os espectadores responderam a uma pesquisa sobre as preferências de gêneros, escolhendo apenas um como preferido. Observe a tabela de frequências:

Quantidade de votos por gênero	
Gênero	Quantidade

Comédia	12
Aventura	20

Ficção científica	4
Desenho animado	12
Suspense	14
Drama	8
Musical	4
Documentário	6

a) Qual é a porcentagem de cada gênero preferido?

R. No total, temos 80 participantes.

Assim, para descobrir a porcentagem de cada gênero de filme, basta dividir o número de pessoas que escolheu o gênero pelo número total de pessoas. Observe:

$$\text{Comédia: } \frac{12}{80} = 0,15 = 15\%$$

$$\text{Aventura: } \frac{20}{80} = 0,25 = 25\%$$

$$\text{Ficção científica: } \frac{4}{80} = 0,05 = 5\%$$

$$\text{Desenho: } \frac{12}{80} = 0,15 = 15\%$$

$$\text{Suspense: } \frac{14}{80} = 0,175 = 17,5\%$$

$$\text{Drama: } \frac{8}{80} = 0,1 = 10\%$$

$$\text{Musical: } \frac{4}{80} = 0,05 = 5\%$$

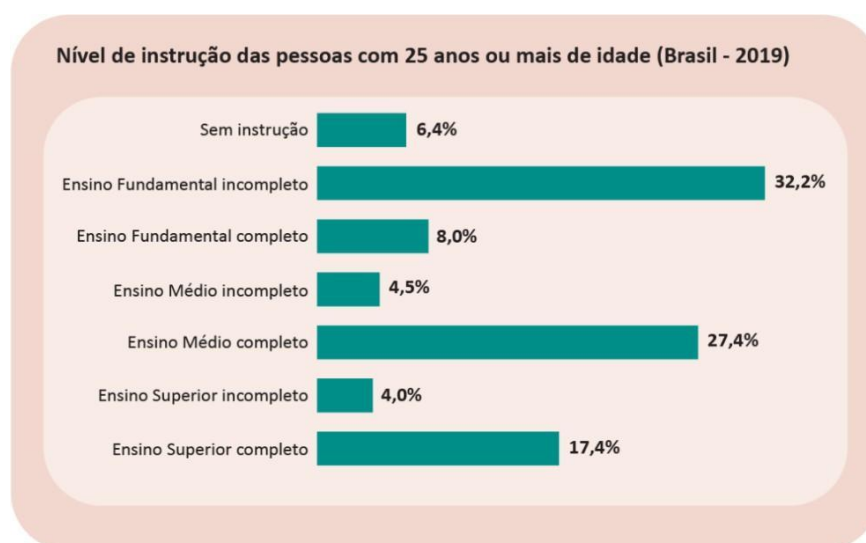
$$\text{Documentário: } \frac{6}{80} = 0,075 = 7,5\%$$

b) Construa um gráfico de setores que represente os gêneros preferidos e suas respectivas porcentagens.

R.



2. Foi feita uma pesquisa acerca do nível de instrução do povo brasileiro, e os dados foram divulgados em 2019.

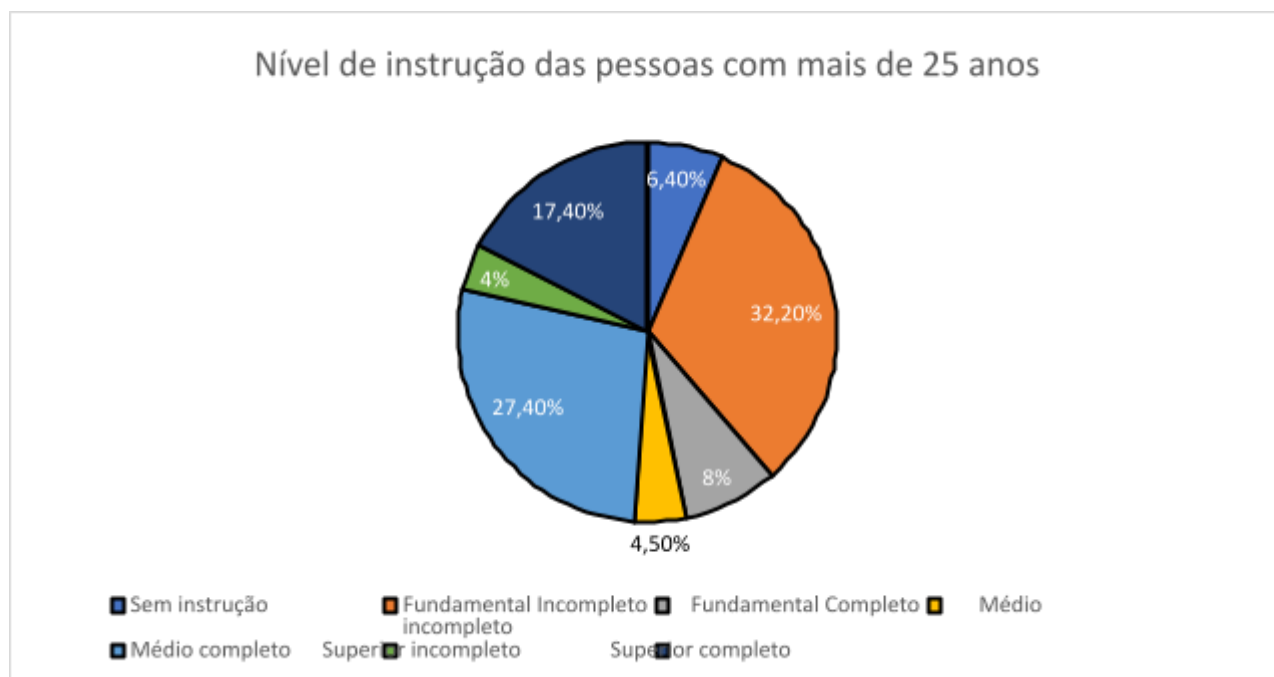


Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua 2012-2019.

Segundo os dados fornecidos pela pesquisa, faça o que se pede:

a) Construa um gráfico de setores com essa informações.

R.



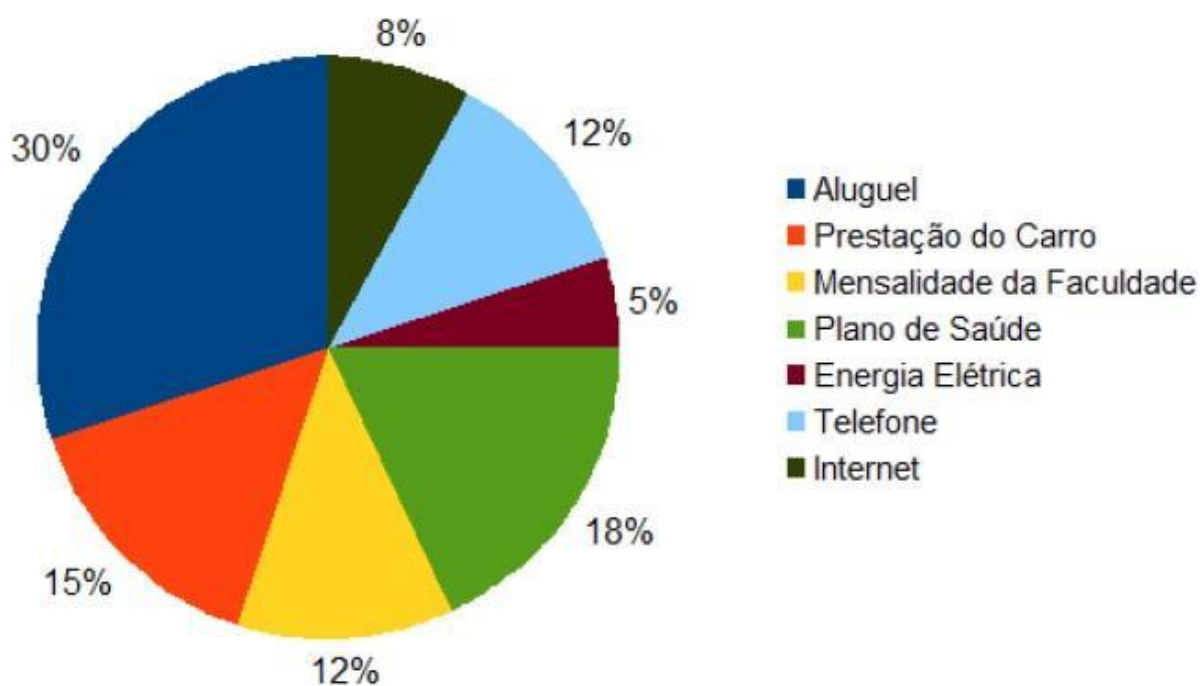
b) Qual é a moda dessa pesquisa?

R. Fundamental incompleto.

c) A variável dessa pesquisa é qualitativa ou quantitativa?

R. Qualitativa ordinal.

3. Jorge tem um gasto fixo mensal de R\$ 2.500,00. O gráfico detalha este gasto.



Determine:

a) O valor gasto com plano de saúde.

$$R. 18\% \text{ de } 2500 = \frac{18}{100} \cdot 2500 = 18 \cdot 25 = 450.$$

R\$ 450,00.

b) o percentual do telefone, caso o aluguel sofra um reajuste (aumento) de R\$ 200,00.

R. O telefone corresponde atualmente a 12% de 2500, o que é o mesmo que:

$$12\% \text{ de } 2500 = \frac{12}{100} \cdot 2500 = 12 \cdot 25 = 300.$$

Portanto, ele gasta R\$ 300,00 com telefone. Se o custo aumentou em R\$ 200,00, precisamos ver a qual porcentagem os 300 reais correspondem do novo custo, que é $2500 + 200 = 2700$. Temos:

$$2700 \quad 100\%$$

$$300 \quad x\%$$

$$300 \cdot 100$$

$$x =$$

2

7

0

0

3

0

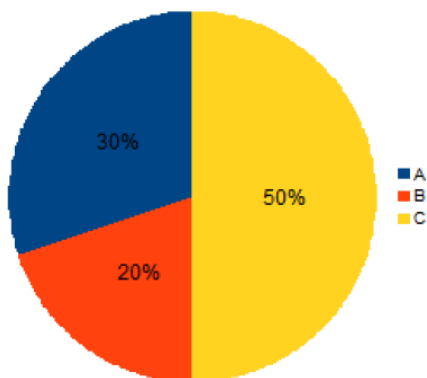
0

0

0

$$2700 \cong 11,11\%$$

4. Em uma eleição estão concorrendo os candidatos A, B e C. Realizada uma pesquisa de intenção de voto com 1000 eleitores, obteve-se o resultado ilustrado no gráfico de setores.



Qual é o valor do ângulo utilizado para construir o setor circular referente ao candidato B?

R. Como o candidato B teve 20% de intenção do votos, o ângulo deve corresponder a

20% do círculo total. Portanto, temos:

$$20\% \text{ de } 360 = \frac{20}{100} \cdot 360 = 2 \cdot 36 = 72^\circ$$

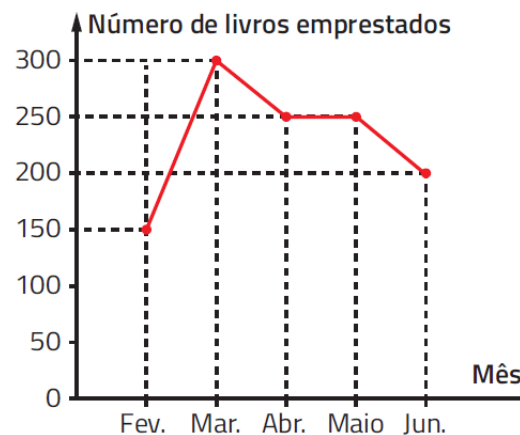
Lição 111 – Gráfico de linhas

1. O gráfico ao lado mostra a relação de livros emprestados durante o período que vai de fevereiro a junho. Responda:

a) Sabendo que durante o mês de fevereiro houve uma ampla campanha de divulgação da leitura, é possível notar um resultado positivo ou negativo da campanha? Por quê?

R. Positivo, uma vez que temos um aumento de 100% no empréstimo de livros.

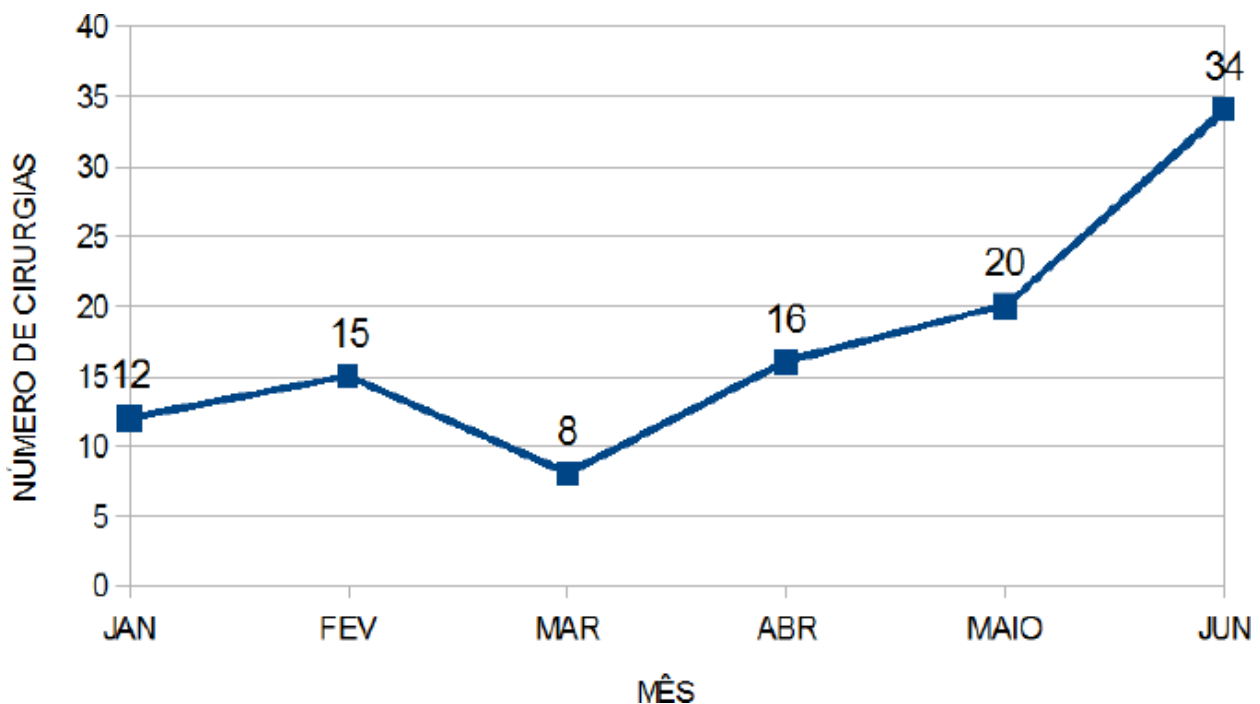
Empréstimos de livros da biblioteca



b) Qual é a média de empréstimos durante esse período?

$$R. \text{ Média} = \frac{150 + 300 + 250 + 250 + 200}{5} = \frac{1150}{5} = 230.$$

2. O gráfico a seguir mostra o número de cirurgias realizadas por um médico no primeiro semestre de 2022.



Determine:

a) a média mensal de cirurgias.

$$R. Média = \frac{12+15+8+16+20+34}{6} = \frac{105}{6} = 17,5.$$

b) o aumento percentual do número de cirurgias em maio em relação ao mês anterior.

R. Maio teve 4 cirurgias a mais do que em abril. Se em abril tiveram 16 cirurgias, podemos afirmar que 4 é o mesmo que 25% das cirurgias feitas em abril. Assim, o aumento foi de 25%.

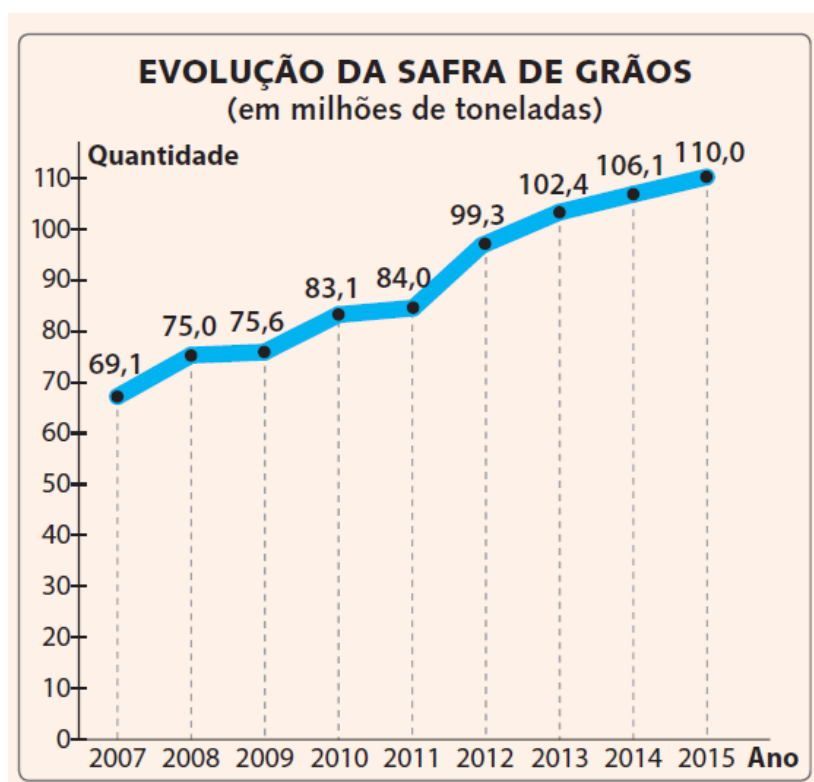
3. Um cientista trabalha com as espécies I e II de bactérias em um ambiente de cultura. Inicialmente, existem 1250 bactérias da espécie I e 350 bactérias da espécie II. O gráfico representa as quantidades de bactérias de cada espécie, em função do dia, durante uma semana.

Analise e responda:
qual dia dessa semana a quantidade total de bactérias foi máxima?

R. Terça-feira.



4. O gráfico abaixo mostra a safra de grãos, em milhões de toneladas, no período de 2007 a 2015, em determinada região.



Responda às questões.

a) Que tipo de gráfico é esse?

R. Gráfico de segmentos ou de linhas.

b) Quantos milhões de toneladas de grãos foram produzidos em 2011?

R. 84 milhões de toneladas.

c) A safra de 2015 foi quanto por cento superior à safra de 2008

R.

$$\frac{75}{110} = \frac{100\%}{x\%}$$

$$110 \cdot x\% = 75 \cdot 100\%$$

$$110 \cdot 100$$

$$11000$$

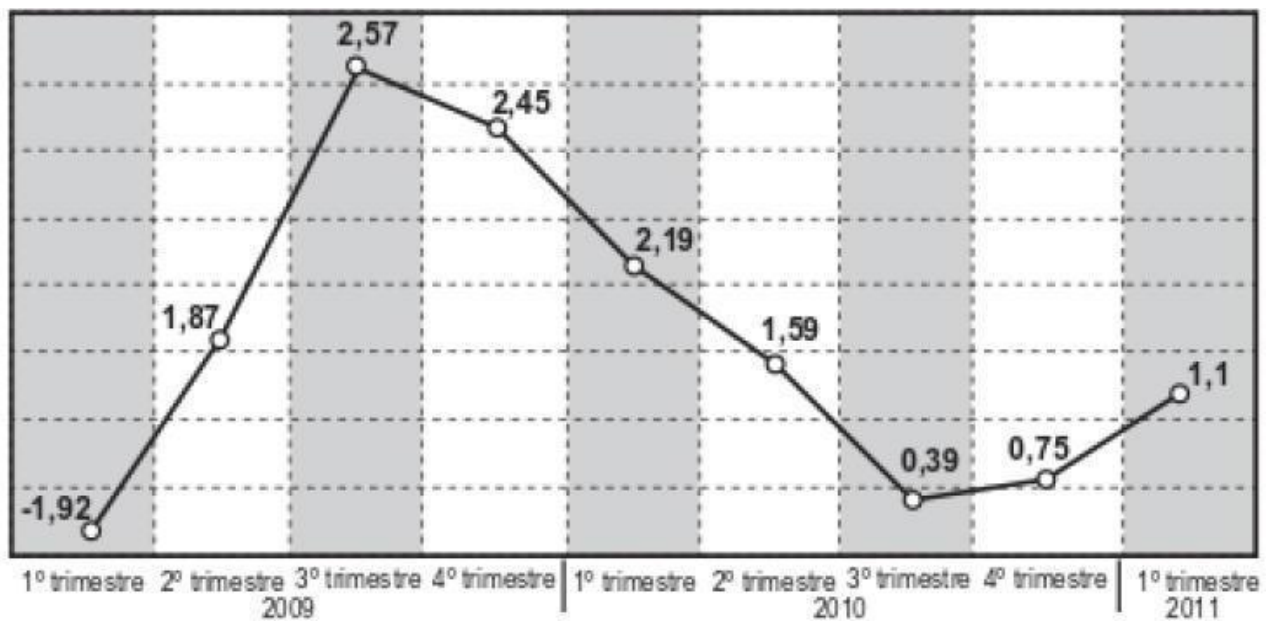
$$x = \frac{11000}{75} =$$

$$75 \cong 146,67\%$$

Portanto, a safra de 2015 é $146,67 - 100\% = 46,67\%$ maior do que a safra de 2008.

Lição 112 – Exercícios.

1. O gráfico mostra a variação percentual do valor do Produto Interno Bruto (PIB) do Brasil, por trimestre, em relação ao trimestre anterior.



De acordo com o gráfico, no período considerado, o trimestre em que o Brasil teve o maior valor do PIB, foi o:

- a) segundo trimestre de 2009.
- b) quarto trimestre de 2009.
- c) terceiro trimestre de 2010
- d) quarto trimestre de 2010.
- e) primeiro trimestre de 2011.

2. Veja a seguir o número de visitantes, em um parque, nos 31 dias do mês de julho.

- a) Calcule a média aritmética, a mediana e a moda dessa distribuição.

R. Vamos ordenar os dados em ordem crescente:

54 – 61 – 62 – 63 – 65 – 68 – 76 – 76 – 78 – 80 – 82 – 85 – 88 – 88 – 88 – 94 – 95 – 95 – 99 – 100 – 107 – 108 – 110 – 116 – 117 – 120 – 142 – 156 – 160 – 160 – 176.

176	160	54	62
61	88	95	160
68	76	88	117
78	63	108	99
85	110	88	107
120	156	142	100
80	116	65	94
95	82	76	

A moda dessa amostra é 88.

Como a amostra possui 31 informações, a mediana é o número que estiver na posição 16. Portanto, a mediana é 94.

Para calcular a média, precisamos somar todos esses valores e dividir por 31:

$$\text{Média} = \frac{3069}{31} = 99.$$

b) Na sua opinião, qual dessas medidas é mais significativa para o parque avaliar o número de visitantes no mês de julho? Justifique.

R. A média. A média é um número que pode substituir todos os dados, e apresenta o mesmo efeito na hora da soma. Assim, se somarmos 99 trinta e uma vezes, teremos o mesmo número de visitantes que ao somar o número real de visitantes por dia. Assim, os organizadores conseguem saber que, em média, 99 pessoas visitarão o parque naquele dia, embora tenham dias que receberão apenas 54 visitas, e outros que receberão quase o dobro, 176 visitantes. A moda não é um bom parâmetro pois só apareceu em 3 dias, dos 31 dias. Portanto, não tem real significado nessa amostra.

c) Em quantos dias o público presente no parque foi acima da média?

R. Em 12 dias.

3. Dois dados de cores diferentes são lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de obter nas faces voltadas para cima a soma dos pontos:

a) igual a 7?

R.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

R. Das 36 possíveis combinações, 6 apresentam a soma 7. Portanto, a probabilidade desse acontecer é de $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

b) maior que 10?

R. Temos apenas 3 resultados maiores que 10. Portanto, a probabilidade desse evento acontecer é de $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

c) maior que 15?

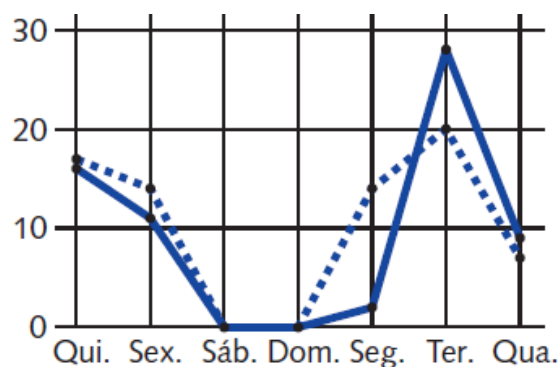
R. Não existe possibilidade desse evento acontecer.

d) menor que 12?

R. Do 36 resultados possíveis, 35 são menores que 12. Portanto a probabilidade é de

$$\frac{35}{36} = 0,97 = 97\%$$

4. A figura a seguir apresenta dois gráficos com informações sobre as reclamações diárias recebidas e resolvidas pelo Setor de Atendimento ao Cliente (SAC) de uma empresa, em uma dada semana. O gráfico de linha tracejada informa o número de reclamações recebidas no dia, e o de linha contínua é o número de reclamações resolvidas no dia. As reclamações podem ser resolvidas no mesmo dia ou demorarem mais de um dia para serem resolvidas.



O gerente de atendimento deseja identificar os dias da semana em que o nível de eficiência pode ser considerado muito bom, ou seja, os dias em que o número de reclamações resolvidas excede o número de reclamações recebidas.

O gerente de atendimento pôde concluir, baseado no conceito de eficiência utilizado na empresa e nas informações do gráfico, que o nível de eficiência foi muito bom na:

a) segunda e na terça-feira.

- b) terça e na quarta-feira.
- c) terça e na quinta-feira.
- d) quinta-feira, no sábado e no domingo.
- e) segunda, na quinta e na sexta-feira.

5. Em uma pesquisa eleitoral para verificar a posição de três candidatos a prefeito de uma cidade, 1 500 pessoas foram consultadas. Se o resultado da pesquisa deve ser mostrado em três setores circulares de um mesmo disco e certo candidato recebeu 350 intenções de voto, qual é o ângulo central correspondente a esse candidato?

R.

$$1\ 500 \text{ ---- } 100\%$$

$$350 \text{ x } \%$$

$$x = \frac{350 \cdot 100}{1500} \cong 23,3\%$$

Uma vez que sabemos que a intenção de votos desse candidato corresponde a 23,3% dos eleitores, basta saber a quantos graus da circunferência essa porcentagem corresponde:

$$23,3\% \text{ de } 360 = \frac{23,3}{100} \cdot 360 = 83,88\%$$

6. Uma loja de sapatos femininos fez uma pesquisa para saber a quantidade de sapatos de cada tamanho que era vendida. A pessoa que organizou os dados dessa pesquisa determinou a moda e a mediana dos dados, encontrando a moda igual a 36 e a mediana igual a 37. O que esses dados significam para a loja de sapatos? Explique.

R. O fato da moda ser igual a 36 significa que a maioria dos clientes dessa loja calça 36, e, ao levar esse dado em consideração, os pares de sapatos número 36 devem ser comprados em maior quantidade para uma possível revenda. A mediana ser igual a 37 indica que 50% dos sapatos vendidos foram menores ou iguais a 37 e os outros 50% foram maiores ou iguais a 37.

7. Nos 20 primeiros jogos de um campeonato brasileiro, o Flamengo marcou as seguintes quantidades de gols:

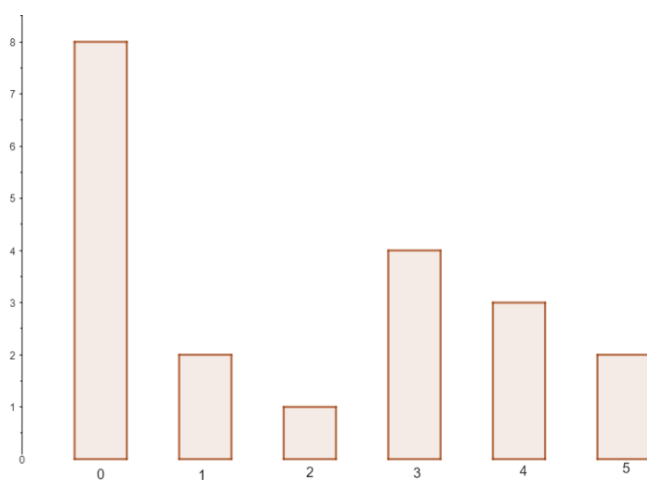
0, 1, 0, 4, 0, 0, 0, 1, 3, 2, 5, 3, 0, 3, 4, 5, 4, 0, 3, 0

a) Agrupe esses dados numa tabela de frequência.

R.

Número de gols	Frequência
0	8
1	2
2	1
3	4
4	3
5	2

b) Faça o gráfico de barras. R.



c) Faça o gráfico de setores.

R. Como o total de jogos é igual a 20, precisamos ver o quanto corresponde cada um dos resultados:

$$0 \text{ gol: } \frac{8}{20} = 0,4 = 40\%.$$

$$1 \text{ gol: } \frac{2}{20} = 0,1 = 10\%.$$

$$2 \text{ gols: } \frac{1}{20}$$

$$= 0,05 = 5\%.$$

$$3 \text{ gols: } \frac{4}{20} = 0,2 = 20\%.$$

$$4 \text{ gols: } \frac{3}{20} = 0,15 = 15\%.$$

$$5 \text{ gols: } \frac{2}{20} = 0,1 = 10\%.$$

Uma vez que sabemos as porcentagens, precisamos agora descobrir os ângulos:

$$0 \text{ gol: } 40\% \text{ de } 360 = 144^\circ.$$

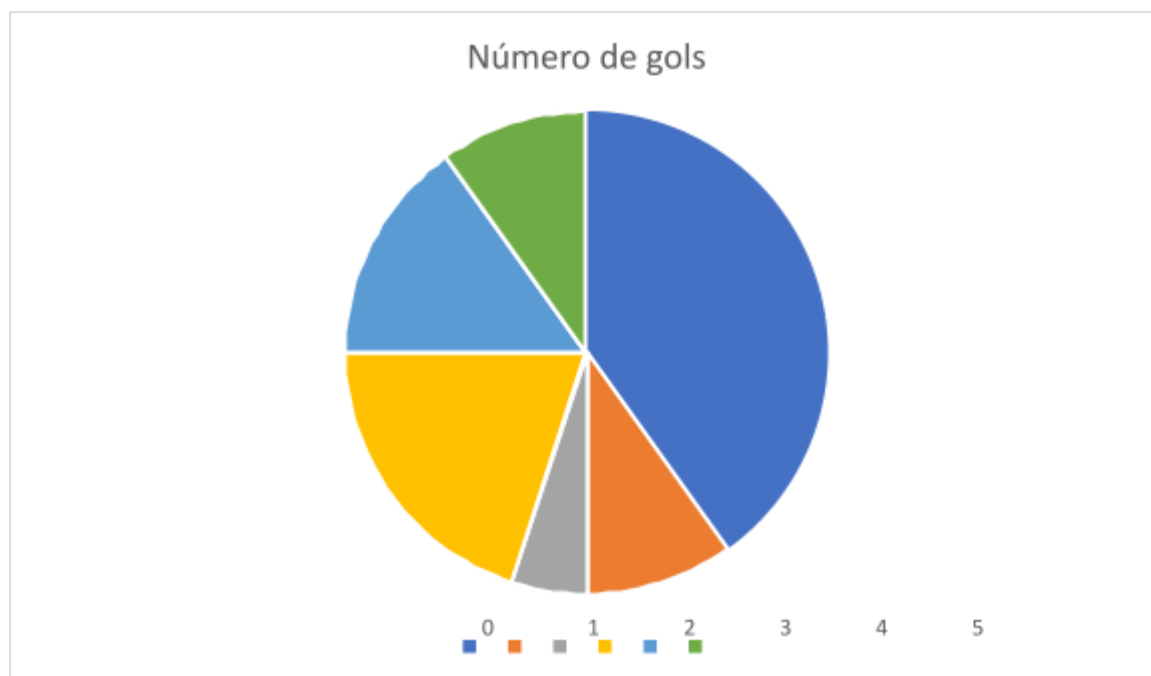
$$1 \text{ gol: } 10\% \text{ de } 360 = 36^\circ.$$

$$2 \text{ gols: } 5\% \text{ de } 360 = 18^\circ.$$

$$3 \text{ gols: } 20\% \text{ de } 360 = 72^\circ.$$

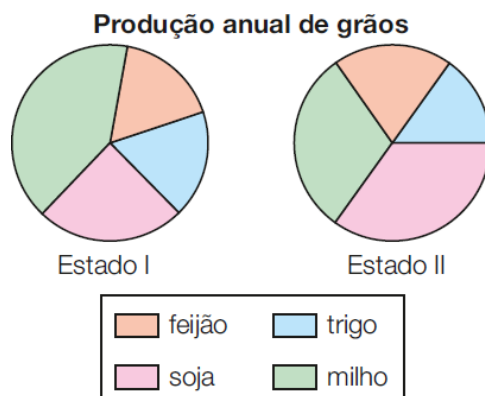
$$4 \text{ gols: } 15\% \text{ de } 360 = 54^\circ.$$

$$5 \text{ gols: } 10\% \text{ de } 360 = 36^\circ.$$



8. Em um certo ano, dois estados produziram os mesmos tipos de grãos. Os gráficos de setores a seguir ilustram a relação entre a produção de cada tipo de grão e a produção total desses estados.

a) Determine que percentual da produção do estado II representa, nesse ano, as produções de soja e de trigo, juntas.



R. Somente observando o gráfico é possível notar que soja e feijão correspondem à metade do círculo. Portanto, representam 50% de produção do estado II.

b) Pode-se dizer que, nesse ano, o estado I produziu uma quantidade total de milho maior que a do estado II? Por quê?

R. Não, porque porcentagem é sempre um valor relativo. Então, embora a porcentagem de milho no estado I seja maior do que a porcentagem de milho do estado II, não sabemos a que essa porcentagem se refere. Assim, o primeiro estado pode ter produzido milhares de milho, e o estado II ter produzido milhões. Por exemplo: se digo que um estado teve 50% de produção de milho, isso não significa que esses 50% representam um número maior do que 20% de produção de outro estado.

9. Analise o gráfico abaixo e responda às perguntas:



a) Entre 2005 e 2017, em quais períodos houve crescimento nas exportações?

R. De 2005 a 2008, de 2009 a 2011.

b) Pesquise o valor do dólar americano (comercial) na data de hoje. Quanto somaram, em reais, as exportações de 2017 ao preço de hoje?

R. Resposta pessoal.

Gabarito de Matemática

9º ano, Volume 8

Lição 113 – Resumo

1. Faça um resumo colocando os principais pontos estudados até o momento de geometria.

R: Resposta pessoal.

Lição 114 – Relações métricas no triângulo retângulo - Parte I

1. Como os triângulos podem ser classificados:

a) Em relação aos seus ângulos?

R: Os triângulos, quanto aos seus ângulos, podem ser classificados como: Acutângulo: se os três ângulos forem agudos, isto é, forem menores que 90° ; Retângulo: se possui um ângulo reto; Obtusângulo: se possui um ângulo obtuso, isto é, maior que 90° e menor que 180° .

b) Em relação aos seus lados?

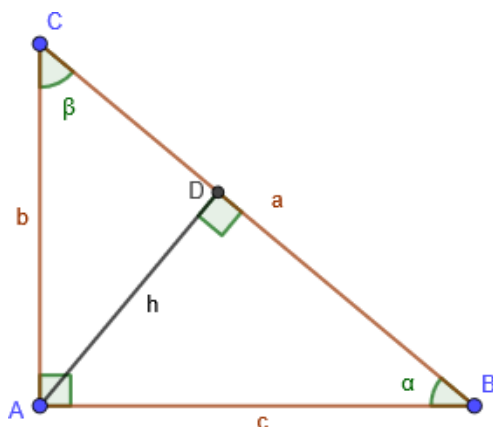
R: Os triângulos, quanto aos seus lados, podem ser classificados como: Equilátero: se os três lados forem congruentes dois a dois;

Isósceles: se possui dois de seus lados congruentes; Escaleno: se nenhum dos lados são congruentes entre si.

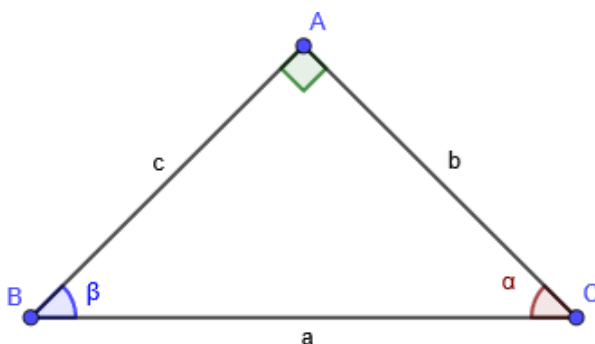
2. Em um triângulo retângulo os lados recebem nomes específicos. Dê esses nomes. Por quê?

R: Os lados do triângulo retângulo têm o nome de Hipotenusa e cateto. A hipotenusa recebe este nome, pois a palavra deriva do grego *hypotenusa*, e significa “o que se estende debaixo (do ângulo reto)”, já que este é sempre o lado oposto a tal ângulo. O nome se forma de *hypo*, “debaixo”, mais *teinein*, “esticar, alongar”. Já o cateto deriva do grego *káthetos*, e significa “descido, abaixado de maneira reta”. Isso porque estes lados determinam um ângulo reto.

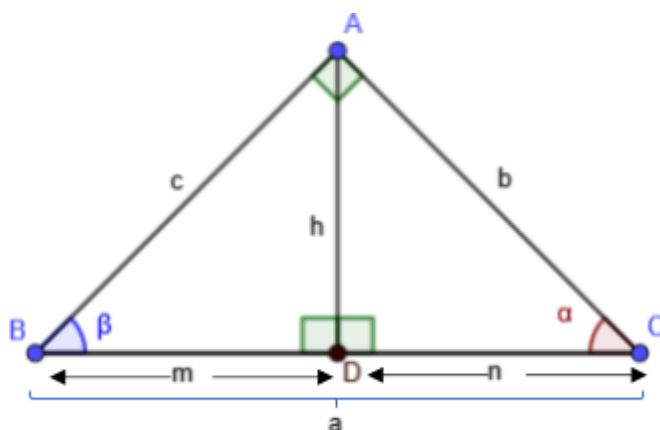
3. Considere o triângulo retângulo abaixo. Demonstre que DAB é semelhante ao triângulo DAC.



R: Considere um triângulo retângulo ABC, retângulo em A. Temos que a hipotenusa é a , e os catetos são b e c .



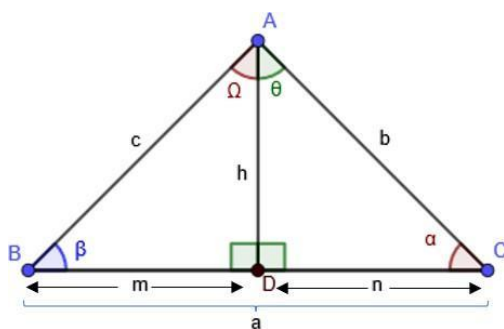
Seja traçada a altura h relativa à hipotenusa, sendo o pé da altura o ponto D.



Essa altura divide o triângulo retângulo ABC em dois novos triângulos retângulos: DBA e DAC. Agora, note que o triângulo ABC é retângulo, o que significa que alfa (α) e beta (β) são complementares, ou seja,

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad (1)$$

Note ainda que a altura h divide o ângulo reto em dois novos ângulos, não necessariamente de mesma medida, Ω (ômega) e θ (teta).



No entanto, os triângulos DBA e DAC também são retos, o que significa que:

$$\beta \text{ e } \Omega \text{ são complementares: } \Omega + \beta = 90^\circ \quad (2)$$

$$\alpha \text{ e } \theta \text{ são complementares: } \alpha + \theta = 90^\circ \quad (3)$$

Ora, pelas igualdades (1), (2) e (3) temos:

– α e Ω são complementos de β , logo:

$$\alpha + \beta = \Omega + \beta$$

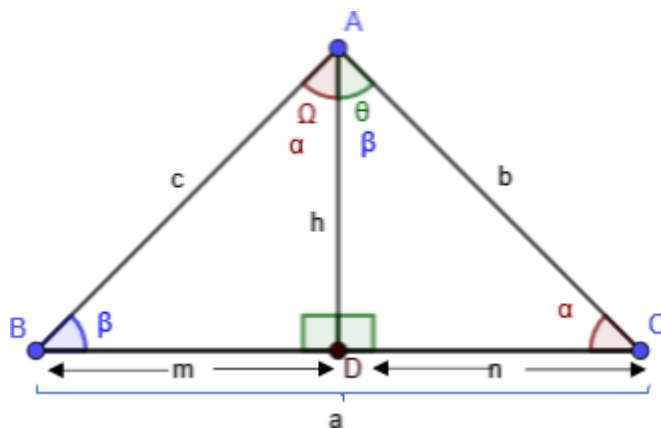
$$\alpha = \Omega$$

– θ e β são complementos de α , logo:

$$\alpha + \beta = \alpha + \theta$$

$$\beta = \theta$$

Portanto, é possível substituir Ω por α , e θ por β .



Note então que os triângulos retângulos DBA e DAC possuem os três ângulos congruentes. Pelo caso de semelhança AA, fica evidente que eles são semelhantes. Além disso, é evidente que eles também são semelhantes ao triângulo retângulo ABC, uma vez que este possui os três mesmos ângulos.

$$\triangle DBA \sim \triangle DAC \sim \triangle ABC$$

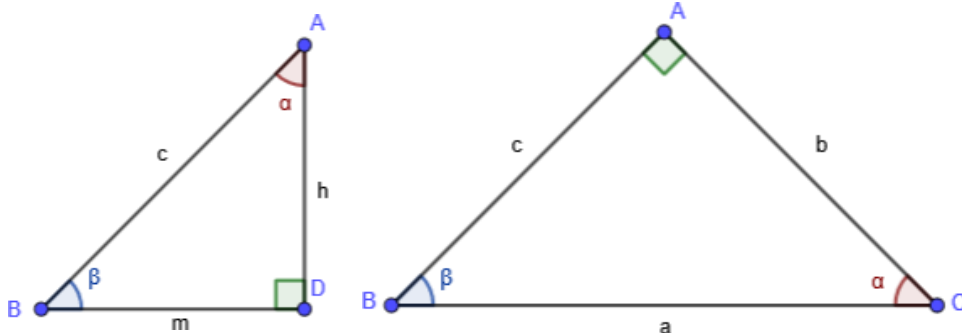
■ Q.E.D

Lição 115 – Relações métricas no triângulo retângulo - Parte II

1. Faça a demonstração da 1ª relação métrica no triângulo retângulo.

R: Considerando os triângulos DBA e ABC, temos $\triangle DBA \sim \triangle ABC$, pois $D \equiv A = 90^\circ$ e

$B \equiv B$ (comum).



Logo, temos a proporção:

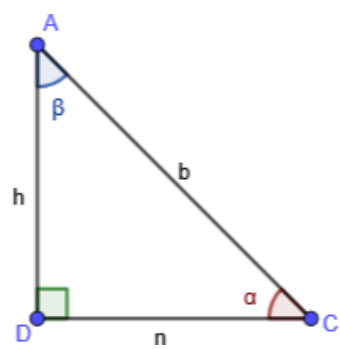
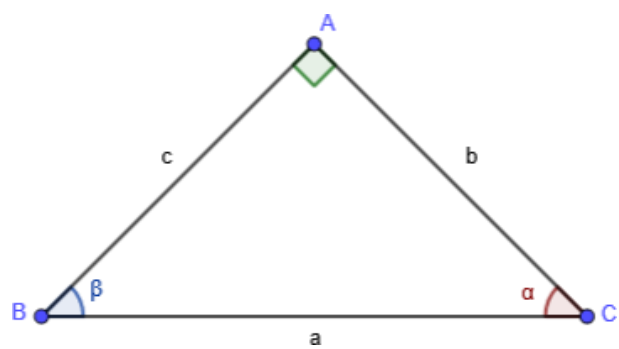
$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c}$$

$$c \cdot c = a \cdot m$$

$$c^2 = a \cdot m$$

Considerando os triângulos DAC e ABC, temos $\triangle DAC \sim \triangle ABC$, pois $D \equiv A = 90^\circ$ e

$C \equiv C$ (comum).



Logo, temos a proporção:

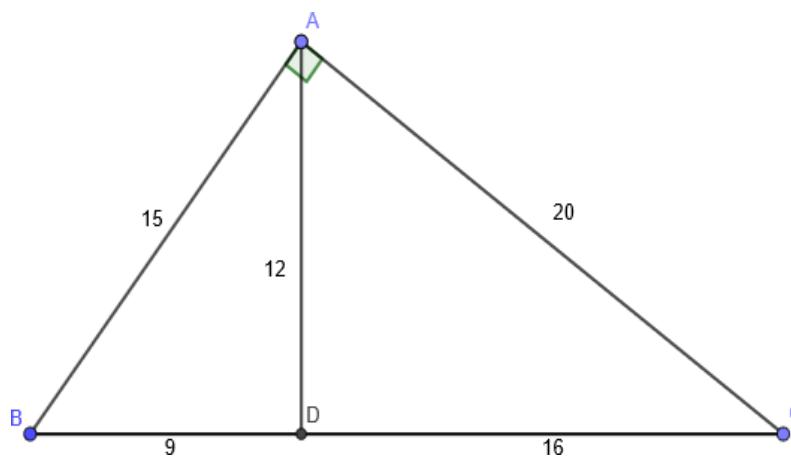
$$b = n a \quad b \quad - \quad -$$

$$b \cdot b = a \cdot n$$

$$b^2 = a \cdot n$$

Q.E.D

2. Verifique a primeira relação métrica no triângulo retângulo abaixo:



$$R: c^2 = a \cdot m \Rightarrow 15^2 = (9 + 16) \cdot 9 \Rightarrow 225 = 25 \cdot 9 \Rightarrow 225 = 225$$

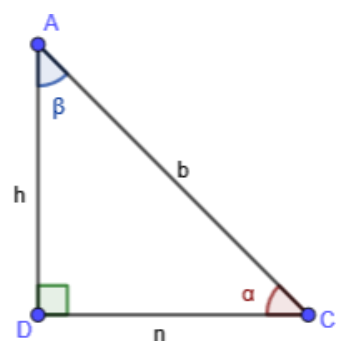
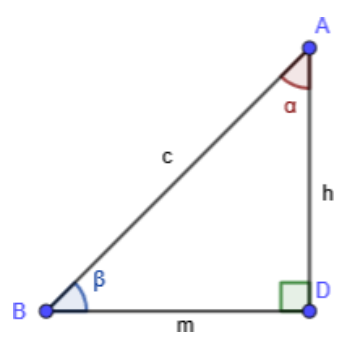
$$b^2 = a \cdot n \Rightarrow 20^2 = (9 + 16) \cdot 16 \Rightarrow 400 = 25 \cdot 16 \Rightarrow 400 = 400$$

Lição 116 – Relações métricas no triângulo retângulo - Parte III

1. Faça a demonstração da 2ª relação métrica no triângulo retângulo.

R: Considerando os $\triangle DBA$ $\triangle DAC$, pois $\sim$ $D \equiv D = 90^\circ$ e triângulos DBA e DAC, temos

$$BAD \equiv ACD.$$



Logo, temos a proporção:

h

$=$
 $\frac{m}{n}$

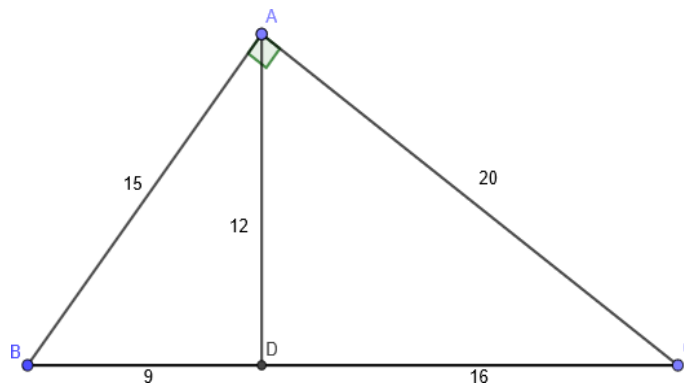
h

$$h \cdot h = n \cdot m$$

$$h^2 = n \cdot m$$

■ Q.E.D

2. Verifique a segunda relação métrica no triângulo retângulo abaixo:



$$R: h^2 = m \cdot n \Rightarrow 12^2 = 9 \cdot 16 \Rightarrow 144 = 144.$$

3. Em um triângulo retângulo, um cateto mede 10 cm e sua projeção sobre a hipotenusa mede 5 cm. Nessas condições, determine:

a) a medida da hipotenusa.

$$R: c^2 = a \cdot m \Rightarrow 10^2 = a \cdot 5 \Rightarrow a = \frac{100}{5} = 20 \text{ cm.}$$

5

b) a medida do outro cateto.

$$\Rightarrow b \sim 17,3 \text{ cm.}$$

$$R: b^2 = a \cdot n \Rightarrow b^2 = 20 \cdot (20 - 5) \Rightarrow b^2 = 20 \cdot 15 = 300 \Rightarrow b =$$

c) a medida da altura relativa à

$$15 \Rightarrow h^2 = 75 \Rightarrow h =$$

$$\text{hipotenusa. } R: h^2 = a \cdot m \Rightarrow h^2 = 5 \cdot$$

$$\sqrt{\frac{75}{5}}$$

=> $h \sim 8,7 \text{ cm.}$

4. Em um triângulo retângulo, os catetos medem 7 cm e 24 cm. Nessas condições, determine:

a) a medida da hipotenusa

R: A partir da primeira relação métrica no triângulo, temos que $b^2 = a \cdot n$ e que $c^2 = a \cdot m$, portanto, podemos passar o b^2 e o $a \cdot m$ para os outros lados das equações, obtendo: $a \cdot n - b^2 = 0$, e $c^2 - a \cdot m = 0$. Dessa forma, como ambas são iguais a 0, uma é igual a outra, e, assim, temos:

$$a \cdot n - b^2 = c^2 - a \cdot m \Rightarrow a \cdot n + a \cdot m = b^2 + c^2.$$

Evidenciando o a na primeira parte da equação, temos $a \cdot (n + m) = b^2 + c^2$, entretanto, $n + m$ é igual a a , estabelecendo a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Portanto:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 7^2 + 24^2 \Rightarrow a^2 = 49 + 576 \Rightarrow a = \sqrt{625} \Rightarrow a = 25 \text{ cm.}$$

b) a medida da altura relativa à hipotenusa

R: Novamente pela primeira relação métrica no triângulo, temos que

$$b^2 = a \cdot n \Rightarrow 7^2 = 25 \cdot n \Rightarrow \frac{49}{25} = n \Rightarrow n = 1,96 \text{ cm.}$$

E, temos também:

$$\begin{aligned} c^2 &= a \cdot m \Rightarrow 24^2 = 25 \cdot m \Rightarrow m = 23,04 \text{ cm.} \\ \Rightarrow m &= \frac{576}{25} \end{aligned}$$

Dessa forma, a altura relativa a hipotenusa é:

$$h^2 = m \cdot n \Rightarrow h^2 = 23,04 \cdot 1,96 \Rightarrow h = \sqrt{45,1584} = 6,72 \text{ cm.}$$

Lição 117 – Relações métricas no triângulo retângulo - Parte IV

1. Faça a demonstração da 3ª relação métrica no triângulo retângulo. R: Da 1ª relação métrica, temos que:

$$c^2 = a \cdot m$$

$$b^2 = a \cdot n$$

Multiplicando membro a membro as igualdades, temos que:

$$c^2 \cdot b^2 = am \cdot an$$

R: CANCELADA.

$$c^2 \cdot b^2 = a^2 \cdot m \cdot n$$

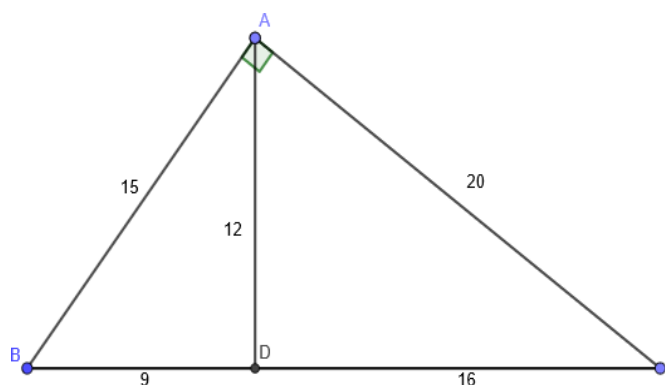
$$c^2 \cdot b^2 = a^2 \cdot h^2$$

$$= \frac{\sqrt{c^2} \cdot \sqrt{b^2}}{\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{h^2}}$$

$$cb = ah$$

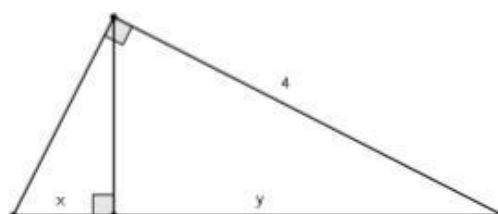


2. Verifique a terceira relação métrica no triângulo retângulo abaixo:



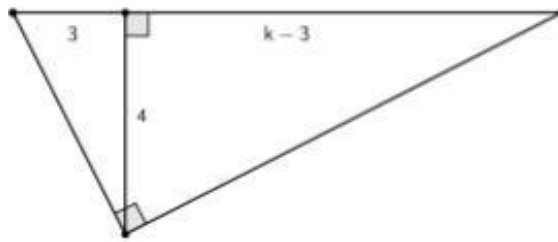
R: $cb = ah \Rightarrow 15 \cdot 20 = (9 + 16) \cdot 12 \Rightarrow 15 \cdot 20 = 25 \cdot 12 \Rightarrow 300 = 300$.

3. Determine x e y no triângulo da figura abaixo.



Q.E.D

4. Determine o valor de k na figura abaixo.



$$R: h^2 = m \cdot n \Rightarrow 4^2 = 3 \cdot (k - 3) \Rightarrow 16 = 3k - 9 \text{ cm.}$$

$$9 \Rightarrow 3k = 16 + 9 \Rightarrow k = \underline{25}$$

3

Lição 118 – Relações métricas no triângulo retângulo - Parte V

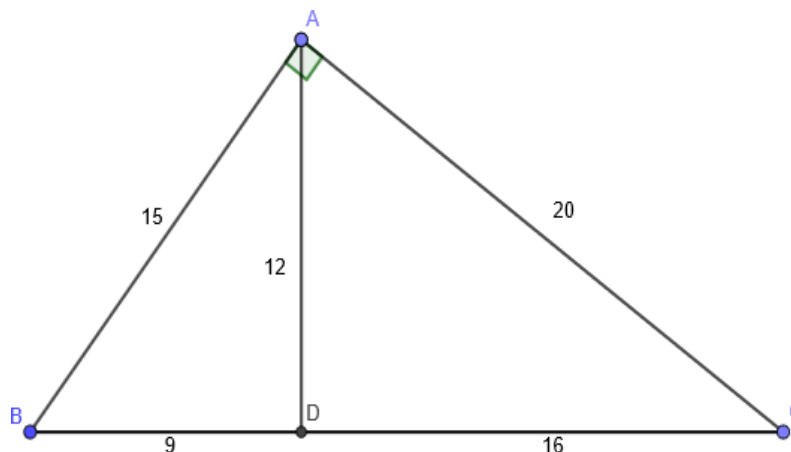
1. Faça a demonstração da 4ª relação métrica no triângulo retângulo.

R: A partir da primeira relação métrica no triângulo, temos que $b^2 = a \cdot n$ e que $c^2 = a \cdot m$, portanto, podemos passar o b^2 e o $a \cdot m$ para os outros lados das equações, obtendo: $a \cdot n - b^2 = 0$, e $c^2 - a \cdot m = 0$. Dessa forma, como ambas são iguais a 0, uma é igual a outra, e, assim, temos:

$$a \cdot n - b^2 = c^2 - a \cdot m \Rightarrow a \cdot n + a \cdot m = b^2 + c^2.$$

Evidenciando o a na primeira parte da equação, temos $a \cdot (n + m) = b^2 + c^2$, entretanto, $n + m$ é igual a a , estabelecendo a relação: $a^2 = b^2 + c^2$.

2. Verifique a quarta relação métrica no triângulo retângulo abaixo:



$$\text{R: } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (9 + 16)^2 = 15^2 + 20^2 \Rightarrow 25^2 = 225 + 400 \Rightarrow 625 = 625.$$

3. Quais são as relações métricas existentes entre os triângulos retângulos? Liste-as e analise cada relação métrica no triângulo retângulo.

R: Nos estudos das relações métricas no triângulo retângulo, podemos destacar as seguintes:

1) $c^2 = am$

2) $b^2 = an$

3) $h^2 = mn$

4) $cb = ah$

5) $a^2 = b^2 + c^2$

Analisando as duas primeiras, temos:

1) $c^2 = a \cdot m \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot m}$

- c é um cateto;
- a é a hipotenusa;
- m é a projeção do cateto c na hipotenusa.

2) $b^2 = a \cdot n \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot n}$

- b é um cateto;
- a é a hipotenusa;
- n é a projeção do cateto b na hipotenusa.

Analisando a segunda:

3) $h^2 = n \cdot m \Rightarrow h = \sqrt{n \cdot m}$

- h é a altura relativa à hipotenusa;
- n é a projeção do cateto b na hipotenusa;
- m é a projeção do cateto c na hipotenusa.

Analisando a terceira relação:

4) $a \cdot h = c \cdot b$

- a é a hipotenusa;
- h é a altura relativa à hipotenusa;
- c é o um cateto;
- b é o outro cateto.

5) $a^2 = b^2 + c^2$

- a é a hipotenusa
- b é um cateto
- c é o outro cateto

Lição 119 – Teorema de Pitágoras – Parte I

1. Quem foi Pitágoras?

R: Pitágoras é do século V antes de Cristo, e fundou associações com estilo de vida bem disciplinada e rigorosa. Ele pregava que o mundo era regido pelos números e pela harmonia entre eles. Tal foi sua importância, que aqueles que se assemelhavam ao seu modo de pensar recebiam o nome de pitagóricos. Ele foi muito importante para o desenvolvimento da filosofia grega, sendo citado por Platão, por seus discípulos e por Aristóteles. No entanto, há também muitos erros em suas crenças, como, por exemplo, a reencarnação.

2. Enuncie o Teorema de Pitágoras e faça em seu caderno as duas demonstrações realizadas nessa lição.

R: Teorema de Pitágoras: em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

1ª Demonstração:

$$\begin{aligned} &+ 1) \quad c^2 = a \cdot m \\ &2) \quad b^2 = a \cdot n \end{aligned}$$

$c_2 + b_2 = am + na$

Colocando a em evidência.

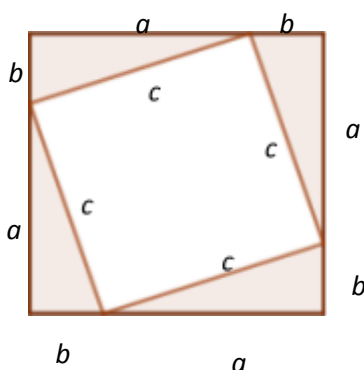
$$\begin{aligned} c^2 + b^2 &= a \cdot (m + n) \\ c^2 + b^2 &= a \cdot (m + n) \\ c^2 + b^2 &= a \cdot a \\ c^2 + b^2 &= a^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 \end{aligned}$$

Sabemos que $m + n = a$.

2ª Demonstração:

Tome um quadrado de lado $a + b$

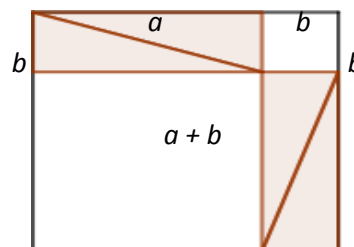
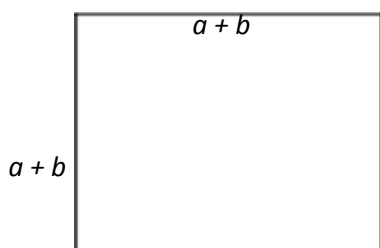
Deste mesmo quadrado sejam retirados 4 triângulos congruentes de catetos a e b . Como eles são congruentes, suas hipotenusas possuem todas as mesmas medidas. Logo, a figura que sobrou é um quadrado, cujo lado chamamos de c .



Ora, sabemos que a área deste quadrado de lado c é:

$$\text{Área} = \text{lado}^2 = c^2$$

Agora, tome um outro quadrado de lado $a + b$, e retire 4 triângulos congruentes dele, de catetos a e b , de maneira diferente da que foi feita no primeiro quadrado:



$a + b$

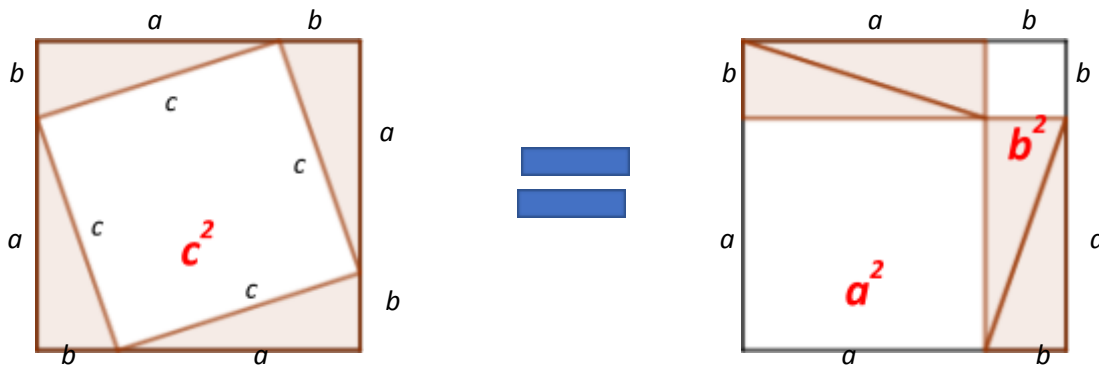


A área que sobra após a retirada desses quatro triângulos é a soma das áreas de um quadrado de lado a e de outro quadrado de lado b :

$$\text{Área}_{\text{restante}} = \text{Área (lado } a) + \text{Área (lado } b)$$

$$\text{Área}_{\text{restante}} = a^2 + b^2$$

Ora, como foram retirados exatamente os mesmos triângulos deste segundo quadrado, fica evidente que a área restante é equivalente à área do primeiro quadrado após a retirada dos triângulos.



$$\text{Área (lado } c) = \text{Área (lado } a) + \text{Área (lado } b)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

No entanto, note que a e b são os catetos dos triângulos retângulos e c é a hipotenusa. Logo, pela última igualdade é possível afirmar que “o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”.

■ Q.E.D

3. Determine a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo se seus catetos medem:

a) 3cm e 4cm

$$R: a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 16 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow \sqrt{a^2} = 5 \text{ cm.}$$

b) 5cm e 12cm

$$R: a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow a^2 = 25 + 144 \Rightarrow a^2 = 169 \Rightarrow \sqrt{a^2} = 169 = 13 \text{ cm.}$$

c) 1cm e 1cm

cm.

$$R: a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow a^2 = 1 + 1 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a =$$

d) $\frac{1}{2}$ cm e $\frac{3}{2}$ cm

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{9}{10}$$

R: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 4 + 4 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm.

$$| - |$$

$$()$$

e) $\sqrt{3}$ cm e $\sqrt{5}$ cm

R: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = \sqrt{3}^2 + \sqrt{5}^2 \Rightarrow a^2 = 3 + 5 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm.

4. Os lados de um triângulo ABC medem 10 cm, 24 cm e 26 cm. Você pode afirmar que este triângulo é retângulo?

R: sendo o maior lado de um triângulo retângulo a hipotenusa, podemos verificar pelo teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 26^2 = 10^2 + 24^2 \Rightarrow 676 = 100 + 576 \Rightarrow 676 = 676$$

Portanto este triângulo é retângulo.

5. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 14 cm e um dos catetos mede $5\sqrt{3}$ cm. Determine a medida do outro cateto. R:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 14^2 = (5\sqrt{3})^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 14^2 - (5\sqrt{3})^2 \Rightarrow c^2 = 196 - 75 \Rightarrow c^2 = 121 \Rightarrow c = 11$$

$$\Rightarrow c = \frac{\sqrt{121}}{1} \Rightarrow c = 11 \text{ cm.}$$

6. Num triângulo retângulo, os catetos medem 8cm e 15 cm. Determine a hipotenusa, as projeções dos catetos sobre a hipotenusa e a altura relativa à hipotenusa.

$$\text{R: } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 8^2 + 15^2 \Rightarrow a^2 = 64 + 225 \Rightarrow a^2 = 289 \Rightarrow \sqrt{289} \Rightarrow a = 17 \text{ cm.}$$

Lição 120 – Teorema de Pitágoras – Parte II

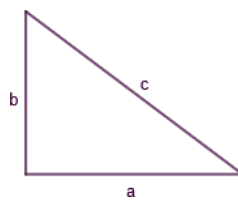
1. Enuncie o Teorema de Pitágoras e faça em seu caderno a demonstração realizada nesta lição.

R: Teorema de Pitágoras: em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

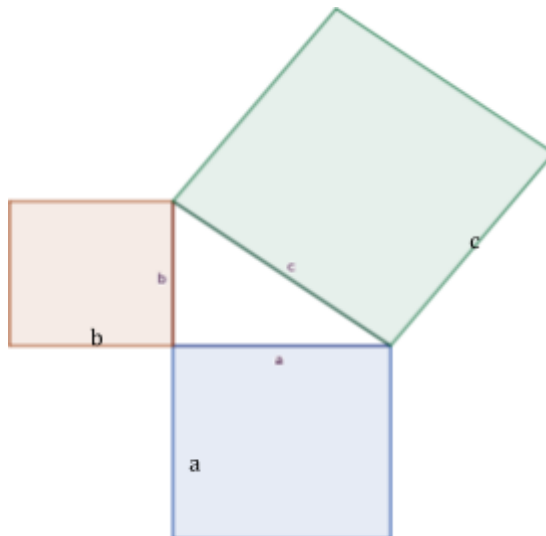
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Demonstração 3: quadriculações.

Tome um triângulo retângulo, de catetos a e b e hipotenusa c .



Seja construído um quadrado sobre cada lado do triângulo, cujos lados têm a mesma medida que o lado em que ele se apoia:



A área de cada um destes quadrados é:

Área (lado a) =

a^2 Área (lado b) =

b^2 Área (lado c) =

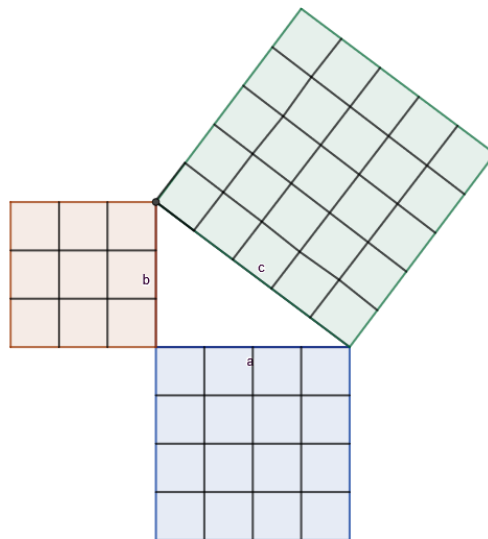
c^2

Considere agora o quadrado unitário



, de tal forma que vamos dispô-lo

lado a lado para preencher cada quadrado.



Agora, note que na área do quadrado de lado a couberam 16 quadrados unitários; que no quadrado de lado b couberam 9 quadrados; e que no quadrado de lado c couberam 25 quadrados. Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Área (lado } a) &= a^2 = \\ 16 \text{ Área (lado } b) &= b^2 \\ &= 9 \text{ Área (lado } c) = c^2 \\ &= 25 \end{aligned}$$

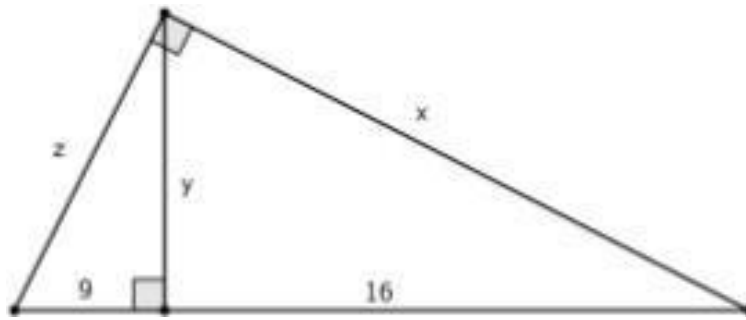
Algo interessante é possível verificar: a soma das áreas dos quadrados de lado a e de lado b é equivalente à área do quadrado de lado c :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= \\ c^2 \quad 16 + 9 &= \\ &= 25 \\ 25 &= 25 \end{aligned}$$

Logo, como a e b são catetos e c é a hipotenusa, podemos afirmar “que o quadrado da hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados dos catetos.”

■ Q.E.D

2. Determine os valores de x , y e z no triângulo abaixo.



R: Pelo teorema de Pitágoras, temos as relações:

$$y^2 + 16^2 =$$

$$x^2 - 9^2 + y^2 =$$

$$z^2 - z^2 + x^2 =$$

$$25^2$$

Somando as duas primeiras equações, obtemos: $(y^2 + 16^2) + (9^2 + y^2) = x^2 + z^2$

Substituindo $x^2 + z^2$ pela terceira equação, temos:

$$(y^2 + 16^2) + (9^2 + y^2) = 25^2 \Rightarrow 2y^2 + 81 + 256 = 625 \Rightarrow 2y^2 = 625 - 81 - 256 = 144 \Rightarrow y^2 = \frac{144}{2} = 72 \Rightarrow y = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$2$$

Substituindo o y na primeira equação, temos:

$$12^2 + 16^2 = x^2 \Rightarrow 144 + 256 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{400} = 20,$$

e substituindo o y na segunda equação, temos:

$$9^2 + 12^2 = z^2 \Rightarrow 81 + 144 = z^2 \Rightarrow z = \sqrt{225} = 15.$$

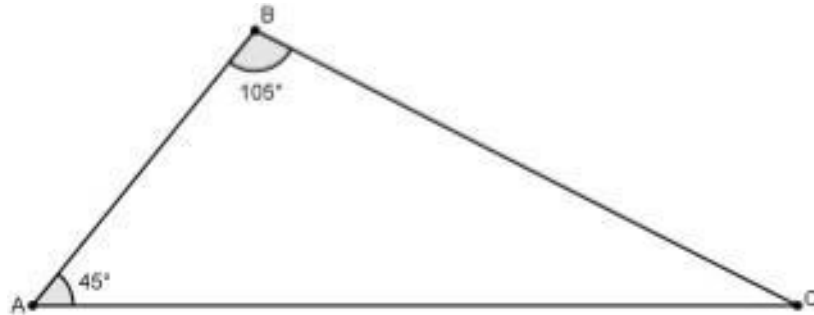
Portanto, temos:

$$x = 20$$

$$y = 12$$

$$z = 15$$

3. Determine o perímetro do triângulo ABC abaixo, sabendo que $AB = 7\sqrt{2}$.
Dicas: trace a altura relativa a AC; veja quanto mede o ângulo $\hat{C}$.



R: CANCELADA.

4. Uma escada de 2,5 m de altura está apoiada em uma parede da qual o pé da escada dista 1,5 m. Determine a altura em que a escada atinge a parede.

R: O triângulo formado pela escada chão e parede tem hipotenusa igual a 2,5 m e um cateto de 1,5 m. Assim, pelo teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2,5^2 = 1,5^2 + c^2 \Rightarrow 6,25 - 2,25 = c^2 \Rightarrow \sqrt{4} \Rightarrow c = 2 \text{ m.}$$

Lição 121 – Teorema de Pitágoras – Parte III

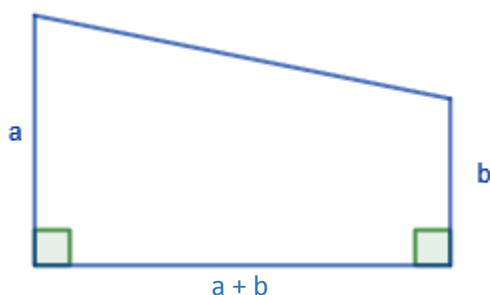
1. Enuncie o Teorema de Pitágoras e faça em seu caderno a demonstração realizada nesta lição.

R: Teorema de Pitágoras: em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

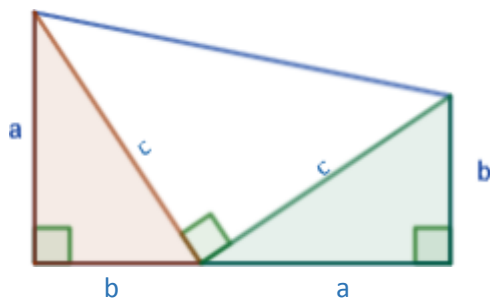
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Demonstração 4: demonstração do presidente dos Estados Unidos James A. Garfield.

Considere um trapézio retângulo de bases a e b , e altura $a + b$.



Seja dividido este trapézio em três triângulos, sendo que em dois deles os catetos são a e b , e a hipotenusa, c . O terceiro triângulo terá, por consequência, os catetos iguais a c .



Ora, sabemos que a área do trapézio será equivalente à soma das áreas dos três triângulos retângulos. Logo,

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Área} & = & \text{Área} & + & \text{Área} & + & \text{Área} \\ \text{trapézio} & & \text{triângulo rosa} & & \text{triângulo verde} & & \text{triângulo branco} \end{array}$$

Sabemos também que a área de um trapézio é calculada pela fórmula

$$\text{Área} = \frac{(\text{Base}_{\text{maior}} + \text{base}_{\text{menor}}) \cdot \text{altura}}{2}$$

trapézio

2

cujos termos valem:

- Base Maior: a
- base menor: b
- altura: a + b

Sabemos também que a área de um triângulo é calculada por

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

cujos termos valem:

Triângulo rosa

- Base: a
- Altura: b

Triângulo verde:

- Base: a
- Altura: b

Triângulo branco:

- Base: c
- Altura: c

a
s
e
.
a
l
t
u
r
a
2

Substituindo todos os termos pelos seus respectivos valores, temos:

$$\begin{aligned} \text{Área}_{\text{trapézio}} &= A_{\Delta \text{rosa}} + A_{\Delta \text{verde}} + A_{\Delta \text{branco}} \\ &= \frac{(\text{Base Maior} + \text{base menor}) \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} + \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} + \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \\ &= \frac{(a + b) \cdot (a + b)}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{a \cdot b}{2} = \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c \cdot c}{2}$$

$$\frac{ab}{2} +$$

$$\frac{ab}{2} +$$

$$\frac{c^2}{2} -$$

2

=

$$\frac{a^2 + ab + ab + b^2}{2} = \frac{ab + b + c^2}{2}$$

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} = \frac{2ab + c^2}{2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ao fim de todas as manipulações algébricas, temos que a soma dos quadrados dos lados a e b é equivalente ao quadrado da medida c. No entanto, a e b são catetos do triângulo retângulo e c sua hipotenusa. Logo *“o quadrado da hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados dos catetos”*.

■ Q.E.D

2. Um terreno triangular tem frente de 12 m e 16 m em duas ruas que formam um ângulo de 90°. Quanto mede o terceiro lado desse terreno?

$$\text{R: } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow a^2 = 144 + 256 \Rightarrow \sqrt{400} = 20 \text{ m.}$$

3. As medidas dos catetos de um triângulo retângulo medem $(2\sqrt{5})$ cm e $(-2\sqrt{5})$

cm. Nessas condições, determine a medida da hipotenusa.

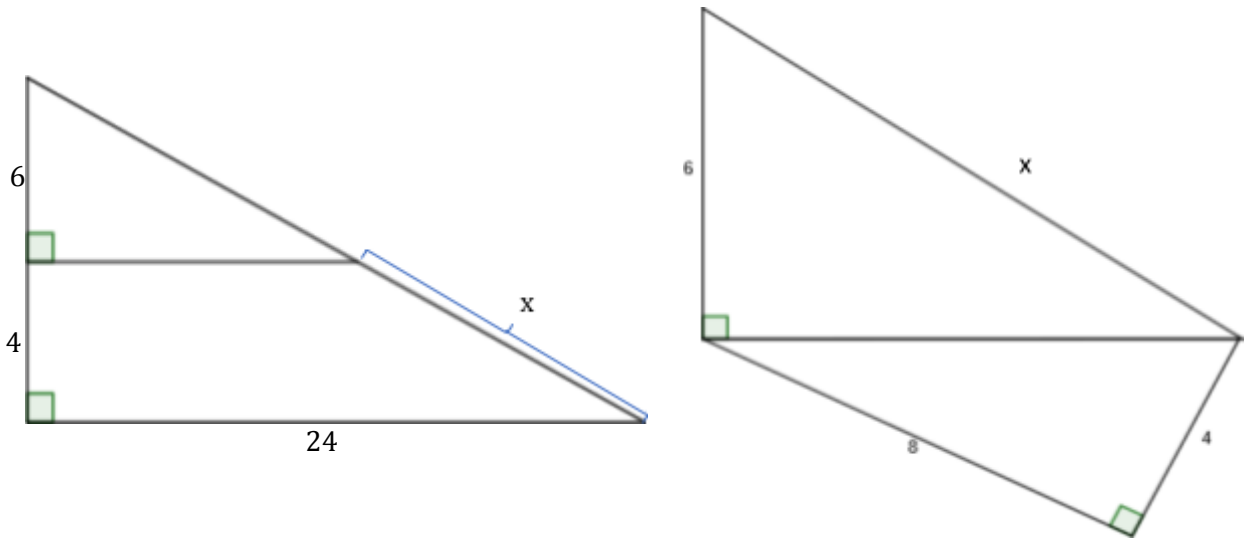
$$\begin{aligned} \text{R: } a^2 &= b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = \left(2 + \sqrt{5}\right)^2 + \left(-2 + \sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow a^2 = (2^2 + 4\sqrt{5} + 5) + (2^2 - 4\sqrt{5} + 5) \\ \Rightarrow a^2 &= 4 + 4 + 5 + 5 \Rightarrow a = \sqrt{18} \text{ cm.} \end{aligned}$$

4. Em um triângulo retângulo isósceles, cada cateto mede $10\sqrt{2}$ cm. Qual é a medida da hipotenusa deste triângulo?

$$\begin{aligned} \text{R: } a^2 &= b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow a^2 = 200 + 200 = 400 \\ a &= \sqrt{400} = 20 \text{ cm} \end{aligned}$$

Lição 122 – Aplicações do teorema de Pitágoras

1. Determine x nos casos:



R: No primeiro caso, temos uma semelhança de triângulos, onde o triângulo de cima é semelhante ao triângulo maior. Assim, temos que: $\frac{6}{base} = \frac{10}{24} \Rightarrow base = \frac{144}{10}$, assim,

base

24

10

a hipotenusa do triângulo menor é:

$$a^2 = b^2$$

$$\Rightarrow a =$$

$$\frac{156}{10}$$

$$+ c^2 \Rightarrow$$

$$a^2 = 6^2$$

$$+ ($$

$$\frac{144}{10})^2$$

$$\Rightarrow a =$$

$$10$$

Tendo a hipotenusa menor, basta calcular a maior e subtrair. A hipotenusa maior é:

$$a^2 = 10^2 + 24^2 \Rightarrow a^2 = 100 + 576 \Rightarrow a = \sqrt{676} \Rightarrow a = 26.$$

Portanto $x = 26 -$

$$\frac{156}{10} \Rightarrow x = 10,4.$$

Já o segundo caso, temos, no triângulo de baixo o valor da hipotenusa dada por:

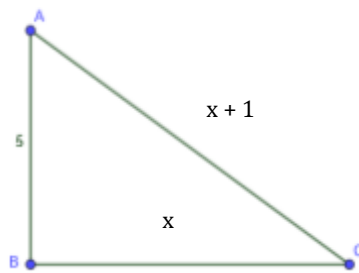
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 4^2 + 8^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 64 \Rightarrow a = \sqrt{80}.$$

Assim, usando o teorema de Pitágoras no triângulo de cima, temos:

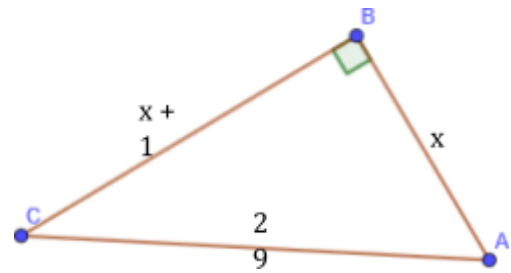
$$x^2 = 6^2 + \sqrt{80}^2 \Rightarrow x^2 = 36 + 80 \Rightarrow x = \sqrt{116} \Rightarrow x = 2\sqrt{29}$$

2. Determine x nos casos

a)



b)



R:

$$a) a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (x + 1)^2 = 5^2 + x^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 25 + x^2 \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = 12.$$

b)

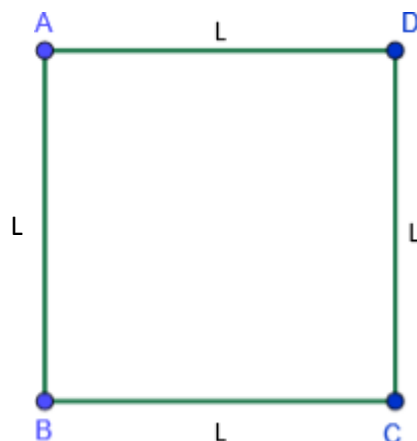
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 29^2 = (x + 1)^2 + x^2 \Rightarrow 841 = x^2 + 2x + 1 + x^2 \Rightarrow 2x^2 + 2x = 840 \\ \Rightarrow 2(x^2 + x) = 840 \Rightarrow x^2 + x = 420 \Rightarrow x^2 + x - 420 = 0.$$

Utilizando Bhaskara, temos:

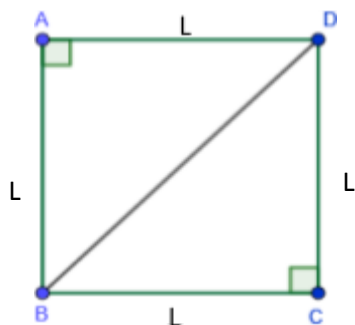
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-420)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1681}}{2} \Rightarrow x = 20$$

Lição 123 – A diagonal de um quadrado

1. Demonstre com suas palavras o teorema da diagonal do quadrado. R: Considere um quadrado ABCD qualquer, de lado L.



Traçando sua diagonal BD, temos que o quadrado fica dividido em dois triângulos retângulos, de hipotenusa BD e catetos de medida L: ABD e CBD.



Aplicando o Teorema de Pitágoras a qualquer dos triângulos, temos:

$$BD^2 = L^2 + L^2$$

$$BD^2 = 2L^2$$

$$BD = \sqrt{2L^2}$$

$$BD = L\sqrt{2}$$

■ Q.E.D

2. Quanto mede a diagonal de um quadrado que tem 8 cm de lado?

$$R: d = l\sqrt{2} \Rightarrow d = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

3. A diagonal de um quadrado mede 10 cm. Determine a medida l do lado desse quadrado.

$$R: d = l \Rightarrow 10 = l\sqrt{2} \Rightarrow l = \frac{10\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

4. Um quadrado tem 4 cm de lado. Determine a medida da sua diagonal:

a) usando a fórmula;

$$R: d = l\sqrt{2} \Rightarrow d = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

b) sem usar a fórmula.

$$R: d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow d^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow d^2 = 32 \Rightarrow d = \sqrt{32}$$

$$= 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\sqrt{\frac{32}{2}}$$

5. A diagonal de um quadrado mede $11\sqrt{2}$ cm. Nessas condições, determine a medida do lado e o perímetro deste quadrado.

$$R: d = l \cdot \sqrt{2} \Rightarrow 11\sqrt{2} = l \cdot \sqrt{2} \Rightarrow l = 11 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro: } p = 4l \Rightarrow p = 4 \cdot 11 \Rightarrow p = 44 \text{ cm.}$$

6. A área de um quadrado pode ser calculada fazendo-se $\frac{d^2}{2}$. Se um quadrado tem 225 cm^2 de área, qual é o valor, em decimal, da diagonal deste quadrado?

(Faça $\sqrt{2} = 1,41$.)

$$R: a = l^2 \Rightarrow 225 = l^2 \Rightarrow l = 15 \text{ cm.}$$

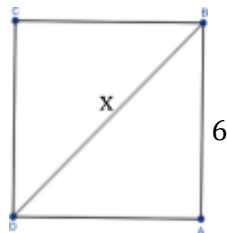
$$D = l\sqrt{2} \Rightarrow d = 15 \cdot 1,41 \Rightarrow d = 21,15 \text{ cm.}$$

7. Deduza a diagonal de um quadrado de lado a .

$$R: d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}.$$

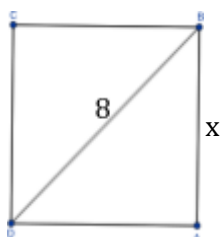
8. Determine o valor de x nos casos a seguir:

a)



$$R: d = l\sqrt{2} \Rightarrow x = 6\sqrt{2} \text{ cm.}$$

b)



$$8 = x\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

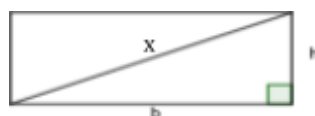
$$\text{R: } d = l\sqrt{2} \quad \Rightarrow \frac{8}{\sqrt{2}} = x \quad \Rightarrow x = \frac{8}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow x = 4 \text{ cm}$$

9. A diagonal de um quadrado mede $5\sqrt{2}$. Determine o perímetro do quadrado.

$$R: d = l\sqrt{2} \quad \sqrt{2} \Rightarrow 5\sqrt{2} = l \quad \Rightarrow l = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5 \text{ cm}$$

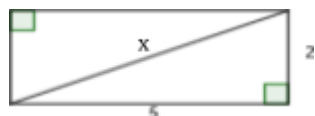
$$\text{Perímetro: } p = 4l \Rightarrow p = 4 \cdot 5 \Rightarrow p = 20 \text{ cm}$$

10. Deduza uma fórmula para calcular medida da diagonal de um retângulo. Tome o retângulo abaixo de base = b e altura = h para realizar a dedução.



$$R: x^2 = b^2 + h^2 \Rightarrow x = \sqrt{b^2 + h^2}$$

11. Determine o valor de x :



$$R: x = \sqrt{b^2 + h^2} \Rightarrow x = \sqrt{5^2 + 2^2} \Rightarrow x = \sqrt{25 + 4} \Rightarrow x = \sqrt{29}$$

Lição 124 – Altura de um triângulo equilátero

1. Demonstre com suas palavras o teorema da altura do triângulo equilátero.

R: Considere um triângulo equilátero ABC de lado L . Seja traçada a altura h relativa ao lado BC. A altura de um triângulo equilátero possui diversas características, como, por exemplo, ser bissetriz do ângulo A e ser mediatriz do lado relativo a ela:

Ora, note que a altura h divide o triângulo equilátero em dois triângulos retângulos congruentes. Perceba ainda que como a altura h é mediatriz do lado BC, razão por que $\overline{DB} = \overline{DC} = \frac{L}{2}$.

2

Aplicando o Teorema de Pitágoras a um destes triângulos, temos:

$$(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{Cateto 1})^2 + (\text{Cateto 2})^2$$

$$L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$L^2 = h^2 + \frac{L^2}{4}$$

Como queremos descobrir uma relação entre a altura e os lados, isolamos a altura, passando o termo $\frac{L^2}{4}$ para o primeiro membro da equação.

$$L^2 - \frac{L^2}{4} = h^2$$

$$4$$

$$4L^2 - L^2 = h^2$$

$$3L^2 = h^2$$

$$h^2 = 3L^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}L}{2}$$

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Q.E.D

2. Determine a medida h da altura de um triângulo equilátero de lado 20 cm.

$$\text{R: } h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{20\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 10\sqrt{3} \text{ cm.}$$

3. A altura de um triângulo equilátero é 9 cm. Determine a medida l do lado deste triângulo.

$$\begin{aligned}
 R: h &= \frac{L \sqrt{3}}{2} \Rightarrow 9 = \frac{l \sqrt{3}}{2} \Rightarrow l = \frac{9 \cdot 2}{\sqrt{3}} \Rightarrow l = \frac{18 \sqrt{3}}{3} \Rightarrow l = 6 \text{ cm.}
 \end{aligned}$$

4. O lado de um triângulo equilátero mede 12 cm. Determine a medida h da altura desse triângulo:

a) usando a fórmula;

$$R: h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{12\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 6\sqrt{3} \text{ cm.}$$

b) sem usar a fórmula.

$$R: L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow 12^2 = h^2 + 6^2 \Rightarrow h^2 = 144 - 36 \Rightarrow h = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ cm.}$$

5. Calcule a altura de um triângulo equilátero sabendo que seu perímetro é 36 cm. R: Perímetro = 3L $\Rightarrow 36 = 3L \Rightarrow L = 12$ cm.

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{12\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

6. Em um triângulo equilátero a altura mede $3\sqrt{3}$ cm. Nessas condições, qual é o perímetro deste triângulo equilátero?

$$R: h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3\sqrt{3} = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow L = 6 \text{ cm.}$$

$$\text{Perímetro} = 3L \Rightarrow p = 3 \cdot 6 \Rightarrow p = 18 \text{ cm.}$$

7. A área de um triângulo pode ser calculada multiplicando-se a medida de um lado pela medida da altura relativa a esse lado e dividindo-se o resultado por 2. Nessas condições e fazendo $h = 1,73$, determine a área de um triângulo equilátero cujo lado

$$R: h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{2} = 1,73 \Rightarrow h = 1,73 \text{ cm.}$$

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{4 \cdot 1,73}{2} \Rightarrow A = 3,46 \text{ cm}^2.$$

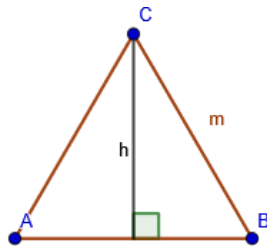
8. A medida do lado de um triângulo equilátero é igual à medida da diagonal de um

quadrado de lado 6 cm. Nessas condições, determine a medida da altura do triângulo.

$$R: d = l \sqrt{2} \quad \Rightarrow d = 6 \text{ cm.}$$

$$h = \frac{L \sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{6 \sqrt{3}}{2} = 3 \sqrt{3} \text{ cm.}$$

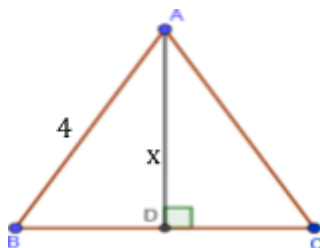
9. Deduza a altura de um triângulo equilátero de lado m .



$$\begin{aligned} \text{R: } m^2 &= h^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = m^2 - \frac{m^2}{4} \\ &= \frac{4m^2 - m^2}{4} = \frac{3m^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3m^2}}{2} = \frac{m\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

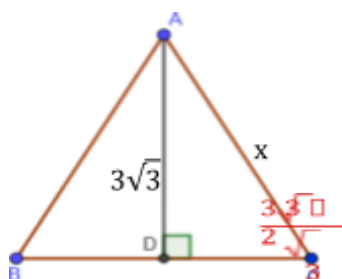
10. Encontre o valor de x nos triângulos abaixo:

a)



$$\begin{aligned} \text{R: } h &= \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow x = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned} \text{R: } h &= \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \\ \text{In } \triangle ADC, \text{ by Pythagoras: } x^2 &= (3\sqrt{3})^2 - 1^2 = 27 - 1 = 26 \Rightarrow x = \sqrt{26} \end{aligned}$$

Lição 125 – Razões trigonométricas no triângulo retângulo

1. Qual é o objeto de estudo da Trigonometria?

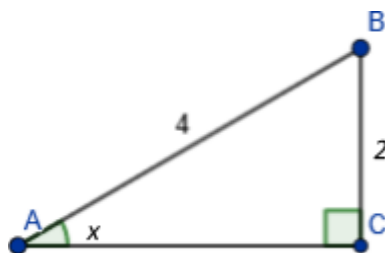
R: A trigonometria estuda as relações que existem entre os ângulos e os lados de um triângulo retângulo, mais especificamente as relações proporcionais que existem entre os lados de dois triângulos retângulos semelhantes.

2. Complete os espaços:

- a) À razão entre o cateto oposto e a hipotenusa dá-se o nome de Seno
- b) À razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa dá-se o nome de Cosseno
- c) À razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente dá-se o nome de Tangente

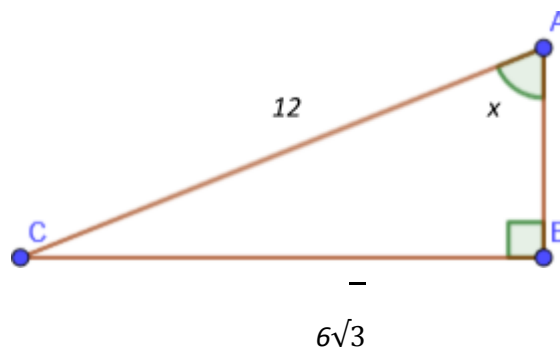
3. Determine $\sin x$ nos casos abaixo

a)



$$\text{R: } \sin x = \frac{CO}{H} \Rightarrow \sin x = \frac{2}{4} = 0,5$$

b)



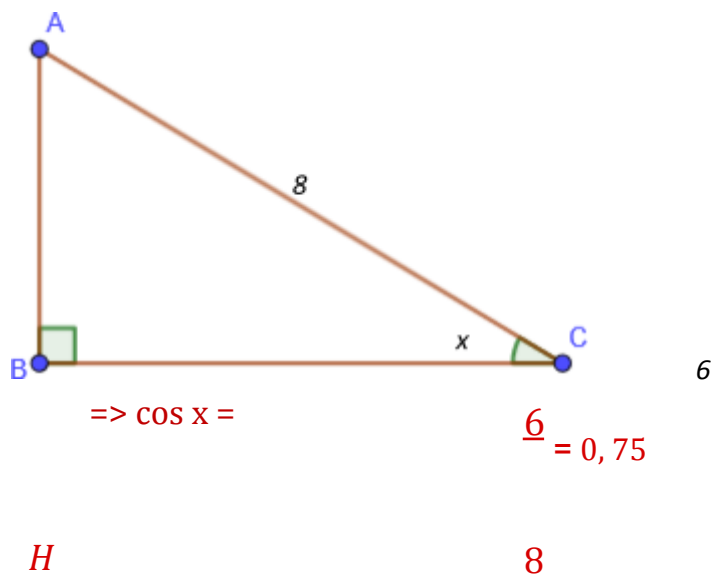
$$\text{R: } \sin x = \frac{CO}{H} \Rightarrow \sin x =$$

$$\frac{6}{12} = \frac{3}{2}$$

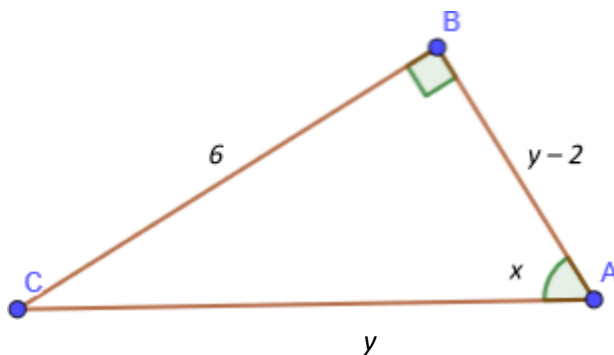
$$\sqrt{3} \quad \sqrt{\quad}$$

4. Determine $\cos x$ nos casos:

a)



b)



$$R: (y - 2)^2 + 6^2 = y^2 \Rightarrow y^2 - 4y + 4 + 36 = y^2 \Rightarrow 4y = 40 \Rightarrow y = 10$$

$$\cos x = \frac{CA}{AB} \Rightarrow \cos x = \frac{10 - 2}{10} = \frac{8}{10} = 0,8$$

H 10 10

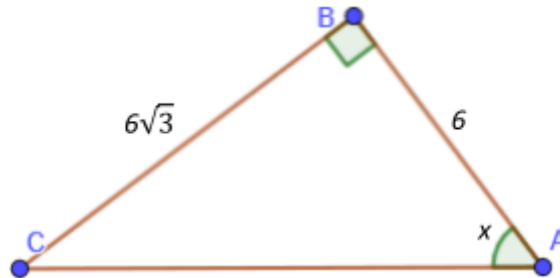
5. Obtenha $\tan x$ nos casos:

a)



$$\text{R: } \operatorname{tg} = \frac{CO}{CA} \Rightarrow \operatorname{tg} = \frac{12}{15} = 0,8$$

b)



$$\text{R: } \operatorname{tg} = \frac{CO}{CA} \Rightarrow \operatorname{tg} = \frac{6}{6} = \sqrt{3}$$

6. Quais os senos, os cossenos e as tangentes dos ângulos agudos do triângulo de lados 6 cm, 8 cm e 10 cm?

R: Para verificar se o triângulo é retângulo, basta utilizar o teorema de Pitágoras, onde:
 $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow 100 = 36 + 64 \Rightarrow 100 = 100$.

Portanto o triângulo é retângulo. Assim, o ângulo formado pelo lado maior e a hipotenusa terá:

$$\operatorname{sen} = \frac{6}{10} = 0,6 ; \cos = \frac{8}{10} = 0,8 ; \text{ e } \operatorname{tg} = \frac{6}{8} = 0,75 ;$$

E o ângulo formado pelo lado menor terá:

$$\operatorname{sen} = \frac{8}{10} = 0,8 ; \cos = \frac{6}{10} = 0,6 ; \text{ e } \operatorname{tg} = \frac{8}{6} = 1,33$$

10

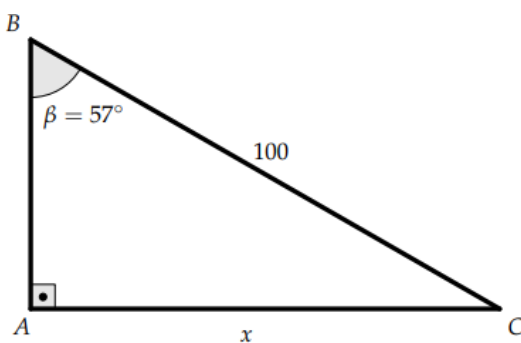
$$\frac{8}{6} = 1,33$$

6

Lição 126 – Tabela de razões trigonométricas

1. Consultando a tabela, determine as medidas de x .

a)

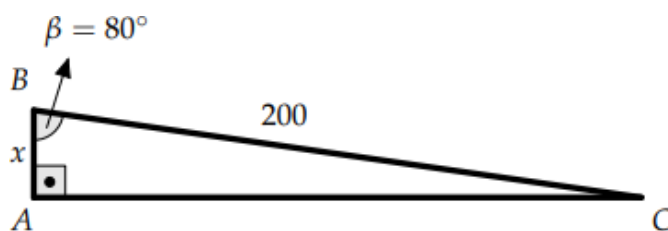


$$\text{R: } \sin 57^\circ = \frac{CQ}{H} \Rightarrow 0,8387 = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 83,87$$

H

100

b)

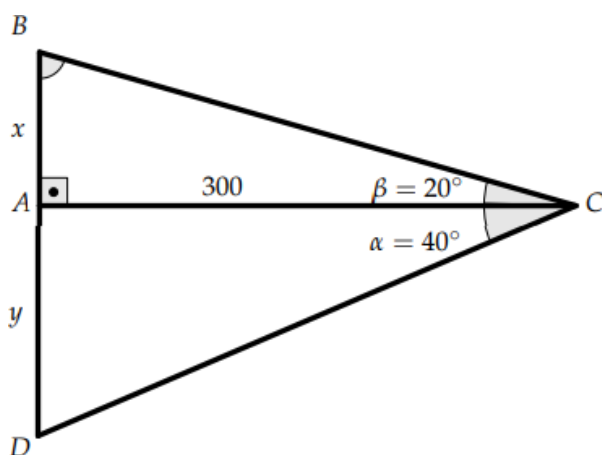


$$\text{R: } \cos 80^\circ = \frac{CA}{H} \Rightarrow 0,1736 = \frac{x}{200} \Rightarrow x = 34,72$$

H

200

c)



$$R: \operatorname{tg} 20^{\circ} = \frac{CO}{CA} \Rightarrow 0,3640 = \frac{x}{300} \Rightarrow x = 109,20$$

CA

300

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{CO}{CA} \Rightarrow 0,8391 = \frac{y}{300} \Rightarrow y = 251,73$$

CA

300

d) Um triângulo retângulo possui catetos medindo 34 e 93. Qual é a medida aproximada do ângulo oposto ao cateto de menor medida?

$$\text{R: } \operatorname{tg} \alpha^\circ = \frac{CO}{CA} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha^\circ = \frac{34}{93} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha^\circ = 0,3656 \sim \operatorname{tg} 20^\circ$$

CA

93

e) Um triângulo retângulo possui catetos medindo 26 e 97. Qual é a medida aproximada do ângulo oposto ao cateto de maior medida?

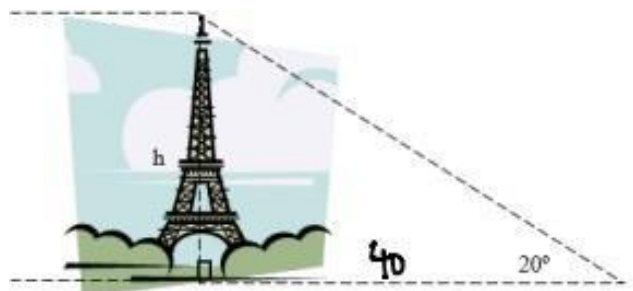
$$\text{R: } \operatorname{tg} \beta^\circ = \frac{CO}{CA} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta^\circ = \frac{97}{26} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta^\circ = 3,7308 \sim \operatorname{tg} 75^\circ$$

CA

26

2. A uma distância de 40 m, uma torre é vista sob um ângulo de 20° , como nos mostra a figura. Determine a altura h da torre.

(Use: $\operatorname{sen} 20^\circ = 0,34$, $\operatorname{cos} 20^\circ = 0,94$ e $\operatorname{tg} 20^\circ = 0,36$.)



- a) 14,4 m
- b) 17,1 m
- c) 44,1 m
- d) 52,3 m
- e) 63,8 m

$$R: \operatorname{tg} 20^{\circ} = \frac{CO}{CA}$$

$$\Rightarrow 0,36 = \frac{h}{40}$$

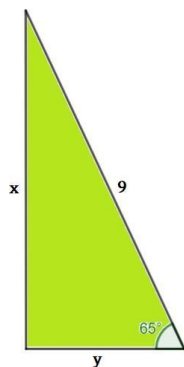
$$\Rightarrow x = 14,4 \text{ m. Alternativa a.}$$

CA

40

Lição 127 – Razões trigonométricas de ângulos notáveis

1. No triângulo retângulo determine as medidas x e y indicadas. (Use: $\sin 65^\circ = 0,91$; $\cos 65^\circ = 0,42$; $\tan 65^\circ = 2,14$.)



R:

$$\begin{aligned} \sin 65^\circ &= \frac{x}{9} \Rightarrow 0,91 = \frac{x}{9} \Rightarrow x = 8,19 \\ \cos 65^\circ &= \frac{y}{9} \Rightarrow 0,42 = \frac{y}{9} \Rightarrow y = 3,78 \end{aligned}$$

2. Determine as medidas dos catetos de um triângulo retângulo sabendo que a hipotenusa mede 50 cm e um dos ângulos agudos mede 37° . (Use: $\sin 37^\circ = 0,60$; $\cos$

$$37^\circ = 0,80; \text{tg } 37^\circ = 0,75.)$$

R:

$$\text{sen } 37^\circ = 0,60 = \frac{a}{50} \Rightarrow a = 30 \text{ cm}$$

$$\text{cos } 37^\circ = 0,80 = \frac{b}{50} \Rightarrow b = 40 \text{ cm.}$$

CO

$$\Rightarrow 0,80 = \frac{b}{50}$$

$$\text{cos } 37^\circ = 0,80 = \frac{b}{50}$$

$$37^\circ =$$

CA

3. Sabe-se que, num triângulo isósceles, cada lado congruente mede 40 cm. Se cada ângulo da base deste triângulo mede 62° , determine:

(Use: $\text{sen } 62^\circ = 0,88$; $\text{cos } 62^\circ = 0,47$; $\text{tg } 62^\circ = 1,88$.)

a) a medida x da base;

R: Sendo um triângulo isósceles, a altura referente à base divide o triângulo em duas partes iguais, assim, temos:

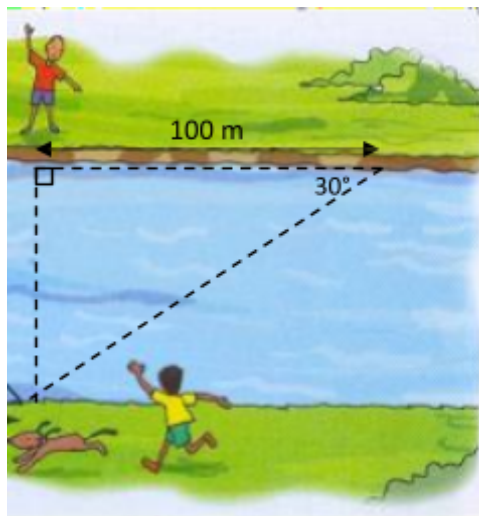
$$\begin{array}{l} \cos 62^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{40} \Rightarrow 0,47 = \frac{x}{80} \Rightarrow x = 37,6 \text{ cm.} \\ \text{CA} \\ H \end{array}$$

b) a medida h da altura.

R: Utilizando os mesmos princípios do item anterior, temos:

$$\begin{array}{l} \sin 62^\circ = \frac{h}{40} \Rightarrow 0,88 = \frac{h}{40} \Rightarrow h = 35,2 \text{ cm.} \\ \text{CO} \\ H \end{array}$$

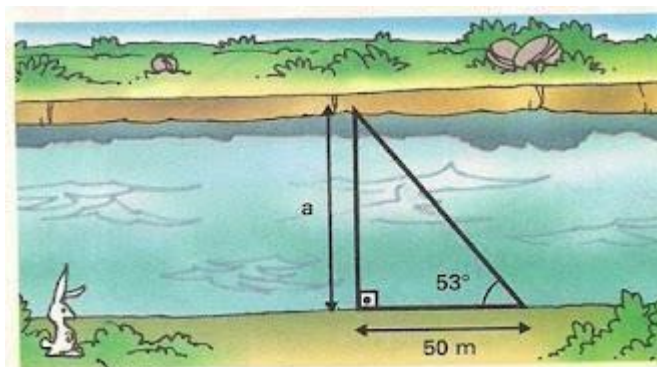
4. Para determinar a largura de um rio, marcou-se a distância entre dois pontos A e B numa margem: $AB = 100 \text{ m}$. Numa perpendicular às margens pelo ponto A, visou-se um ponto C na margem oposta e obteve-se o ângulo $ABC = 30^\circ$. Calcule a largura do rio.



$$\text{R: } \tan 30^\circ = \frac{CO}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{100\sqrt{3}}{3} \text{ m.}$$

CA 3 100 3

5. Qual é a largura do rio representado pela figura abaixo? (Use: $\sin 53^\circ = 0,80$; $\cos 53^\circ = 0,60$; $\tan 53^\circ = 1,32$.)



- a) 30 m
- b) 40 m
- c) 56 m
- d) 66 m

R: $\tan 53^\circ = \frac{CO}{CA}$

$\Rightarrow 1,32 =$

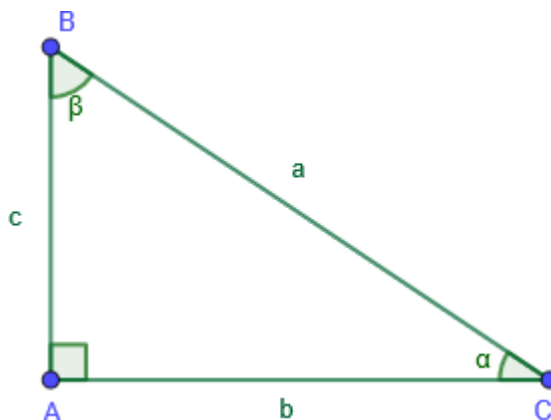
$\frac{a}{50} \Rightarrow a = 66 \text{ m. Alternativa d.}$

CA

50

Lição 128 – Relações entre as razões trigonométricas

1. Demonstre com suas palavras a relação fundamental da trigonometria. R: considere o triângulo ABC, retângulo em A.



Considere o ângulo α . Temos:

– Cateto oposto: c

– Cateto adjacente: b

– Hipotenusa: a

Dessa forma, as razões trigonométricas são:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \frac{\text{co}}{\text{hip}} \\ \operatorname{sen} \alpha &= \frac{c}{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\text{ca}}{\text{hip}} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \frac{\text{co}}{\text{ca}} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{c}{b}\end{aligned}$$

Ora, se nas duas primeiras razões isolarmos os catetos, eles podem ser encontrados pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \frac{c}{a} \\ a \cdot \operatorname{sen} \alpha &= c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{b}{a} \\ a \cdot \cos \alpha &= b\end{aligned}$$

Neste triângulo o Teorema de Pitágoras é:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Agora, substituindo os catetos b e c pelas relações que encontramos, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Colocando a^2
em evidência.

$$a^2 = (a \cdot \cos \alpha)^2 + (a \cdot \operatorname{sen} \alpha)^2$$

$$a^2 = a^2 \cdot \cos^2 \alpha + a^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha$$

Passando a^2
dividindo o
primeiro
membro.

$$a^2 = a^2 \cdot (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha)$$

$$\frac{a^2}{a^2} = \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$1 = \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

2. Simplifique a expressão $\sin x \cdot \cos^2 x - \sin x$.

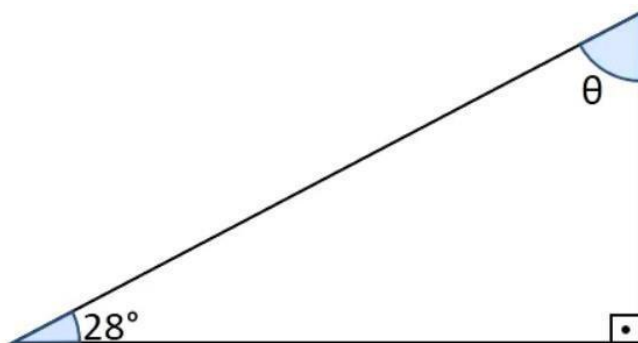
$$R: \sin^2 x \cdot \cos^2 x.$$

3. Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, e formando com o solo um ângulo de 30° (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1.000 metros, qual será a altura atingida pelo avião, em metros?

$$R: \sin 30^\circ = \frac{CO}{H} \quad \Rightarrow 0,5 = \frac{h}{1000} \quad \Rightarrow h = 500 \text{ m.}$$

4. No triângulo retângulo a seguir, determine o valor do ângulo θ , em graus, e seu seno, cosseno e tangente.

(Use: $\sin 28^\circ = 0,47$ e $\cos 28^\circ = 0,88$.)



R: Pela propriedade dos triângulos, onde seus ângulos internos somam 180° , temos: $28 +$

$$90 + \theta = 180 \Rightarrow \theta = 180 - 90 - 28 = \theta = 62^\circ.$$

Sendo θ e 28° complementares, temos a relação:

$$\sin 28^\circ = \cos \theta \quad \text{e} \quad \cos 28^\circ = \sin \theta.$$

Portanto, $\cos \theta = 0,47$ e $\sin \theta = 0,88$.

Gabarito de Matemática

9º ano, Volume 9

Lição 129 – Comprimento de arco de circunferência

1. Determine o comprimento da circunferência de raio 3,5 cm.

R: $C = 2\pi R \Rightarrow C = 2 \cdot 3,14 \cdot 3,5 \Rightarrow C = 21,98 \text{ cm}.$

2. Uma circunferência tem 10,5 cm de diâmetro. Nessas condições, qual é o comprimento desta circunferência?

R: Sabendo que diâmetro = 2 vezes o raio, a circunferência pode ser escrita por:

$$C = \pi \cdot D \Rightarrow C = 3,14 \cdot 10,5 \Rightarrow C = 32,97 \text{ cm}$$

3. A medida do raio de uma circunferência corresponde à medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 9 cm e 12 cm. Determine o comprimento da circunferência.

R: Pelo teorema de Pitágoras, temos que a hipotenusa do triângulo de catetos 9 e 12 é 15 cm. Assim, a circunferência é: $C = 2\pi r \Rightarrow C = 2 \cdot 3,14 \cdot 15 \Rightarrow C = 94,2 \text{ cm}.$

4. O comprimento de uma circunferência é 50,24 cm. Nessas condições, determine:

a) o comprimento do raio desta circunferência;

R: $C = 2\pi r \Rightarrow 50,24 = 2 \cdot 3,14 \cdot r \Rightarrow r = \frac{50,24}{3,14 \cdot 2} \Rightarrow r = 8 \text{ cm}.$

$$3,14 \cdot 2$$

b) as medidas dos lados de um quadrado, de um hexágono regular e de um triângulo equilátero inscritos nesta circunferência.

R: Quadrado: $l = r\sqrt{2} \Rightarrow l = 8\sqrt{2} \text{ cm}.$

Hexágono: $l = r \Rightarrow l = 8 \text{ cm}.$

Triângulo: $l = r\sqrt{3} \Rightarrow l = 8\sqrt{3} \text{ cm.}$

5. A medida do raio de uma circunferência, em centímetros, corresponde ao valor da raiz da equação $x^2 - 10x - 24 = 0$. Calcule, então, o comprimento desta circunferência.

R: Calculando o valor das raízes pelo método de Bhaskara, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 96}}{2} \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{196}}{2} \Rightarrow x = \frac{10 \pm 14}{2} \Rightarrow x = 12 \text{ ou } x = -2.$$

Dessa forma, como se trata de comprimentos, o valor de x não pode ser negativo, assim, $x = 12$. Portanto, a circunferência é: $C = 2\pi r \Rightarrow C = 2 \cdot 3,14 \cdot 12 \Rightarrow C = 75,36 \text{ cm}$.

6. Uma pista tem 25 m de raio. Quantos metros percorre uma pessoa que dá 20 voltas em torno desta pista?

R: Sendo 25 m o raio, a circunferência é $C = 2\pi r \Rightarrow C = 2 \cdot 3,14 \cdot 25 \Rightarrow C = 157 \text{ m}$. Assim 20 voltas equivalem a $20 \cdot 157 = 3.140 \text{ m}$.

7. Se uma pessoa der 10 voltas completas em torno de um jardim circular, ela percorrerá 2.198 m. Qual é o diâmetro deste jardim?

R: Se 10 voltas são 2.198 m, uma volta é 219,8 m, assim, pela circunferência, obtemos o diâmetro:

$$C = \pi d \Rightarrow 219,8 = 3,14 \cdot d \Rightarrow d = 70 \text{ m}.$$

$$d \Rightarrow d = \frac{219,8}{3,14}$$

3,14

8. A roda de uma bicicleta tem 0,90 m de diâmetro. Nessas condições responda:

a) Qual é o comprimento da circunferência desta roda?

$$R: C = \pi d \Rightarrow C = 3,14 \cdot 0,90 \Rightarrow C = 2,826 \text{ m}.$$

b) Quantas voltas completas a roda dá num percurso de 9.891 m?

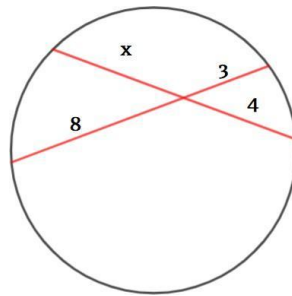
R: O número de voltas é a razão entre a distância percorrida e a circunferência

da roda: $n = \frac{9.891}{2,826}$

$\Rightarrow n = 3.500$ voltas.

Lição 130 – Relações entre cordas

1. Determine a medida x indicada na figura abaixo.

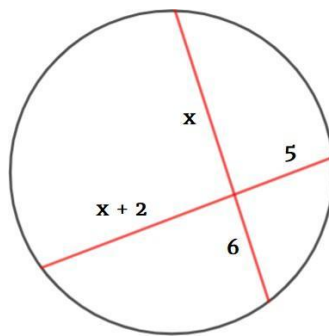


$$R: 4x = 3 \cdot 8 \Rightarrow x = \underline{24}$$

$$\Rightarrow x = 6.$$

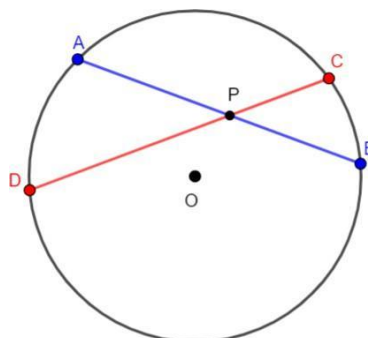
4

2. Na circunferência abaixo, determine a medida x indicada.



$$R: 6x = 5(x + 2) \Rightarrow 6x = 5x + 10 \Rightarrow 6x - 5x = 10 \Rightarrow x = 10.$$

3. Na figura abaixo, $PA = 3x$, $PB = x + 1$, $PC = x$ e $PD = 4x - 1$.



Nessas condições, determine:

a) a
medida x ;

R:

$$3x(x + 1) = x(4x - 1) \Rightarrow 3x^2 + 3x = 4x^2 - x \Rightarrow 0 = 4x^2 - 3x^2 - x - 3x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$$

ou $x = 4$

Como se trata de comprimento, x não pode ser nulo, portanto, $x = 4$.

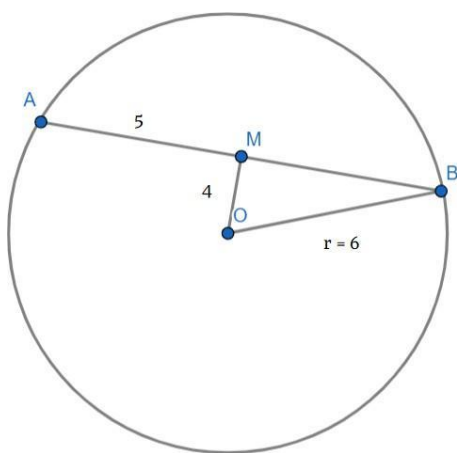
b) o comprimento de cada uma das cordas.

$$\text{R: Corda } AB = 3x + (x + 1) = 3 \cdot 4 + 4 + 1 \Rightarrow AB = 17.$$

$$\text{Corda } CD = x + (4x - 1) = 4 + 4 \cdot 4 - 1 \Rightarrow CD = 19.$$

4. Numa circunferência de centro O e raio 6 cm, traça-se uma corda $\overline{AB}$. Sobre esta corda, toma-se um ponto M de tal forma que $AM = 5$ cm e $OM = 4$ cm. Determine a medida do segmento $\overline{MB}$.

R: Construindo a circunferência enunciada, temos:

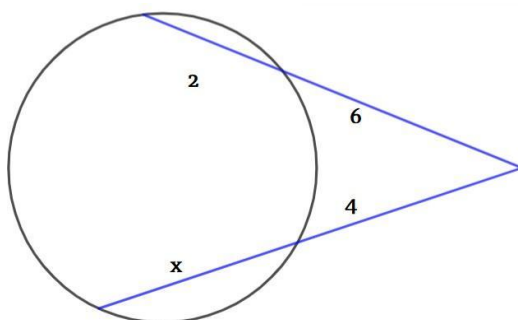


Dessa forma, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$4^2 + \overline{MB}^2 = 6^2 \Rightarrow \overline{MB}^2 = 36 - 16 \Rightarrow \overline{MB} = \sqrt{10} \text{ cm.}$$

Lição 131 – Relação entre segmentos secantes

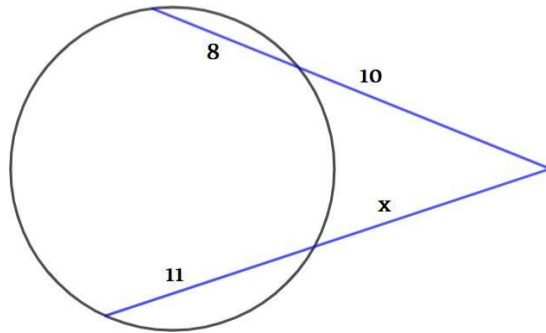
1. Determine a medida x indicada na circunferência da figura abaixo.



$$\text{R: } 2 \cdot 6 = 4x \Rightarrow x = \underline{12}$$

$$\Rightarrow x = 3$$

2. Determine a medida x indicada na circunferência da figura abaixo.



R: $8 \cdot 10 = 11x \Rightarrow x = \frac{80}{11}$

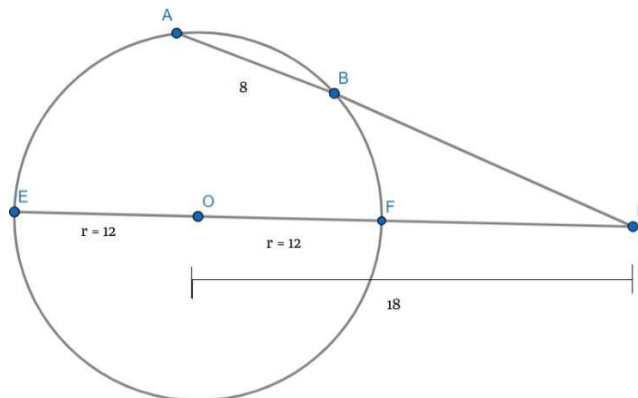
$\cong 7,3.$

11

3. Por um ponto P, distante 18 cm do centro de uma circunferência, traça-se uma secante que determina na circunferência uma corda $\overline{AB}$, que mede 8 cm. Se o comprimento do raio da circunferência é 12 cm, determine:

a) o comprimento do segmento de secante traçada do ponto

P; R: Construindo a circunferência, temos:



Dessa forma, sabemos que $8 \cdot PB = (12 - 12) \cdot (18 + 12) \Rightarrow PB = 18 \text{ cm}.$

$+ 12) \cdot (18 - 12) \Rightarrow PB = \frac{144}{8}$

8

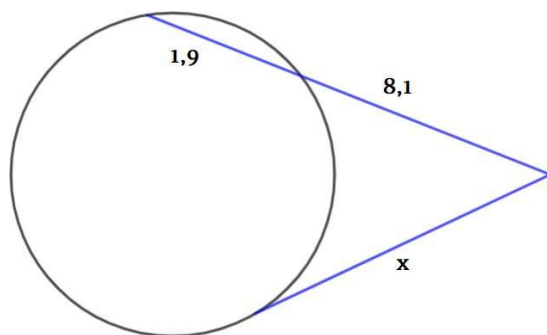
Assim, o segmento $AP = 18 + 8 = 26 \text{ cm}.$

b) o comprimento do segmento externo desta

secante. R: Como visto no item anterior, o segmento PB = 18 cm.

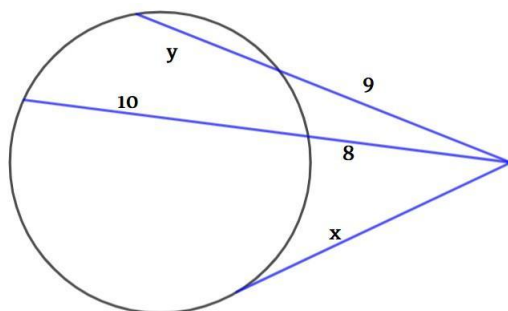
Lição 132 – Relação entre segmentos secante e tangente

1. Determine a medida x do segmento de reta tangente indicada na circunferência ao lado.



$$R: 8,1 \cdot (8,1 + 1,9) = x^2 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = 9.$$

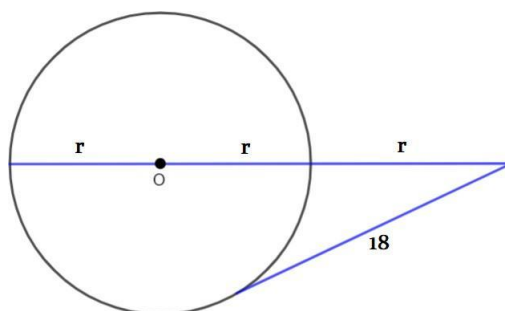
2. Na figura seguinte, determine as medidas x e y indicadas.



$$R: 9y = 10 \cdot 8 \Rightarrow y = \frac{80}{9}.$$

$$x^2 = 8 \cdot (10 + 8) \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = \sqrt{144} = 12$$

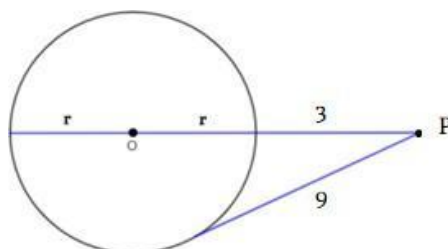
3. Determine a medida r do raio da circunferência da figura abaixo.



$$R: r \cdot 3r = 18^2 \Rightarrow 3r^2 = 324 \Rightarrow r^2 = 108 \Rightarrow r = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

4. De um ponto P situado a 3 cm de uma circunferência, traça-se um segmento de tangente PC cuja medida é 9 cm. Nessas condições, determine o comprimento do raio desta circunferência.

R: Construindo a circunferência, temos:



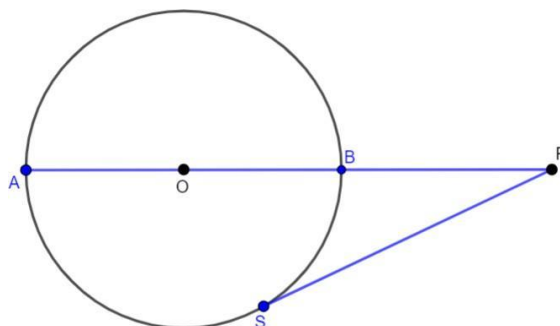
$$\text{Assim: } 3 \cdot (2r + 3) = 9^2 \Rightarrow 6r + 9 = 81 \Rightarrow r = 12 \text{ cm.}$$

$$\Rightarrow 6r = 81 - 9 \Rightarrow r = \frac{72}{6}$$

6

5. Na figura abaixo, temos que PO = 20 cm e o comprimento do raio da circunferência é 16 cm. Nessas condições, determine a medida do segmento PS.

R: Sabendo que PO = 20 cm e o raio = 16 cm, temos que PB = 4 cm e AB = 32 cm. Dessa maneira: $4 \cdot (4 + 32) = PS^2 \Rightarrow PS^2 = 144 \Rightarrow PS = \sqrt{144} = 12 \text{ cm.}$



6. De um ponto P externo a uma circunferência, traçamos um segmento de tangente PA e um segmento de secante. O segmento externo da secante mede 4 cm e o segmento interno tem a mesma medida que o segmento PA. Nessas condições, fazendo $\sqrt{5} = 2,23$, determine:

a) a medida do segmento PA ;

$$\begin{aligned} \text{R: } 4 \cdot (\overline{PA} + 4) &= \overline{PA}^2 \Rightarrow 4 \overline{PA} + 16 = \overline{PA}^2 \Rightarrow -\overline{PA}^2 + 4 \overline{PA} + 16 = 0 \Rightarrow \\ \overline{PA} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \overline{PA} = \frac{-(4) \pm \sqrt{4^2 - 4(-1)(16)}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow \overline{PA} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 64}}{-2} \Rightarrow \overline{PA} = \frac{-4 \pm 8}{-2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$PA = 6,46$ ou $PA = -2,46$. Portanto, sendo PA comprimento, $PA = 6,46$ cm.

b) o comprimento do segmento de secante.

R: O segmento secante mede: $4 + 6,46 = 10,46$ cm.

Lição 133 – Polígono regular

1. Defina polígono.

R: Chama-se polígono a toda forma geométrica delimitada pela união de três ou mais segmentos consecutivos não colineares.

2. Defina polígono regular e dê quatro exemplos.

R: Se a forma geométrica possui todos os seus ângulos e lados congruentes, é identificada como polígono regular. Exemplos: quadrado, triângulo equilátero, pentágono e hexágono, ambos com todos os lados e ângulos iguais.

Lição 134 – Polígonos regulares inscritos na circunferência

1. Defina um polígono inscrito na circunferência.

R: Um polígono é um polígono inscrito em uma circunferência quando todos os seus vértices são pontos pertencentes a ela.

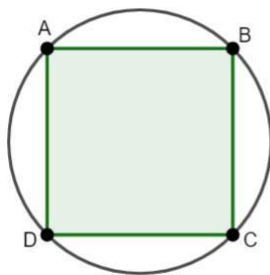
2. Defina um polígono regular inscrito na circunferência.

R: Quando dividimos uma circunferência em n (com $n > 2$) arcos congruentes, as cordas consecutivas delimitam um polígono regular de n lados, inscrito na circunferência.

3. Desenhe os seguintes polígonos inscritos na circunferência.

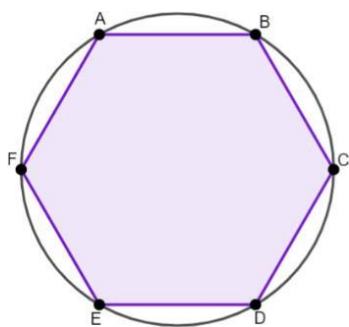
a) Quadrado

R:



b) Hexágono regular

R:



Lição 135 – Elementos de um polígono regular inscrito

1. Determine a medida do ângulo central e a medida do ângulo interno de cada um dos seguintes polígonos regulares inscritos:

a) triângulo equilátero;

$$\text{R: } \hat{\text{Ângulo central}} = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ. \hat{\text{Ângulo interno}} = \frac{(n-2)180^\circ}{n} = \frac{(3-2)180^\circ}{3} = 60^\circ$$

b) quadrado;

$$\begin{aligned} \text{R: } \hat{\text{Ângulo central}} &= \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ. \hat{\text{Ângulo interno}} = \frac{(n-2)180^\circ}{n} = \frac{(4-2)180^\circ}{4} = 90^\circ \\ &= \frac{(n-2)180^\circ}{n} \end{aligned}$$

c) pentágono regular;

$$\begin{aligned} \text{R: } \hat{\text{Ângulo central}} &= \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ. \hat{\text{Ângulo interno}} = \frac{(n-2)180^\circ}{n} = \frac{(5-2)180^\circ}{5} = 108^\circ \\ &= \frac{(n-2)180^\circ}{n} \end{aligned}$$

d) octógono regular.

$$\begin{aligned} \text{R: } \hat{\text{Ângulo central}} &= \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ. \hat{\text{Ângulo interno}} \\ &= \frac{(n-2)180^\circ}{n} \end{aligned}$$

$$= \frac{(n - 2)180^\circ}{n}$$

$$= \frac{(8 - 2)180^\circ}{8} = 135^\circ$$

$$n = 8$$

$$n = 8$$

2. O perímetro de um polígono regular inscrito numa circunferência cujo raio mede x é 60 cm. Sabe-se que outro polígono regular com o mesmo número de lados está

inscrito numa circunferência de raio 25 cm e tem 150 cm de perímetro. Quanto mede o comprimento x de raio da primeira circunferência?

$$R: \frac{x}{25} = \frac{60}{150} \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 25}{150} \Rightarrow x = 10 \text{ cm.}$$

$$\frac{25}{150} = \frac{60}{150}$$

3. Os perímetros de dois polígonos regulares com o mesmo número de lados medem 48 cm e 60 cm, respectivamente. Quanto mede o apótema do segundo, se o apótema do primeiro mede $4\sqrt{3}$ cm?

$$R: \frac{48}{60} = \frac{4\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 4\sqrt{3}}{48} \Rightarrow x = 5\sqrt{3} \text{ cm.}$$

4. Os perímetros de dois polígonos regulares com o mesmo número de lados estão entre si como 2 está para 5. Sabendo que a medida do lado do segundo polígono é $20\sqrt{2}$ cm, calcule a medida do lado do primeiro polígono.

$$R: \frac{x}{20\sqrt{2}} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 20\sqrt{2}}{5} \Rightarrow x = 8\sqrt{2} \text{ cm.}$$

5. Os perímetros de dois polígonos regulares com o mesmo número de lados são, respectivamente, 28,28 cm e 39,592 cm. Quanto medem o raio e o apótema do primeiro se o raio e o apótema do segundo medem, respectivamente, 7 e 3,5 cm?

$$R: \text{Raio do primeiro: } \frac{28,28}{39,592} = \frac{r}{7} \Rightarrow r = \frac{28,28 \cdot 7}{39,592} \Rightarrow r = 5 \text{ cm.}$$

$$\frac{28,28}{39,592} = \frac{r}{7}$$

$$\text{Apótema: } \frac{28,28}{39,592} = \frac{a}{3,5} \Rightarrow a = \frac{28,28 \cdot 3,5}{39,592} \Rightarrow a = 2,5 \text{ cm.}$$

$$\frac{28,28}{39,592} = \frac{a}{3,5}$$

Lição 136 – Quadrado inscrito

1. Uma circunferência tem 40 cm de raio. Nessas condições, determine a medida do lado de um quadrado inscrito nesta circunferência.

R: $l = r\sqrt{2} \Rightarrow l = 40\sqrt{2} \text{ cm.}$

2. Usando $\sqrt{2} = 1,41$, determine a medida do apótema de um quadrado inscrito numa circunferência que tem 15 cm de raio.

$$R: a = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{15 \cdot 1,41}{2} \Leftrightarrow a = 10,575 \text{ cm}$$

3. Quais são o perímetro e a área de um quadrado inscrito numa circunferência que tem 32 cm de raio?

$$R: l = r\sqrt{2} \Rightarrow l = 32\sqrt{2} \text{ cm, portanto o perímetro é } 128\sqrt{2} \text{ cm e a área é } 2.048 \text{ cm}^2.$$

4. Um quadrado cujo lado mede 16 cm está inscrito numa circunferência. Determine o comprimento r do raio desta circunferência.

$$R: l = r\sqrt{2} \Rightarrow 16 = r\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{16}{\sqrt{2}} \text{ cm.}$$

5. Um quadrado cujo lado mede $20\sqrt{2}$ cm está inscrito em uma circunferência de raio r. Qual é a medida do apótema deste quadrado?

$$R: l = r\sqrt{2} \Rightarrow 20\sqrt{2} = r\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 20 \text{ cm. } a = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{20 \cdot \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a = 10\sqrt{2} \text{ cm.}$$

6. A medida do lado de um quadrado inscrito numa circunferência corresponde à medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem $20\sqrt{2}$ cm e 2 cm. Nessas condições, determine o raio da circunferência onde está inscrito o quadrado.

R: Sendo $20\sqrt{2}$ e 2 os catetos, a hipotenusa mede:

$$(20\sqrt{2})^2 + 2^2 = h^2 \Rightarrow h = \sqrt{804} = 2\sqrt{201} \text{ cm}$$

$$= r\sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{201} = r\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{201}}{\sqrt{2}} = \sqrt{201} \text{ cm}$$

$$\underline{2} = \sqrt{402} \text{ cm.}$$

Lição 137 – Hexágono regular inscrito

1. Uma circunferência tem 40 cm de raio. Nessas condições, determine a medida do lado de um hexágono regular inscrito nesta circunferência.

R: $l = r \Rightarrow l = 40 \text{ cm.}$

2. Usando

$= 1,73$, determine a medida do apótema de um hexágono regular

$$\sqrt{3}$$

inscrito numa circunferência que tem 15 cm de raio.

R: $a = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{15 \cdot 1,73}{2} \Leftrightarrow a = 12,975 \text{ cm.}$

$$2$$

$$2$$

3. Em uma circunferência de raio r estão inscritos um quadrado e um hexágono regular. Considerando que o lado do hexágono mede 50 cm e fazendo $= 1,41$, determine a medida do lado do quadrado.

$$\sqrt{2}$$

R: Se o lado do hexágono mede 50 cm, então o raio da circunferência também mede 50 cm, assim, o lado do quadrado vale: $l = r\sqrt{2} \Rightarrow l = 50 \cdot 1,41 \Rightarrow l = 70,5 \text{ cm.}$

Lição 138 – Triângulo equilátero inscrito

1. Uma circunferência tem 40 cm de raio. Nessas condições, determine a medida do lado de um triângulo equilátero inscrito nesta circunferência.

R: $l = r\sqrt{3} \Rightarrow l = 40\sqrt{3} \text{ cm.}$

2. Determine a medida do apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência que tem 15 cm de raio.

R: $a = \frac{r}{2} \Leftrightarrow a = \frac{15}{2} \Leftrightarrow a = 7,5 \text{ cm.}$

$$2$$

$$2$$

3. O apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio r mede 6,25 cm. Determine o valor de r .

$$R: a = \frac{r}{2} \Leftrightarrow 6,25 = \frac{r}{2} \Leftrightarrow r = 6,25 \cdot 2 \Leftrightarrow r = 12,5 \text{ cm} .$$

2

2

4. Sabendo que o apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio r mede 15 cm, determine:

a) o comprimento do raio;

$$R: a = \frac{r}{2} \Leftrightarrow 15 = \frac{r}{2} \Leftrightarrow r = 15 \cdot 2 \Leftrightarrow r = 30 \text{ cm}.$$

b) a medida do lado do triângulo, $= 1,73$.

$$\text{fazendo } R: l = r\sqrt{3} \Rightarrow l = 30 \cdot 1,73 \Rightarrow l = 51,9 \text{ cm}.$$

5. Num triângulo retângulo, as medidas dos catetos correspondem às medidas do lado e do apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio 10 cm. Nessas condições, determine a medida da hipotenusa deste triângulo retângulo.

$$R: l = r\sqrt{3} \Rightarrow l = 10\sqrt{3} \text{ cm}.$$

$$a = \frac{r}{2} \Leftrightarrow a = \frac{10}{2} \Leftrightarrow a = 5 \text{ cm}.$$

Dessa forma, a hipotenusa mede:

$$l^2 + a^2 = h^2 \Rightarrow (10\sqrt{3})^2 + 5^2 = h^2 \Rightarrow h^2 = 325 \Rightarrow h = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$$

6. Determine a razão entre o lado de um hexágono regular e o lado de um triângulo equilátero inscritos numa circunferência de raio r .

R: Sendo o lado do hexágono = h e o do triângulo = t , a razão entre os lados é:

$$\frac{h}{t} = \frac{r}{r\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

7. O raio de uma circunferência corresponde, em centímetros, à raiz positiva da equação $x^2 - 3x - 40 = 0$. Nessas condições, determine a medida do lado e do apótema do triângulo equilátero inscrito nesta circunferência.

$$R: x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-40)}}{2 \cdot (1)} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-40)}}{2} \Rightarrow x = 8 \text{ ou } x = -5.$$

Sendo o raio = 8, temos: $l = r\sqrt{3} \Rightarrow l = 8\sqrt{3} \text{ cm}$ e $a = \frac{r}{2} \Leftrightarrow a = \frac{8}{2} \Leftrightarrow a = 4 \text{ cm}$.

2

2

Lição 139 – Área de figuras planas

1. Um quadrado e um retângulo têm áreas iguais. Os lados do retângulo são expressos por dois números naturais consecutivos, enquanto o quadrado tem 2 cm de lado. Qual é o perímetro do retângulo?

R: Área do quadrado: $(2\sqrt{5})^2 = 20 \text{ cm}^2$. Dessa forma, os lados do retângulo, que são consecutivos e tem área de 20 cm^2 são 4 e 5 cm. Dessa forma, o perímetro do retângulo é: $4 + 4 + 5 + 5 = 18 \text{ cm}$.

2. Um número natural x é 20 unidades menor que o seu o quadrado. Se este número representa a medida do lado de um quadrado, calcule a área deste quadrado.

R:

$$x = x^2 - 20 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-20)}}{2 \cdot (1)}$$
$$20 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2a

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2} \Rightarrow x = 5 \text{ ou } x = -4.$$

Sendo comprimento, $x = 5$. A área do quadrado é $5^2 = 25 \text{ cm}^2$.

3. Quantos pisos retangulares de 20 cm por 35 cm são necessários para cobrir uma sala, também retangular, de 5,6 m por 8 m?

R: Área do piso = $0,20 \cdot 0,35 = 0,07 \text{ m}^2$. Área da sala = $5,6 \cdot 8 = 44,8 \text{ m}^2$. Portanto a quantidade de pisos necessários para preencher a sala é: $\frac{44,8}{0,07} = 640$ pisos.

4. A área de um retângulo é 35 cm^2 . As medidas dos lados deste retângulo são expressas por x e x - 2. Qual é o perímetro deste retângulo?

R: $x(x - 2) = 35 \Rightarrow x^2 - 2x - 35 = 0$

Utilizando o método de Bhaskara, temos que $x = 7$.

Assim, um lado do retângulo mede 7 cm, e o outro 5 cm, dessa forma, o perímetro é:

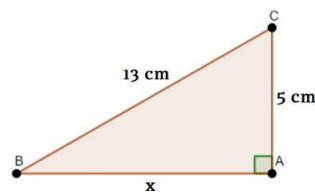
$$5 + 5 + 7 + 7 = 24 \text{ cm.}$$

5. As raízes da equação $x^2 - 15x + 26 = 0$ são as medidas, em centímetros, dos lados de um retângulo. Determine a área deste retângulo.

$$R: x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4(1)(26)}}{2(1)} \Rightarrow x = \frac{15 \pm 2}{2} \Rightarrow x = 13 \text{ ou } x = 2.$$

Portanto, a área do retângulo é: $13 \cdot 2 = 26 \text{ cm}^2$.

6. No triângulo retângulo da figura, determine a medida x do cateto $\overline{AB}$ e calcule, a seguir, a área do triângulo.



$$R: \text{O cateto é: } x^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 = 169 - 25 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = 12 \text{ cm. Assim, a área do triângulo é: } A = \frac{12 \cdot 5}{2} \Rightarrow A = 30 \text{ cm}^2.$$

7. Você quer fazer uma pipa em forma de losango, de tal forma que as varetas meçam 75 cm e 50 cm. Nessas condições, quantos centímetros quadrados de papel de seda você irá usar para fazer esta pipa?

$$R: A = \frac{D \cdot d}{2} \Rightarrow A = \frac{75 \cdot 50}{2} \Rightarrow A = 1.875 \text{ cm}^2 \text{ de papel.}$$

8. Em um losango, cada lado mede 30 cm. Se a diagonal maior deste losango mede 48 cm, determine a área deste losango.

R: Metade da diagonal maior vale 24 cm, assim, por Pitágoras, metade da diagonal menor vale: $x^2 + 24^2 = 30^2 \Rightarrow x^2 = 900 - 576 \Rightarrow x^2 = 324 \Rightarrow x = 18 \text{ cm}$. Dessa maneira, a

$$\text{diagonal menor mede } 36 \text{ cm, assim a área do losango é: } \frac{48 \cdot 36}{2} = 864 \text{ cm}^2.$$

9. Sabendo que as medidas das diagonais de um losango correspondem às raízes da equação $x^2 - 13x + 40 = 0$, determine a área deste losango.

$$\sqrt{(-13)^2 - 4(1)(40)}$$

$$R: x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 20}}{2} \Rightarrow x = 8 \text{ ou } x = 5.$$

Portanto, a área do losango é: $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ cm}^2$.

10. Um terreno tem a forma de um trapézio de bases 35 m e 24 m, com altura 22 m. Neste terreno, foi construída uma piscina retangular de 10,5 m por 6 m. No restante do terreno, colocou-se grama. Qual a área da parte do terreno que foi gramada?

R: A área gramada é a área do terreno menos a da piscina, portanto,

$$A = \frac{(35 + 24) \cdot 22}{2} - (10,5 \cdot 6) \Rightarrow A = 649 - 63 \Rightarrow A = 586 \text{ m}^2.$$

11. Um hexágono regular está inscrito numa circunferência de raio 18 cm. Nessas condições, determine:

a) a medida do lado deste hexágono;

$$\text{R: } l = r \Rightarrow l = 18 \text{ cm.}$$

b) o semiperímetro do hexágono;

$$\text{R: } p = \frac{P}{2} \Rightarrow p = \frac{6 \cdot 18}{2} \Rightarrow p = 54 \text{ cm.}$$

c) a medida do apótema do hexágono;

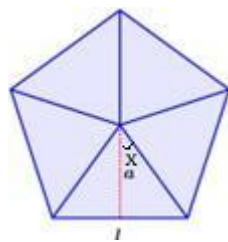
$$\text{R: } a = \frac{r \sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{18 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 9\sqrt{3} \text{ cm}$$

d) a área deste hexágono.

$$\text{R: } A = p \cdot a \Rightarrow A = 54 \cdot 9\sqrt{3} \Rightarrow A = 486\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

12. Seja um pentágono regular cujo lado mede 8 cm. Calcule a medida do apótema deste pentágono e a área do pentágono.

(sen 36° = 0,59); cos 36° = 0,81; tg 36° = 0,73)



R: Analisando a imagem, temos que o ângulo $x = 36^\circ$ e o apótema é:

$$a = \frac{l}{2} \cdot \frac{8 \cdot 0,59}{2} \Rightarrow a = 2,36 \text{ cm.}$$

sen

$36^\circ \Rightarrow$

$a =$

2

Dessa maneira, $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ cm}$, a

sabendo que o

semi-perímetro do

pentágono é: área do

pentágono é: $A = 20 \cdot 2,36$

$\Rightarrow A = 47,2 \text{ cm}^2$.

Lição 140 – Área do círculo

- Qual é a área de um círculo cujo raio $\sqrt{2} \text{ cm}$ mede 6

R: $A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot (6\sqrt{2})^2 \Rightarrow A = 72\pi \text{ cm}^2$.

- Um disco de cobre tem 80 cm de diâmetro. Determine a área deste disco.

R: Sendo o diâmetro $= 2r$, o raio do disco é de 40 cm. Assim, a área do disco é:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot 40^2 \Rightarrow A = 1.600\pi \text{ cm}^2.$$

- Um quadrado que tem $5\sqrt{2} \text{ cm}$ de lado está inscrito numa circunferência. Determine a área da região circular limitada por esta circunferência. R: 1

$= r\sqrt{2} \Rightarrow 5\sqrt{2} = r\sqrt{2} \Rightarrow r = 5 \text{ cm}$. $A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot 5^2 \Rightarrow A = 25\pi \text{ cm}^2$.

4. Qual é a área da região circular limitada por uma circunferência onde está inscrito um hexágono regular que tem 60 cm de perímetro?

R: Sendo 60 cm o perímetro, o lado do hexágono mede $\frac{60}{6} = 10$ cm, portanto o raio da

circunferência mede $\frac{10}{2} = 5$ cm.

6

circunferência mede 10 cm, e sua área é:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot 10^2 \Rightarrow A = 100\pi \text{ cm}^2.$$

5. Um círculo está inscrito num quadrado cujo perímetro é 48 cm. Determine a área do círculo.

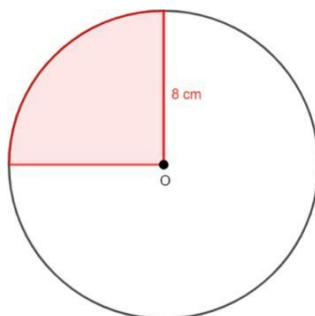
R: O lado do quadrado mede $\frac{48}{4}$ = 12 cm, que equivale ao diâmetro do círculo. Assim,

4

seu raio é 6 cm e a área é:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot 6^2 \Rightarrow A = 36\pi \text{ cm}^2.$$

6. Observe a figura, e responda:



a) A que fração do círculo corresponde a região colorida de vermelho?

R: $\frac{1}{4}$.

b) Qual é a área da região colorida de vermelho?

$$\text{R: } A = \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 8^2 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \cdot 64 \pi \Rightarrow A = 16\pi \text{ cm}^2$$

Lição 141 – Figuras espaciais

1. Calcule o volume de um cubo, sabendo que a medida da sua aresta é igual a 7 cm. R: $V=l^3 \Rightarrow V=7^3 \Rightarrow V=343 \text{ cm}^3$.

2. Calcule o volume de um cubo, sabendo que a medida da sua aresta é igual a 18 cm. R: $V=l^3 \Rightarrow V=18^3 \Rightarrow V=5.832 \text{ cm}^3$.

3. Calcule o volume de um cubo, sabendo que a medida da sua aresta é igual a 20 cm. R: $V=l^3 \Rightarrow V=20^3 \Rightarrow V=8.000 \text{ cm}^3$.

4. A soma das áreas dos lados de um cubo é igual a 864 cm^2 . Calcule o volume deste cubo.

R: Sabendo a área total do cubo, temos:

$$\begin{aligned} \text{Área total} &= \frac{864}{6} = l^2 & \Rightarrow l^2 &= 144 \Rightarrow l = 12 \text{ cm.} \\ 6l^2 &\Rightarrow \\ 864 &= 6l^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

Assim, tendo o valor do lado do cubo, seu volume é: $V=l^3 \Rightarrow V=12^3 \Rightarrow V=1.728 \text{ cm}^3$.

5. Um reservatório cilíndrico possui raio igual a 2 metros e altura de 10 metros. Qual é a quantidade de água que cabe neste reservatório em m^3 ?

R: $V = \pi r^2 h \Rightarrow V = 3,14 \cdot 2 \cdot 10 \Rightarrow V = 62,8 \text{ m}^3$.

6. Calcule o volume de um cilindro cuja área da base seja de 3 cm^2 e que tenha altura de 9 cm.

R: $V = A_B \cdot h \Rightarrow V = 3 \cdot 9 \Rightarrow V = 27 \text{ cm}^3$.

7. O raio do círculo da base mede 17 cm, e a altura mede 6 cm. Qual é o volume do cilindro, dado: $\pi=3,14$?

R: $V = \pi r^2 h \Rightarrow V = 3,14 \cdot 17 \cdot 6 \Rightarrow V = 320,28 \text{ cm}^3$.

8. Um clube adquiriu 2 tanques de água com formato cilíndrico. Sabe-se que ambos os tanques medem 6 m de altura. A base do primeiro tem 6 m de diâmetro, e o segundo tem 2 m de raio. Qual é o volume dos dois tanques?

R: O primeiro tanque tem 6 m de diâmetro, portanto 3 m de raio. Assim, seu volume é:

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = 3,14 \cdot 3 \cdot 6 \Rightarrow V = 56,52 \text{ m}^3.$$

O segundo tanque tem volume de:

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = 3,14 \cdot 2 \cdot 6 \Rightarrow V = 37,68 \text{ m}^3.$$

9. Calcule o volume de um bloco retangular com dimensões 40 cm, 10 cm e 20 cm.

$$\text{R: } V = abc \Rightarrow V = 40 \cdot 10 \cdot 20 \Rightarrow V = 8.000 \text{ cm}^3.$$

10. Calcule o volume de um bloco retangular com dimensões 4 cm, 5 cm e 6 cm.

$$\text{R: } V = abc \Rightarrow V = 4 \cdot 5 \cdot 6 \Rightarrow V = 120 \text{ cm}^3.$$

11. Calcule a área lateral do bloco retangular com dimensões 60 cm, 30 cm e 15 cm. **R:**

$$A_T = 2(ac + ab + bc) \Rightarrow A_T = 2(60 \cdot 15 + 60 \cdot 30 + 30 \cdot 15) \Rightarrow A_T = 2(900 + 1800 + 450) \Rightarrow A_T = 2 \cdot 3150 \Rightarrow A_T = 6300 \text{ cm}^2$$

12. Calcule a área total do bloco retangular com dimensões 15 cm, 20 cm e 25 cm.

R:

$$A_T = 2(ac + ab + bc) \Rightarrow A_T = 2(15 \cdot 25 + 15 \cdot 20 + 20 \cdot 25) \Rightarrow A_T = 2(375 + 300 + 500) \Rightarrow A_T = 2 \cdot 1175 \Rightarrow A_T = 2350 \text{ cm}^2$$

Lição 142 – Avaliação

1. Defina:

a) probabilidade;

R: A probabilidade é a chance de um evento específico acontecer dentro de todos os eventos possíveis.

b) espaço amostral;

R: Chamamos Espaço Amostral, e indicamos por Ω , um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

c) evento.

R: Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral (Ω).

2. Qual é o espaço amostral do lançamento de um dado? E qual é a probabilidade de a face com o número 5 cair voltada para cima?

R: O espaço amostral é: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. A probabilidade de cair a o número 5 para cima é de $\frac{1}{5}$.

5

3. Numa loja há quatro portas de entrada.

a) Quantas são as possibilidades de entrar por uma porta e sair por outra?

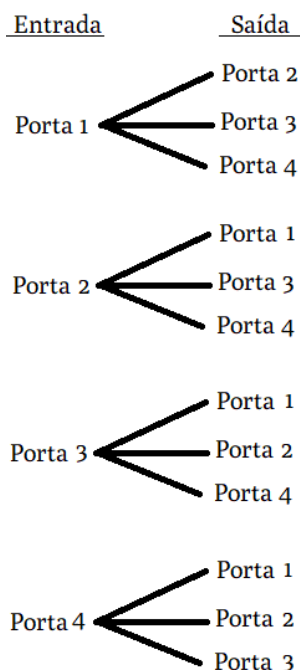
R: Ao entrar em uma das 4 opções de porta, necessariamente uma é excluída na hora de sair, a fim de que se entre por uma e saia por outra, dessa forma as possibilidades são $4 \cdot 3 = 12$ maneiras de se entrar por uma porta e sair por outra.

b) Quantas são as possibilidades de escolha das portas para entrar e sair da loja, podendo usar a mesma porta?

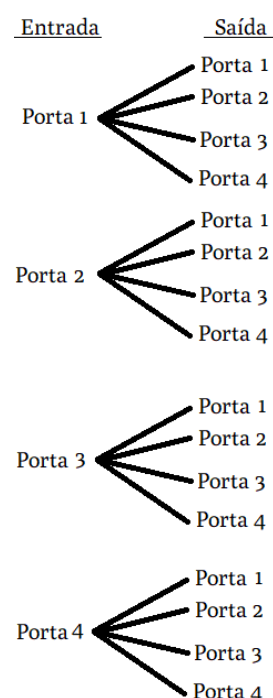
R: Podendo entrar por 4 portas e sair por 4, as possibilidades são $4 \cdot 4 = 16$ maneiras.

c) Construa a árvore de possibilidades dos dois itens anteriores.

R: Item a)



Item b)



4. Em uma sala do sexto ano, ao sortearmos uma pessoa ao acaso, a probabilidade de essa pessoa ser uma garota é de $\frac{4}{7}$. Se existem entre 55 e 60 alunos na sala, calcule quantos são os garotos.

R: Sendo $\frac{4}{7}$ de garotas, temos $\frac{3}{7}$ de garotos. Assim, a quantidade de garotos na sala é de $\frac{3}{7} \cdot 55 = 23,6$ a $\frac{3}{7} \cdot 60 = 25,7$, entretanto, como não existem frações de pessoas, e sendo 55 e 60 os limites mínimos e máximo, respectivamente, arredondamos para cima e baixo, respectivamente, assim, a quantidade de garotos na sala é de 24 a 25.

5. Sorteando um número natural de 1 a 30:

a) qual é a probabilidade de o número sorteado ser par?

R: $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

b) qual é a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 3?

R: $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

c) qual é a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 6?

R: $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

d) qual é a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 6, sabendo que ele é um número par?

R: $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

6. Observe a tabela a seguir, que mostra o número de anos de escolaridade, a partir do 1º ano do Ensino Fundamental, de um grupo de 40 funcionários de uma empresa:

Quantidade de funcionários por anos de escolaridade	
Anos de escolaridade	Frequência
9	5
13	7
15	12
16	16

a) Qual é a moda do número de anos de escolaridade nesta empresa?

R: 16 anos de escolaridade.

b) E a média aritmética?

$$\begin{aligned} \text{R: } M &= \frac{9 \cdot 5 + 13 \cdot 7 + 15 \cdot 12 + 16 \cdot 16}{40} = 14,3 \text{ anos de escolaridade.} \\ &= \underline{572} \end{aligned}$$

c) E a mediana?

R: 15 anos de escolaridade.

7. Em um triângulo retângulo, os catetos medem 7 cm e 24 cm. Nessas condições, determine:

a) a medida da hipotenusa;

$$\text{R: } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 7^2 + 24^2 \Rightarrow a^2 = 625 \Rightarrow a = 25 \text{ cm.}$$

b) a medida da altura relativa à hipotenusa

R: Pela primeira relação métrica no triângulo, temos que

$$b^2 = a \cdot n \Rightarrow 7^2 = 25 \cdot n \Rightarrow \frac{49}{25} = n \Rightarrow n = 1,96 \text{ cm.}$$

$$\text{E, temos também: } c^2 = a \cdot m \Rightarrow 24^2 = \Rightarrow m = 23,04 \text{ cm.}$$

$$25 \cdot m \Rightarrow m = \underline{576}$$

25

Dessa forma, a altura relativa à

$$\begin{aligned} \text{hipotenusa é: } h^2 &= m \cdot \sqrt{45,1584} \\ n \Rightarrow h^2 &= 23,04 \cdot 1,96 \\ \Rightarrow h &= \end{aligned}$$

$$= 6,72 \text{ cm.}$$

8. A diagonal de um quadrado mede $5\sqrt{2}$. Determine o perímetro do quadrado.

$$\text{R: } d = l\sqrt{2} \quad \sqrt{2} \Rightarrow 5\sqrt{2} \quad = l \quad \Rightarrow l = \quad = 5 \text{ cm.}$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Perímetro: } p = 4l \Rightarrow p = 4 \cdot 5 \Rightarrow p = 20 \text{ cm.}$$

9. Determine as medidas dos catetos de um triângulo retângulo sabendo que a hipotenusa mede 50 cm e que um dos ângulos agudos mede 37° . (Use: $\sin 37^\circ = 0,60$; $\cos 37^\circ = 0,80$; $\operatorname{tg} 37^\circ = 0,75$.)

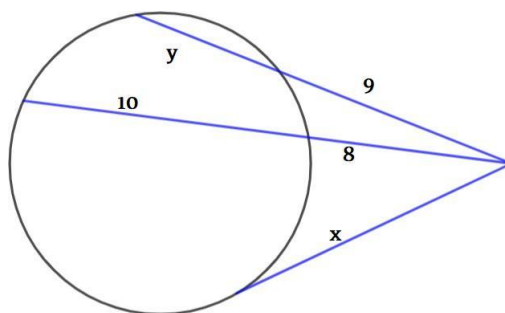
$$\text{R: } \sin 37^\circ = \frac{CO}{50} \Rightarrow 0,60 = \frac{a}{50} \Rightarrow a = 30 \text{ cm}$$

$$\text{H} \quad 50 \quad \Rightarrow b = 40 \text{ cm.}$$

$$\cos 37^\circ = \frac{CA}{50} \Rightarrow 0,80 = \frac{b}{50}$$

$$\text{H} \quad 50$$

10. Na figura seguinte, determine as medidas x e y indicadas.



$$\text{R: } 9y = 10 \cdot 8 \Rightarrow y = \frac{80}{9}$$

$$9$$

$$x^2 = 8 \cdot (10 + 8) \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = \sqrt{144} = 12$$

Lição 143 – Avaliação geral – Parte I

1. Defina os conjuntos numéricos estudados e dê exemplos de números que pertencem a estes conjuntos.

R: Conjunto dos Naturais (N) = Números inteiro e positivos. Exemplo: 1, 2, 3, ...

Conjunto dos Inteiro (Z) = Números naturais e inteiros negativos. Exemplo: -2, -7, 5, 3,

...

Conjunto dos Racionais (Q) = Números inteiros e decimais. Exemplo: 1; 0,5; 3,7; ...

Conjunto dos Irracionais (I) = Dízimas não periódicas. Exemplo: π .

Conjunto dos Reais (R) = Números Racionais e Irracionais. Exemplo: -7, 1543, 0,31;...

2. Transforme os números abaixo em notação científica:

a) 1.234.567.000

R: $1,234567 \cdot 10^9$

b) 0,0000000000009

R: $9,0 \cdot 10^{-12}$

c) 0,0000001240

R: $1,24 \cdot 10^{-7}$

d) 1.004,58

R: $1,00458 \cdot 10^3$

e) 4.560.000.000.000.000

R: $4,56 \cdot 10^{15}$

f) 0,8904

R: $8,904 \cdot 10^{-1}$

a) $200 + 500 + 8 - 45$

R: $10\sqrt{2} + 10\sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{5} \Rightarrow$
 $12\sqrt{2} + 7\sqrt{3}$

b) $12 + 75$

$2\ 147$

R: $2\ 3 + 5\ 3 = 7\ 3 = 1$
 $14\ 3 \quad 14\ 3 \quad 2$

c) $3\ 20 + 80 - 2\ 45$

8

R: $6\ 5 + 4\ 5 - 6\ 5 = 4\ 5 = 5$

$$\frac{\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}}{\sqrt{\quad}} - \frac{\sqrt{\quad}}{\sqrt{\quad}} - \sqrt{\quad}$$

3. Simplifique as expressões:

$$\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}$$

$$\frac{\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}}{\sqrt{\quad}}$$

$$\sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}$$

$$\frac{\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}}{8} - \frac{\sqrt{\quad}}{8} - \frac{\sqrt{\quad}}{2}$$

4. Calcule:

a) $4 + \sqrt{25} - 3$

R: $4 + 5 - 3 = 6$

b) $3 \cdot \sqrt{16} - \sqrt{100}$

R: $3 \cdot 4 - 10 = 2$

c) $\sqrt{\frac{4}{25}} + \frac{3}{5}$

R: $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{0}{\sqrt{3}} = 0$

d) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$

R: $\frac{1}{5}$

5

e) $\sqrt[4]{81} + \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{-1}$

R: $3 + 2 + (-1) = 4$

f) $\sqrt[3]{210400}$

R: $\sqrt[3]{\frac{8}{1}} = 9$

g) $3^0 - \sqrt[3]{0}$

R: $1 - 0 = 1$

h) $49^{\frac{1}{2}}$

R: $\sqrt{49} = 7$

i) $2\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$

R: $9\sqrt{3}$

j) $2\sqrt{12} - 4\sqrt{27} + \sqrt{48}$

R: $4\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$

k) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$

R: $\sqrt{100} = 10$

l) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$$\text{R: } \frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}} = 3$$

5. Calcule usando a regra dos produtos notáveis:

a) $(x + 3)^2$

R: $x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9$

b) $(x - 3)^2$

R: $x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9$

c) $(x + 3)(x - 3)$

R: $x^2 - 3^2 \Rightarrow x^2 - 9$

d) $(x + 3)(x - 3) - (x + 2)(x - 2)$

R: $x^2 - 3^2 - (x^2 - 2^2) \Rightarrow 9 - 4 = 5$

e) $(x + 3)^2 - (x - 3)^2$

R: $x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 6x + 9) \Rightarrow 12x$

6. Fatore as expressões a seguir:

a) $20x^2 + 25x$

R: $5x(4x + 5)$

b) $ax + ay - bx - by$

R: $a(x + y) - b(x + y) = (a - b)(x + y)$

c) $4m^3 - 6m^2$

R: $2m^2(2m - 3)$

d) $(a + 1)x + (a + 1)y$

R: $(a + 1)(x + y)$

e) $12 + 4a + 3b + ab$

R: $4(3 + a) + b(3 + a) = (3 + a)(4 + b)$

f) $100x^2 - 1$

R: $(10x + 1)(10x - 1)$

g) $25b^2 - 16$

R: $(5b + 4)(5b - 4)$

h) $x^2 - 6x + 9$

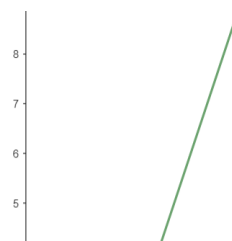
R: $(x - 3)^2$

i) $x^2 + 12x + 36$

R: $(x + 6)^2$

7. Construa o gráfico das seguintes funções e classifique-as em injetiva, sobrejetiva ou bijetiva:

a) $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$

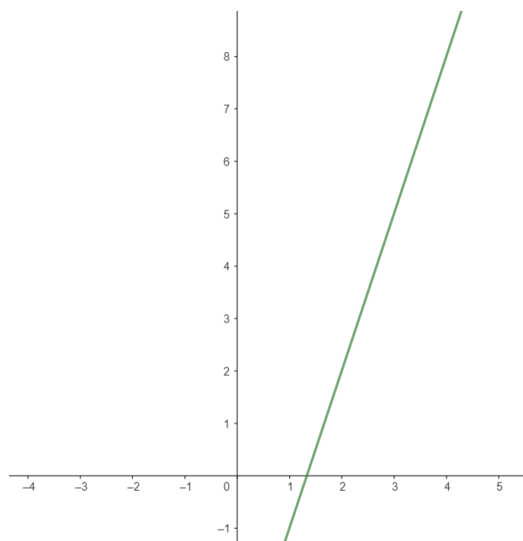


$$x \mapsto f(x) = 3x - 4$$

R: Função injetiva.

b) $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{-1, 2, 5, 8\}$
 $x \rightarrow f(x) = 3x - 4$

R: Função bijetiva.



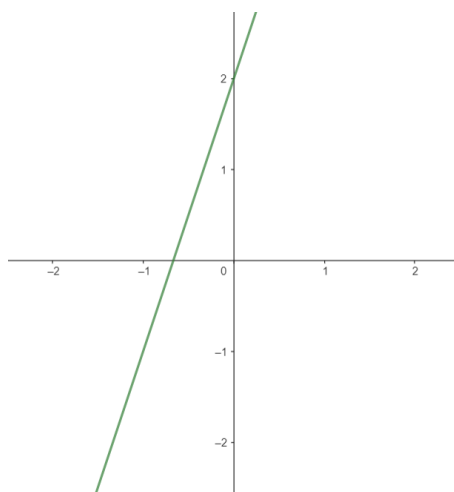
8. Classifique cada função como crescente, decrescente ou constante. Indique também qual é a taxa de variação, e o valor em que a reta intercepta o eixo Y e o eixo X. Depois, trace o gráfico de cada uma.

a) $f(x) = 3x + 2$

R: Crescente, Taxa de variação = 3, intercepta o eixo x em $x = -\frac{2}{3}$, e o eixo y em

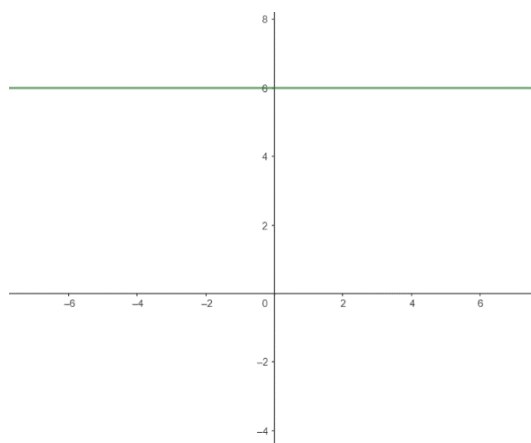
3

y = 2.



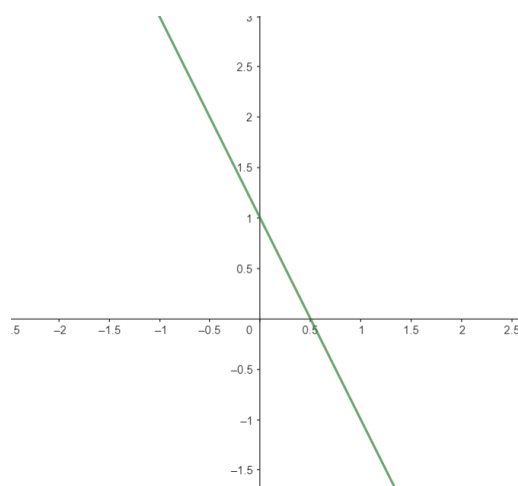
b) $f(x) = 6$

R: Constante, Taxa de variação = 0, não intercepta o eixo x, e intercepta o eixo y em y = 6.



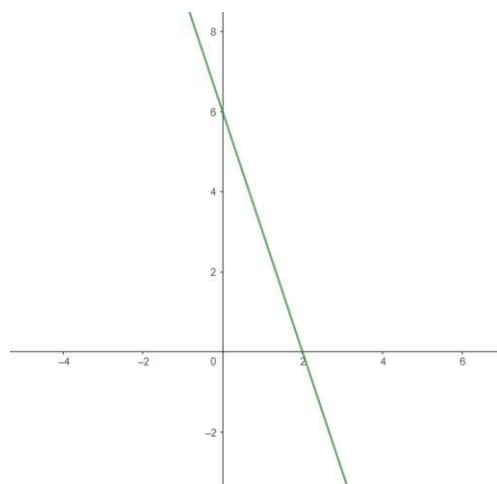
c) $f(x) = -2x + 1$

R: Decrescente, Taxa de variação = -2, intercepta o eixo x em $x = \frac{1}{2}$, e o eixo y em $y = 1$.



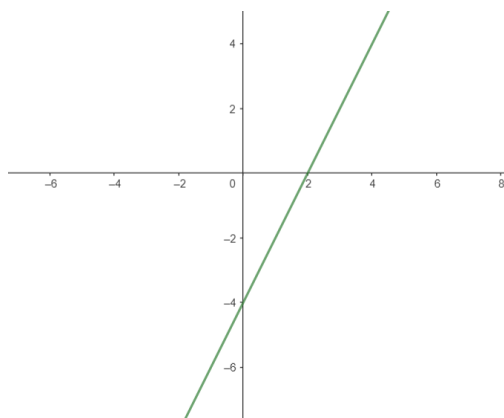
d) $f(x) = 6 - 3x$

R: Decrescente, Taxa de variação = -3, intercepta o eixo x em $x = 2$, e o eixo y em $y = 6$.



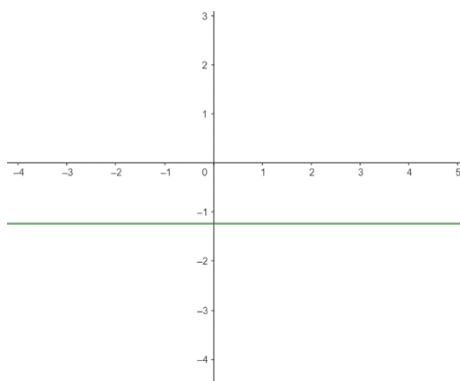
e) $f(x) = -4 + 2x$

R: Crescente, Taxa de variação = 2, intercepta o eixo x em $x = 2$, e o eixo y em $y = -4$.



f) $f(x) = 1 - \sqrt{5}$

R: Constante, Taxa de variação = 0, não intercepta o eixo x e intercepta o eixo y em $y = 1 - \sqrt{5}$.



9. Resolva as equações abaixo:

a) $6x^2 + 5x - 1 = 0$

$$\text{R: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(6)(-1)}}{2 \cdot (6)} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{12} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{12} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm 7}{12} \text{ ou } x = -1$$

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$

$$\text{R: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(16)}}{2 \cdot (1)} \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} \Rightarrow x = \frac{8 \pm 0}{2} \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow x = 8$$

$$c) 9y^2 - 24y + 16 = 0$$

$$R: y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow y = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(9)(16)}}{2 \cdot (9)} \Rightarrow y = \frac{24 \pm 18}{18} \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

2a

$$\begin{aligned} \text{d) } 4x^2 - 4x - 3 &= 0 & \Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(4)(-3)}}{2 \cdot (4)} & \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8} & \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{8} & \text{ou } x = -\frac{1}{2} \\ \text{R: } x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

2a

$$\begin{aligned} \text{e) } t^2 - t - 1 &= 0 & \Rightarrow t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2 \cdot (1)} & \Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} & \Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} & \text{ou } t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ \text{R: } t &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

2a

$$\begin{aligned} \text{f) } -x^2 + 11x - 28 &= 0 & \Rightarrow x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(-1)(-28)}}{2 \cdot (-1)} & \Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 112}}{-2} & \Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{9}}{-2} & \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = 7 \\ \text{R: } x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

2a

$$\begin{aligned} \text{g) } 4x^2 + 16x + 15 &= 0 & \Rightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4(4)(15)}}{2 \cdot (4)} & \Rightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 240}}{8} & \Rightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{16}}{8} & \text{ou } x = -\frac{5}{4} \\ \text{R: } x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

2a

$$\text{h) } 8x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$R: x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a} \Rightarrow x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(8)(3)}}{2 \cdot (8)} \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{16} \Rightarrow x = \frac{10 \pm 2}{16} \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

2a

i) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{12} = 0$

$$R: x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a} \Rightarrow x = \frac{-\left(\frac{1}{3}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{12}\right)}}{2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)} \Rightarrow x = \frac{-\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{3}}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3} \text{ ou } -\frac{1}{2}$$

2a

$$\Rightarrow x =$$

2a

$$x = -1$$

j) $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{4}{9} = 0$

$$R: x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a} \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{9}\right)}}{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{9}}}{1} \Rightarrow x = \frac{10}{9} \text{ ou } x = \frac{8}{9}$$

2a

10. Sem resolver, dê a soma e o produto das raízes e de cada equação.

a) $3x^2 + 5x + 2 = 0$

$$R: S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{5}{3}$$

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{2}{3}$$

e) $-2x^2 - 11x - 3 = 0$

$$R: S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{(-11)}{(-2)} = \frac{11}{2}$$

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{(-3)}{(-2)} = \frac{3}{2}$$

b) $2x^2 + 11x - 2 = 0$

$$R: S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{11}{(-2)} = \frac{11}{2}$$

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{2}{(-2)} = -1$$

f) $11x^2 - 7 = 0$

$$R: S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{0}{(-7)} = 0$$

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{11}{(-7)}$$

c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

$$R: S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{(-6)}{9} = \frac{2}{3}$$

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{1}{9}$$

g) $8x^2 + 5x = 0$

$$R: S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{5}{8}$$

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{0}{0} = 0$$

d) $7x^2 - 5x - 3 = 0$

$$R: S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{(-5)}{7} = \frac{5}{7}$$

h) $x + 1 = 2x^2$

$$R: S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{1}{2}$$

$$(-2) = \underline{1}^2$$

$$P = \underline{c} \quad \Rightarrow P = \underline{(-3)} \quad 7 \quad P = \underline{c} \quad \Rightarrow P = \underline{\frac{1}{(-2)}}$$

Lição 144 – Avaliação geral – Parte II

1. Defina:

a) Ângulo

R: Ângulo é a união de todos os pontos de uma região delimitada por duas semirretas de mesma origem.

b) Retas perpendiculares

R: Retas que formam ângulos de 90° na intersecção.

c) Ângulos adjacentes

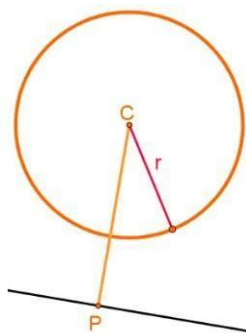
R: Dois ângulos α e β são ditos adjacentes se um de seus lados é comum e se não possuem pontos internos em comum.

d) Bissetriz

R: Bissetriz é uma semirreta que divide o ângulo em dois novos ângulos congruentes.

2. Defina com palavras e com desenho as três posições relativas entre uma reta e uma circunferência.

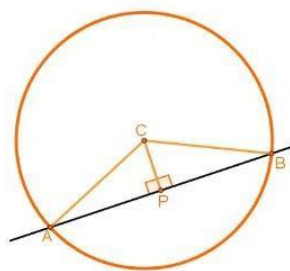
R: Reta externa à circunferência: A reta não possui ponto em comum com a circunferência.



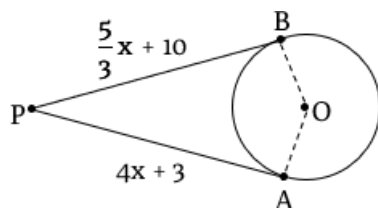
Reta tangente à circunferência: A reta possui um ponto em comum com a circunferência.



Reta secante à circunferência: A reta possui dois pontos em comum com a circunferência.



3. Observe a figura e determine:



a) a medida x ;

$$\text{R: } 4x + 3 = \frac{5}{3}x + 10 \Rightarrow 4x - \frac{5}{3}x = 10 - 3 \Rightarrow \frac{12x - 5x}{3} = 7 \Rightarrow \frac{7x}{3} = 7 \Rightarrow 7x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{7} \Rightarrow x = 3.$$

b) a medida do segmento PA;

$$\text{R: } PA = 4x + 3 \Rightarrow PA = 4 \cdot 3 + 3 \Rightarrow PA = 12 + 3 \Rightarrow PA = 15.$$

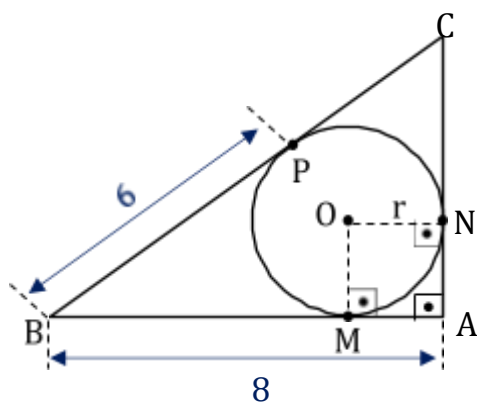
c) a medida do segmento PB;

$$\text{R: } PB = \frac{5}{3}x + 10 \Rightarrow PB = \frac{5}{3} \cdot 3 + 10 \Rightarrow PB = 5 + 10 \Rightarrow PB = 15.$$

d) o perímetro do quadrilátero PAOB, se o comprimento do raio é 7 cm.

$$\text{R: Perímetro} = PA + PB + BO + AO \Rightarrow p = 15 + 15 + 7 + 7 \Rightarrow p = 44 \text{ cm.}$$

4. Considerando a figura, determine:



a) o comprimento r do raio da circunferência;

R: Pela propriedade da semelhança de triângulos, temos que o segmento $BP=BM$, assim, o segmento MA vale $8 - 6 = 2$. Dessa maneira, sendo $MA = ON = r$, $r = 2$.

b) o perímetro do quadrado $ANOM$;

R: O perímetro de um quadrado é quatro vezes o lado, assim, $p = 4 \cdot 2 \Rightarrow p = 8$.

c) a expressão algébrica que representa o perímetro do triângulo ABC , se a medida do segmento PC é a .

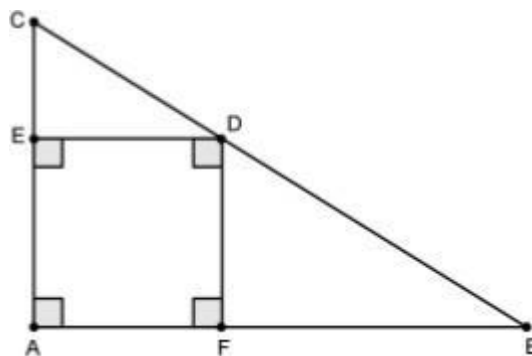
R: Sendo $PC=a$ e $CN=PC$, $CN=a$. Vale também o quadrado $ANOM$, onde $NA=MA=2$. Assim, o perímetro do triângulo ABC é:

$$p = 6 + 8 + 2 + 2a \Rightarrow p = 2a + 18.$$

d) o perímetro do quadrilátero $BMOP$.

$$R: p = BP + BM + 2r \Rightarrow p = 6 + 6 + 2 \cdot 2 \Rightarrow p = 16.$$

5. Na figura abaixo, temos $AC = 4$ e $AB = 6$. Determine o perímetro do quadrado $AEDF$.



R: Adotando o lado do quadrado como x , temos que o segmento $CE = 4 - x$. Assim, temos dois triângulos, o CED e o ABC , podendo aplicar a semelhança entre eles. Dessa forma:

$$\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{ED} \Rightarrow$$

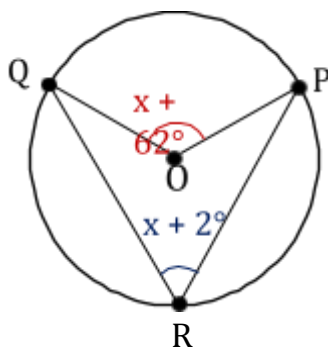
$$\frac{4}{4 - x} = \frac{6}{x}$$

6

$$\Rightarrow 4x = 24 - 6x \Rightarrow 10x = 24 \Rightarrow x = 2,4.$$

Portanto, o perímetro do quadrado = $4x = 4 \cdot 2,4 = 9,6$

6. Qual é a medida do ângulo inscrito na figura a seguir



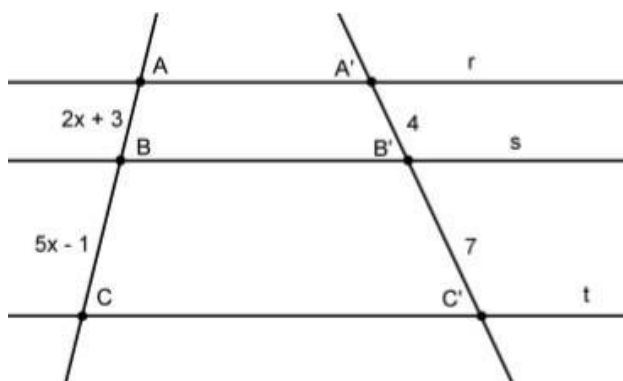
R: Sendo o ângulo QRP metade do ângulo QOP, temos a igualdade:

$$x + 2^\circ = \frac{x + 62^\circ}{2} \quad \begin{matrix} x \\ = 58^\circ. \end{matrix} \quad 2x - x = 29^\circ \Rightarrow x = 29^\circ \cdot 2 \Rightarrow x$$

$$\Rightarrow x - \frac{62^\circ}{2} = \frac{29^\circ \cdot 2}{2} \Rightarrow x - 31^\circ = 29^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$$

Assim, o ângulo inscrito QRP = $58^\circ + 2^\circ = 60^\circ$.

7. Enuncie o Teorema de Tales e determine o valor de x nas figuras abaixo sabendo que $r \parallel s \parallel t$.



R: A intersecção de um feixe de retas paralelas por duas retas transversais forma segmentos proporcionais. Dessa forma:

$$\frac{2x + 3}{5x - 1} = \frac{4}{7} \Rightarrow 7(2x + 3) = 4(5x - 1) \Rightarrow 14x + 21 = 20x - 4 \Rightarrow 21 + 4 = 20x - 14x \Rightarrow 6x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{6}$$

$$\begin{aligned} R: h &= \frac{L \sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3 \sqrt{3} = 13 \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} > 3 \sqrt{3} \cdot 2 = 1 \Rightarrow l = 6 \text{ cm.} \end{aligned}$$

$$\text{Perímetro} = 3L \Rightarrow p = 3 \cdot 6 \Rightarrow p = 18 \text{ cm.}$$

10. Simplifique a expressão $\sin x \cdot \cos^2 x - \sin x$.

R: Evidenciando $\sin x$, temos: $\sin x(\cos^2 x - 1)$ e, pela relação fundamental da trigonometria: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$.

Portanto,

$$\sin x \cdot \cos^2 x - \sin x = \sin x(\cos^2 x - 1) = \sin x(-\sin^2 x) = -\sin^3 x$$