GABARITO DE MATEMÁTICA

SUMÁRIO

Volume 1

Capítulo 1

1)

a) Santo Agostinho, Santo Isidoro de Sevilha, São Jerônimo.

b) Santo Agostinho diz que os números são imutáveis, que não perdem sua essência, independentemente de quem os utiliza e de como os utiliza.

c) Para Santo Agostinho o número 153 significa 17. Significa 17 porque a soma de 1 + 2 + 3 + ... + 17 resulta em 153. Para o Santo isso é de grande significado porque a Igreja sempre creu que aqueles 153 peixes pescados pela rede representavam os homens eleitos, aqueles a quem os discípulos pescariam para o céu. Mas como são esses homens? São todos aqueles que vivem conforme o número 17, isto é, 10 + 7: conforme os 10 Mandamentos e os 7 Dons do Santo Espírito!

d) O objetivo da matemática é permitir que, quem a estuda, chegue a adquirir tal perfeição neste conhecimento que possa ser introduzido aos estudos da metafísica, que assim como a matemática, trata de coisas abstratas. Também faz com que o estudante percebendo a imutabilidade dos números conclua que, por exemplo, também a moral é imutável, também Deus é imutável, também a Igreja é imutável. A matemática é um caminho para conhecer Nosso Senhor!

e) Para que os estudos tragam proveito às almas é preciso ter intimidade com Nosso Senhor Jesus Cristo, pedindo-Lhe que Ele próprio ensine tudo. Além disso, humildade e dedicação!

2) Por hipótese temos que n^2 é ímpar. Para provarmos por Absurdo, vamos tomar n par, isto é $n = 2k$. Então

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2.2k^2 = par$$

Logo, é um Absurdo, pois por hipótese temos que n^2 é ímpar e chegamos que n^2 é par.

Portanto, se n é inteiro e n^2 é ímpar então n é ímpar como queríamos demonstrar.

3) Axiomas

Noções – comum

Da tradição matemática em expressar o que de verdade, valor, princípio; da norma culta.

Axioma é uma (verdade assumida do depósito de) noção comum declarada explicitamente sob forma de sentença verdadeira.

Na inteligência, atua no nível da Noção, resultado de coisa evidente, cuja evidência é suficiente para aceitação da verdade.

Administração: é para afirmação da verdade.

Necessidade: de dupla necessidade; para construção de teoria para aceitação de teorema.

Conflito: só pode ser recusada pela vontade.

4) Teoremas

Conceitos formais da verdade.

Da tradição em matemática, próprio de expressão, normativo.

Teoremas é de noção transmitida pelo conhecimento sob forma de conclusão da verdade; o conhecimento é de pouca ou nenhuma evidência; é auxiliada por axioma.

Na inteligência, atua no nível do Entendimento: "eu vi, eu entendi."

Administração: é para afirmação de grande importância.

Próprio:

- Proposição é um teorema simples em matéria de pouca matemática.
- Lema é um teorema preliminar
- Corolário é como chamamos a consequência de um teorema.

Axiomas: são teses de apoio para um teorema.

5) Demonstração Matemáticas

Demonstração é modalidade de prova.

Prova é o de efeito irresistível à vontade e infalível na inteligência.

Demonstra-se a verdade e seu oposto excluído, a falsidade.

Prova direta e indireta.

Diretamente provamos que é verdadeira usando axiomas.

Indiretamente por teses (coleção de axiomas), teoremas e construções lógicas.

Destas últimas, tem-se: por indução, por contradição, por contraposição, por exaustão.

6) Resumo sobre números

Discute-se assim: sua essência, substância, registro e modelos.

A essência de número é a ideia pura, intelectual, de acesso direto na inteligência, não podendo ser pelos sentidos. Não sendo material, número não tem forma.

A substância de um número é quanto a natureza da ideia: a primeira é uma ideia de quantidade; substância de quantidade, de que o número está sujeito a contagem.

Em sentido próprio, a forma não é do número, mas sim do registro do número, que chamamos NUMERAL. O que produz e sabe matemática diz sem prejuízo "número" e entende tratar-se de numeral. É necessário e suficiente esse entendimento. O emprego correto da palavra está proibido sob pena de espírito pedante e escrupulosa.

Números temos 6 modelos que são os 6 conjuntos numéricos. Assim, temos:

O modelo de número **natural**: ideia pura de quantidade;

Inteiro: ideia pura de quantidade e distância;

Racional: quantidade, distância, que resulta de comparação;

Irracional, real, complexo.

7) Se n é inteiro e seu quadrado é ímpar, então n também é ímpar.

Por hipótese, supomos que n é par.

Ser par é ser múltiplo de 2: $n = 2K, K \in Z$

Ou seja: $n^2 = 2K + 1$, $K \in Z$

Sendo n = 2K par

$n^2 = (2K)^2$

$n^2 = (2K)^2$

$n^2 = 4K^2$

$n^2 = 2(2K^2)$

K é inteiro e $2K^2$ é par qualquer que seja K^2 e $2(2K^2)$ é também par pois é múltiplo de 2. Logo, é absurdo n ser par pois sendo seu quadrado ímpar, n é ímpar.

Capítulo 2

1) $A = \{v, a, t, i, c, n, o\}$

$B = \{verde, amarelo, azul, branco\}$

$C = \{ser, movimento, verdade\}$

$D = \{2, 3\}$

2) $A = \{x \,/\, x \in \mathbb{N}\}$

$B = \{x \,/ -3 \leq x \leq 5\}$

$C = \{x \,/\, x \text{ são os conselhos evangélicos}\}$

$D = \{x \,/\, x \text{ são as virtudes teologais}\}$

$E = \{x \,/\, x \text{ são os múltiplos de } 10\}$

3)

a) Conjunto Unitário

b) Conjunto Vazio

c) Conjunto Unitário

d) Conjunto Vazio

e) Conjunto Vazio

4)

a) V.

b) F, pois $B = \{m, n, o, s, t, u, v\}$.

c) V.

d) V.

e) F, apenas dois elementos são exclusivos de A que são $\{r, q\}$.

f) V.

g) V.

h) V.

i) F, pois o número de subconjuntos de A é igual a 2^5 elementos por conta de passar possuir 5 elementos.

j) V.

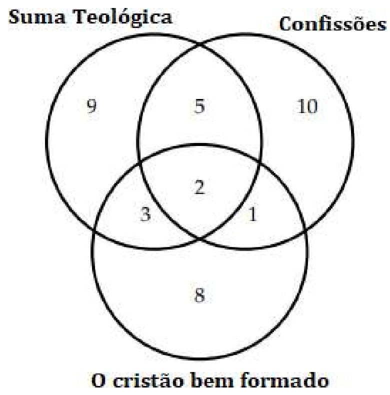
k) V.

l) V.

m) V.

5)

a)



b) 38 pessoas na família de José

c) $\frac{8}{38} = \frac{4}{19}$

d) $\frac{20}{38} = \frac{10}{19}$ ou $1 - \frac{18}{38} = \frac{10}{19}$

6)

a) V, pois $1 \in A$, $1 \in D$, $2 \in A$ e $1 \in D$.

b) F, pois $1 \in A$ e $1 \notin B$.

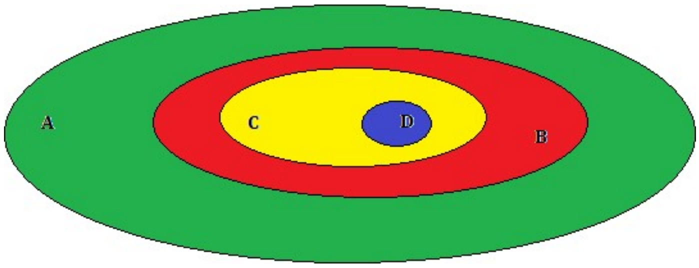
c) F, pois $2 \in B$ e $2 \notin C$.

d) V, pois $2 \in B$, $2 \in D$, $3 \in B$ e $3 \in D$.

e) F, pois $2 \in D$ e $2 \notin C$.

f) V, pois $2 \in A$, $2 \notin C$.

7)



8) P(A) = {{∅}, {b}, {e}, {n}, {t}, {o}, {b, e}, {b, n}, {b, t}, {b, o}, {e, n}, {e, t}, {e, o}, {n, t}, {n, o}, {t, o}, {b, e, n}, {b, e, t}, {b, e, o}, {b, n, t}, {b, n, o}, {b, t, o}, {e, n, t}, {e, n, o}, {e, t, o}, {n, t, o}, {b, e, n, t}, {b, e, n, o}, {b, e, t, o}, {b, n, t, o}, {e, n, t, o}, {b, e, n, t, o}}.

9)

a) $A \cup B = \{a, b, c, d\}$

b) $A \cup C = \{a, b, c, e\}$

c) $B \cup C = \{c, d, e\}$

d) $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e\}$

10)

a) $A \cap B = \{b, c, d\}$

b) $A \cap C = \{c\}$

c) $B \cap C = \{c, e\}$

d) $A \cap B \cap C = \{c\}$

11) Dica: $x \in A \Rightarrow x \in A \;\; ou \;\; x \in B$

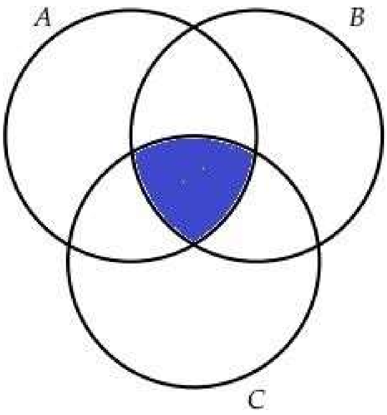
12) Dica: $x \in (A \cap B) \Rightarrow (x \in A \;\; e \;\; x \in B) \Rightarrow x \in A$

13) $X = \{1, 2\}$

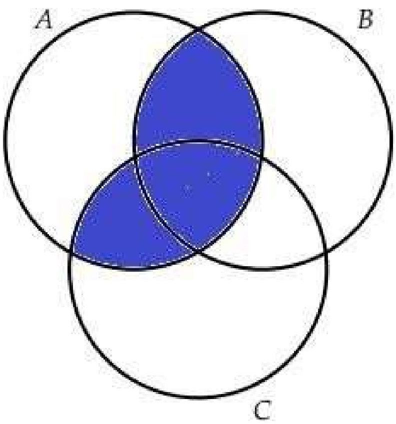
14) $C = \{2, 5, 6, 7, 9, 10\}$

15)

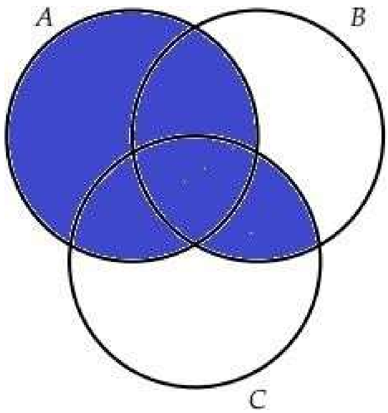
a)



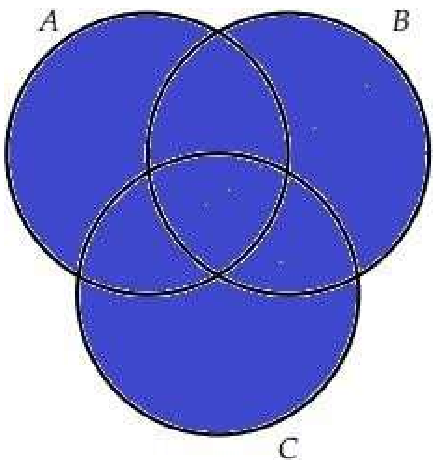
b)



c)



d)



16)

a) $\{a, b\}$

b) $\{e, f, g\}$

c) $\{b\}$

d) $\{a, b\}$

e) $\{a, b, c\}$

f) $\{a, c, e, f, g\}$

17)

a) 500 pessoas

b) 61 pessoas

c) 257 pessoas

d) 84 pessoas

Capítulo 3

1) 14 elementos.

2) $B = \mathbb{N}^*$.

3)

a) V

b) F

c) V

d) V

e) F

f) F

g) V

h) V

i) V

j) V

k) V

l) V

m) V

n) V

o) V

p) F

q) V

r) F

s) F

t) V

u) V

v) V

w) V

x) V

y) F

z) F

aa) V

bb) V

cc) V

dd) V

4) $0{,}4 = \frac{2}{5}$

$0{,}333\ldots = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$0{,}222\ldots = \frac{2}{9}$

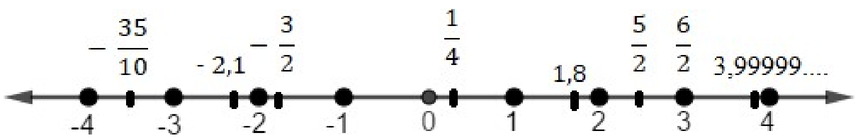
$0{,}424242\ldots = \frac{42}{99}$

$5{,}4222\ldots = \frac{244}{45}$

$5{,}423423423\ldots = \frac{602}{111}$

5) $\frac{1}{4} < \frac{10}{12} < \frac{14}{16} < \frac{17}{19} < \frac{47}{48} < 1$

6)



7)

a) 1

b) 2

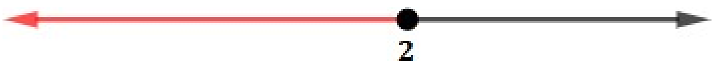
8) Note que $\mathbf{4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2}$.

9) Demonstração na Apostila.

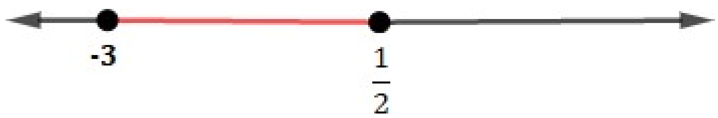
10)

a)

b)

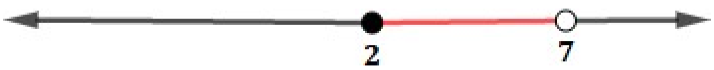


c)



d)

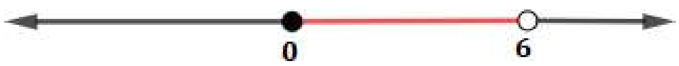
e)



f)

g)

h)



11)

a) $A \cup B \cup C =]-\infty, 6]$

b) $A \cap B \cap C =]-5, 2]$

c) $(A \cup B) \cap C = [-6, 2]$

d) $A \cap (B \cup C) =]-5, 2]$

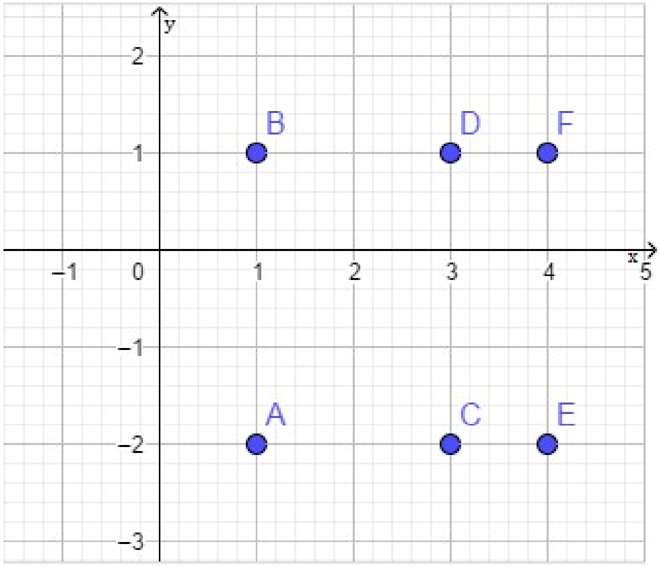
12) Sim.

Volume 2

Capítulo 4

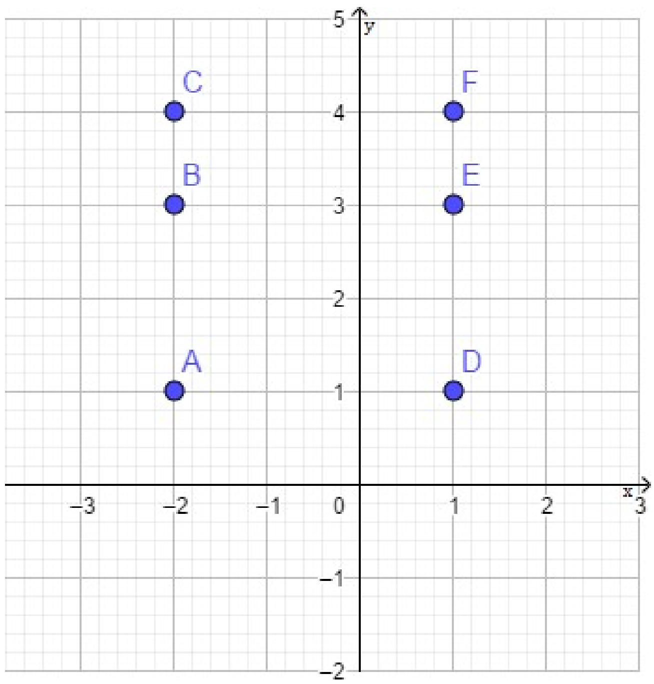
1)

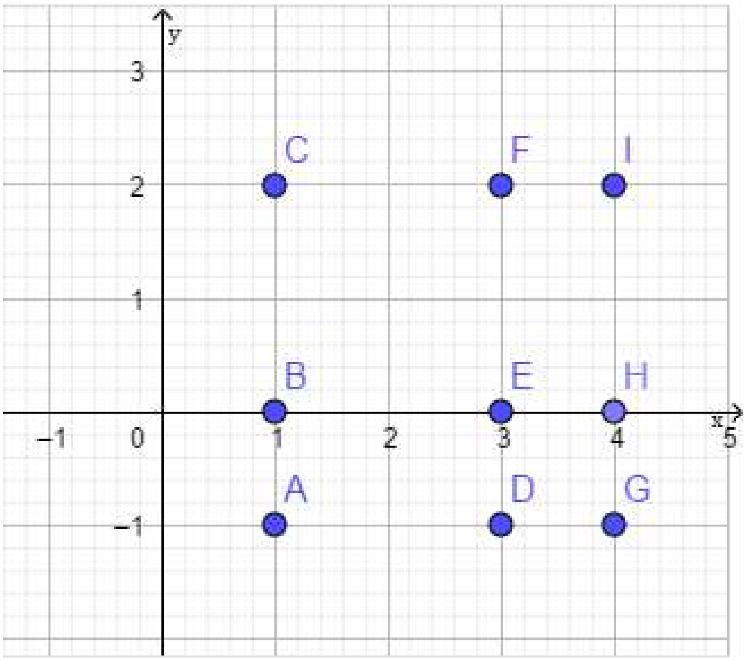
a) $A \; x \; B = \{(1,-2),(1,1),(3,-2),(3,1),(4,-2),(4,1)\}$



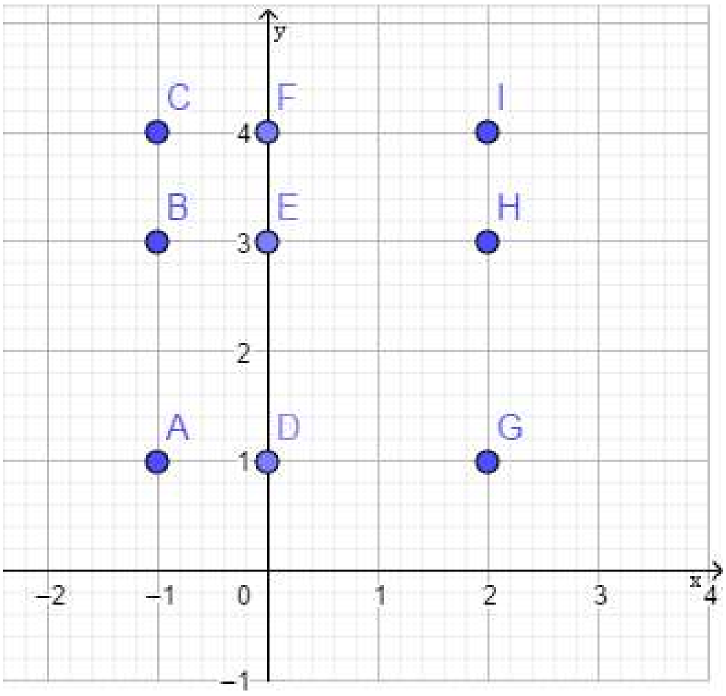
b) $B \; x \; A = \{(-2,1),(-2,3),(-2,4),(1,1),(1,3),(1,4)\}$

c) $A \; x \; C = \{(1,-1),(1,0),(1,2),(3,-1),(3,0),(3,2),(4,-1),(4,0),(4,2)\}$



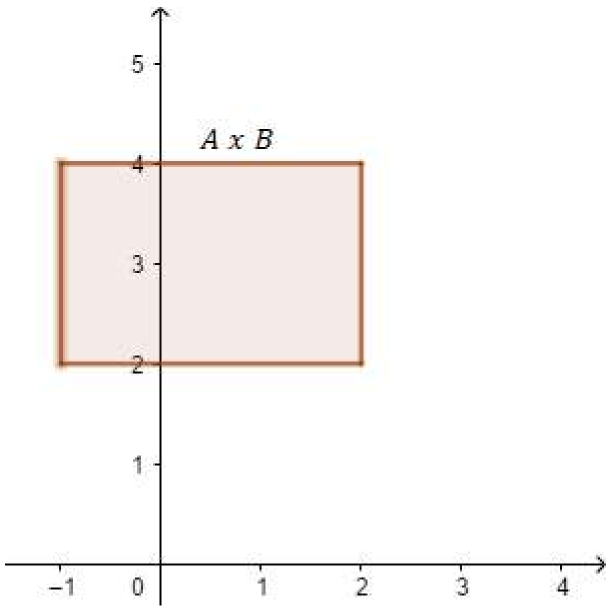


d) $C\ x\ A = \{(-1, 1), (-1, 3), (-1, 4), (0, 1), (0, 3), (0, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\}$

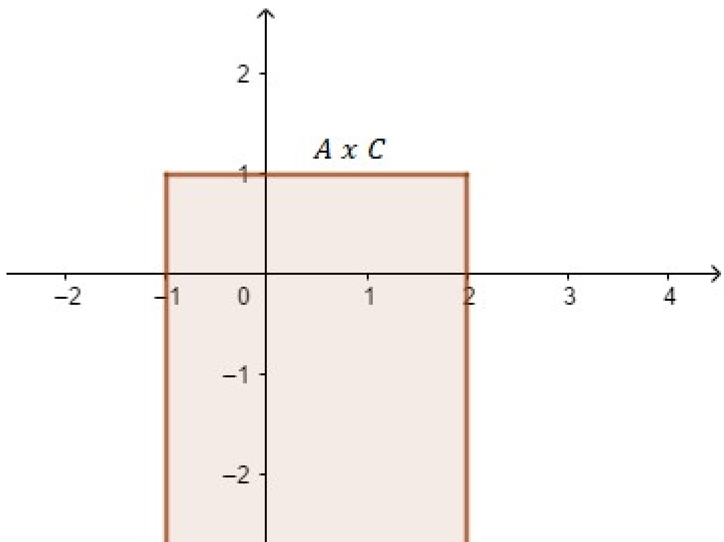


2)

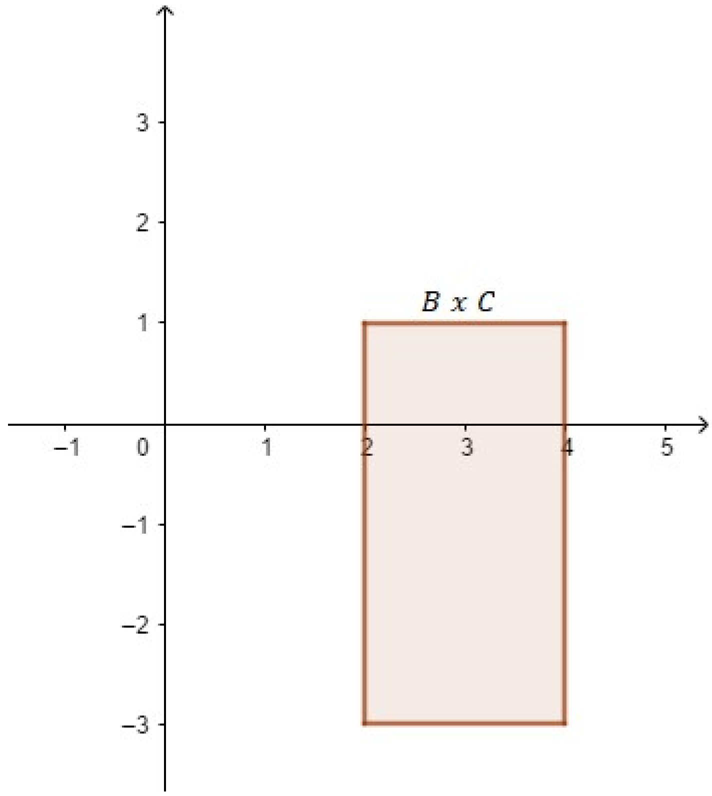
a)



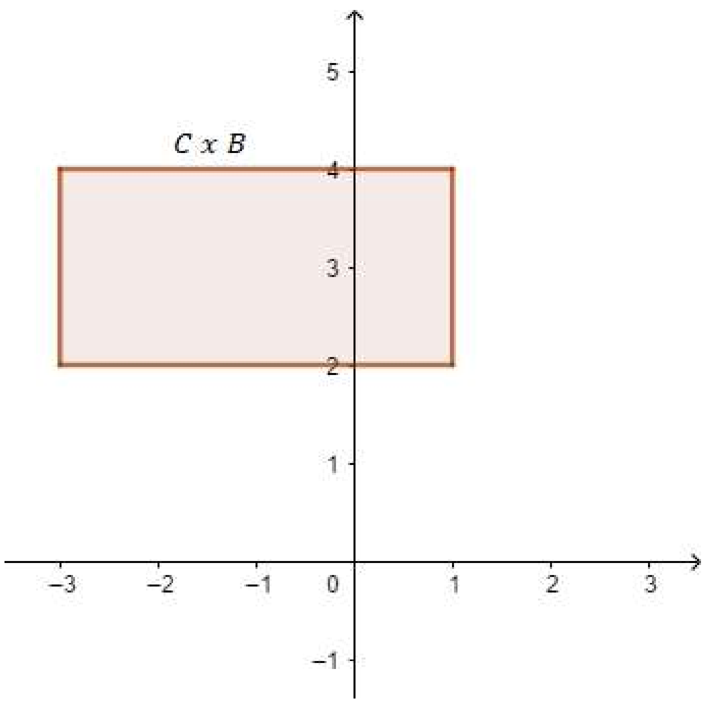
b)



c)



d)



Capítulo 5

1)

a) $Domínio: x = \{3, 4, 5, 6\}$.

b) $Im(f) = \{1, 3, 7\}$.

c) $f(4) = 1$.

d) $y = 7$.

e) $x = 6$.

f) $x = 3$ ou $x = 4$.

g) $f(x) = 3$.

h) $y = 1$.

i) $x = 5$.

2)

a) **Função injetora**.

Domínio: $A = \{2, 3, 4, 5\}$

Contradomínio: $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Imagem: $Im(f) = \{0, 1, 2, 3\}$

b) Não é uma função.

c) **Função sobrejetora**.

Domínio: $A = \{-1, 0, 1\}$.

Contradomínio: $B = \{0, 1\}$.

Imagem: $Im(f) = \{0, 1\}$.

d) **Função bijetora**.

Domínio: $A = \{1, 3, 4\}$.

Contradomínio: $B = \{2, 6, 8\}$.

Imagem: $Im(f) = \{2, 6, 8\}$.

e) **Não é uma função**.

f) **Nem injetora, nem sobrejetora.**

Domínio: $A = \{2, 5, 10, 20\}$

Contradomínio: $B = \{0, 1, 2\}$

Imagem: $Im(f) = \{0\}$

3)

a)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 + 3 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 10 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{2} \end{aligned}$$

4)

a) $f(-1) = -10$

b) $f(3) = 18$

c) $f(0) = -3$

d) $f(\frac{1}{7}) = -2$

5)

a) $f(1) = 2$

b) $f(-3) = -2$

c) $f(0) = -2$

d) $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{19}{16}$

e) $f(\sqrt{5}) = 3 + 3\sqrt{5}$

f) $f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{32}{9}$

6)

a) $\sqrt{6} + 3$

b) $\sqrt{7} - 3 + 3 = \sqrt{7}$

c) 2

d) 2

e) $\sqrt{5} + 3$

f) 2

7) Precisamos descobrir o valor de x tal que $f(x) = -\frac{3}{4}$, então temos que

$$\frac{2x-3}{5} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(2x-3) = -3 \,.\, 5 \Leftrightarrow 8x - 12 = -15 \Leftrightarrow 8x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{8}$$

Portanto,

$$x = \frac{-3}{8}$$

8) $f(1) = 5$.

9)

a) $D = \mathbb{R}$

b) $D = \mathbb{R}$

c) $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 2\}$

e) $D = \mathbb{R} - \{2, 2\}$

f) $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > -1\}$

g) $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -2\}$

h) $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq \frac{3}{5}\}$

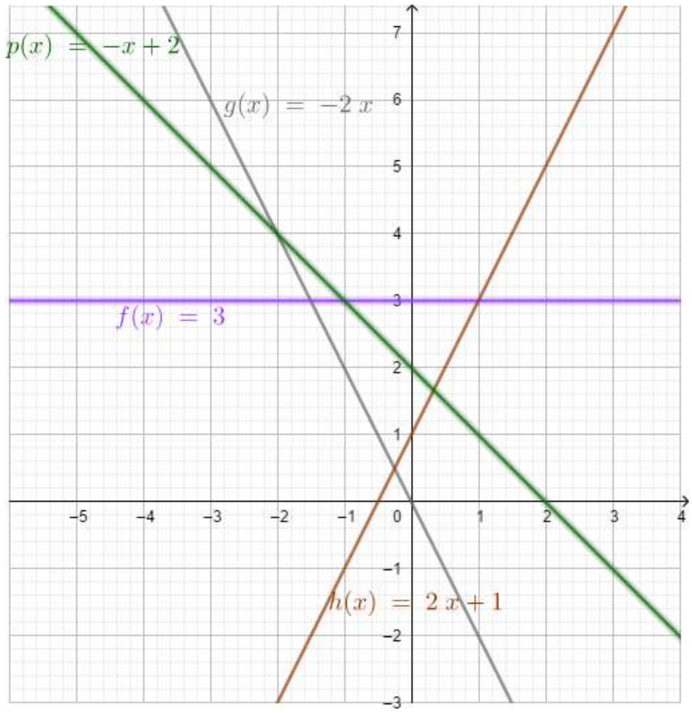
i) $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -2 \;\; e \;\; x \neq 2\}$

j) $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 \geq x \;\; ou \;\; x \geq 2\}$

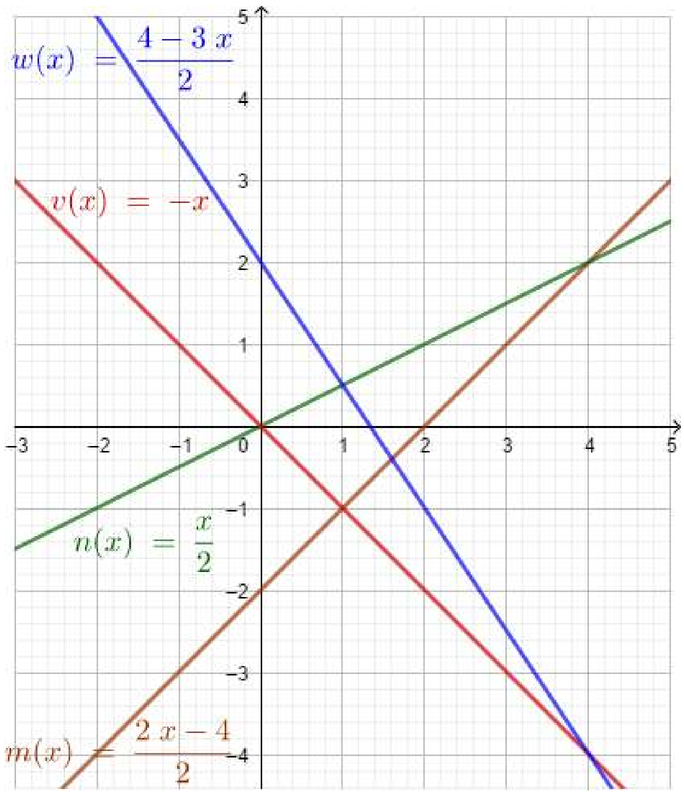
10) Não são iguais, pois para $x < 0$ temos $\sqrt{2} \neq x$.

Capítulo 6

1) Representação gráfica da $f(x) = 3$, $g(x) = -2x$, $h(x) = 2x + 1$ e $p(x) = -x + 2$.

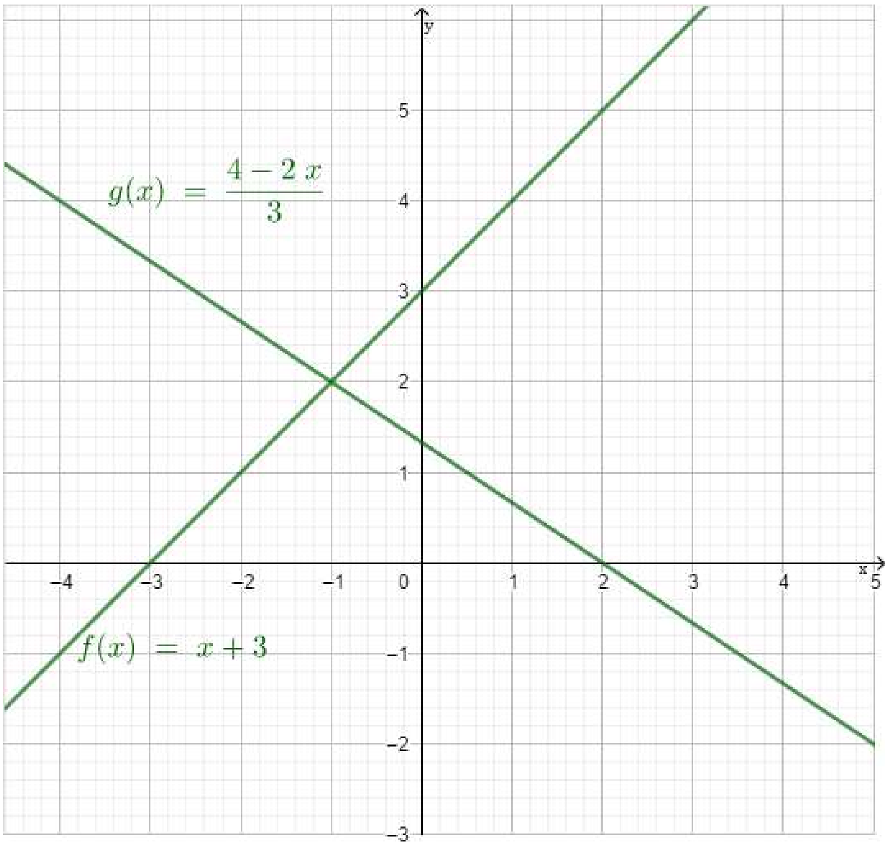


Representação gráfica da $m(x) = \frac{2x-4}{2}$, $n(x) = \frac{x}{2}$, $v(x) = -x$ e $w(x) = \frac{4-3x}{2}$.

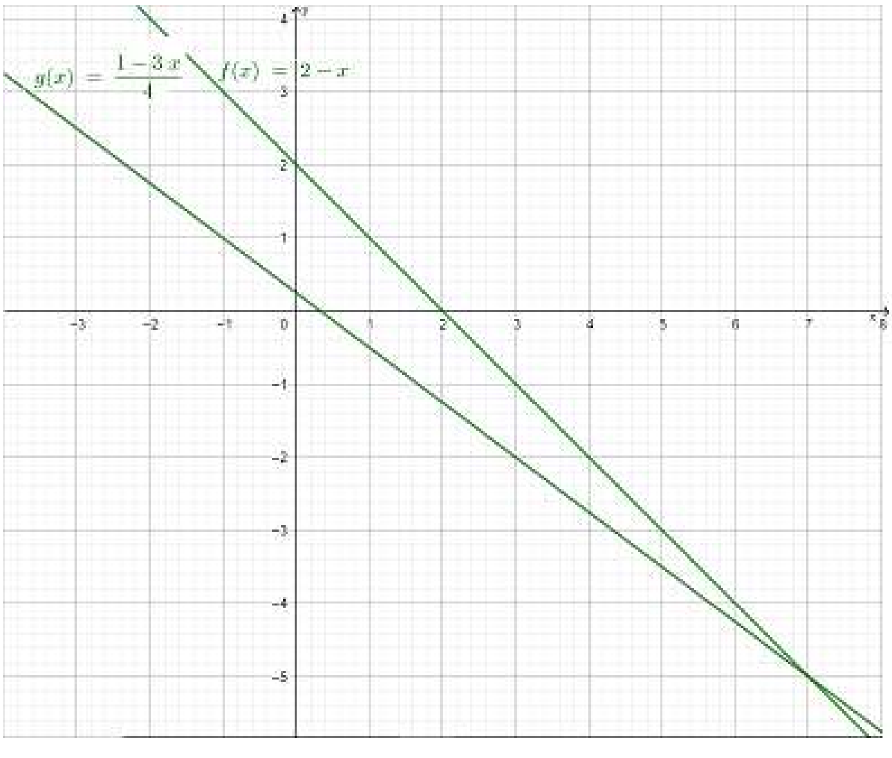


2)

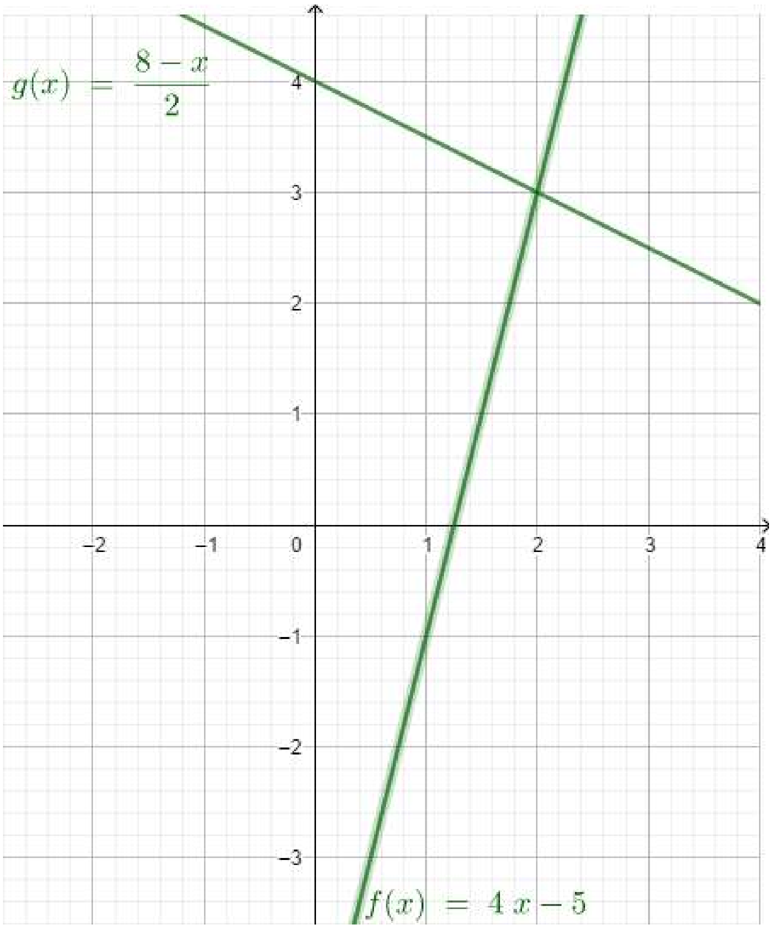
a) $x = -1$ e $y = 2 \Leftrightarrow (-1, 2)$



b) $x = 7$ e $y = -5 \Leftrightarrow (7, -5)$



c) $x = 2$ e $y = 3 \Leftrightarrow (2, 3)$



3) Monte um sistema utilizando os pares ordenados: $(3, 1)$ e $(-1, -2)$ tal que

$(3, 1)$ pertence à reta $y = ax + b$ então temos que $1 = 3a + b$

$(-1, -2)$ pertence à reta $y = ax + b$ então temos que $-2 = -a + b$

Com isso,

$$\begin{cases} 3a + b = 1 \\ -a + b = -2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos que $a = \frac{3}{4}$ e $b = \frac{-5}{4}$.

Com isso, a **Equação da Reta:** $f(x) = \frac{3x - 5}{4}$

4) Equação da Reta: $f(x) = 2x + 1$.

5) Equação da Reta: $f(x) = \frac{3}{2}x + 4$.

6)

a) Crescente

b) Decrescente

c) Decrescente

d) Crescente

e) Decrescente

f) Crescente

7)

a) $\boldsymbol{Eixo\ X}$: $(-3, 0)$

$\boldsymbol{Eixo\ Y}$: $(0, 3)$

b) $\boldsymbol{Eixo\ X}$: $(\frac{1}{2}, 0)$

$\boldsymbol{Eixo\ Y}$: $(0, -2)$

c) $\boldsymbol{Eixo\ X}$: $(0, 0)$

$\boldsymbol{Eixo\ Y}$: $(0, 0)$

d) $\boldsymbol{Eixo\ X}$: $(-\frac{25}{4}, 0)$

$\boldsymbol{Eixo\ Y}$: $(0, \frac{5}{4})$

e) $\boldsymbol{Eixo\ X}$: $(\frac{4}{3}, 0)$

$\boldsymbol{Eixo\ Y}$: $(0, -2)$

8)

a) $f\ nula \Rightarrow x = -3$

$f\ > 0 \Rightarrow x > -3$

$f\ < 0 \Rightarrow x < -3$

b) $f\ nula \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$f\ > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

$f\ < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$

c) $f\ nula \Rightarrow x = 0$

$f\ > 0 \Rightarrow x < 0$

$f\ < 0 \Rightarrow x > 0$

d) $f\ nula \Rightarrow x = 0$

$f\ > 0 \Rightarrow x > 0$

$f\ < 0 \Rightarrow x < 0$

e) $f\ nula \Rightarrow x = \frac{1}{10}$

$f > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{10}$

$f < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{10}$

f) $f\ nula \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

$f\ > 0 \Rightarrow x > -\frac{4}{3}$

$f\ < 0 \Rightarrow x < -\frac{4}{3}$

9) $x < 3$

10)

a) $x \geq -\frac{1}{5}$

b) $x > \frac{1}{2}$

c) $\forall\, x \in \mathbb{R}$

Avaliação – Volumes 1 e 2

1) Por hipótese temos que n^2 é ímpar. Para provar por Absurdo, tomemos n par, isto é, $n = 2k$. Então,

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2.2k^2 = par$$

Logo, é um Absurdo, pois por hipótese temos que n^2 é ímpar e chegamos que n^2 é par.

Portanto, se n é inteiro e n^2 é ímpar, então n é ímpar, como queríamos demonstrar.

2) Primeiramente devemos mostrar para $n = 1$ que esta fórmula é verdadeira.

Para $n = 1$, temos que:

$$1 = 1^2$$
$$1 = 1$$

Então, para $n = 1$ é verdadeira a fórmula.

Supondo que esta fórmula seja verdadeira para $n \in \mathbb{N}$, vamos provar que esta fórmula é verdadeira para $n + 1$, isto é

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) + (2[n + 1] - 1) = (n + 1)^2$$

Desenvolvendo a primeira parte, temos que

$$\underbrace{1 + 3 + \ldots + (2n - 1)^2}_{\boxed{\text{É verdadeiro para n.}}} + (2[n + 1] - 1)^2 = n^2 + (2n + 2 - 1)$$

$$= n^2 + (2n + 1)$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

$$= (n + 1)^2$$

como queríamos demonstrar.

3) Primeiramente devemos mostrar para $n = 1$ que esta fórmula é verdadeira.

Para $n = 1$, temos que:

$$1^3 = [\frac{1(1+1)}{2}]^2$$

$$1 = [\frac{1.2}{2}]^2$$

$$1 = [\frac{2}{2}]^2$$

$$1 = 1^2$$

$$1 = 1$$

Então, para $n = 1$ é verdadeira a fórmula.

Supondo que esta fórmula seja verdadeira para $n \in \mathbb{N}$, vamos provar que esta fórmula é verdadeira para $n + 1$, isto é

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1).([n+1]+1)}{2}\right)^2$$

Desenvolvendo a primeira parte, temos que

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

É verdadeiro para n.

$$= \frac{n^2.(n+1)^2}{4} + (n+1)^2 . (n+1)$$

$$= (n+1)^2 . \left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right)$$

$$= (n+1)^2 . \left(\frac{n^2 + 4(n+1)}{4}\right)$$

$$= (n+1)^2 \cdot (\frac{n^2 + 4n + 4)}{4})$$

$$= (n+1)^2 . \frac{(n+2)^2}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 \, . \, (n+2)^2}{4}$$

$$= [\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}]^2$$

$$= (\frac{(n+1)\,.\,([n+1]+1)}{2})^2$$

como queríamos demonstrar.

4)

a) $B = \{v, u, t, o, m, n, s\}$

b) $A \cup C = \{a, j, k, l, i, o, m, n, s, r, q\}$

c) $z \notin B$ e $z \in U$

d) Não, pois os elementos $r, q \in A$ não pertencem ao conjunto B.

e) Os conjuntos $A, B \; e \; C \subset U$, pois todos os elementos destes conjuntos pertencem ao conjunto U.

f) $A \cap B = \{m, n, s\}$

g) $C \cap B \cap A = \{m, n\}$

h) $P(A) = \{\emptyset, \{m\}, \{n\}, \{q\}, \{r\}, \{s\}, \{m,n\}, \{m,q\}, \{m,r\}, \{m,s\}, \{n,q\}, \{n,r\}, \{n,s\},$
$\{q,r\}, \{q,s\}, \{r,s\}, \{m,n,q\}, \{m,n,r\}, \{m,n,s\}, \{m,q,r\}, \{m,q,s\}, \{m,r,s\}, \{n,q,r\},$
$\{n,q,s\}, \{n,r,s\}, \{q,r,s\}, \{m,n,q,r\}, \{m,n,q,s\}, \{m,n,r,s\}, \{m,q,r,s\}, \{n,q,r,s\},$
$\{m,n,q,r,s\}.$

i) $B - C = \{v, u, t\}$

j) $C_A^B = \{r, q\}$

5) Primeiramente, precisamos supor que $\sqrt{2}$ seja racional e, com base nesta suposição, chegamos a uma contradição. Logo, a suposição inicial ($\sqrt{2}$ é racional) é falsa. Assim, concluímos que a $\sqrt{2}$ só pode ser irracional.

Supondo que $\sqrt{2}$ seja racional, então podemos escrevê-la como uma fração irredutível.

Seja a $\in \mathbb{Z}$ e b $\in \mathbb{Z}^*$ tal que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \text{(Fração Irredutível)}$$

Elevando tudo ao quadrado obtemos as seguintes expressões

$$(\sqrt{2})^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$a^2 = 2b^2$$

Todo número multiplicado por dois é par[1] e como $a^2 = 2b^2$ então **a^2 é par**.

Se a^2 é par então **a é par**, pois a multiplicação de dois pares resulta em um número par[2] e a multiplicação de dois números ímpares resulta em um número ímpar[3].

Assim, podemos escrever $\boldsymbol{a = 2k}$. Substituindo $\boldsymbol{a}$ por $\boldsymbol{2k}$ obtemos

$$(2k)^2 = 2b^2$$

$$4k^2 = 2b^2$$

$$2k^2 = b^2$$

[1] Propriedade dos Números Pares.
[2] Propriedade dos Números Pares.

[3] Propriedade dos Números Ímpares.

$$b^2 = 2\,k^2$$

Analogamente, temos que b^2 é par e b é par.

Como a e b são pares então $\frac{a}{b}$ não é uma fração irredutível. Assim, temos uma contradição. Logo, $\sqrt{2}$ não é racional.

Portanto, $\sqrt{2}$ é irracional.

6)

a) $A\ x\ B = \{(-1,2),\ (-1,3),\ (0,2),\ (0,3),\ (2,2),\ (2,3)\}$

b) $B\ x\ A = \{(2,-1),\ (2,0),\ (2,2),\ (3,-1),\ (3,0),\ (3,2)\}$

c) $A\ x\ A = \{(-1,-1),\ (-1,0),\ (-1,2),\ (0,-1),\ (0,0),\ (0,2),\ (2,-1),\ (2,0),\ (2,2)\}$

d) $B\ x\ B = \{(2,2),\ (2,3),\ (3,2),\ (3,3)\}$

7)

a) **Função injetora**.

$\boldsymbol{Domínio}$: $A = \{2, 3, 4, 5\}$

$\boldsymbol{Contradomínio}$: $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$\boldsymbol{Imagem}$: $Im(f) = \{0, 1, 2, 3\}$

b) Não é uma função.

c) **Função sobrejetora**.

$\boldsymbol{Domínio}$: $A = \{-1, 0, 1\}$.

$\boldsymbol{Contradomínio}$: $B = \{0, 1\}$.

$\boldsymbol{Imagem}$: $Im(f) = \{0, 1\}$.

d) **Função bijetora**.

$\boldsymbol{Domínio}$: $A = \{1, 3, 4\}$.

$\boldsymbol{Contradomínio}$: $B = \{2, 6, 8\}$.

$\boldsymbol{Imagem}$: $Im(f) = \{2, 6, 8\}$.

e) **Não é uma função**.

f) Nem injetora, nem sobrejetora.

$\boldsymbol{Domínio}: A = \{2, 5, 10, 20\}$

$\boldsymbol{Contradomínio}: B = \{0, 1, 2\}$

$\boldsymbol{Imagem}: Im(f) = \{0\}$

8) $f(x) = \frac{1}{7}x + 4$

9)

a) Decrescente

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{2} \Rightarrow f(x) = 0 \\ x < -\frac{5}{2} \Rightarrow f(x) > 0 \\ x > -\frac{5}{2} \Rightarrow f(x) < 0 \end{cases}$$

b) Decrescente

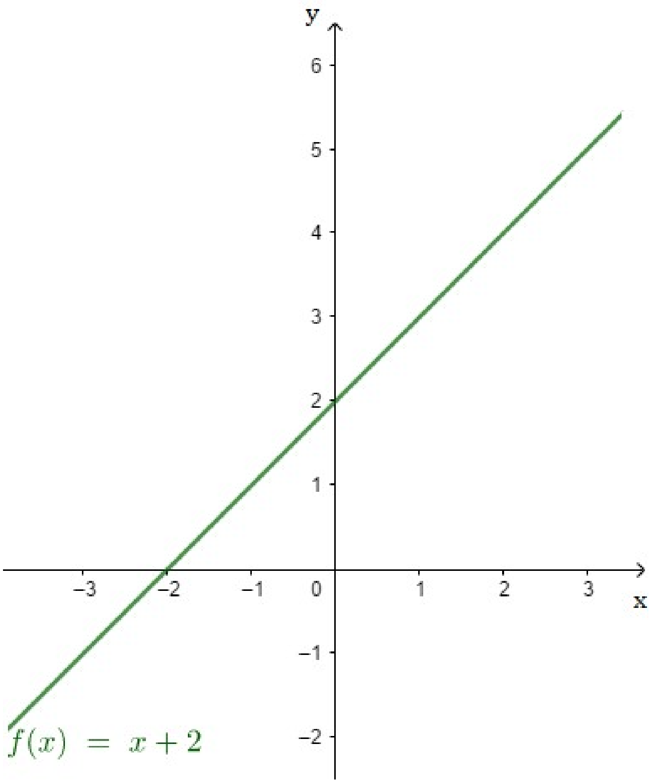
$$\begin{cases} x = \frac{4}{3} \Rightarrow f(x) = 0 \\ x < \frac{4}{3} \Rightarrow f(x) > 0 \\ x > \frac{4}{3} \Rightarrow f(x) < 0 \end{cases}$$

c) Crescente

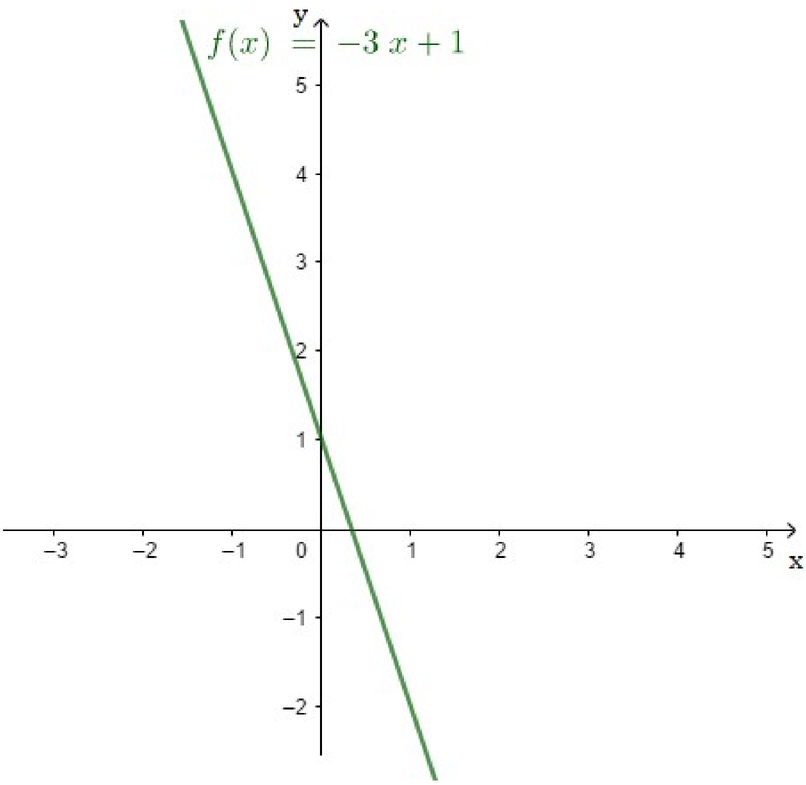
$$\begin{cases} x = \sqrt{5} \Rightarrow f(x) = 0 \\ x < \sqrt{5} \Rightarrow f(x) < 0 \\ x > \sqrt{5} \Rightarrow f(x) > 0 \end{cases}$$

10)

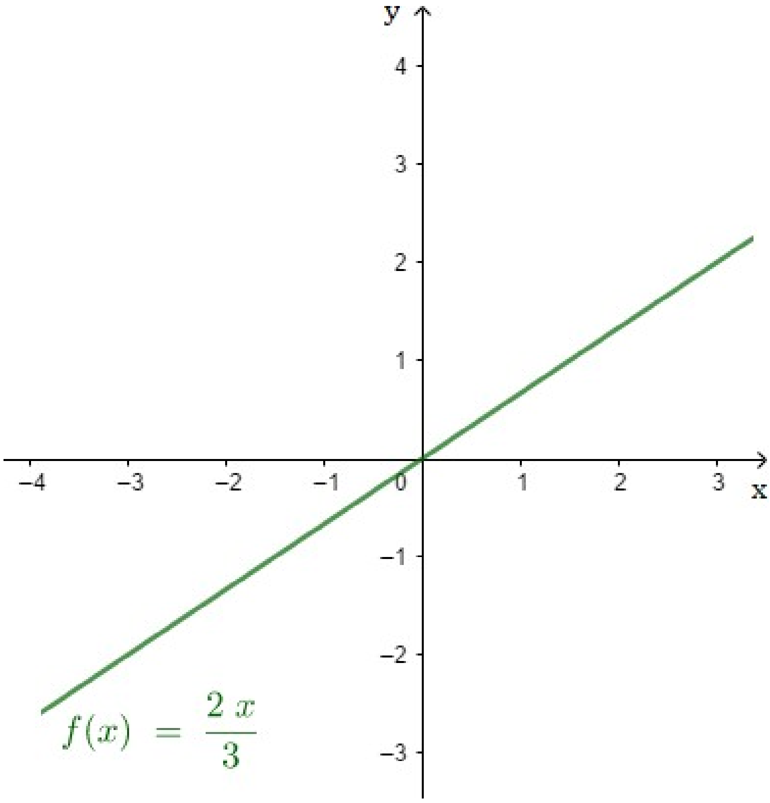
a)



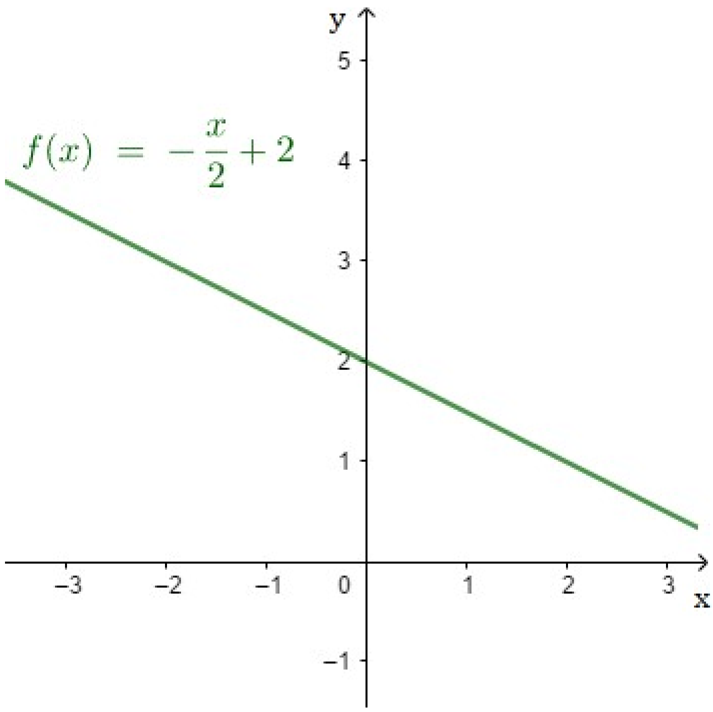
b)



c)


y
4
3
2
1
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 x
−1
−2
−3
$f(x) = \frac{2x}{3}$

d)

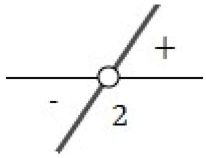

y
5
$f(x) = -\frac{x}{2} + 2$
4
3
2
1
−3 −2 −1 0 1 2 3 x
−1

Volume 3

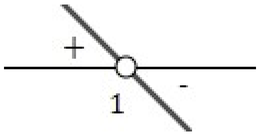
Capítulo 7

1)

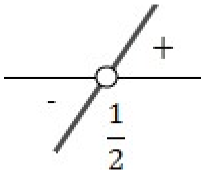
a)



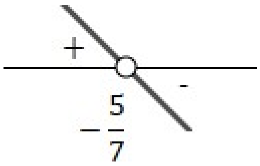
b)



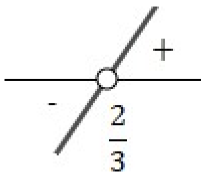
c)



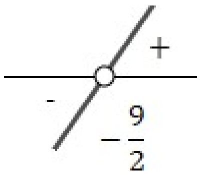
d)



e)



f)



2)

a) $S = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 5\}$ ou $S = \{5, 6, 7, 8, \ldots\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < \frac{17}{9}\}$ ou $S = \{1, 0, -1, -2, -3, \ldots\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \frac{19}{20}\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\}$

3)

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

4)

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}\}$

b) $S = \emptyset$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 6\}$

5)

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{7}{2}\ ou\ x \geq \frac{1}{6}\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{2}\ ou\ x > 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{5} < x \leq \frac{3}{4}\}$

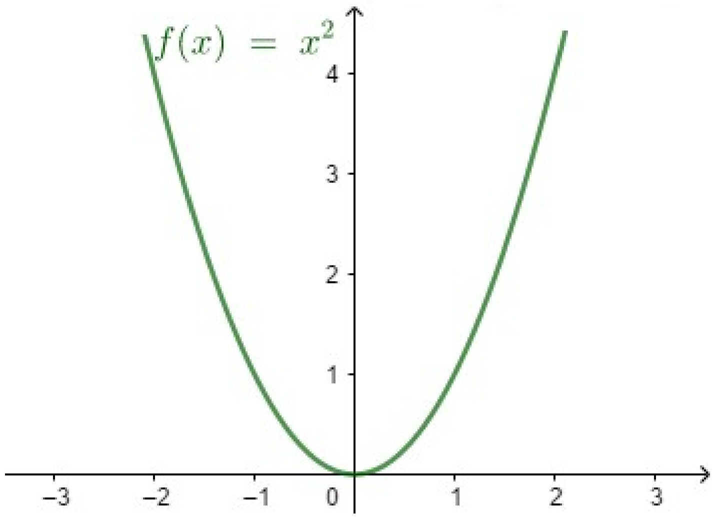
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\ \ ou\ x > -\frac{1}{2}\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 15\}$

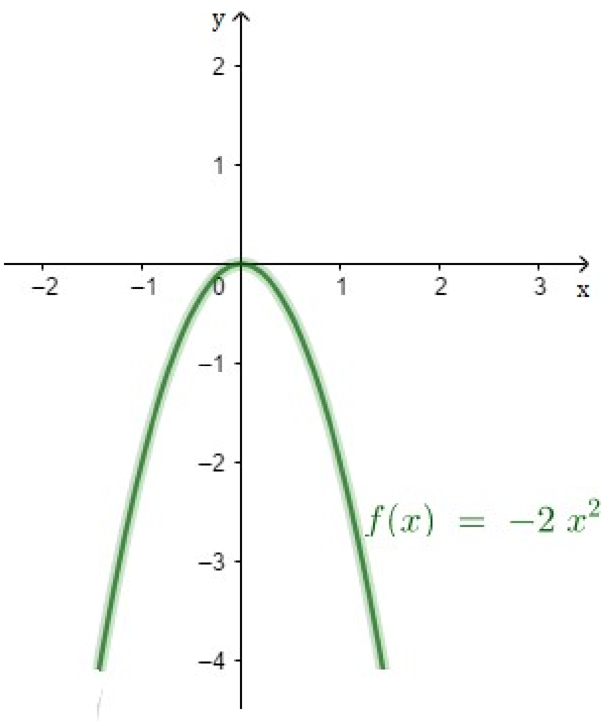
Capítulo 8

1)

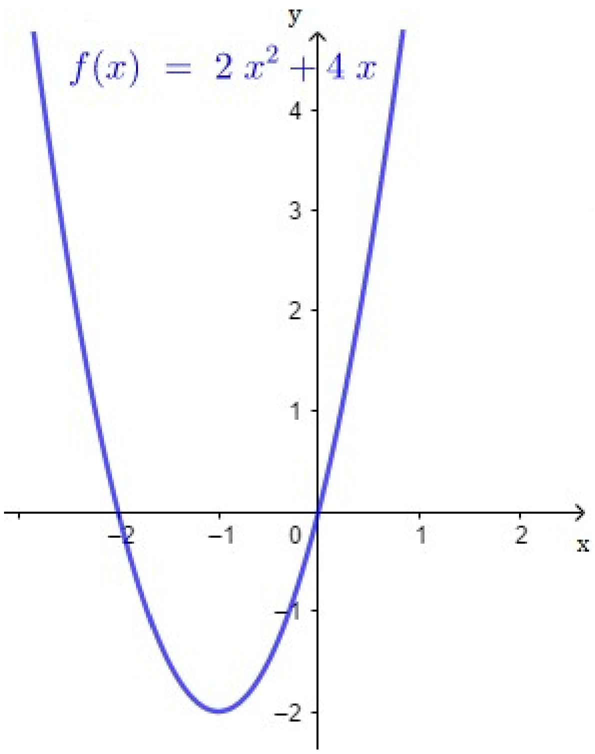
a)



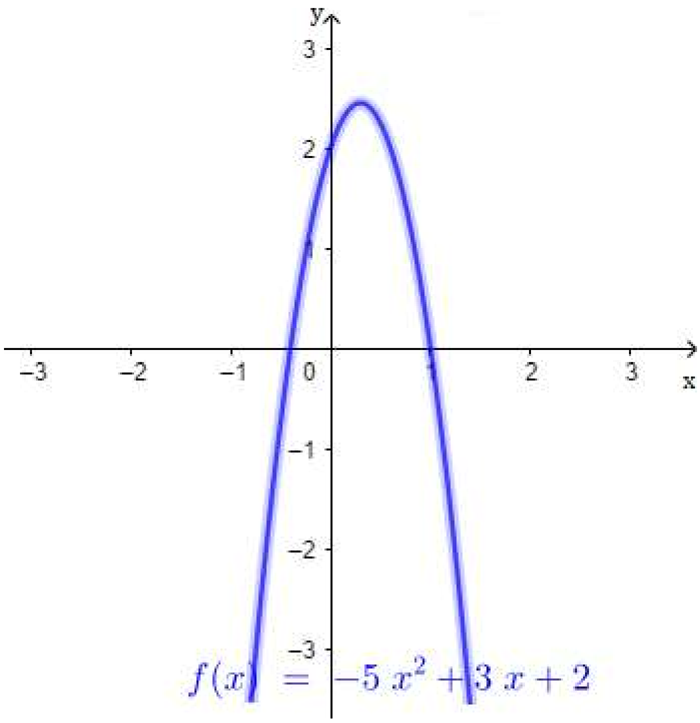
b)



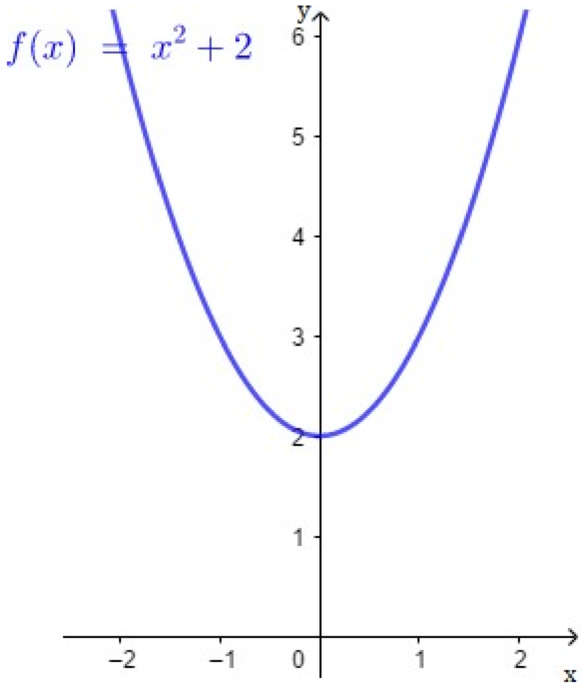
c)



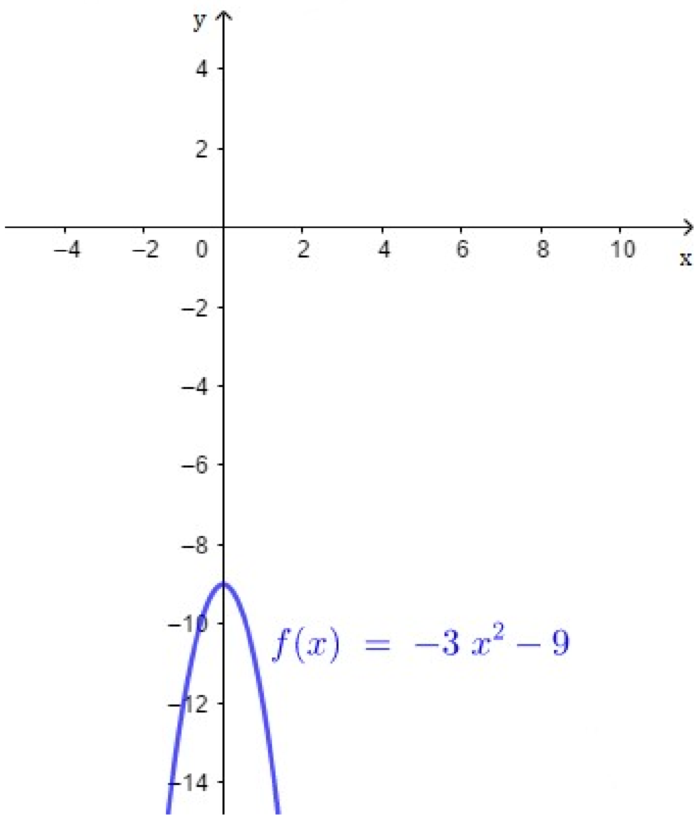
d)



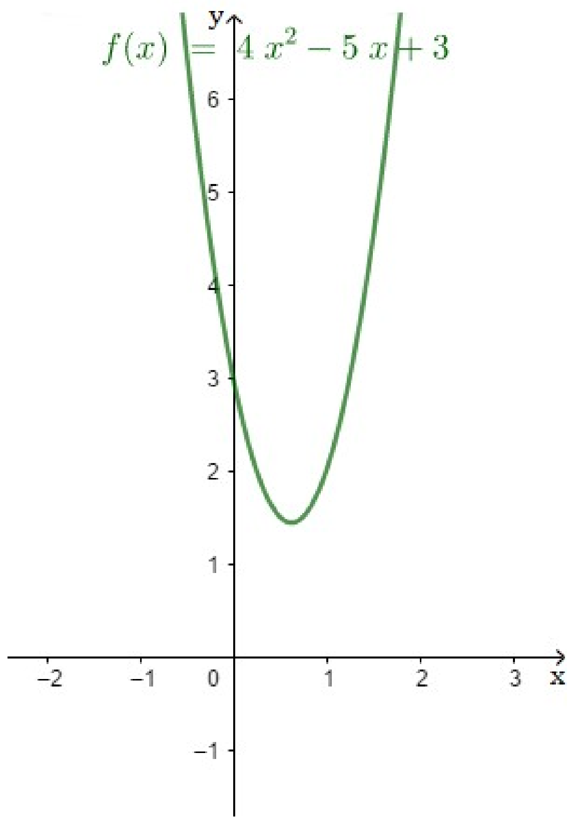
e)



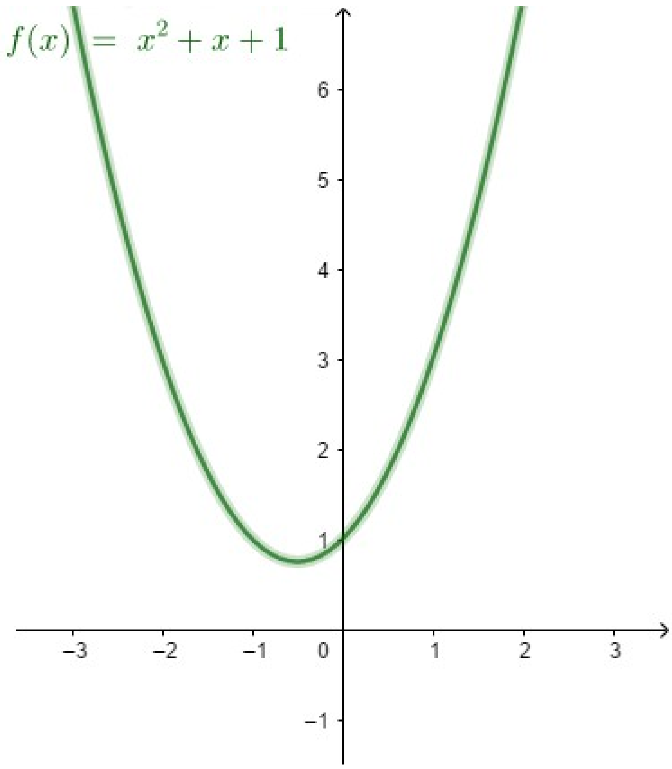
f)



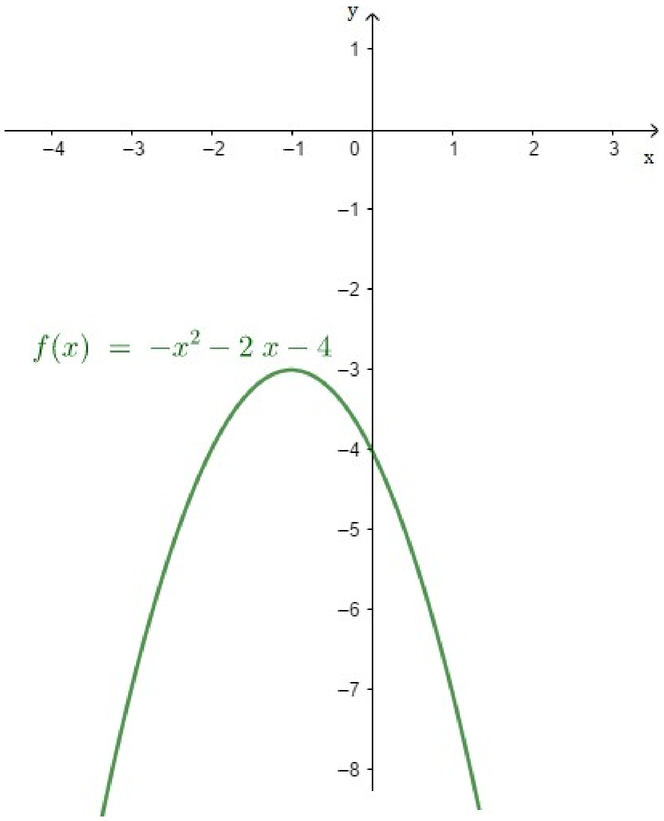
g)



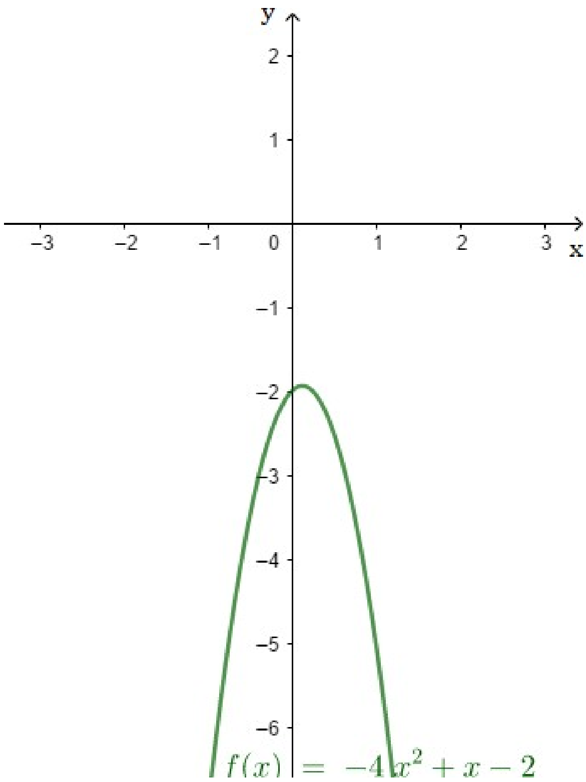
h)



i)



j)



2)

a) $\frac{k}{3} + 7 > 0 \Rightarrow \frac{k}{3} > -7 \Rightarrow k > -21.$

b) $\frac{k}{3} + 7 < 0 \Rightarrow \frac{k}{3} < -7 \Rightarrow k < -21.$

3)

a) $\Delta > 0$ (a parábola intercepta o eixo x em dois pontos).

$x_1 = 0$ e $x_2 = 4$.

$c = 0$.

b) $\Delta < 0$ (a parábola não intercepta o eixo x).

A função não possui raízes reais.

$c = -7$.

c) $\Delta = 0$ (a parábola intercepta o eixo x em um único ponto).

$x_1 = \frac{3}{4}$.

$c = 2$.

4)

a) $S = \{1,\ 2\}$

b) $S = \{\ \}$

c) $S = \{\ \}$

d) $S = \{2, -2\}$

e) $S = \{0,\ \frac{1}{4}\}$

f) $S = \{-2, -1\}$

g) $S = \{-3, -1\}$

h) $S = \{3\}$

i) $S = \{-1,\ 2\}$

j) $S = \{-1,\ 3\}$

5) $S = \{(3, 4), (4, 3)\}$

6)

a) $S = \{8, -8\}$

b) $S = \{0, \frac{1}{2}\}$

c) $S = \{0, -3\}$

d) $S = \{-1, 4\}$

e) $S = \{\ \}$

f) $S = \{2, -1\}$

g) $S = \{-2, 5\}$

h) $S = \{-\frac{5}{8}, 1\}$

7) O ponto de interseção com o $eixo\ Y$ é o $(0, 4)$ e a função volta a ter imagem 4 quando $x = 3$. Assim, o retângulo tem $Comprimento = 3$, $Altura = 4$ e $Área = 3 \,.\, 4 = 12\ u.a.$.

8) Temos $f(x) = x^2 - 4x + 3$ com $\Delta = 4$ e $-\frac{\Delta}{4a} = -1$

Então $Im(f) = \{f \in \mathbb{R} \ / \ y \geq -1\}$, porém o problema nos diz que $x \in [0, 5]$.

Assim, temos,

$f(0) = 3$

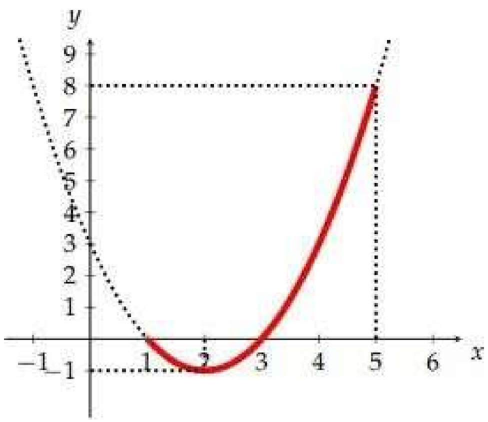
$f(1) = 0$

$f(2) = -1$

$f(3) = 0$

$f(4) = 3$

$f(5) = 8$



Portanto, $Im(f) = [-1, 8]$.

9)

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$y_V = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y_V = -\frac{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21}{4 \cdot 1}$$

$$y_V = -\frac{100 - 84}{4}$$

$$y_V = -4.$$

Sendo $a > 0$, temos $Im(f) = \{y \epsilon \mathbb{R} / \ y \geq -4\}$.

10) Sendo $Im(f) =]-\infty; 0]$, temos $a < 0$ e $y_v = 0$. Então, podemos escrever

$$y_V = 0$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$y_V = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$0 = -\frac{(-8)^2 - 4k \cdot k}{4k}$$

$$4k^2 = 64$$

$$k = \pm\sqrt{16}$$

$$k = \pm 4.$$

Por fim, como $a < 0$, terminamos com $k = -4$.

11) Sabemos que

$$x_1 = 3x_2$$

A soma

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2m}{2} = m$$

O produto

$$x_1 \,.\, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

Com isso, temos que:

$$x_1 + x_2 = m$$
$$3x_2 + x_2 = m$$
$$4x_2 = m$$
$$x_2 = \frac{m}{4}$$

Usando o produto, obtemos que:

$$x_1 \,.\, x_2 = \frac{3}{2}$$
$$\frac{3m}{4} \,.\, \frac{m}{4} = \frac{3}{2}$$
$$\frac{3m^2}{16} = \frac{3}{2}$$
$$m^2 = \frac{3\,.\,16}{2\,.\,3}$$
$$m^2 = 8$$
$$m = \sqrt{8}$$
$$m = 2\sqrt{2}$$

Portanto, $m = 2\sqrt{2}$.

12) Sabemos que r e s são raízes de $ax^2 + bx + c = 0$.

Assim, temos que a soma das raízes

$$r + s = \frac{-b}{a}$$

E o produto

$$r \,.\, s = \frac{c}{a}$$

Com isso, temos que:

$$r^2 + s^2 = r^2 + 2rs + s^2 - 2rs = (r+s)^2 - 2rs = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2.\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2a - 2ca^2}{a^3}$$

E

$$r^2.\ s^2 = r\,.\,r.\,s.\,s = r.\,s\,.\,r.\,s = \frac{c}{a}\,.\,\frac{c}{a} = \frac{c^2}{a^2}$$

Com isso, temos que:

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{r^2 + s^2}{r^2.\ s^2} = \frac{\frac{b^2a - 2ca^2}{a^3}}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{\frac{b^2 - 2ca}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{b^2 - 2ca}{a^2}\,.\,\frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2 - 2ca}{c^2}$$

Portanto,

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{b^2 - 2ca}{c^2}$$

13) Na função quadrática $f(x) = mx^2 + (2m - 1x) + (m - 2)$, temos:

$$a = m,\ \ b = 2m - 1,\ \ c = m - 2\ \ e\ \ \Delta = 4m + 1$$

Como esta função é quadrática e possui raízes reais e distintas, temos que:

$$a = m \neq 0 \quad e \quad \Delta = 4m + 1 > 0$$

Com isso, temos que:

$$m \neq 0 \quad e \quad e \quad m > -\frac{1}{4}$$

Portanto,

$$m = \{x \in \mathbb{R} \,/ x \neq 0 \; e \; x \; > -\frac{1}{4}\}$$

14)

Partindo da fórmula das raízes, sejam x1 e x2

x1 = $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a}$ e x2 = $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}$, ($\Delta \geq 0$)

as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$

Verifique que $x1 + x2$ = - $\frac{b}{a}$ e $x1 \,.\, x2 = \frac{c}{a}$

$x1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a}$ e x2= $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}$

x1 $= \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ x2= $\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

x1+ x2 = $\frac{-b}{2a}$ - $\cancel{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}} - \frac{-b}{2a} + \cancel{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}$

x1 + x2 = 2 $(\frac{-b}{2a})$

x1 + x2 = $\frac{-b}{a}$

x1 = $\frac{(-b - \sqrt{\Delta})}{2a}$ e x2 = $\frac{(-b + \sqrt{\Delta})}{2a}$

x1 = $\frac{-(b + \sqrt{\Delta})}{2a}$ x2 = $\frac{-(b - \sqrt{\Delta})}{2a}$

x1 . x2 = ($\frac{-(b + \sqrt{\Delta})}{2a}$) . ($\frac{-(b - \sqrt{\Delta})}{2a}$)

x1 . x2 = $\frac{-(b + \sqrt{\Delta}).-(b - \sqrt{\Delta})}{(2a)^2}$

x1 . x2 = $\frac{(b^2 - (\sqrt{\Delta})^2)}{4a^2}$

x1 . x2 = $\frac{(\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4\,ac)}{4a^2}$

x1 . x2 = $\frac{4\,ac}{4a^2}$

x1 . x2 = $\frac{c}{a}$

$ax^2 + bx + c = 0,$

$a.(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0,$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$

$x^2 + (\frac{b}{a})x + (\frac{c}{a}) = 0,$

Sendo $\frac{-b}{a}$ = x1 + x2 → $\frac{b}{a}$ = - (x1 + x2)

X1 + x2 = Soma S → $\frac{b}{a}$ = - S

X1 . x2 = Produto P → $\frac{c}{a}$ = P

$X^2 + (\frac{b}{a})x + (\frac{c}{a}) = 0$

$x^2 + (-5)x + P = 0$

Portanto $x^2 - 5x + P = 0$

15)

a) $x^2 + x - 6 = 0.$

b) $4x^2 + 4x - 3 = 0.$

c) $x^2 - 5{,}4x + 2 = 0.$

d) $x^2 - (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0.$

e) $x^2 - 2x - 2 = 0.$

16) $m + n = 80$

17)

a) $x_v = \frac{5}{2}$ e $y_v = -\frac{9}{4}$.

b) $x_v = -3$ e $y_v = 25$.

c) $x_v = -2$ e $y_v = -4$.

d) $x_v = 0$ e $y_v = 9$.

e) $x_v = 3$ e $y_v = 0$.

18)

a) $x_v = -\frac{5}{4}$ e $y_v = -\frac{25}{8}$.

b) $x_v = 2$ e $y_v = 12$.

c) $x_v = 1$ e $y_v = 0$.

d) $x_v = \frac{7}{4}$ e $y_v = -\frac{9}{16}$.

e) $x_v = \frac{5}{2}$ e $y_v = -\frac{3}{4}$.

f) $x_v = \frac{4}{3}$ e $y_v = \frac{7}{18}$.

19)

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{10}{2a} = 5 \Rightarrow a = 1.$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-100 + 4ac}{4a} = \frac{-100+4c}{4} = 9 \Rightarrow c = 16.$$

Portanto, temos que $a = 1$ e $c = 16$.

Volume 4

Capítulo 9

1)

a) $S = \mathbb{R}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{2}\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3}{2}\}$

f) $S = \emptyset$

g) V = $\{x \in \mathbb{R}$ / x = -3 ou 1 ≤ x ≤ 2 }

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\ ou\ 2 \leq x \leq \frac{5}{2}\}$

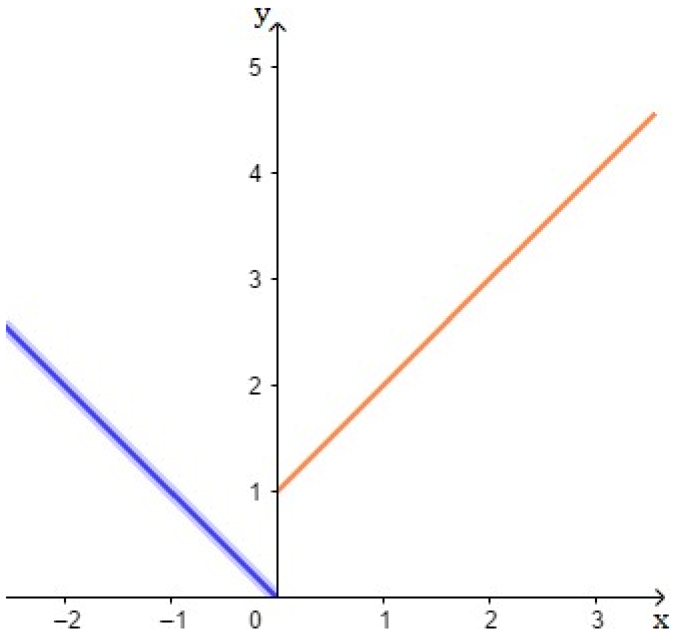
i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{4}\ ou -\frac{1}{2} < x < 1\ ou\ x > 2\}$

J) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq -\frac{3}{4}\ ou\ 1 < x < \frac{5}{2}\}$

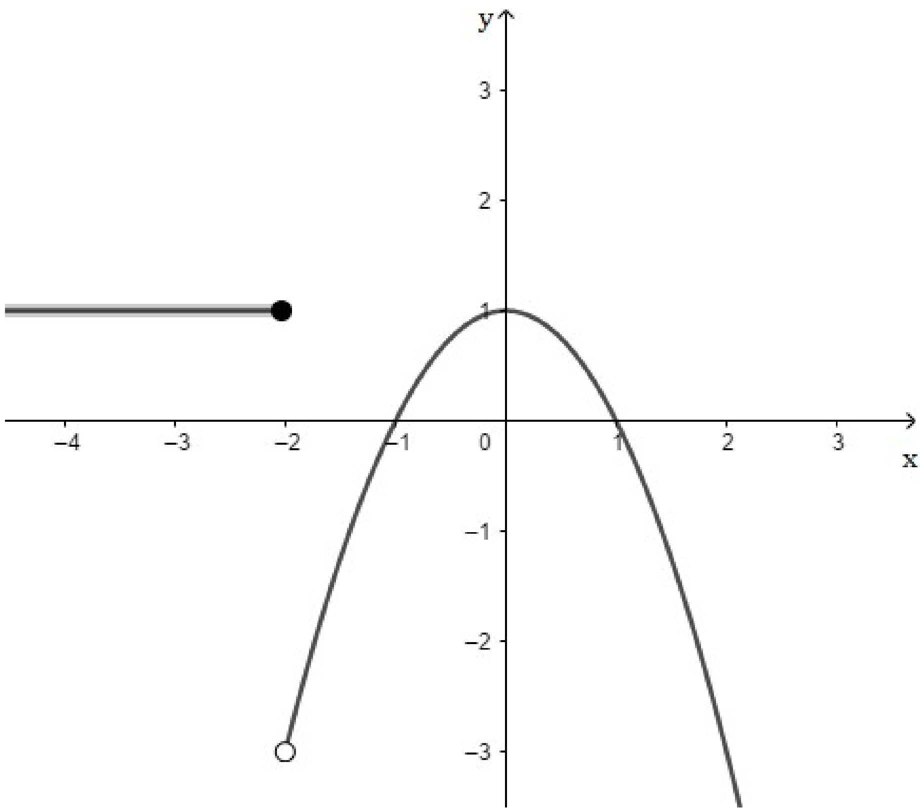
Capítulo 10

1)

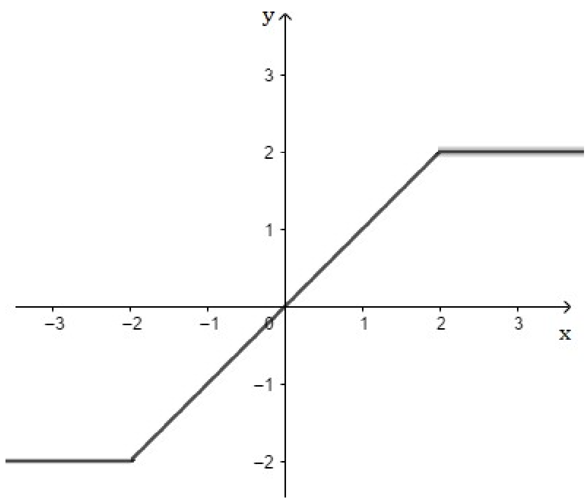
a)



b)

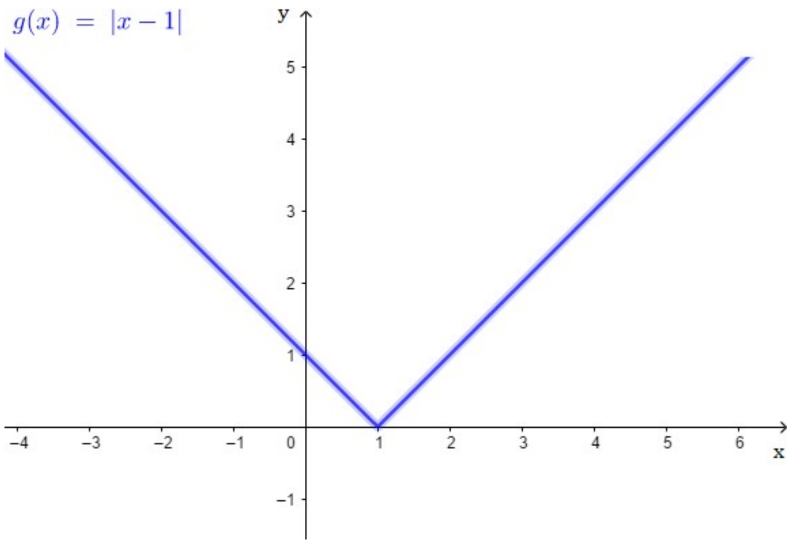


c)

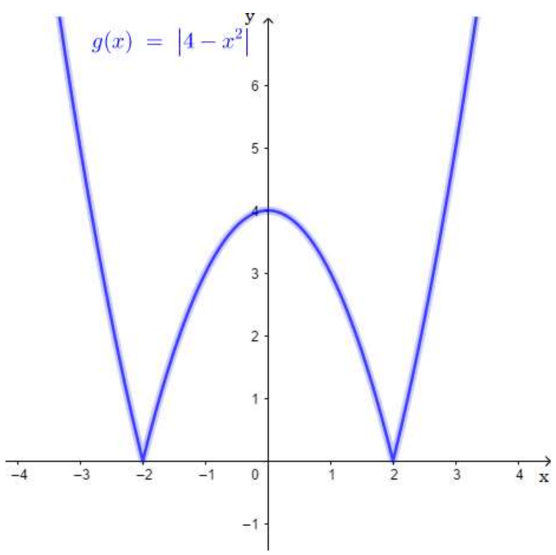


2)

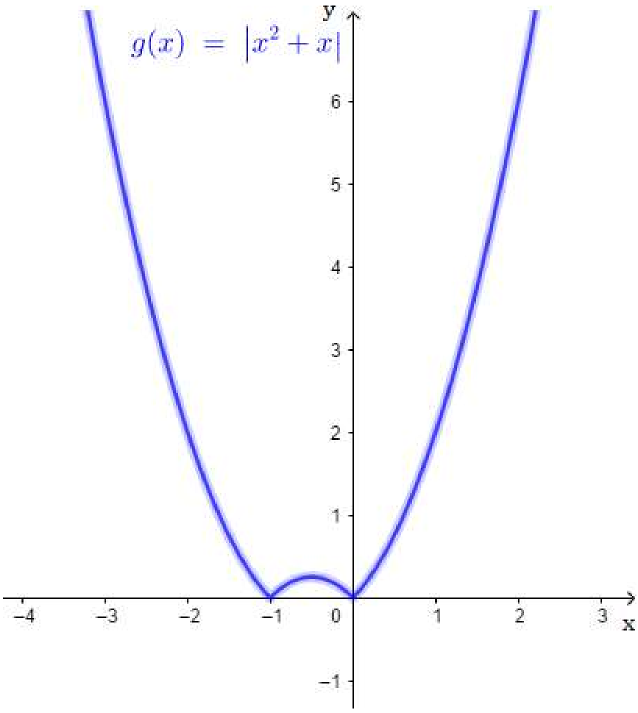
a)



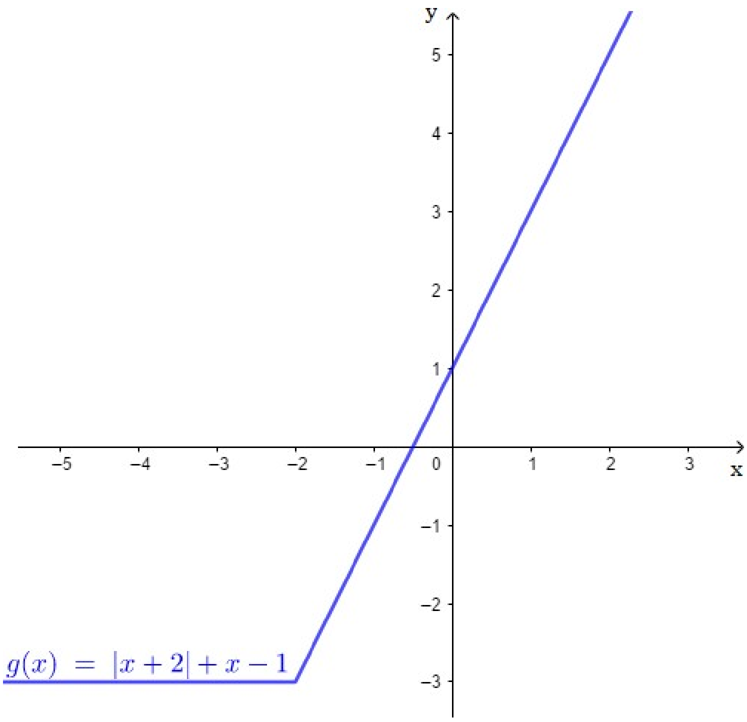
b)



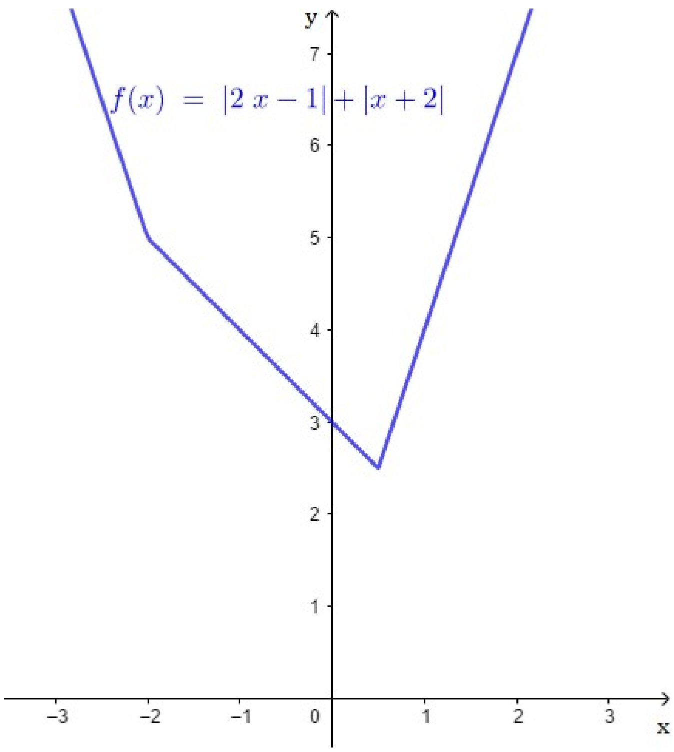
c)



d)



e)



3) Demonstrações realizadas ao longo do capítulo.

4)

a) $S = \{1, -5\}$

b) $S = \{\emptyset\}$

c) $S = \{-1, 1, 2, 4\}$

d) $S = \{\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\}$

e) $S = \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\}$

f) $S = \{2, -\frac{1}{3}\}$

g) $S = \{4, 2\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{4}{3}\}$

5) $S = \{-2, 2\}$

6)

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x < 2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{8}{5} \quad ou \quad x \geq 0\}$

c) $S = \mathbb{R}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \quad ou \quad 3 < x < 4\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \quad ou \ -1 < x < 2 \quad ou \quad X > 3\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 0 \quad ou \quad 2 < x \leq 4\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5}{3}\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

7)

a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 10 \ ou \ x \neq -10\}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$

c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \ ou \ x \geq 2\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \ ou \ x > 3\}$

Avaliação – Volumes 3 e 4

1)

a) $a = -1$

$b = -3$

$c = 10$

b) $\Delta = 49$

c) $x_1 = -5$

$x_2 = 2$

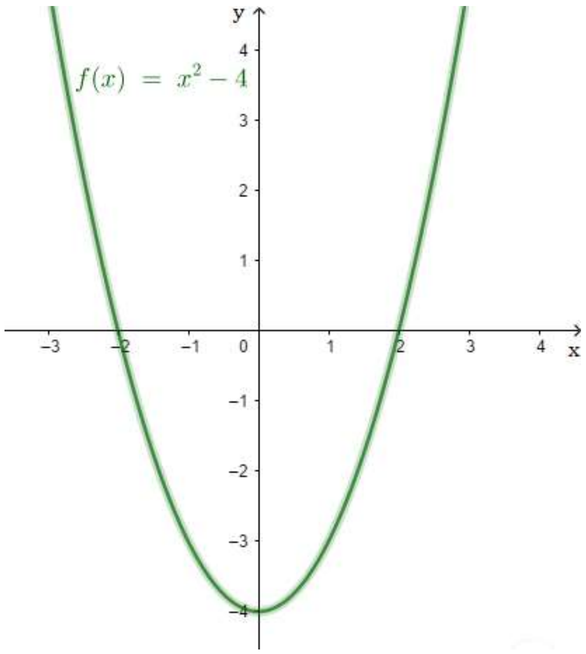
d) $x = -5 \; ou \; x = 2 \Rightarrow f(x) = 0$

$x < -5 \; ou \; x > 2 \Rightarrow f(x) < 0$

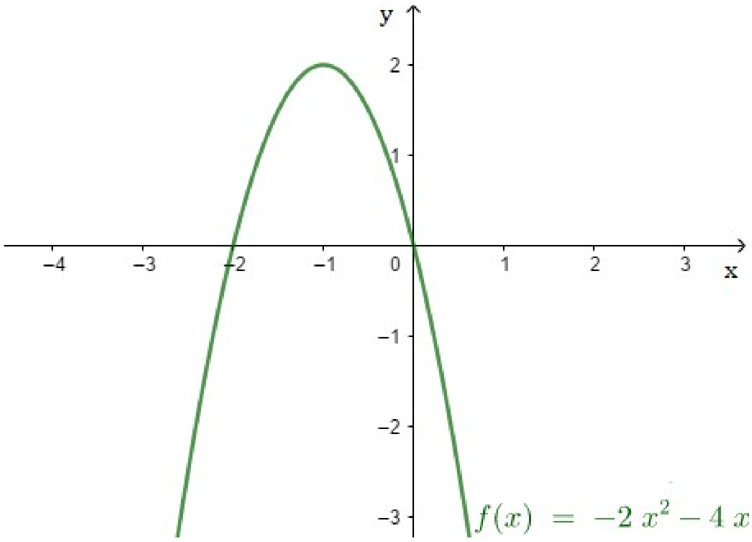
$-5 < x < 2 \Rightarrow f(x) > 0$

2)

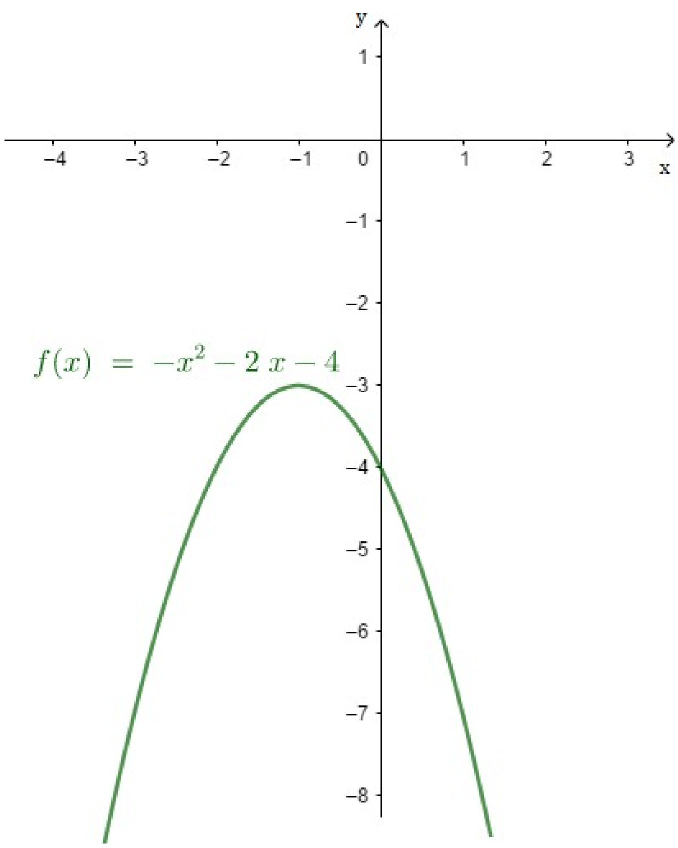
a)



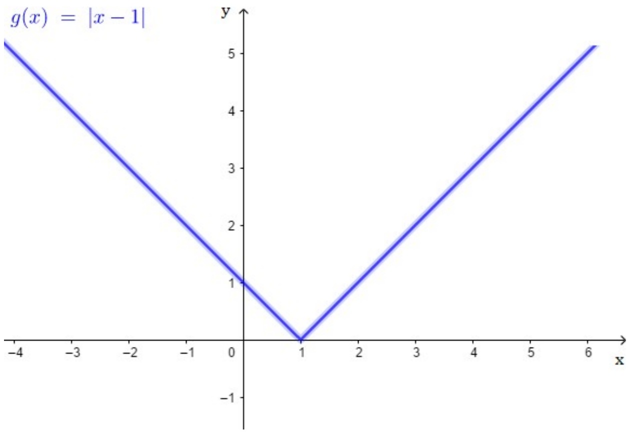
b)



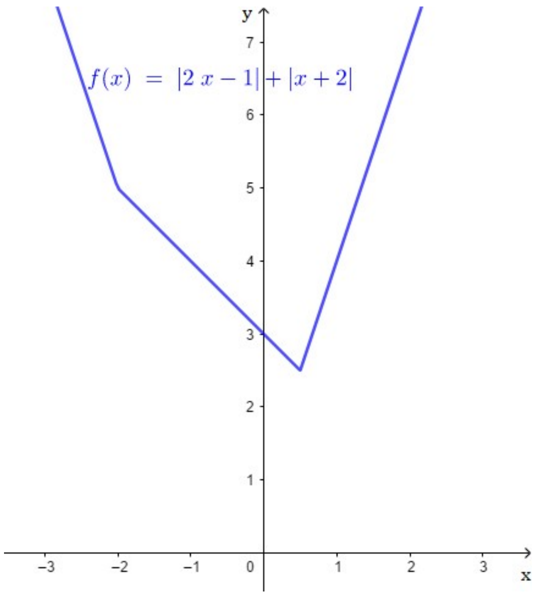
c)



d)



e)



3) O ponto de interseção com o $eixo\ Y$ é o $(0, 4)$ e a função volta a ter imagem 4 quando $x = 3$. Assim, o retângulo tem $Comprimento = 3$, $Altura = 4$ e $Área = 3\,.\,4 = 12\ u.a.$.

4) Na função quadrática $f(x) = mx^2 + (2m-1) + (m-2)$, temos:

$$a = m,\ \ b = 2m-1,\ \ c = m-2\ \ e\ \ \ \Delta = 4m+1$$

Como esta função é quadrática e possui raízes reais e distintas, temos que:

$$a = m \neq 0 \quad e \quad \Delta = 4m+1 > 0$$

Com isso, temos que:

$$m \neq 0 \quad e \quad e \quad m > -\frac{1}{4}$$

Portanto, $m = \{x \in \mathbb{R} \,/ x \neq 0 \; e \; x > -\frac{1}{4}\}$.

5) $f(x) = x^2 - 6x$

6) Sejam dois pontos pertencentes a esta parabola:

$$(0,4) \; e \; (10,3)$$

O ponto $(0,4)$ é o vértice da parábola, então, temos que:

$$V = (0,4) \Rightarrow \begin{cases} 0 = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = 0 \\ 4 = -\dfrac{\Delta}{4a} \Rightarrow c = 4 \end{cases}$$

Assim, para o ponto $(10,3)$ temos que:

$$3 = a.10^2 + 0.10 + 4$$

$$-1 = 100a$$

$$a = \frac{-1}{100}$$

Com isso, a função desta parabóla é $f(x) = -\frac{x^2}{100} + 4$.

E a distância horizontal, em metros, se dará no ponto $(x, 0)$.

Assim, temos que:

$$0 = -\frac{x^2}{100} + 4$$

$$-4 = -\frac{x^2}{100}$$

$$x^2 = 400$$

$$x = \pm 20$$

Portanto, o esguicho de água atingirá o solo, à distância horizontal de 20 metros.

7)

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{2} \; ou \; x > 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{5} < x \leq \frac{3}{4}\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{2}\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 0 \quad ou \quad 2 < x \leq 4\}$

f) $S = \mathbb{R}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5}{3}\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

8) Veja no caderno.

9) Veja no caderno.

10)

a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \; ou \; x \geq 2\}$

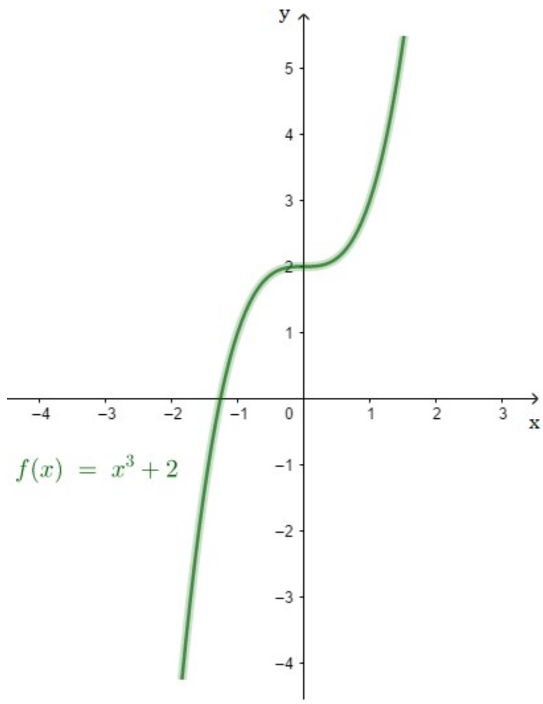
b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \; ou \; x > 3\}$

Volume 5

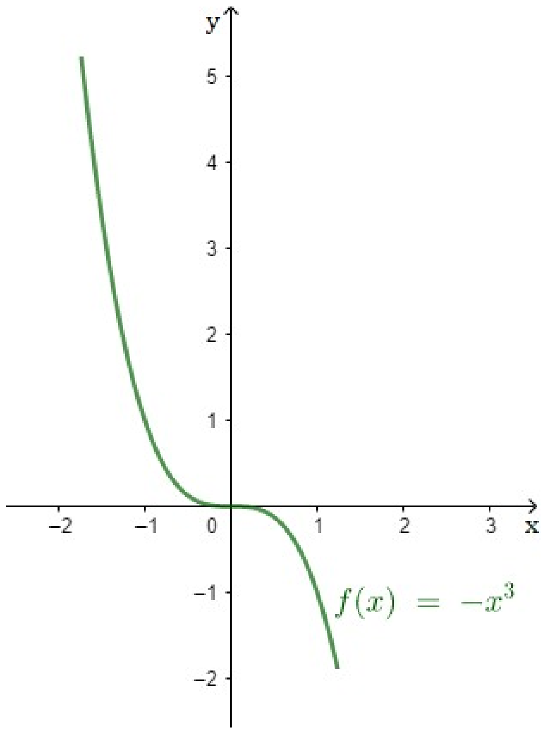
Capítulo 11

1)

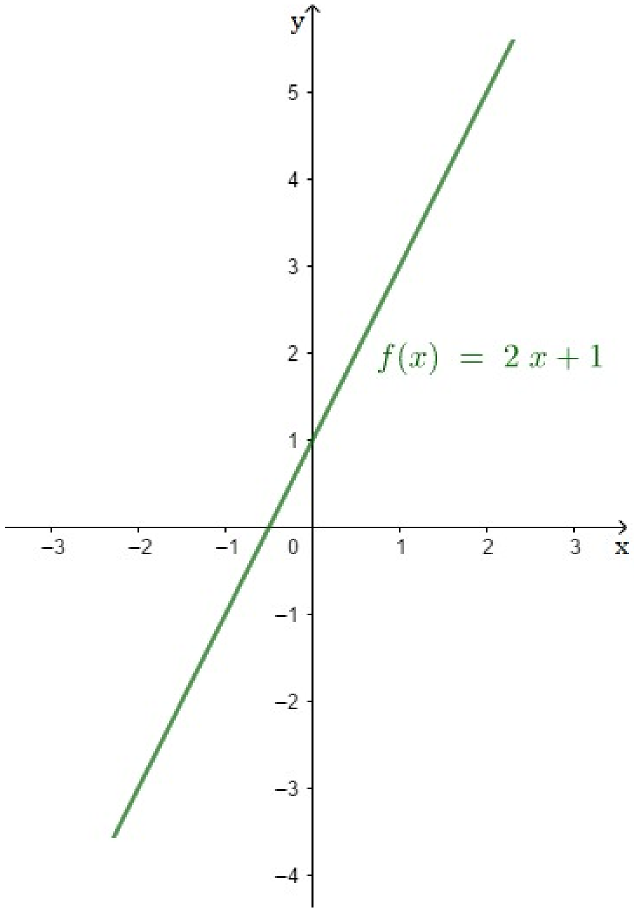
a)



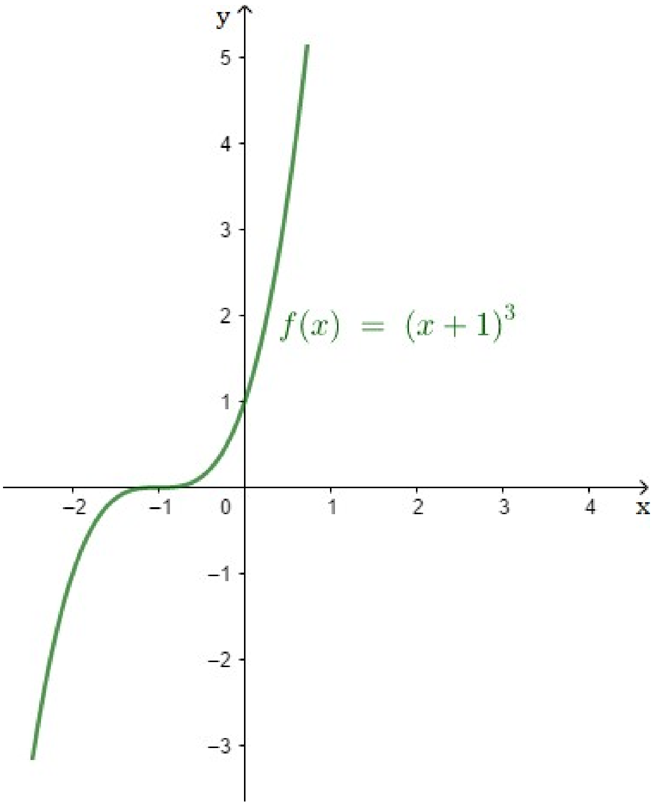
b)



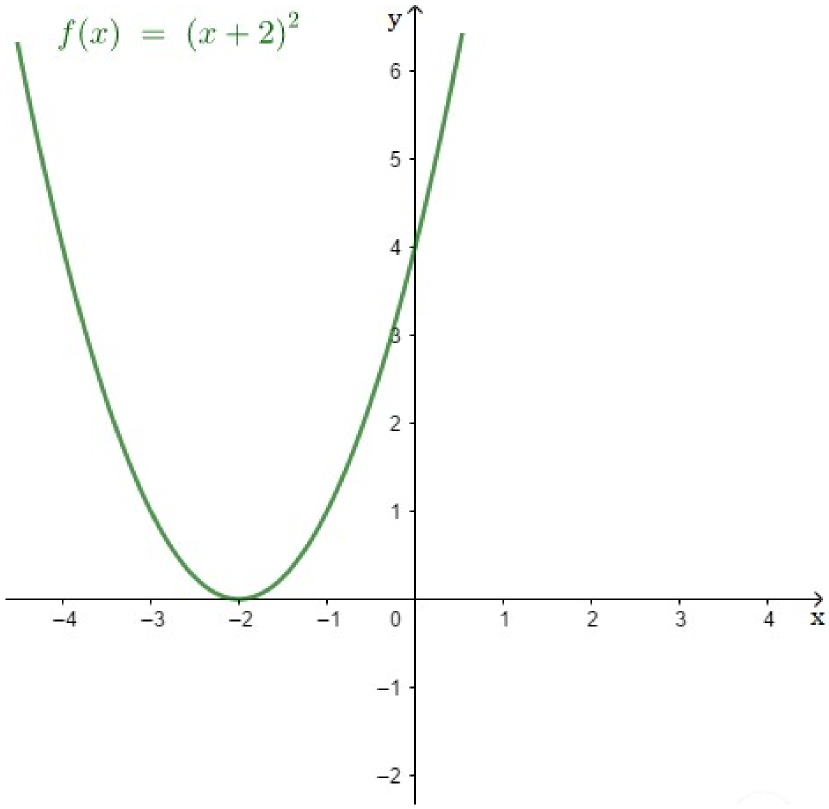
c)



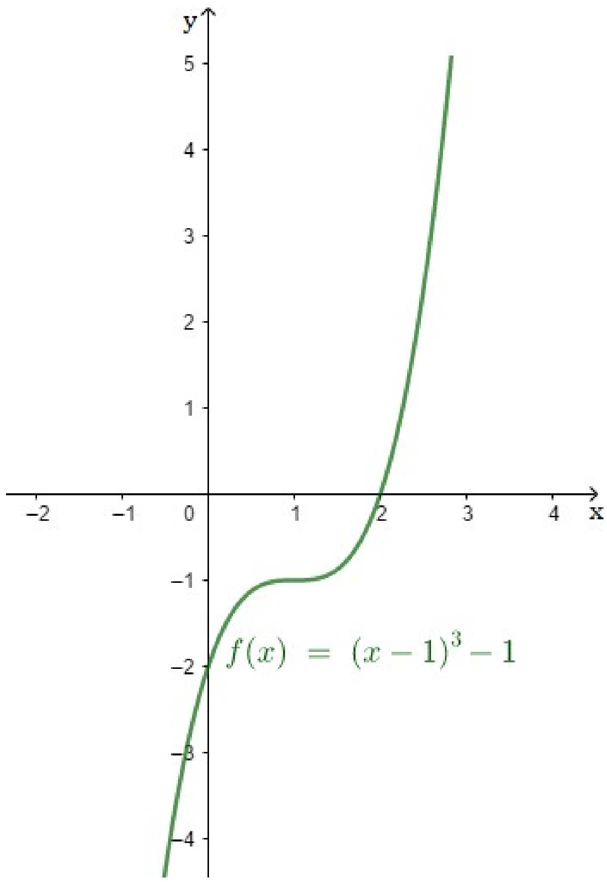
d)



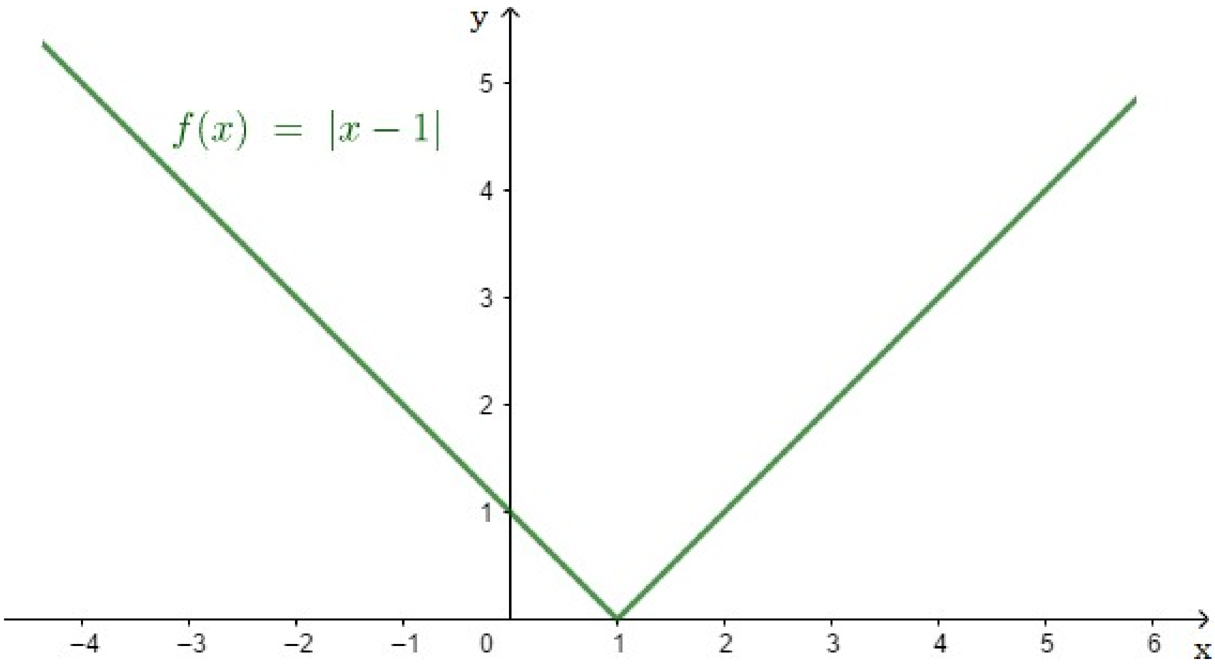
e)



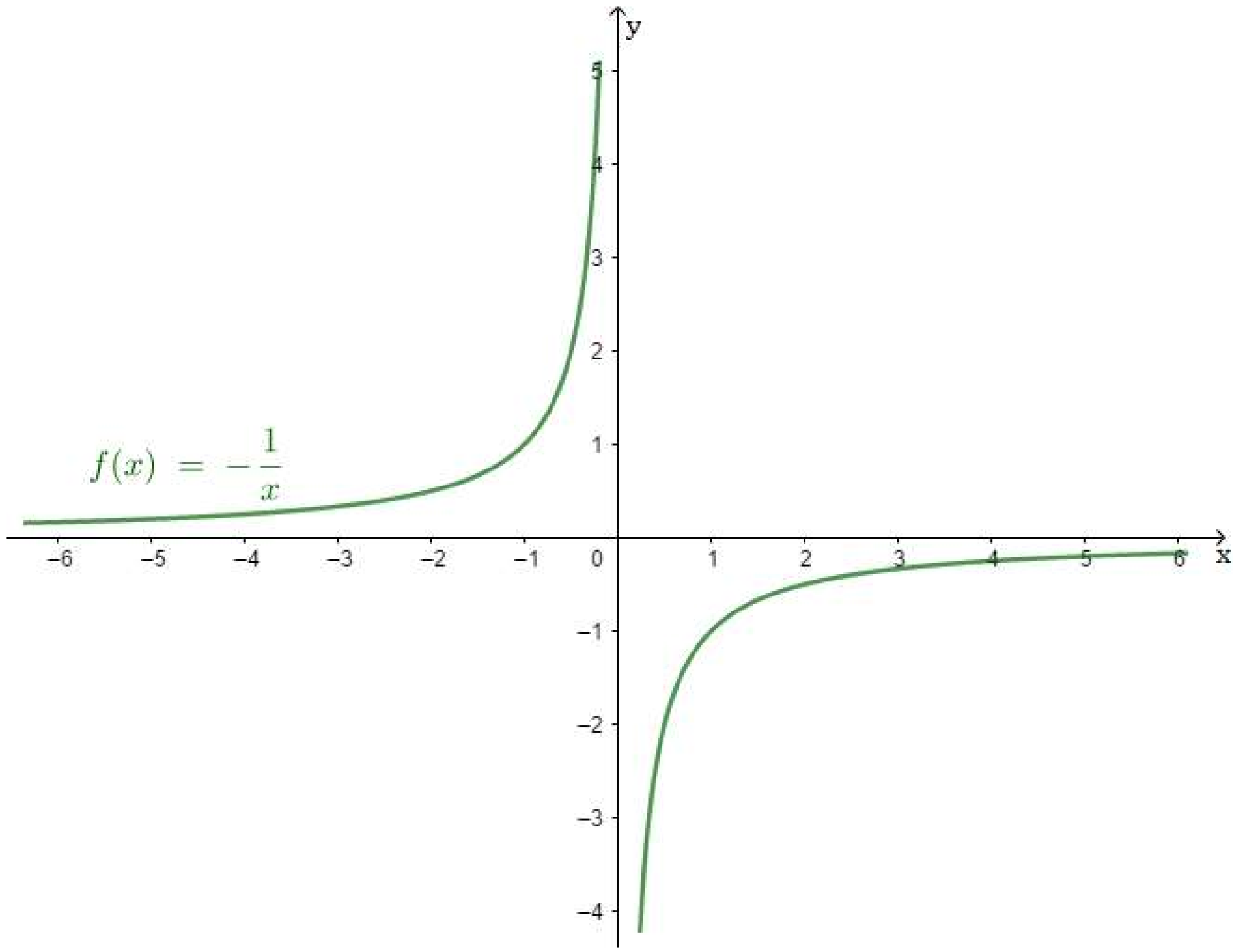
f)



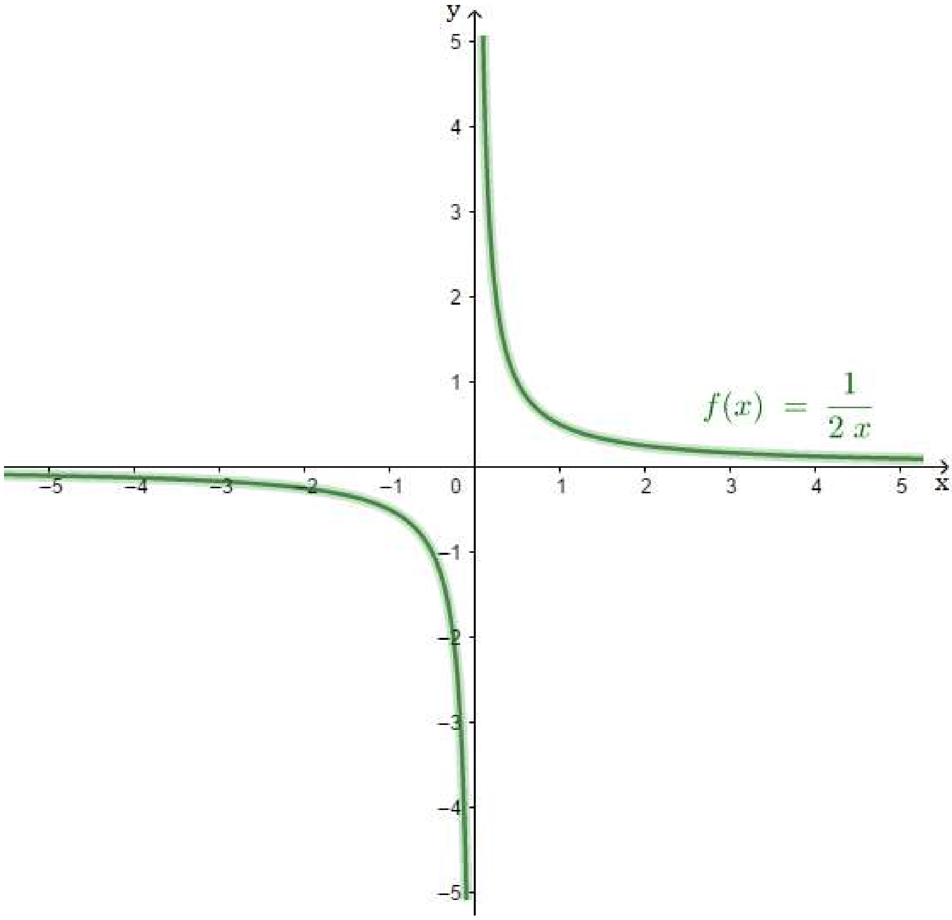
g)


y
5
4
3
2
1
$f(x) = |x - 1|$
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
x

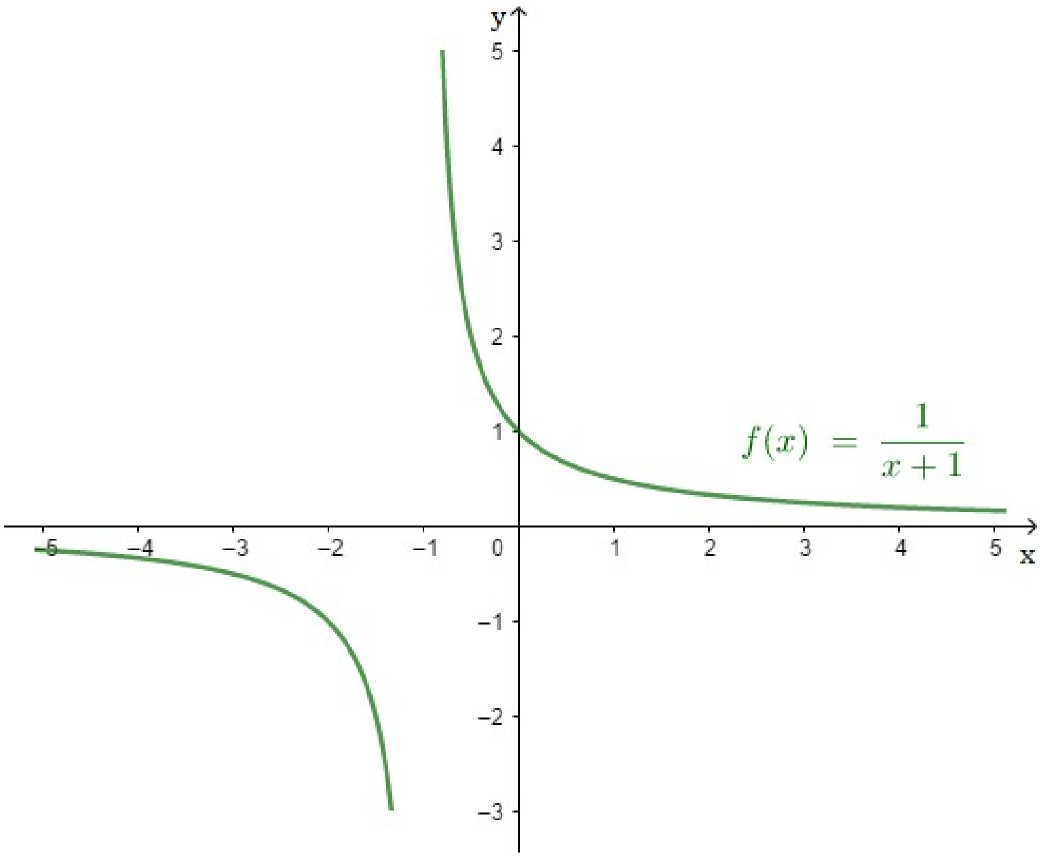
h)


y
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
$f(x) = -\frac{1}{x}$
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
x

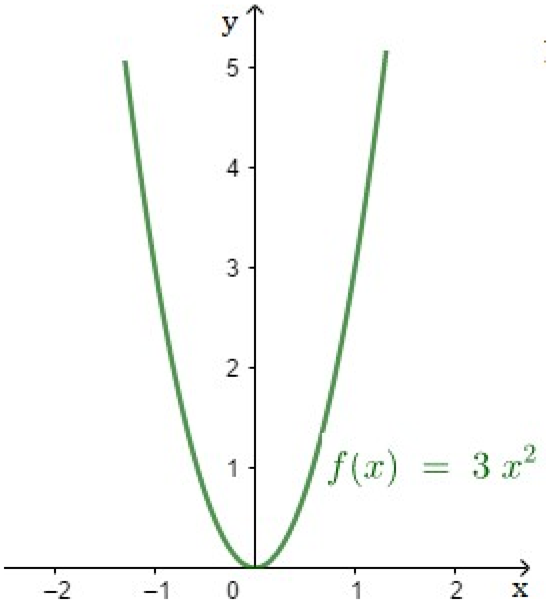
i)



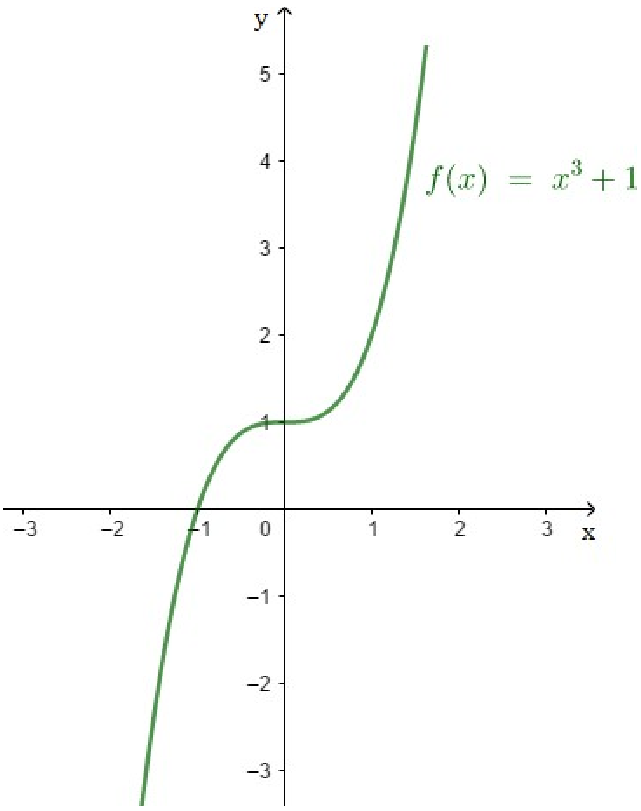
j)



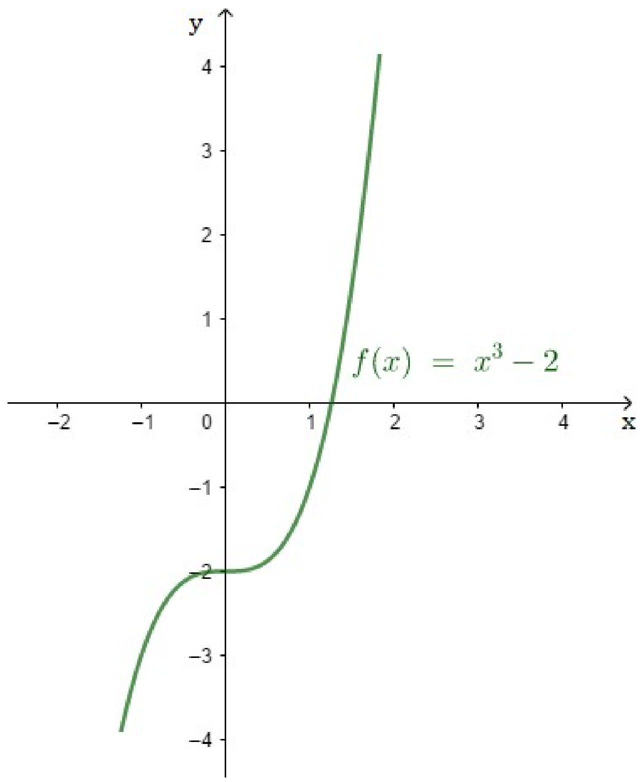
k)



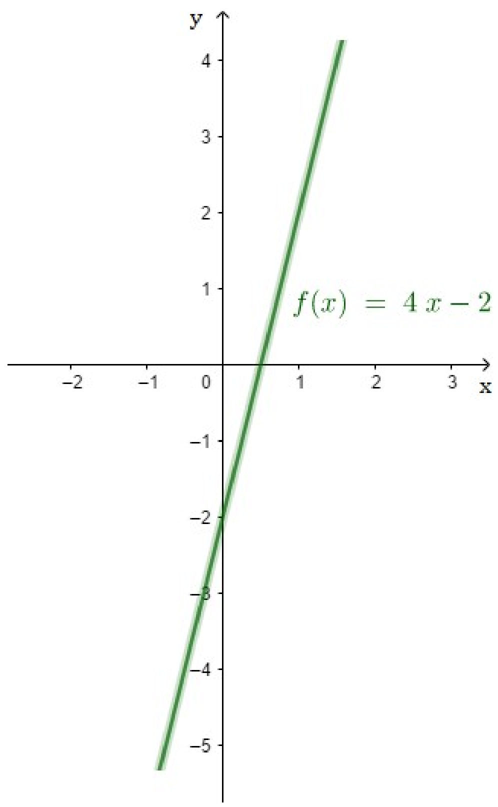
l)



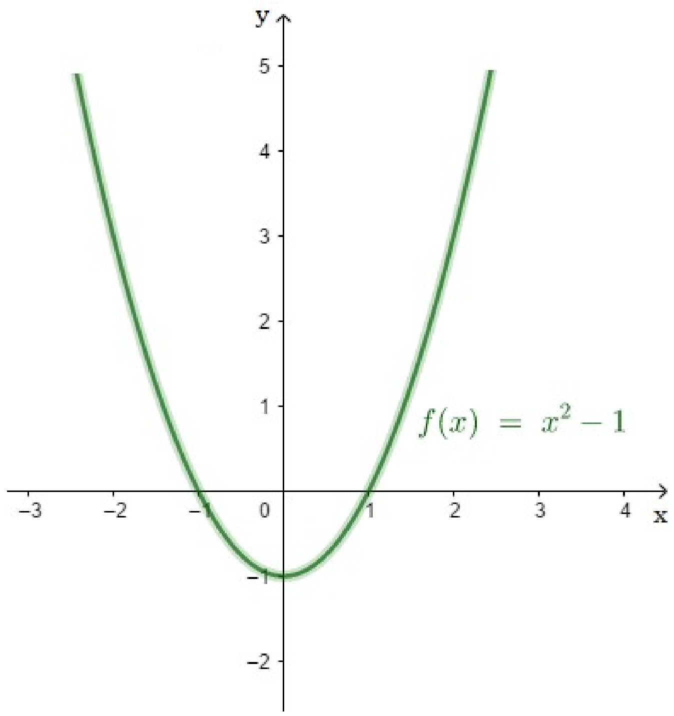
m)



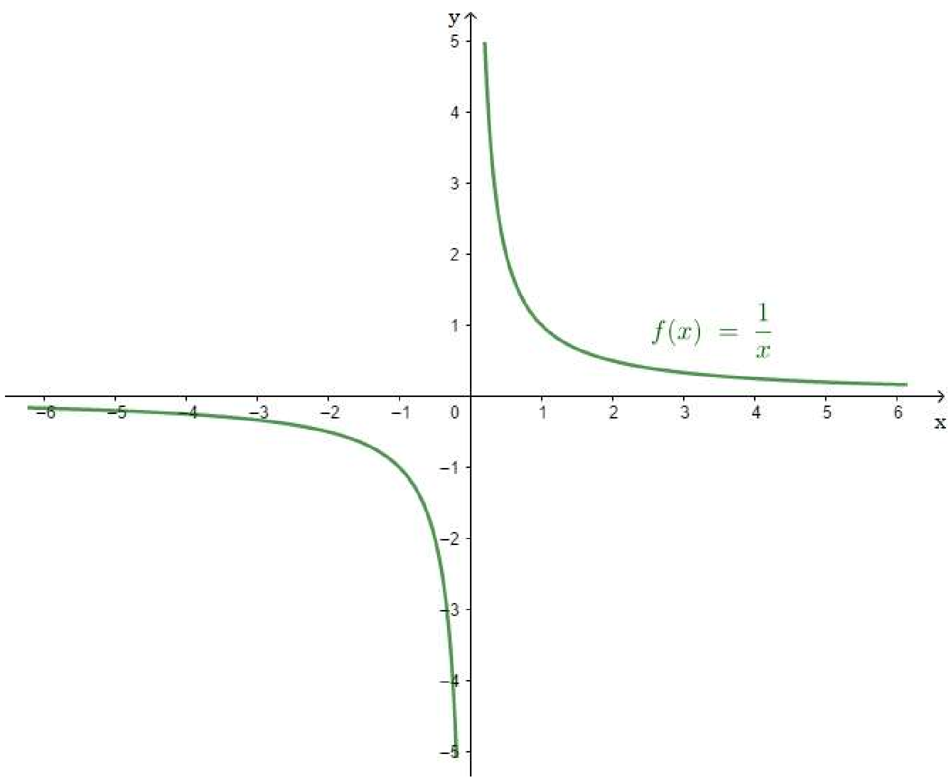
n)



o)



p)



2) $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Capítulo 12

1)

a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 4x - 8$

b) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 8x - 13$

c) $(f \circ g)(2) = 0$

$(g \circ f)(2) = 11$

d) $x = 3$ ou $x = -2$

2)

a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 2x - 2$

b) $(g \circ f)(x) = -2x^2 + 2x + 5$

c) $(f \circ g)(-2) = 18$

$(g \circ f)(-2) = -7$

d) $x = 2$ ou $x = -\frac{3}{2}$

3) $(f \circ g)(x) = x^4 - 6x^2 + 6$

$(g \circ f)(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x$

4)

a) $(f \circ g)(x) = x^2 - 6x + 11$

b) $(g \circ f)(x) = x^2 - 1$

c) $(f \circ f)(x) = x^4 + 4x^2 + 6$

d) $(g \circ g)(x) = x - 6$

5) Sejam as funções $f(x) = x^2 + 2x + 3$ e $g(x) = x^2 + ax + b$.

Por hipótese, temos que $f \circ g = g \circ f$ e com isso iremos mostrar que $f = g$.

Note que:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^2 + 2[g(x)] + 3$$

$$= (x^2 + ax + b)^2 + 2(x^2 + ax + b) + 3$$

$$= x^4 + 2ax^3 + 2bx^2 + 2abx + a^2x^2 + b^2 + 2x^2 + 2ax + 2b + 3$$

$$= x^4 + 2ax^3 + x^2(2b + a^2 + 2) + x(2ab + 2a) + b^2 + 2b + 3$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + a.[f(x)] + b$$

$$= (x^2 + 2x + 3)^2 + a.(x^2 + 2x + 3) + b$$

$$= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3x^2 + 6x + 9 + ax^2 + 2ax + 3a + b$$

$$= x^4 + 4x^3 + x^2(3 + 4 + 3 + a) + x(6 + 6 + 2a + 3a) + 9 + 3a + b$$

$$= x^4 + 4x^3 + x^2(10 + a) + x(12 + 5a) + 9 + 3a + b$$

Como $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ vamos comparar parte por parte desta igualdade

$$\begin{cases} x^4 = x^4 \\ 2ax^3 = 4x^3 \Rightarrow a = 2 \\ x^2(2b + a^2 + 2) = x^2(10 + a) \Rightarrow 2b + 6 = 12 \Rightarrow b = 3 \\ b^2 + 2b + 3 = 9 + 3a + b \Rightarrow 18 = 18 \end{cases}$$

Então $g(x) = x^2 + ax + b = x^2 + 2x + 3 = f(x)$.

■ Q.E.D

6)

a) $D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2} \ \ ou \ \ x \geq 2\}$

b) $D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

7)

a) $D(f \circ g) = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$

$(f \circ g)(x) = \frac{2x+4}{2x+1}$

b) $D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

$(g \circ f)(x) = \frac{5x-4}{x-2}$

8) $[(h \circ g) \circ f]\,(x) = 12x^2 + 12x + 2$

9) Se $f(x) = 3x - 5$, então, trocando x por $g(x)$, temos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3 \,.\, g(x) - 5$$

Mas é dado que: $(f \circ g)(x) = x^2 - 3$, então

$$3 \,.\, g(x) - 5 = x^2 - 3$$

Logo,

$$g(x) = \frac{x^2 + 2}{3}$$

10) $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 4}{2}$

11)

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x^2 + 4x, & x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x + 3, & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 9, & x \geq 2 \\ 4x - 3, & x < 2 \end{cases}$$

12)

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x + 1, & x > 2 \\ 1 - 4x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ x^4 + x^2, & x < -1 \ ou \ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 4x - 2, & x > \frac{5}{4} \\ -16x^2 + 24x - 8, & 0 \leq x \leq \frac{5}{4} \\ x^2 - 3x + 3, & x < 0 \end{cases}$$

13)

$$(f)(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1, & x \geq -1 \\ 2x + 9, & x < -1 \end{cases}$$

14)

a) III

b) IV

c) II

d) I

e) III

f) III

g) II

15)

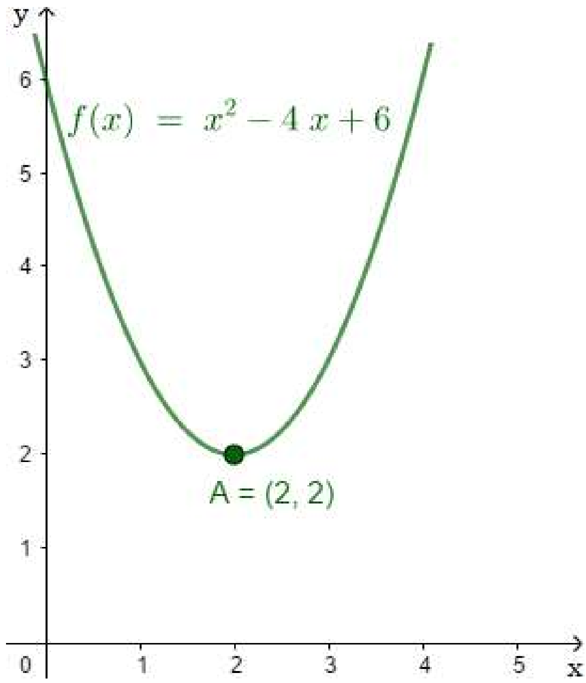
a) Injetora

b) Sobrejetora

c) Bijetora

d) Não é injetora e nem sobrejetora

16) $b = 2$



17) $a = \frac{3}{4}$

18) $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 5\}$.

Essa função não é Injetiva, pois $f(1) = 1$ e $f(2) = 1$.

Capítulo 13

1)

a) $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

b) $g^{-1}(x) = \frac{3x-1}{4}$

c) $h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$

d) $p^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x-2}$

e) $q^{-1}(x) = x^3 - 2$

f) $r^{-1}(x) = x^3 + 1$

g) $s^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

2) $f^{-1}(2) = 0$

3) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$

4) Não, pois *f* não é injetora; por exemplo: $f(-1) = f(1) = 1$. Portanto f não é bijetora.

5)

$f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-$

$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

6)

a)

$f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

b)

$f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to A$

$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$

c)

$f^{-1}: \mathbb{R}_- \to A$

$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x}$

d)

$f^{-1}: \mathbb{R}_- \to A$

$f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{-x}$

e)

$f^{-1}: B \to \mathbb{R}_-$

$f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$

f)

$f^{-1}: B \to \mathbb{R}_+$

$f^{-1}(x) = \sqrt{4-x}$

g)

$f^{-1}: B \to \mathbb{R}_-$

$f^{-1}(x) = -\sqrt{x+1}$

7)

a) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{2\}$

$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

8)

a) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{3\}$

$f^{-1}(x) = \frac{3x+3}{x-1}$

b) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$

$f^{-1}(x) = \frac{3-x}{x-2}$

c) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{3\}$

$f^{-1}(x) = \frac{3x+4}{x+1}$

d) $f^{-1}: \mathbb{R} - \frac{5}{3} \to \mathbb{R} - \frac{1}{3}$

$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3x-5}$

e) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R}$

$f^{-1}(x) = \frac{2}{x-4}$

f) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{3\}$

$f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{x-3}$

9) $a = -1$

10) $a = \frac{17}{7}$

11) $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x-1}{6}$

12)

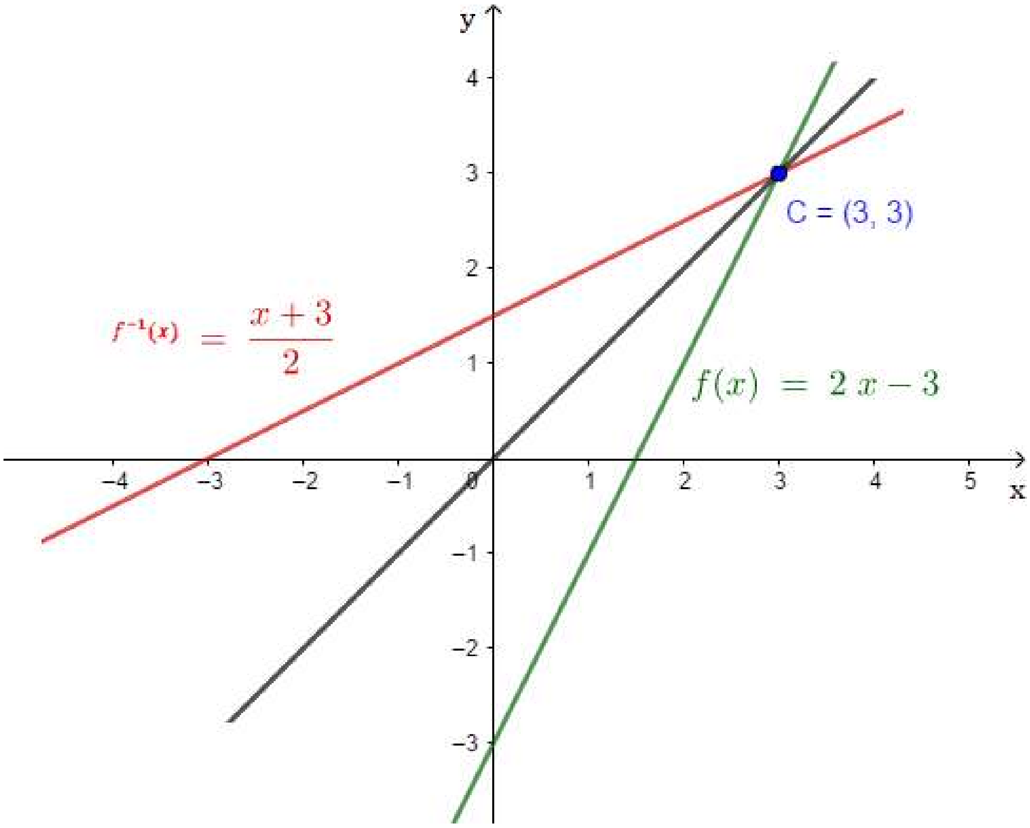
a) $(g \circ f)^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x+2}{12}$

b) $(g \circ f)^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

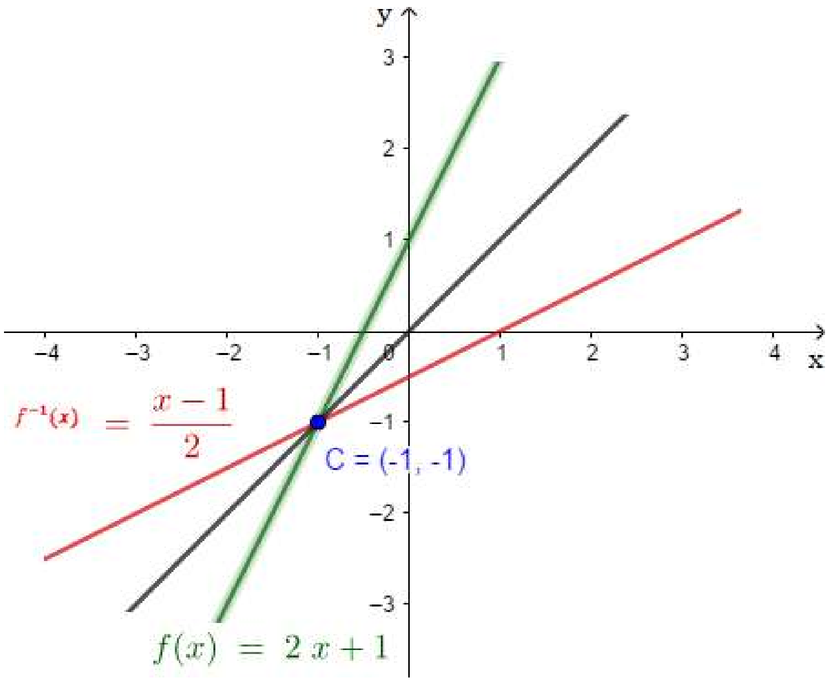
$(g \circ f)^{-1}: (x) = \sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}$

13)

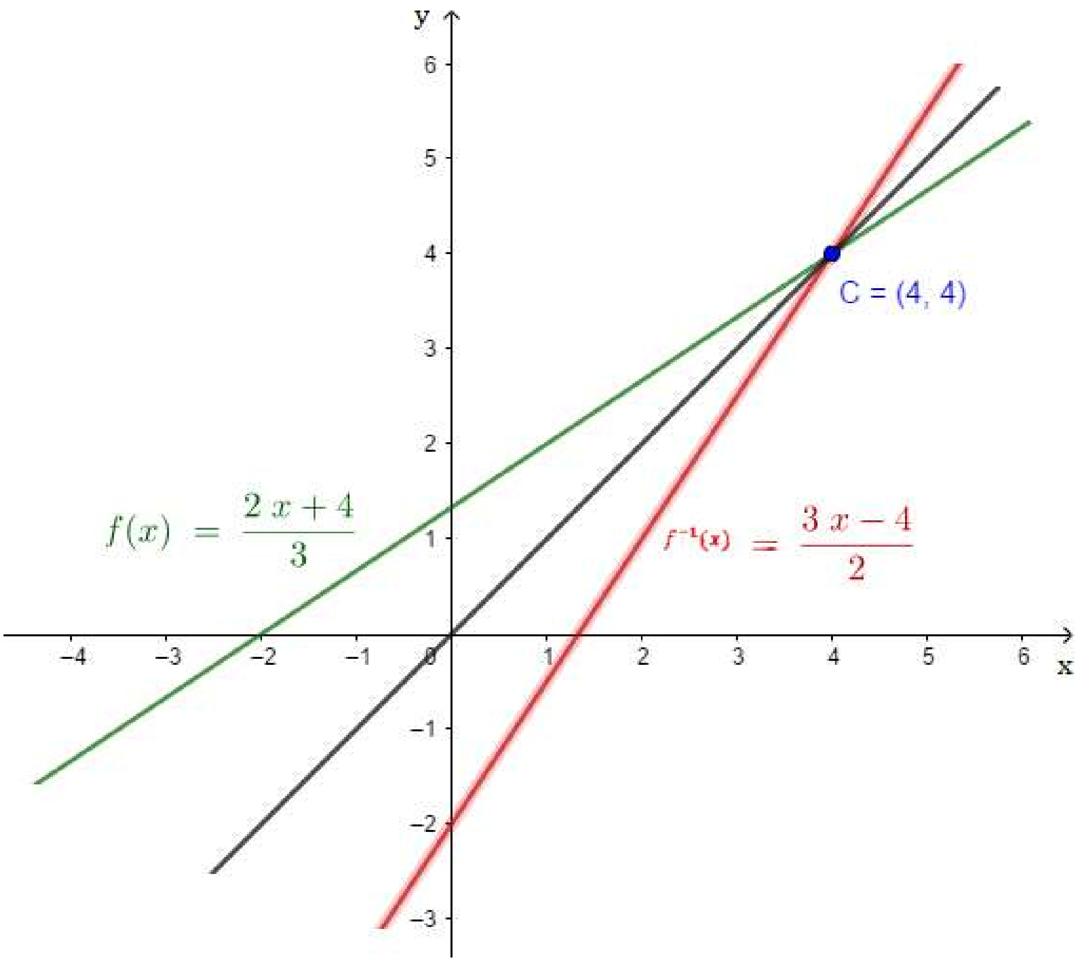


14)

a)



b)



15)

a) (Injetora) Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$.

Assim, temos que:

$$3 \,.\, x_1 - 4 = 3 \,.\, x_2 - 4$$

$$3 \,.\, x_1 = 3 \,.\, x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Portanto, f é injetora.

(Sobrejetora) Seja $y = 3x - 4$ temos que:

$$x = \frac{y+4}{3}$$

Assim, temos que

$$f(x) = f\left(\frac{y+4}{3}\right) = 3 \cdot \frac{y+4}{3} - 4 = y$$

Logo, $y \in \mathbb{R}$, $\exists\ x = \frac{y+4}{3}$ tal que $f\left(\frac{y+4}{3}\right) = y$.

Portanto, f é sobrejetora.

$$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$$

b) (Injetora) Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$.

Assim, temos que:

$$x_1^3 = x_2^3$$

$$x_1 = x_2$$

Portanto, f é injetora.

(Sobrejetora) Seja $y = x^3$ temos que:

$$x = \sqrt[3]{y}$$

Assim, temos que:

$$f(x) = f(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$$

Logo, para $y \in \mathbb{R}$, $\exists\ x = \sqrt[3]{y}$ tal que $f(\sqrt[3]{y}) = y$.

Portanto, f é sobrejetora.

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

Volume 6

Capítulo 14

1)

a) 2^{99}

b) 2^{51}

c) $3^6 = 729$

2)

$$\begin{aligned}
8x^2 &= 3 \cdot 2^2 - (3^{-2})^{-1} + (0,2)^{-3} \\
8x^2 &= 12 - 3^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \\
8x^2 &= 12 - 9 + 5^3 \\
8x^2 &= 128 \\
x^2 &= 16.
\end{aligned}$$

Portanto, $x = 4$ ou $x = -4$.

3)

$$\begin{aligned}
\frac{4^3 \cdot 2^{-3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot 3^{-2}}{5 \cdot (1,2)^{-1}} &= \\
\frac{2^6 \cdot 2^{-3} + 3^4 \cdot 3^{-2}}{5 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-1}} &= \\
\frac{2^3 + 3^2}{5 \cdot \frac{5}{6}} &= \\
\frac{17 \cdot 6}{25} &= \frac{102}{25}.
\end{aligned}$$

4) $a = 25$ e $b = \frac{1}{2}$

Portanto, $a^b = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

5) Alternativa A.

6)

a) Como a temperatura do congelador é $-18°C$, então $T_A = -18$.

Se $T(90) = 0$, temos que:

$$0 = -18 + \alpha \, . \, 3^{\,90\beta}$$

Ou seja,

$$3^{\,90\beta} = \frac{18}{\alpha}$$

Se $T(270) = -16$, temos que:

$$\begin{aligned}
-16 &= -18 + \alpha \cdot 3^{270\beta} \\
\alpha \cdot 3^{270\beta} &= 2 \\
\alpha \cdot \left(3^{90\beta}\right)^3 &= 2 \\
\alpha \cdot \left(\frac{18}{\alpha}\right)^3 &= 2 \\
\alpha^2 &= \frac{18^3}{2} \\
\alpha^2 &= 18^2 \cdot 9 \\
\alpha &= 54.
\end{aligned}$$

Como α é positivo, temos que $\alpha = 54$, então, temos que:

$$\begin{aligned}
0 &= -18 + 54 \cdot 3^{90\beta} \\
54 \cdot 3^{90\beta} &= 18 \\
3^{90\beta} &= \frac{18}{54} \\
3^{90\beta} &= 3^{-1} \\
90\beta &= -1 \\
\beta &= -\frac{1}{90}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
T_A + 54 \cdot 3^{-\frac{t}{90}} &= \frac{2}{3} + T_A \\
54 \cdot 3^{-\frac{t}{90}} &= \frac{2}{3} \\
3^{-\frac{t}{90}} &= \frac{1}{81} \\
3^{-\frac{t}{90}} &= 3^{-4} \\
-\frac{t}{90} &= -4 \\
t &= 360 min.
\end{aligned}$$

7) $a^{16} . b^{11}$

8)

a) $a^{13} . b^{12}$

b) $a^{10} . b^{2}$

c) $a^{18} . b^{12}$

d) $a^{10} . b^{10}$

e) $a^{5} . b^{14}$

f) $\frac{a^{6}}{b^{5}}$

g) a^{5}

h) a^{n+4}

i) a^{2n+4}

j) $\frac{a-1}{a}$

9) $a = 0$ ou $b = 0$.

10) 3 150.

11)

a) $\begin{cases} x+1, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2, & x > -2 \\ 0, & x = -2 \\ -x-2, & x < -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-3, & x > \frac{3}{2} \\ 0, & x = \frac{3}{2} \\ 3-2x, & x < \frac{3}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-3, & x > 3 \\ 0, & x = 3 \\ 3-x, & x < 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+1, & x > -\frac{1}{2} \\ -x, & x = -\frac{1}{2} \\ x, & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$

12)

a) $2\sqrt{5}$

b) 2

c) $\sqrt{2}$

d) $\sqrt[8]{5} = 5^{\frac{1}{8}}$

e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

13) O índice será 12, pois é o menor múltiplo de 2, 3 e 4.

Assim, temos que:

$$\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}$$

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$

14)

a) 33

b) $9 - 4\sqrt{2}$

c) $37 - 20\sqrt{3}$

d) $67 + 12\sqrt{7}$

e) 1

15) Dica: $y = \sqrt{x^2 - 1}$

Assim, temos que:

$$\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = \frac{4xy}{x^2 - y^2} = \frac{4x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - (\sqrt{x^2 - 1})^2} = 4x \cdot \sqrt{x^2 - 1}$$

16) Sabemos que:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)} - \left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

Então temos que:

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$$

Assim, temos que:

$$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{2a \cdot \frac{a+b}{2\sqrt{\cancel{ab}}}}{\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)} - \left(\frac{b}{a}\right)\right) + \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}}$$

$$= \frac{\frac{a^2+ab}{\sqrt{ab}}}{\frac{\sqrt{\cancel{ab}}}{2\sqrt{ab}}\cdot\left(\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right) - \left(\frac{b}{a}\right)}\right) + \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}}$$

$$= \frac{\frac{a^2+ab}{\sqrt{ab}}}{\frac{a-b}{2\sqrt{ab}} + \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}} = \frac{\frac{a^2+ab}{\sqrt{ab}}}{\frac{a}{\sqrt{ab}}} = a+b$$

17) Temos que:

$$\frac{5}{8-3\sqrt{7}} = 40 + 15\sqrt{7}$$

$$\frac{12}{\sqrt{7}+3} = -6\sqrt{7} + 18$$

Na subtração temos que:

$$\frac{12}{-} - \quad \sqrt{7} \quad + 3$$

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{5}{8-3\sqrt{7}}$$

$\equiv$

$= -6\sqrt{7} + 18 - (40 + 15\sqrt{7}) = -22 - 21\sqrt{7}$

18)

$$\frac{3\sqrt[3]{5}}{20}$$

19) 6^n

20) 1

Capítulo 15

1) Temos dois pontos $(0, 2)$ e $(1, 6)$. Se substituirmos o primeiro ponto na função, obtemos $k = 2$ e se substituirmos o segundo, obtemos $a = 3$.

2) Temos que:

$$f(0) = k \,.\, a^x = 2\,000 \;\Rightarrow k = 2\,000$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2000 \,.\, a^{\frac{1}{2}} = 4\,000 \;\Rightarrow a = 4$$

Portanto, após 2 horas temos que:

$$f(2) = 2000 \,.\, 4^2 = 32\,000\; bactérias$$

3) Após 20 minutos (um terço da hora) temos que:

$$p\left(\frac{1}{3}\right) = 40 \,.\, 2^{3 \,.\, \frac{1}{3}} = 40 \,.\, 2 = 80\; mil\; unidades$$

Alternativa D.

4) Tomando $y = 2^{x^2}$ temos que:

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

As raízes são:

$$y_1 = 1 \ \ e \ \ y_2 = 4$$

Assim, temos que:

$$2^{x^2} = 1 \ \Rightarrow x_1 = 0$$

$$2^{x^2} = 4 \ \Rightarrow x_2 = -\sqrt{2} \ \ e \ \ x_3 = \sqrt{2}$$

Logo, a soma das raízes positivas é igual a $\sqrt{2}$.

Alternativa C.

5) Dica: Dividir toda a equação por 9^x.

Assim, temos que:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2$$

Tomando $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$ temos que:

$$y^2 + y - 2 = 0$$

As raízes são:

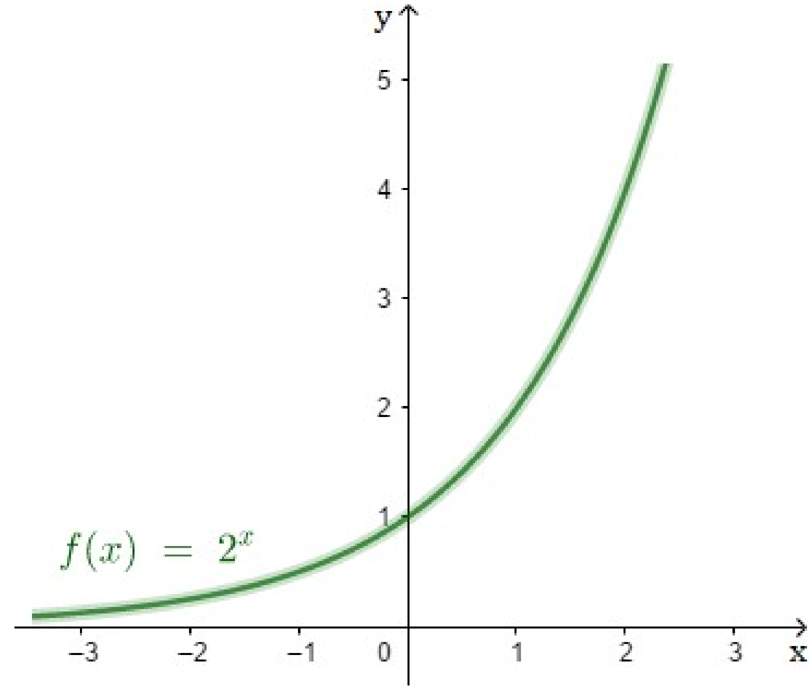
$$y_1 = -2 \ \ e \ \ y_2 = 1$$

Assim, temos que:

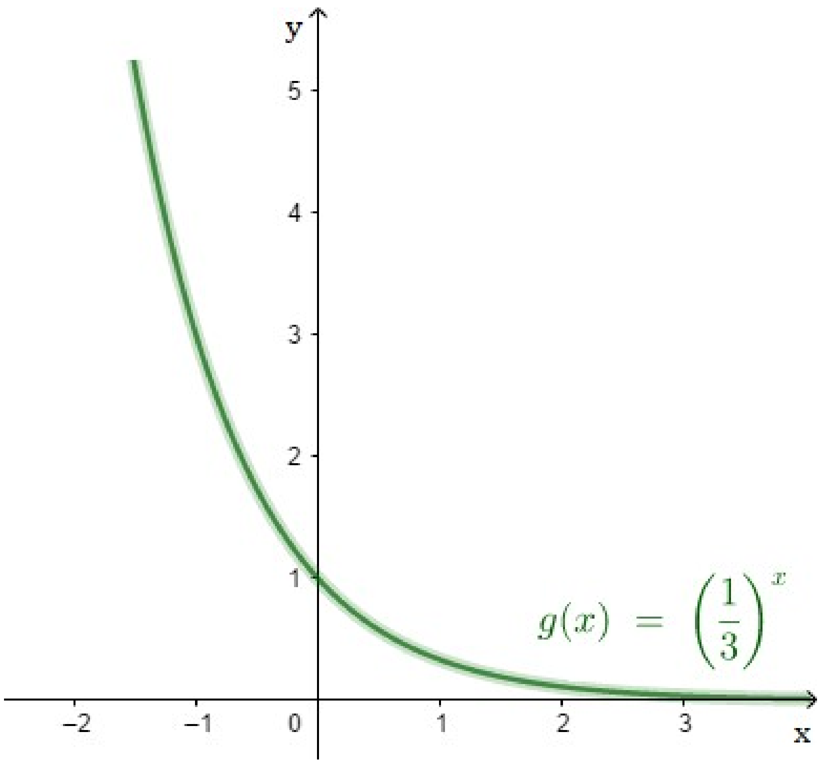
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

6)

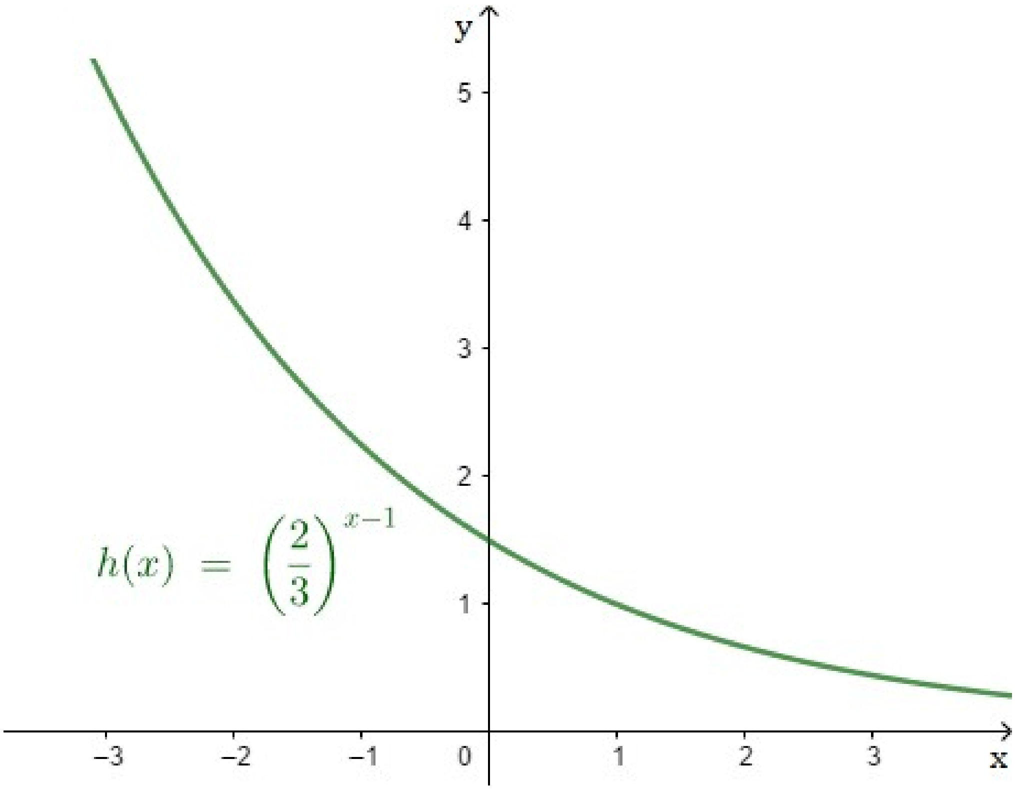
a)



b)

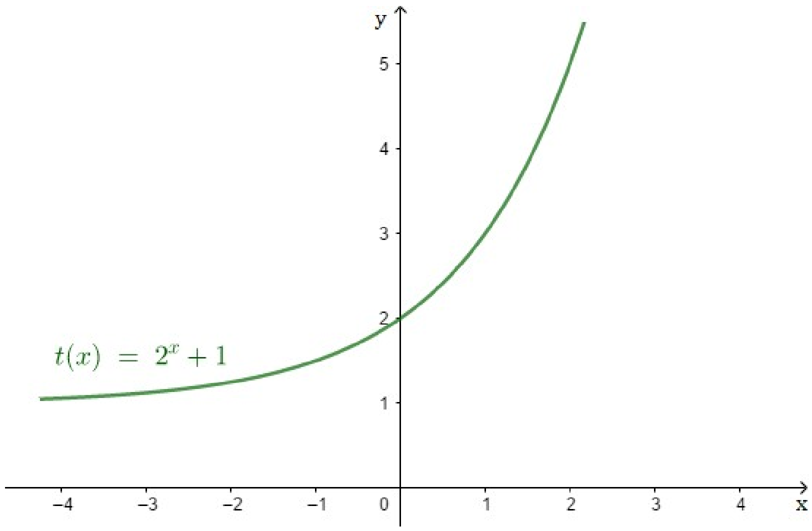


c)



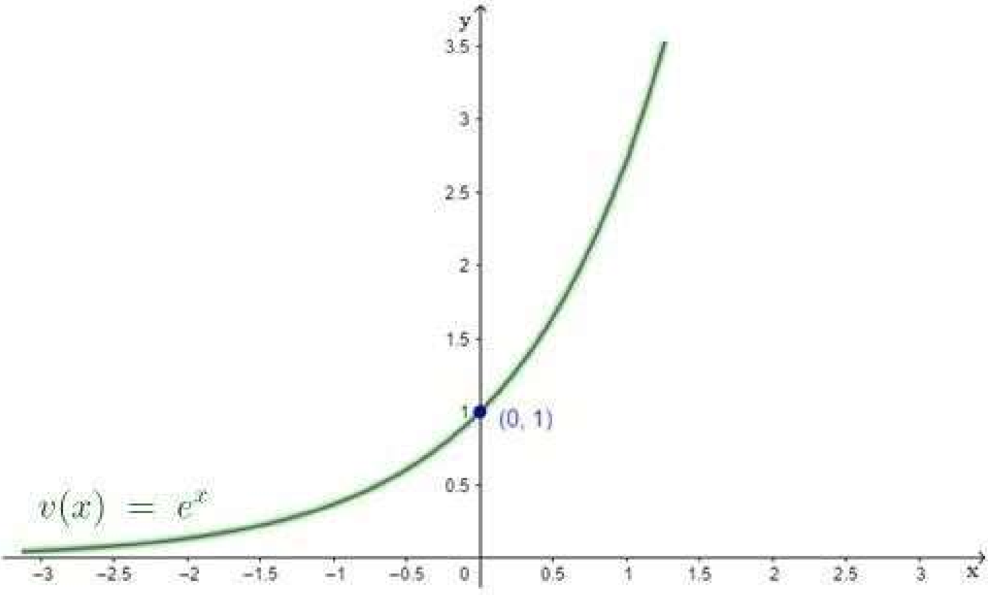
y
5
4
3
2
1
$h(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}$
−3
−2
−1
0
1
2
3
x

d)



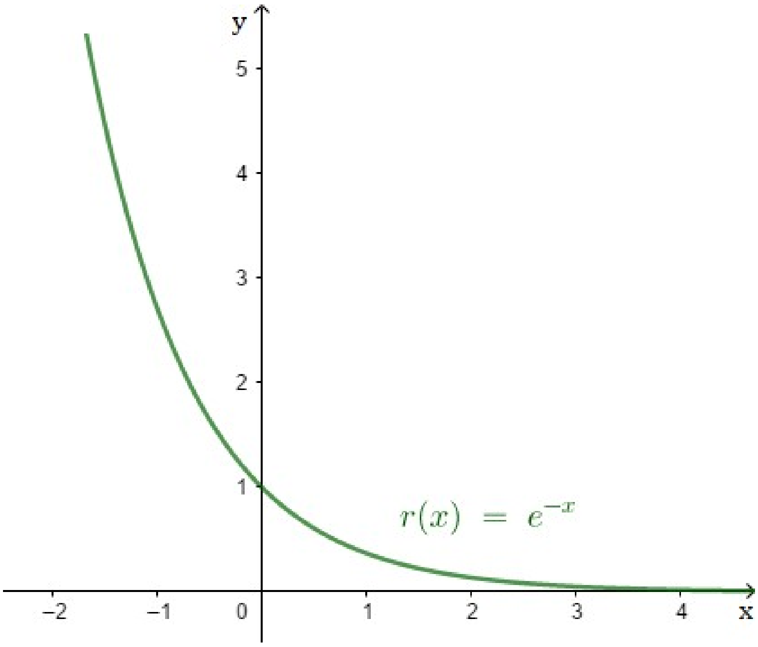
y
5
4
3
2
1
$t(x) = 2^x + 1$
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
x

e)



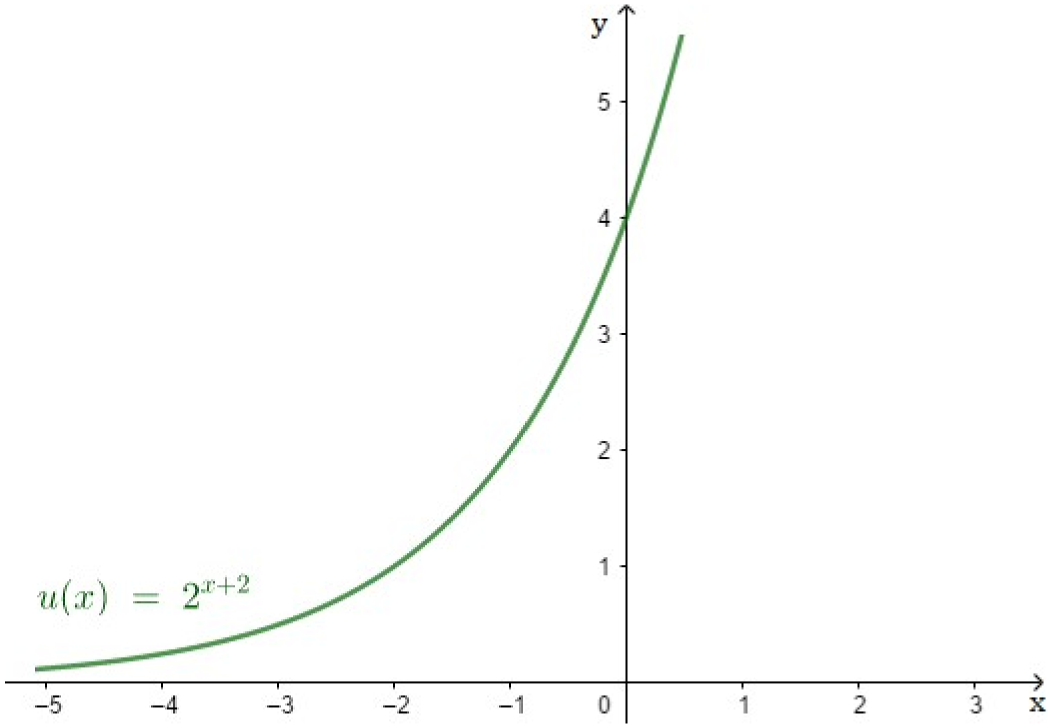
y
3.5
3
2.5
2
1.5
1
(0, 1)
0.5
$v(x) = e^x$
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
x

f)

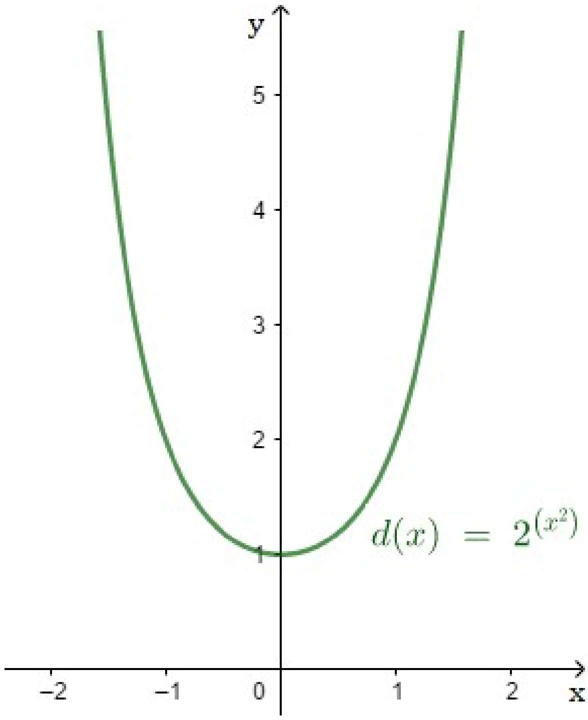


y
5
4
3
2
1
$r(x) = e^{-x}$
−2
−1
0
1
2
3
4
x

g)



h)



7) $S = \{(-\frac{5}{2}, 1)\}$

8) $(x\,.\,y)^3 = 64$

9)

a) **Dica:** Tome $y = 2^x$.

Assim, temos que:

$$y^2 - y - 56 = 0 \Leftrightarrow y = 8 \; ou \; y = -7$$

Como, $y = -7$ não vale, então temos que:

$$2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$$

Portanto, $S = \{3\}$.

b) $(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2 - x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$.

Portanto, $S = \{2, -1\}$.

c) $S = \{\emptyset\}$.

d) **Dica:** Tome $y = 2^x$.

Assim, temos que:

$$4y^2 - 9y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \; ou \; y = \frac{1}{4}$$

Então, temos que:

$$2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \;\; ou \;\; 2^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -2$$

Portanto, $S = \{1, -2\}$.

e) **Dica:** Coloque 2^{x-1} em evidência.

Assim, temos que:

$$2^{x-1} + 2^{x} + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} = 120 \Leftrightarrow$$

$$- 2^{x-1}(1 + 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4) = 120 \Longleftrightarrow$$

$$- 2^{x-1}.\ 15 = 120 \Longleftrightarrow 2^{x-1} = 8 \Longleftrightarrow$$

$$- 2^{x-1} = 2^3 \Longleftrightarrow x - 1 = 3 \Longleftrightarrow x = 4$$

Portanto, $S = \{4\}$.

10)

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 8\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 0\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2}\ \ ou\ \ x > 3\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid\ \frac{1}{5} \leq\ x\ \leq 1\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{2}{3}\ \ ou\ \ x > 4\}$

Avaliação do Volumes 5 e 6

1)

a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 2x - 2$

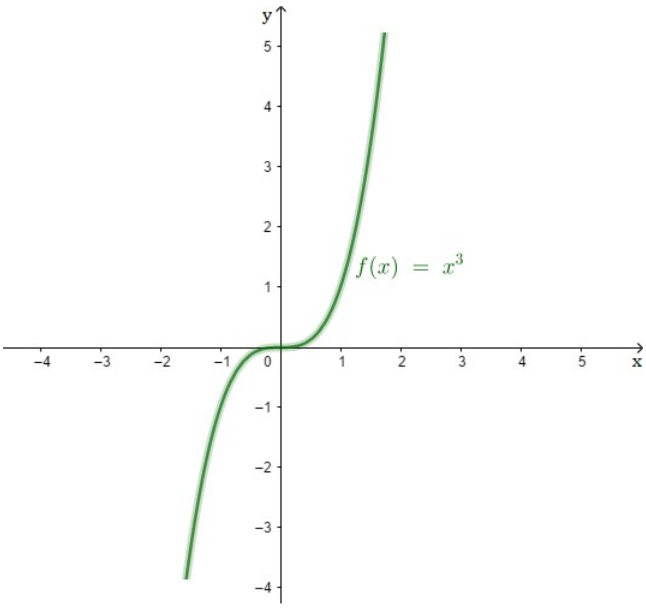
b) $(g \circ f)(x) = -2x^2 + 2x + 5$

c) $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = -2$

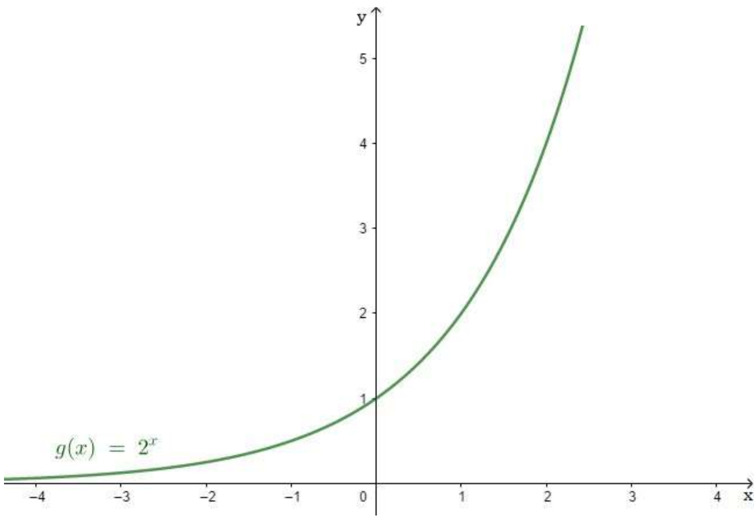
$(g \circ f)(-2) = -35$

2)

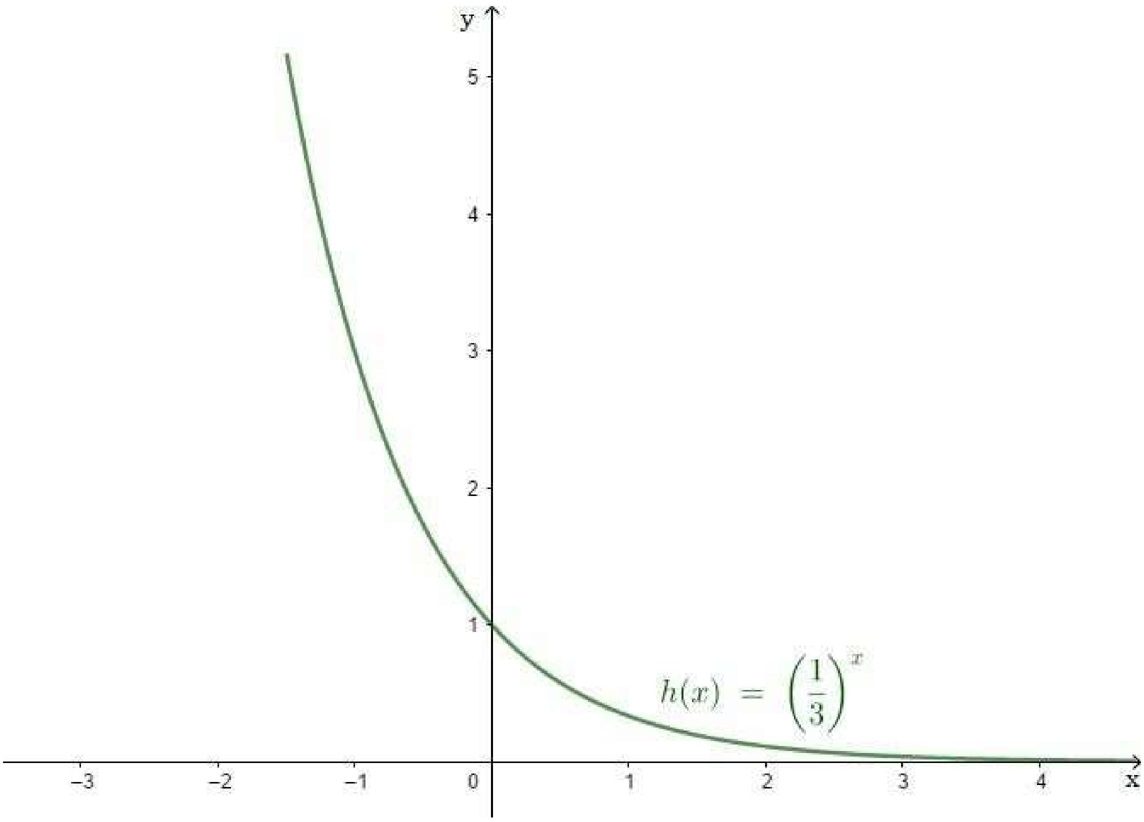
a)



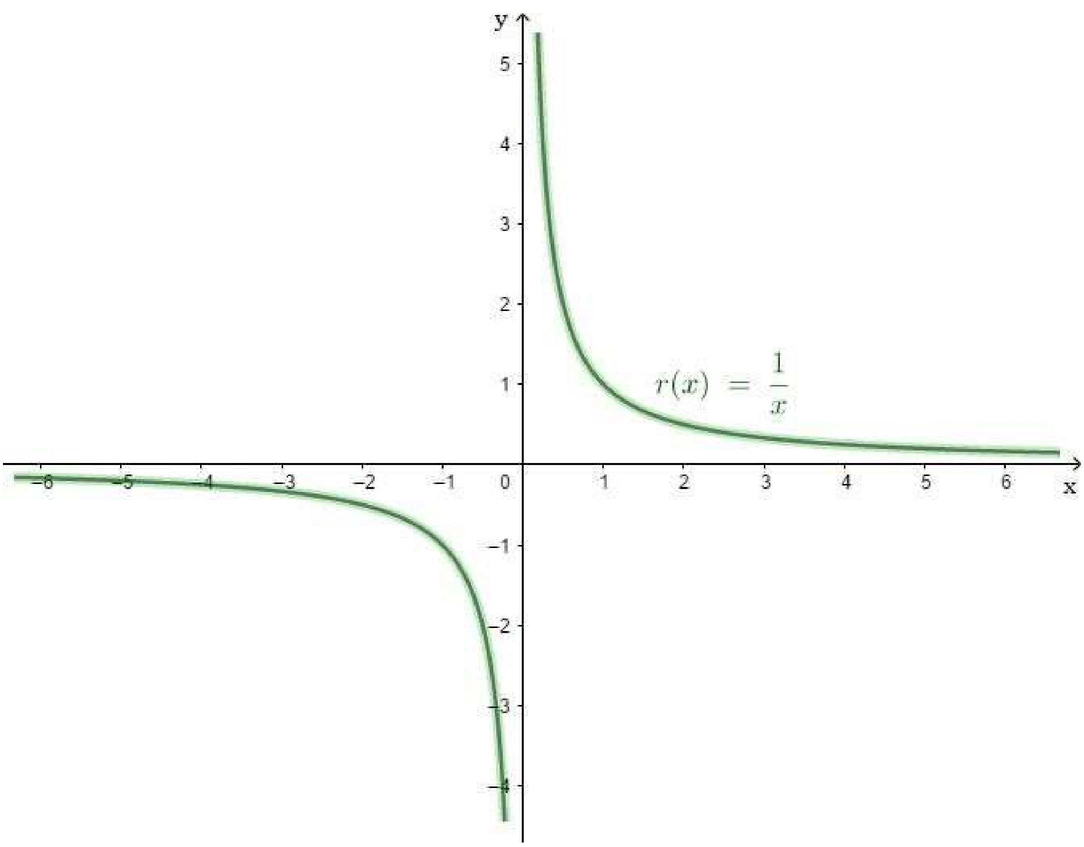
b)



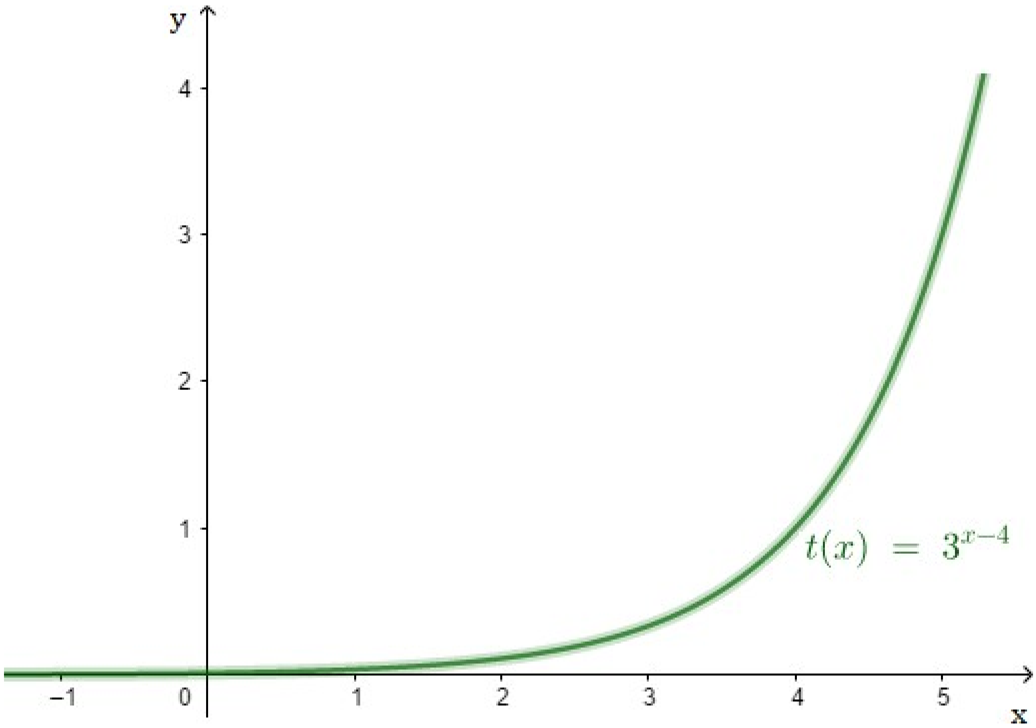
c)


y
5
4
3
2
1
$h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
x

d)


y
5
4
3
2
1
$r(x) = \frac{1}{x}$
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
x
−1
−2
−3
−4

e)



3)

$$(f)(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1, & x \geq -1 \\ 2x + 9, & x < -1 \end{cases}$$

4) $a = \frac{17}{7}$

5)

a) **(Injetora)** Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$.

Assim, temos que:

$$3 \,.\, x_1 - 4 = 3 \,.\, x_2 - 4$$

$$3 \,.\, x_1 = 3 \,.\, x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Portanto, f é injetora.

(Sobrejetora) Seja $y = 3x - 4$ temos que:

$$x = \frac{y+4}{3}$$

Assim, temos que:

$$f(x) = f\left(\frac{y+4}{3}\right) = 3 \cdot \frac{y+4}{3} - 4 = y$$

Logo, $y \in \mathbb{R}$, $\exists\, x = \frac{y+4}{3}$ tal que $f\left(\frac{y+4}{3}\right) = y$.

Portanto, f é sobrejetora.

$$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$$

b) **(Injetora)** Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$.

Assim, temos que:

$$x_1^3 = x_2^3$$

$$x_1 = x_2$$

Portanto, f é injetora.

(Sobrejetora) Seja $y = x^3$ temos que:

$$x = \sqrt[3]{y}$$

Assim, temos que:

$$f(x) = f(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$$

Logo, para $y \in \mathbb{R}$, $\exists\, x = \sqrt[3]{y}$ tal que $f(\sqrt[3]{y}) = y$.

Portanto, f é sobrejetora.

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

6) $\frac{7}{8}$

7) $a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$

8)

a) $a = \frac{3}{2}$ e $k = 2$.

b) $f(0) = 2$

$f(3) = \frac{27}{4}$

9) $S = \{1, -2\}$

10) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$

Volume 7

Capítulo 16

1)

a) $\log_2 \frac{1}{8} = x \Rightarrow 2^x = \frac{1}{8} = 2^{-3} \Rightarrow x = -3$

b) $\log_8 4 = x \Rightarrow 2^x = 4 = 2^2 \Rightarrow x = 2$

c) $\log_{0,25} 32 = x \Rightarrow 0{,}25^x = 32 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 2^5 \Rightarrow 2^{-2x} = 2^5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

d) $\log_3 \frac{1}{9} = x \Rightarrow 3^x = \frac{1}{9} = 3^{-2} \Rightarrow x = -2$

e) $\log_{81} 3 = x \Rightarrow 81^x = 3 \Rightarrow 3^{4x} = 3^1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

f) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \Rightarrow 2^{-x} = 2^3 \Rightarrow x = -3$

g) $\log_7 \frac{1}{7} = x \Rightarrow 7^x = \frac{1}{7} = 7^{-1} \Rightarrow 7^{-x} \Rightarrow x = -1$

h) $\log_{27} 81 = x \Rightarrow 27^x = 81 \Rightarrow 3^{3x} = 3^4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

i) $\log_{125} 25 = x \Rightarrow 125^x = 25 \Rightarrow 5^{3x} = 5^2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

j) $\log_{\frac{1}{4}} 32 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 32 \Rightarrow 2^{-2x} = 2^5 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

k) $\log_{25} 0{,}008 = x \Rightarrow 25^x = 0{,}008 \Rightarrow 25^x = \frac{8}{1000} \Rightarrow 5^x = \frac{1}{125} = 5^{-3} \Rightarrow x = -3$

l) $\log_9 \frac{1}{27} = x \Rightarrow 9^x = \frac{1}{27} \Rightarrow 3^x = 3^{-3} \Rightarrow x = -3$

m) $\log_{0,01} 0{,}001 = x \Rightarrow 0{,}01^x = 0{,}001 \Rightarrow 10^{-2x} = 10^{-3} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

n) $\log_{\sqrt{8}} \sqrt{32} = x \Rightarrow \sqrt{8}^{\,x} = \sqrt{32} \Rightarrow 2^{\frac{3x}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

$\frac{3x}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{9}$

o) $\log_{\sqrt{27}} \sqrt{9} = x \Rightarrow \sqrt{27} \quad = \sqrt{9} \Rightarrow 3 \ _{2} = 3 \ _{3} \Rightarrow$

p) $\text{antilog}_3\, 4 = x \Rightarrow \log_3 x = 4 \Rightarrow x = 3^4 \Rightarrow x = 81$

q) $\text{antilog}_3\, -2 = x \Rightarrow \log_3\, x = -2 \Rightarrow x = 3^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

2)

$$\log_4(\log_3 9) + \log_2(\log_{81} 3) + \log_{0,8}(\log_{16} 32)$$

$$\log_4 2 + \log_2 \frac{1}{4} + \log_{0,8} \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{2} + (-2) + (-1) = -\frac{5}{2}$$

$$\log_4(\log_3 9) + \log_2(\log_{81} 3) + \log_{0,8}(\log_{16} 32)$$

$$\log_4 2 + \log_2 \frac{1}{4} + \log_{0,8} \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{2} + (-2) + (-1) = -\frac{5}{2}$$

3)

$$R_1 - R_2 = \log_{10} \left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

$$8 - 6 = \log_{10} \left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

$$\log_{10} \left(\frac{M_1}{M_2}\right) = 2$$

$$\frac{M_1}{M_2} = 10^2 = 100$$

4)

$$A = 5^{\log_{25} 2} = 5^{\frac{\log 2}{\log 25}}$$

$$\log_5 A = \log_5 5^{\frac{\log 2}{\log 25}}$$

$$\log_5 A = \frac{\log 2}{\log 25} . \log_5 5$$

$$\frac{\log A}{\log 5} = \frac{\log 2}{\log 25} . 1$$

$$\frac{\log A}{}$$ log

$$5 = \frac{\log 2}{2 \,.\, \log 5}$$

$$\log A = \frac{1}{2} . \log 2$$

$$\log A = \log 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\log A = \log \sqrt{2}$$

$$A = \sqrt{2}$$

Então, temos que:

$$A^3 = (\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} . \sqrt{2} . \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

5)

$$4^{\log_2 A} + 2A - 3 = 0$$

$$(2^2)^{\log_2 A} + 2A - 3 = 0$$

$$2^{2 \log_2 A} + 2A - 3 = 0$$

$$2^{\log_2 A^2} + 2A - 3 = 0$$

$$A^2 + 2A - 3 = 0$$

Resolvendo a equação, obtemos:

$$A = 1 \; e \; A = -3$$

Como $A > 0$, temos que:

$$A = 1$$

6)

$$\log 144 = \log(2^4 . 3^2) = \log 2^4 + \log 3^2 = 4 \log 2 + 2 \log 3 = 4 . (0,3) + 2 . (0,48)$$
$$= 1,2 + 0,96 = 2,16$$

7)

$$\log 300 = \log(3\,.\,100) = \log 3 + \log 100 = 0{,}48 + 2 = 2{,}48$$

8)

$$\log_{2\sqrt{3}} 144 = x$$

$$\log_{\sqrt{12}} 144 = x$$

$$\sqrt{12}^{\,x} = 144$$

$$\sqrt{12}^{\,x} = \left(\sqrt{144}\right)^2$$

$$\sqrt{12}^{\,x} = \left(\sqrt{12\,.\,12}\right)^2$$

$$\sqrt{12}^{\,x} = \left(\sqrt{12}\right)^4$$

$$x = 4$$

9)

$$\log_x \sqrt{2} = -1$$

$$x^{-1} = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{x} = \sqrt{2}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

10) Usando a definição de logaritmo, temos que:

$$\log_2 N = 5 \Rightarrow N = 2^5$$

Portanto, alternativa D.

11)

$$\log 30 - \log 3 = \log(3\,.\,10) - \log 3 = \log 3 + \log 10 - \log 3 = \log 10 = 1$$

Portanto, alternativa E.

12)

$$\log_{\frac{1}{2}} x = -3 \Rightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$$

Resolvendo a expressão $\sqrt[3]{x} + x^2$, temos que:

$$\sqrt[3]{x} + x^2 = \sqrt[3]{8} + 8^2 = 2 + 64 = 66$$

Portanto, alternativa E.

13)

$$\frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log 4} \cdot \frac{\log 4}{\log 5} \cdot \frac{\log 5}{\log 6} \cdot \frac{\log 6}{\log 7} \cdot \frac{\log 7}{\log 8} \cdot \frac{\log 8}{\log 9} \cdot \frac{\log 9}{\log 10} = \frac{\log 2}{\log 10} = \log 2$$

14) A cultura de bactéria cresce exponencial, tal que $f(x) = k\,.\,a^x$, sendo x o tempo em horas, k uma constante e f a quantidade de bactérias.

Sabemos, que $f(0) = k\,.\,a^0 = 2\,000$, então $k = 2\,000$ e $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2000\,.\,a^{\frac{1}{2}} = 4\,000$, onde $a = 4$.

Assim, para termos 500 000 bactérias, temos que:

$$500\,000 = 2000\,.\,4^t$$

$$250 = 4^t$$

$$\log 250 = \log 4^t$$

$$\log(2 \,.\, 5^3) = \mathrm{t} \,.\, \log 4$$

$$\log 2 + 3 \log 5 = 2t \log 2$$

$$0{,}3 + 3 \log \frac{10}{2} = 2t \,.\, 0{,}3$$

$$0{,}3 + 3(\log 10 - \log 2) = 0{,}6t$$

$$0{,}3 + +3 - 0{,}9 = 0{,}6t$$

$$t = \frac{2{,}4}{0{,}6} = 4$$

Portanto, será necessário que tenhamos 4 horas para uma população de $500\ 000$.

15)

$$\log_x(x + 6) = 2$$

$$x^2 = x + 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Resolvendo a equação, obtemos:

$$x = 3 \; e \; x = -2$$

Como $x > 0$, temos que:

$$x = 3$$

Capítulo 17

1)

a) Crescente.

b) Crescente.

c) Decrescente.

d) Decrescente.

e) Crescente.

f) Decrescente.

g) Decrescente.

h) Crescente.

i) Decrescente.

j) Decrescente.

2)

a)

$$3x - 9 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

b)

$$x - 4 \neq 1 \Rightarrow x \neq 5$$

$$x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid (x > 4) - \{5\}\}$

c)

$$x^2 - 7x > 0 \Rightarrow x < 0 \; ou \; x > 7$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid (x < 0) \cup (x > 7)\}$

d)

$$x^2 - 9 > 0 \Rightarrow x < -3 \ ou \ x > 3$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid (x < -3) \cup (x > 3)\}$

3)

$$\log_4(-x^2 + 10x - 15) = 0$$

$$-x^2 + 10x - 15 = 4^0$$

$$-x^2 + 10x - 15 = 1$$

$$-x^2 + 10x - 16 = 0$$

Resolvendo a equação, temos que:

$$x = 2 \quad e \quad x = 8$$

Portanto, a soma das raízes é $2 + 8 = 10$.

4)

a) $f(3) = \log_3 9 = x \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$

b) $g(81) = \log_3 \frac{1}{81} = x \Rightarrow 3^x = \frac{1}{81} = 3^{-4} \Rightarrow x = -4$

c) Resolvendo $f(9)$, temos que:

$$f(9) = \log_3 27 = x \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow x = 3$$

Assim, temos que:

$$gof(9) = g(f(9)) = \log_3 \frac{1}{3} = x \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow x = -1$$

5) As alturas dos retângulos são $\log_2 2 = 1$ e $\log_2 4 = 2$.

Logo, a soma das áreas é $1 \,.\, 1 + 1 \,.\, 2 = 1 + 2 = 3$.

6)

a) $f(x) = \log_5 x$

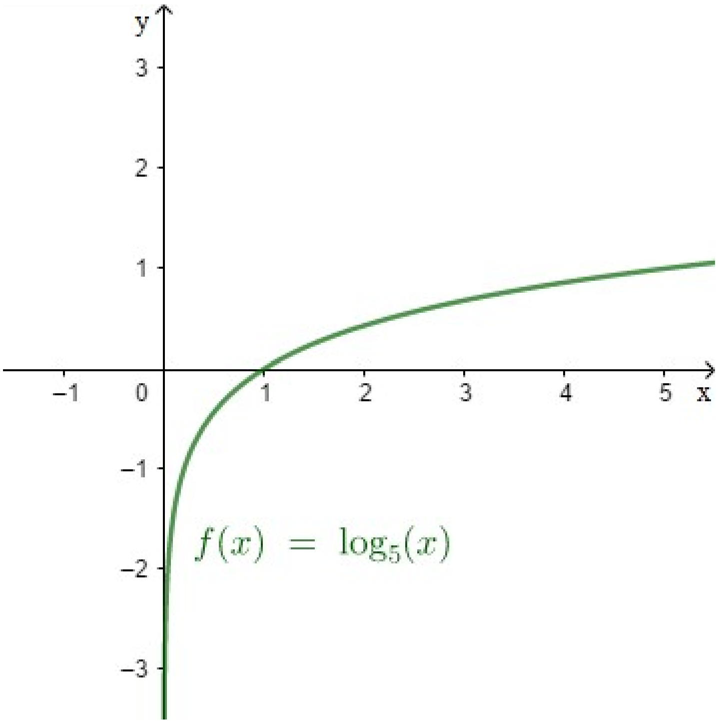


Figura 1

b) $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

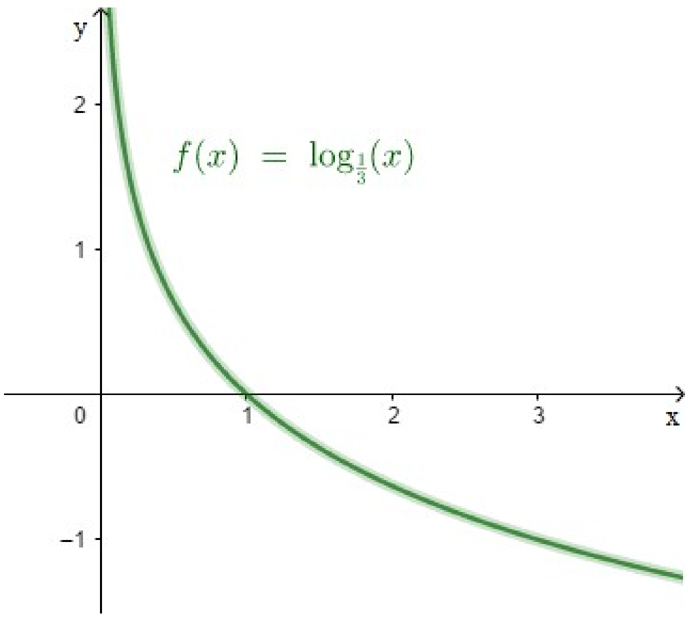


Figura 2

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$

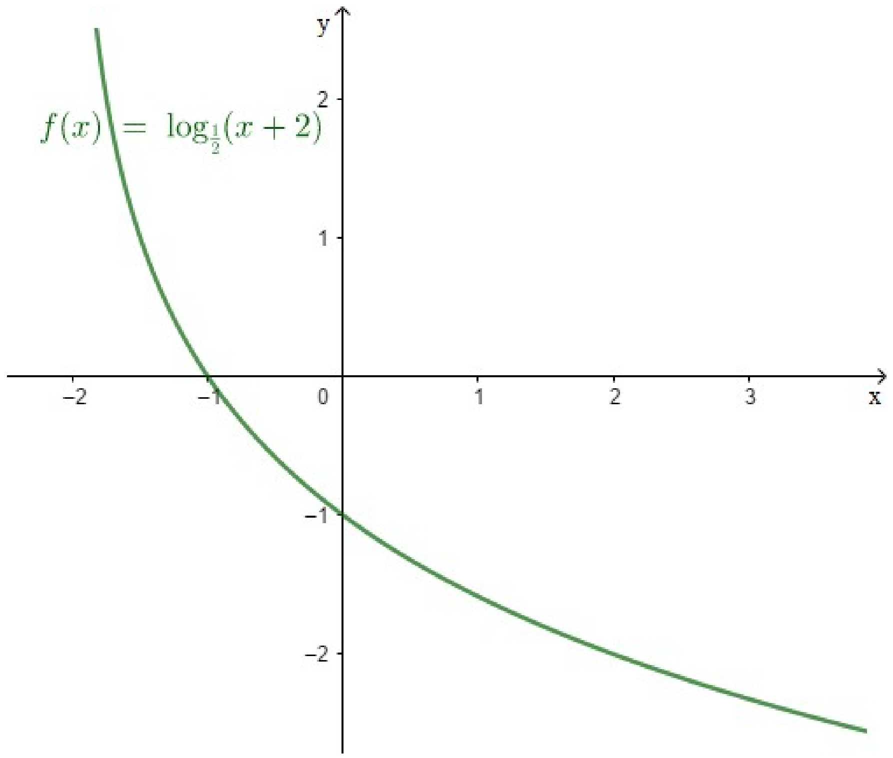


Figura 3

Capítulo 18

1)

a) $\log_4(3x + 2) = \log_4(2x + 5) \Rightarrow 3x + 2 = 2x + 5 \Rightarrow x = 3$

b)

$$\log_{\frac{1}{2}}(5x^2 - 3x - 11) = \log_{\frac{1}{2}}(3x^2 - 2x - 8) \Rightarrow 5x^2 - 3x - 11 = 3x^2 - 2x - 8$$
$$\Rightarrow 2x^2 - x + 3 = 0$$

Resolvendo a equação, temos que:

$$x = \frac{3}{2} \quad e \quad x = -1$$

Porém, substituindo os dois valores de x, obtemos:

$$5x^2 - 3x - 11 < 0$$

Portanto, $S = \emptyset$.

c)

$$\log_2(5x^2 - 14x + 1) = \log_2(4x^2 - 4x - 20) \Rightarrow 5x^2 - 14x + 1 = 4x^2 - 4x - 20 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0$$

Resolvendo a equação, temos que:

$$x = 7 \quad e \quad x = 3$$

Substituindo os dois valores de x, obtemos:

$$5x^2 - 3x - 11 > 0$$

Portanto, $S = \{3,\ 7\}$.

d) $\log_5(4x - 3) = 1 \Rightarrow 4x - 3 = 5^1 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$

e) $\log_{\sqrt{2}}(3x^2 + 7x + 3) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 7x + 3 = \sqrt{2}^0 \Rightarrow 3x^2 + 7x + 2 = 0$

Resolvendo a equação, temos que:

$$x = -\frac{1}{3} \quad e \quad x = -2$$

Substituindo os dois valores de x, obtemos:

$$3x^2 + 7x + 3 > 0$$

Portanto, $S = \{-\frac{1}{3},\ -2\}$.

f) $\log_3(\log_2 x) = 1 \Rightarrow \log_2 x = 3^1 = 3 \Rightarrow x = 2^3 \Rightarrow x = 8$

g)

$\log_{\frac{1}{4}}\{\log_3[\log_2(3x-1)]\} = 0 \Rightarrow \log_3[\log_2(3x-1)] = \frac{1}{4}^0 = 1 \Rightarrow \log_2(3x-1) = 3^1 = 3 \Rightarrow 3x-1 = 8$

Resolvendo a equação, obtemos:

$$x = 3$$

Portanto, $S = \{-\frac{1}{3},\ -2\}$

h) $x^{\log_x(x-5)^2} = 9 \Rightarrow (x-5)^2 = 9 \Rightarrow x-5 = \pm 3$

Dividindo em dois casos, temos:

$$x - 5 = 3 \Rightarrow x = 8$$

$$x - 5 = -3 \Rightarrow x = 2$$

Portanto, $S = \{2,\ 8\}$.

i) Tomando $\log_4 x = y$, temos que:

$$\log_4^2 x - 2 \,.\, \log_4 x - 3 = 0$$

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

Resolvendo a equação, temos que:

$$y = 3 \;\; e \;\; y = -1$$

Substituindo os dois valores de y, obtemos:

$$\log_4 x = 3 \Rightarrow x = 4^3 = 64$$

$$\log_4 x = -1 \Rightarrow x = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

Portanto, $S = \{\frac{1}{4},\ 64\}$.

4

j) Tomando $\log_4 x = y$, temos que:

$$2 \,.\, \log_4^2 x + 2 = 5 \,.\, \log_4 x$$

$$2y^2 + 2 = 5y$$

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

Resolvendo a equação, temos que:

$$y = 2 \quad e \quad y = \frac{1}{2}$$

Substituindo os dois valores de y, obtemos:

$$\log_4 x = 2 \Rightarrow x = 4^2 = 16$$

$$\log_4 x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

Portanto, $S = \{2,\ 16\}$.

k) Tomando $\log x = y$, temos que:

$$\frac{1}{5 - \log} + \frac{2}{1 + \log x} = 1$$

$$\frac{1}{5 - y} + \frac{2}{1 + y} = 1$$

$$\frac{1 + y + 2(5 - y)}{(5 - y)(1 + y)} = 1$$

$$1 + y + 10 - 2y = 5 + 5y - y - y^2$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

Resolvendo a equação, temos que:

$$y = 3 \quad e \quad y = 2$$

Substituindo os dois valores de y, obtemos:

$$\log x = y = 3 \Rightarrow x = 10^3 = 1\,000$$

$$\log x = y = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100$$

Portanto, $S = \{100,\ 1\,000\}$.

l) Tomando $\log x = y$, temos que:

$$\frac{1 - \log x}{2 + \log x} - \frac{1 + \log x}{2 - \log x} = 2$$

$$\frac{1 - y}{2 + y} - \frac{1 + y}{2 - y} = 2$$

$$\frac{(1 - y)(2 - y) + (-1 - y)(2 + y)}{(2 + y)(2 - y)} = 2$$

$$2y^2 - 6y - 8 = 0$$

Resolvendo a equação, temos que:

$$y = 4 \ \ e \ \ y = -1$$

Substituindo os dois valores de y, obtemos:

$$\log x = y = 4 \Rightarrow x = 10^4 = 10\,000$$

$$\log x = y = -1 \Rightarrow x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

Portanto, $S = \{100,\ 1\,000\}$.

2)

$$(\log_{\frac{1}{2}} x)\ .\ \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{32} = \frac{5}{3}$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} x)\ .\ \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} x) = 1$$

$$x = \frac{1}{2}^{1} = \frac{1}{2}$$

3)

$$\log_x(2x + 3) = 2$$

$$2x + 3 = x^2$$

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

Resolvendo a equação, temos que:

$$x = 3 \ \ e \ \ x = -1$$

Substituindo os dois valores de x, obtemos:

$$\log_x(2x + 3) = \log_x 1$$

$$\log_x(2x + 3) = \log_x 9$$

Portanto, $S = \{3\}$.

Capítulo 19

1) Resolva as inequações:

a) Como $a > 1$, temos que:

$$\log_3 4 > \log_3(5x - 2) \Rightarrow 4 > 5x - 2 > 0 \Rightarrow \frac{6}{5} > x > \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{2}{5} < x < \frac{6}{5}$$

b) Como $0 < a < 1$, temos que:

$$\log_{0,3}(4x - 3) < \log_{0,3} 5 \Rightarrow 0 < 5 < 4x - 3 \Rightarrow 4x - 3 > 5 \Rightarrow x > 2$$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) > \log_{\frac{1}{2}}(3x + 9) \Rightarrow 0 < x^2 - 1 < 3x + 9$

Temos dois casos a serem estudados:

1º Caso: $x^2 - 1 > 0$

$$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x < -1 \; ou \; x > 1$$

2º Caso: $x^2 - 1 < 3x + 9$

$$x^2 - 1 < 3x + 9 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 < 0$$

Resolvendo a equação $x^2 - 3x - 10$, temos que:

$$x = -2 \quad e \quad x = 5$$

Analisando os dois casos, temos a interseção como solução:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \; ou \; 1 < x < 5\}$$

d) $\log_2(3x + 5) > 3 \Rightarrow 3x + 5 > 2^3 = 8 \Rightarrow x > 1$

e) $\log_{\frac{1}{3}}(4x - 3) \geq 2 \Rightarrow 0 < 4x - 3 < \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow 3 < 4x < \frac{28}{9} \Rightarrow \frac{3}{4} < x < \frac{7}{9}$

f)

$$\log(x^2 + 3x + 3) > 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 3 > 10^0 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 > 0$$

Resolvendo a equação $x^2 + 3x + 2 = 0$, temos que:

$$x = -1 \quad e \quad x = -2$$

Fazendo um esboço do gráfico, temos que:

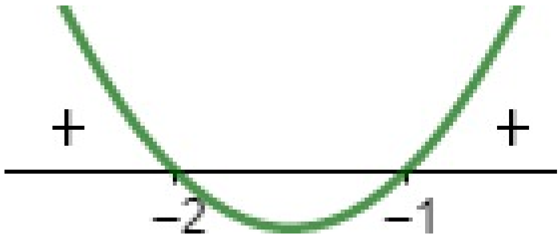


Figura 4

Portanto,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \ ou \ x > -1\}$$

g) Temos dois casos a serem estudados:

1º Caso: $2 < \log_2(3x + 1)$

$$\log_2(3x + 1) > 2 \Rightarrow 3x + 1 > 2^2 = 4 \Rightarrow 3x > 3 \Rightarrow x > 1$$

2º Caso: $\log_2(3x + 1) < 4$

$$\log_2(3x + 1) < 4 \Rightarrow 3x + 1 < 2^4 = 16 \Rightarrow 3x < 15 \Rightarrow x < 5$$

Analisando os dois casos, temos a interseção como solução:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$$

h) Temos dois casos a serem estudados:

1º Caso: $\log_{\frac{1}{2}}(2x) > \frac{1}{2}$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x) > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x < \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x < \frac{1}{\sqrt{8}}$$

2º Caso: $\log_{\frac{1}{2}}(2x) < 1$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x) < 1 \Rightarrow 2x > \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x > \frac{1}{4}$$

Analisando os dois casos, temos a interseção como solução:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} < x < \frac{1}{\sqrt{8}}\}$$

2) Como $0 < a < 1$, temos que:

$$\log_a(2x - 3) > 0 \Rightarrow 0 < 2x - 3 < a^0 = 1$$

$$\Rightarrow 3 < 2x < 4$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} < x < 2$$

Capítulo 20

1) Calcule:

a) $\log 23{,}5 = 1 + 0{,}3711 = 1{,}3711$

b) $\log 7{,}84 = 0 + 0{,}8943 = 0{,}8943$

c) $\log 0{,}481 = -1 + 0{,}6821 = -0{,}3179$

d) $\log 0{,}00991 = -3 + 0{,}9961 = -2{,}0039$

e) $\log 0{,}102 = -1 + 0{,}086 = -0{,}914$

f) $\log 500 = 2 + 0{,}6990 = 2{,}6990$

g) $\log 8 = 0 + 0{,}9031 = 0{,}9031$

h) $\log 25 = 1 + 0{,}3979 = 1{,}3979$

i) $\log 77000 = 4 + 0{,}8865 = 4{,}8865$

j) $\log 642 = 2 + 0{,}8075 = 2{,}8075$

2) Tomando $50^{50} = x$, temos que:

$$50^{50} = x \Rightarrow \log_{50} x = 50$$

Fazendo uma mudança de base, temos que:

$$\log_{50} x = \frac{\log x}{\log 50}$$

Assim, temos que:

$$\frac{\log x}{\log 50} = 50$$

$$\log x = 50 \log 50$$

$$\log x = 50 \log \frac{100}{2}$$

$$\log x = 50(\log 100 - \log 2)$$

$$\log x = 50(2 - 0{,}301)$$

$$\log x = 50 \,.\, 1{,}699$$

$$\log x = 84{,}95$$

Portanto, a potência 50^{50} tem 85 algarismos, pois temos que:

$$50^{50} = x = 10^{84{,}95}$$

3) Seja $x = \sqrt[5]{2}$, então temos que:

$$\log x = \log \sqrt[5]{2}$$

$$\log x = \frac{1}{5} \log 2$$

$$\log x = \frac{1}{5} \,.\, 0{,}3010$$

$$\log x = 0{,}0602$$

Analisando o resultado com a Tabela de Mantissa, temos que:

$$x \cong 1{,}15$$

Volume 8

Capítulo 21

1)

r) $5, 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15$

s) $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96$

t) $2, 2^2,\ 2^4,\ 2^8,\ 2^{16},\ 2^{32}$

u) $4,\ 4, -4, -4,\ 4,\ 4$

v) $-2,\ 2^2,\ 2^6,\ 2^{24},\ 2^{120},\ 2^{720}$

2)

a) $1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16$

b) $6,\ 18,\ 54,\ 162,\ 486,\ 1458$

c) $2,\ 6,\ 54,\ 20,\ 30,\ 42$

d) $-2,\ 4, -8,\ 16, -32,\ 64$

e) $1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216$

3)

a) $a_1 = 3$ e $a_n = a_{n-1} + 3, \forall n \geq 2$

b) $b_1 = 1$ e $b_n = 2\ .\ b_{n-1}, \forall n \geq 2$

c) $c_1 = 1$ e $c_n = (-1)^{n-1}, \forall n \geq 2$

d) $d_1 = 5$ e $d_n = d_{n-1} + 1, \forall n \geq 2$

e) $e_1 = 0$ e $e_n = e_{n-1} + 1, \forall n \geq 2$

4) $(4,\ 9,\ 14,\ 19,\ 24, \dots)$

Capítulo 22

1) Temos que:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

Então:

$$(2x + 1) - x = (5x + 7) - (2x + 1)$$

$$x + 1 = 3x + 6$$

$$-2x = 5$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

2) Temos que:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

Então:

$$(a + 1)^2 - a^2 = (a + 5)^2 - (a + 1)^2$$

$$a^2 + 2a + 1 - a^2 = a^2 + 10a + 25 - a^2 - 2a - 1$$

$$2a + 1 = 8a + 24$$

$$-6a = 23$$

$$x = -\frac{23}{6}$$

3) Empregando a notação especial $(x - r, x, \ x + r)$ para a P.A., temos:

$$\begin{cases}(x-r)+x+(x+r)=24 & \mathbf{(1)} \\ (x-r)\,.\,x\,.\,(x+r)=440 & \mathbf{(2)}\end{cases}$$

De (1) obtemos $x = 8$. Substituindo em (2), vem:

$$(8-r)\,.\,8\,.\,(8+r)=440$$

$$512-8r^2=440$$

$$-8r^2=-72$$

$$r^2 = 9$$

$$r = \pm 3$$

Assim, a P.A. procurada é:

$(5, 8, \ 11)$ para $x = 8$ e $r = 3$ ou $(11, \ 8, \ 5)$ para $x = 8$ e $r = -3$.

4) Empregando as informações do problema para a P.A., temos:

$$(x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 = ((x-1) + x + (x+1\ ))^2$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (3x)^2$$

$$3x^3 + 6x = 9x^2$$

Assim, pela equação acima, sabemos que $x = 0$ é uma das soluções.

Vamos continuar desenvolvendo a equação para descobrimos as outras duas equações.

$$3x^3 + 6x = 9x^2$$

$$3x(x^2 + 2) = 9x^2$$

$$x^2 + 2 = 3x$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos:

$$x = 0 \quad ou \;\; x = 2 \quad ou \quad x = 1$$

Portanto, a P.A. procurada é:

$(-1, 0,\ 1)$ para $x = 0$ ou $(1,\ 2,\ 3)$ para $x = 2$ ou $(0,\ 1,\ 2)$ para $x = 1$.

5) Seja $(a,\ a + r,\ a + 2r)$ a P.A., então temos que:

$$\begin{cases} a\,.\,(a+r)\,.\,(a+2r) = (a + [a + r] + [a + 2r])^2 \\ a + (a + r) = a + 2r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^3 + 3a^2r + 2ar^2 - 36a^2 = 0 & (\mathbf{1}) \\ a = r & (\mathbf{2}) \end{cases}$$

Substituindo $(\mathbf{2})$ em $(\mathbf{1})$, temos:

$$a^3 + 3a^2r + 2ar^2 - 36a^2 = 0$$

$$a^3 + 3a^2a + 2aa^2 - 36a^2 = 0$$

$$6a^3 - 36a^2 = 0$$

$$6a^2(a - 6) = 0$$

$$a = 0 \quad ou \quad (a - 6) = 0$$

$$a = 0 \quad ou \quad a = 6$$

Portanto, temos como solução:

$$(0,\ 0,\ 0) \quad ou \quad (6,\ 12,\ 18)$$

6) Empregando a notação especial $(x - 2r,\ x - r,\ x,\ x + r)$ para a P.A., temos:

$$\begin{cases} (x - 3r) + (x - r) + (x + r) + (x + 3r) = 32 & (\mathbf{1}) \\ (x - 3r) \,.\, (x - r) \,.\, (x + r) \,.\, (x + 3r) = 3465 & (\mathbf{2}) \end{cases}$$

De $(\mathbf{1})$ obtemos $x = 8$. Substituindo em $(\mathbf{2})$, temos:

$$(8 - 3r) \,.\, (8 - r) \,.\, (8 + r) \,.\, (8 + 3r) = 3465$$

$$(64 - 9r^2) \,.\, (64 - r^2) = 3465$$

$$9r^4 - 640r^2 + 631 = 0$$

Tomando $y = r^2$, temos que:

$$9r^4 - 640r^2 + 631 = 0$$

$$9y^2 - 640y + 631 = 0$$

Resolvendo a equação, obtemos:

$$y = 1 \quad ou \quad y = \frac{631}{9}$$

Assim, temos que:

$$r = \pm 1 \quad ou \quad r = \pm \frac{\sqrt{631}}{3}$$

Por hipótese, a P.A. possui elementos inteiros apenas. Assim temos:

$$r = \pm 1$$

Portanto, a P.A. procurada é:

$(5, 7, 9, 11)$ para $x = 8$ e $r = 1$ ou $(11, 9, 7, 5)$ para $x = 8$ e $r = -1$.

7) Utilizando a notação $(x - 2r,\ x - r,\ x,\ x + r,\ x + 2r)$, temos:

$$\begin{cases} (x - 2r) + (x - r) + x + (x + r) + (x + 2r) = 25 & (\mathbf{1}) \\ (x - 2r)^3 + (x - r)^3 + x^3 + (x + r)^3 + (x + 2r)^3 = 3\,025 & (\mathbf{2}) \end{cases}$$

De $(\mathbf{1})$, temos $x = 5$.

De $(\mathbf{2})$, temos:

$$(x - 2r)^3 + (x - r)^3 + x^3 + (x + r)^3 + (x + 2r)^3 = 3\,025$$

$$(x^3 - 6x^2r + 12xr^2 - 8r^3) + (x^3 - 3x^2r + 3xr^2 - r^3) + x^3 + (x^3 - 3x^2r + 3xr^2 + r^3) + (x^3 + 6x^2r + 12xr^2 + 8r^3) = 3\,025$$

$$5x^3 + 30xr^2 = 3\,025$$

Como, $x = 5$, temos que:

$$5 \,.\, 5^3 + 30 \,.\, 5r^2 = 3\,025$$

$$150r^2 = 2400$$

$$r^2 = 16$$

$$r = \pm 4$$

Portanto, a P.A. é:

$$(-3,\ 1,\ 5,\ 9,\ 13) \quad ou \quad (13,\ 9,\ 5,\ 1,\ -3)$$

8) Temos, por hipótese, $b - a = c - b = r$. Então:

$$ab^2c - a^2bc = abc(b - a) = abcr = abc(c - b) = abc^2 - ab^2c$$

9) Notando que $a_1 = 3$ e $r = 5$, apliquemos a fórmula do termo geral:

$$a_{17} = a_1 + 16r = 3 + 16\,.\,5 = 83$$

10)

$$a_{20} = a_1 + 19r \Rightarrow 30 = -8 + 19r \Rightarrow r = 2$$

11) Para escrever a P.A. é necessário determinar a_1 e r.

Temos:

$$\begin{cases} a_{10} = 7 \Rightarrow a_1 + 9r = 7 & (\mathbf{1}) \\ a_{12} = -8 \Rightarrow a_1 + 11r = -8 & (\mathbf{2}) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$(\mathbf{2}) - (\mathbf{1}) \Rightarrow 2r = -15 \Rightarrow r = -\frac{15}{2}$$

$$(\mathbf{1}) \Rightarrow a_1 + 9\,.\,\left(-\frac{15}{2}\right) \Rightarrow a_1 = \frac{149}{2}$$

Portanto, a P.A. é

$$\left(\frac{149}{2}, \frac{134}{2}, \frac{119}{2}\right)$$

12) Temos:

$$a_n < 0 \Rightarrow a_1 + (n-1)r < 0 \Rightarrow 60 + (n-1)(-7) < 0 \Rightarrow n - 1 > \frac{60}{7} \Rightarrow n > \frac{67}{7} \cong 9{,}5$$

Concluímos que $a_n < 0$ para $n = 10, 11, 12, \ldots$; portanto, o primeiro termo negativo da P.A. é a_{10}.

13) Devemos obter a razão da P.A. com 7 termos (2 extremos e 5 meios) em que $a_1 = -2$ e $a_7 = 40$.

Temos:

$$a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow 40 = -2 + 6r \Rightarrow r = 7$$

Então, a P.A. é

$$(-2,\ 5,\ 12,\ 19,\ 26,\ 33,\ 40)$$

14)

$$a_n = a_1 + (n-1)\ .\ r$$

$$34 = 12 + (n-1)\ .\ \frac{1}{2}$$

$$34 = 12 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{n}{2} = \frac{45}{2}$$

$$n = 45$$

Portanto, temos 43 meios aritméticos.

15)

$$a_n = a_1 + (n-1)\ .\ r$$

$$200 = 100 + (14-1)\ .\ r$$

$$200 = 100 + 13r$$

$$13r = 100$$

$$r = \frac{100}{13}$$

16) O primeiro e o último múltiplos de 2, de 100 a 1000, são, respectivamente, 100 e 1000.

A sequência dos múltiplos de 2 é uma P.A., então temos que:

$$a_n = a_1 + (n-1) \,.\, r$$

$$1\,000 = 100 + (n-1) \,.\, 2$$

$$900 = 2n - 2$$

$$n = \frac{902}{2}$$

$$n = 451$$

Portanto, existem 451 múltiplos de 2 entre 100 e 1 000.

O primeiro e o último múltiplos de 3, de 100 a 1000, são, respectivamente, 102 e 999.

A sequência dos múltiplos de 3 é uma P.A., então temos que:

$$a_n = a_1 + (n-1) \,.\, r$$

$$999 = 102 + (n-1) \,.\, 3$$

$$897 = 3n - 3$$

$$n = \frac{900}{3}$$

$$n = 300$$

Portanto, existem 300 múltiplos de 3 entre 100 e 1 000.

Porém, não podemos somar, pois existem múltiplos de 2 e de 3 ao mesmo tempo, e assim, somaríamos alguns números duas vezes, por isso devemos tirar os múltiplos de 6.

O primeiro e o último múltiplos de 6, de 100 a 1000, são, respectivamente, 102 e 996.

A sequência dos múltiplos de 6 é uma P.A., então temos que:

$$a_n = a_1 + (n-1) \, . \, r$$

$$996 = 102 + (n-1) \, . \, 6$$

$$894 = 6n - 6$$

$$n = \frac{900}{6}$$

$$n = 150$$

Portanto, existem 150 múltiplos de 6 entre 100 e 1 000.

Logo,

$$451 + 300 - 150 = 601$$

Portanto, temos 601 múltiplos de 2 ou 3 entre 100 a 1 000.

17)

$$a_n = a_1 + (n-1) \, . \, r$$

$$n^2 = 1 + ([n+2] - 1) \, . \, r$$

$$n^2 - 1 = (n+1) \, . \, r$$

$$r = \frac{n^2 - 1}{n+1}$$

$$r = \frac{(n+1)(n-1)}{n+1}$$

$$r = n - 1$$

Portanto, a razão é $(n-1)$.

18) Sendo $a_1 = 1$ e $r = 6$, temos que:

$$a_{35} = a_1 + 24\,.\,r = 1 + 24\,.\,6 = 145$$

$$S_{25} = \frac{25(a_1 + a_{25})}{2} = \frac{25(1 + 145)}{2} = 1\,825$$

19) A sequência $(1,\ 3,\ 5, \dots)$ é uma P.A. em que $a_1 = 1$ e $r = 2$, então:

$$a_{200} = a_1 + 199\,.\,r = 1 + 199\,.\,2 = 399$$

$$S_{200} = \frac{200(a_1 + a_{200})}{2} = \frac{200(1 + 399)}{2} = 40\,000$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r = 1 + (n-1)\,.\,2 = 2n - 1$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} = n^2$$

20) Determinar uma P.A. é obter a_1 e r. Temos:

$$a_{20} = 2 \Rightarrow a_1 + 19r = 2 \quad (\mathbf{1})$$

$$S_{50} = \frac{650(2a_1 + 49r)}{2} = 650 \Rightarrow 2a_1 + 49r = 26 \quad (\mathbf{2})$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações $(\mathbf{1})$ e $(\mathbf{2})$, obtemos $a_1 = -36$ e $r = 2$. Portanto, a P.A. procurada é $(-36, -34, -32, \dots)$.

21) Na primeira viagem, Santa Teresinha percorreu $34\ m$, na segunda viagem, ela percorreu $40\ m$ e na terceira, percorreu $46\ m$. Assim, $(34,\ 40,\ 46, \dots)$ é uma P.A. de razão 6.

Assim, temos que:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,.\,r$$

$$a_{20} = 34 + (20-1)\,.\,6$$

$$a_{20} = 34 + 114$$

$$a_{20} = 148$$

Portanto, a última viagem terá 148 metros.

Somando todas as viagens, temos que:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_{20} = \frac{20(34 + 18)}{2}$$

$$S_{20} = \frac{3640}{2}$$

$$S_{20} = 1820$$

Portanto, Santa Teresinha do Menino Jesus andou 1820 metros.

22) Os múltiplos positivos de 5 formados por 3 algarismos constituem a P.A. $(100,\ 105,\ 110, \ldots,\ 995)$, em que $a_1 = 100$, $r = 5$ e $a_n = 995$. O número de elementos dessa P.A. é n tal que:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 995 = 100 + (n-1)\ .\ 5 \Rightarrow n = 180$$

A soma dos termos da P.A. é:

$$S_{180} = \frac{180(a_1 + a_{180})}{2} = \frac{180(100 + 995)}{2} = 98\,550$$

23) Como $S_n = n^2 + 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$, temos que:

$$S_1 = 1^2 + 2\ .\ 1 = 3 \Rightarrow a_1 = 3$$

$$S_2 = 2^2 + 2\ .\ 2 = 8 \Rightarrow a_1 + a_2 = 8 \Rightarrow a_2 = 5$$

E a P.A. é $(3,\ 5,\ 7,\ 9, \ldots)$.

Capítulo 23

1) Para que $(x+1, x+9, \; x+15)$ seja uma P.G., devemos ter:

$$\frac{x+9}{x+1} = \frac{x+15}{x+9}$$

Então

$$(x+9)^2 = (x+1)(x+15)$$

$$x^2 + 18x + 81 = x^2 + 16x + 15$$

$$2x = -66$$

$$x = -33$$

2) Como $(x+1, x+3, \; x+4, \; \dots)$ é uma P.G., então temos que:

$$\frac{x+3}{x+1} = \frac{x+4}{x+3}$$

Assim, temos:

$$(x+3)^2 = (x+1)(x+4)$$

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 5x + 4$$

$$x = -5$$

Logo, a P.G é $(-4, -2, -1, \dots)$.

Para encontrarmos o 4º termo, temos que:

$$a_4 = a_1 \, . \, q^3 = (-4) \, . \left(\frac{1}{2}\right)^3 = (-4) \, . \frac{1}{8} = -\frac{1}{2}$$

3) Alternante e $q = -1$.

4)

a) V

b) V

c) F

d) F

e) V

f) V

g) V

h) F

i) V

j) F

k) F

l) F

5)

$$a_{10} = a_1 \,.\, q^9 = 1 \,.\, 2^9 = 512$$

$$a_{15} = a_1 \,.\, q^{14} = 1 \,.\, 2^{14} = 4\,096$$

6) Note que $a_1 = 2$ e $q = 3$. Assim, temos que:

$$a_{100} = a_1 \,.\, q^{99} = 2 \,.\, 3^{99}$$

7) Note que a razão é $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Assim, temos que:

$$a_{n+1} = a_n \,.\, q$$

$$1 = a_n \,.\, \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}+2}{2} = \sqrt{3}+1$$

Portanto, o número que precede o 1 é $\sqrt{3}+1$.

8) Dois termos: $a_6 = 243$ e $a_7 = 729$.

9) Queremos mostrar que $(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots)$ é uma P.G., mas para isso devemos mostrar que vale a igualdade abaixo:

$$\frac{\frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a_1}} = \frac{\frac{1}{a_3}}{\frac{1}{a_2}} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3}$$

Para demonstrar que vale a igualdade $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3}$, precisamos usar a hipótese: $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é uma P.G.

Assim, temos:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$$

Desenvolvendo esta igualdade, obtemos que:

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{a_1}{a_2}$$

■ Q.E.D

10) Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ uma P.G., então temos que:

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_2 \, . \; q = a_1 \, . \; q^2$

$a_4 = a_3 \, . \; q = a_1 \, . \; q^3$

$a_5 = a_4 \, . \; q = a_1 \, . \; q^4$

$a_6 = a_5 \,.\, q = a_1 \,.\, q^5$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1} \,.\, q = a_1 \,.\, q^{n-1}$

$\vdots$

Assim, a sequência $(a_1, a_3, a_5, \ldots)$ e $(a_2, a_4, a_6, \ldots)$ são uma P.G., pois, temos que:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_5}{a_3} = q^2$$

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_6}{a_2} = q^2$$

■ Q.E.D

11)

$$a_8 = a_1 \,.\, q^7 \Rightarrow 5 = 640 \,.\, q^7 \Rightarrow q = \sqrt[7]{\frac{1}{128}} = \frac{1}{2}$$

Então a P.G. é

$$(640,\ 320,\ 160,\ 80,\ 40,\ 20,\ 10,\ 5)$$

12)

a)

$$P_{10} = 1^{10} \,.\, 2^{\frac{10(10-1)}{2}} = 2^{45}$$

b)

$$P_{20} = (-2)^{20} \,.\, 3^{\frac{20(20-1)}{2}} = (-2)^{20} \,.\, 3^{190} = 2^{20} \,.\, 3^{190}$$

c)

$$P_{25} = 3^{25} \,.\, (-2)^{\frac{25(25-1)}{2}} = 3^{25} \,.\, (-2)^{300} = 3^{25} \,.\, 2^{300}$$

d)

$$P_{66} = 1^{66} \,.\, (-2)^{\frac{66(66-1)}{2}} = (-2)^{2145}$$

e)

$$P_{51} = ((-3)^{25})^{51} \,.\, \left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{51(51-1)}{2}} = (-3)^{1275} \,.\, \left(-\frac{1}{3}\right)^{1275} = 1$$

f)

$$P_{100} = a^{100} \,.\, (-a)^{\frac{100(100-1)}{2}} = a^{100} \,.\, (-a)^{4950} = a^{100} \,.\, a^{4950} = a^{5050}$$

13)

$$S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1}$$

$$S_{10} = \frac{1 \,.\, \frac{1}{2}^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$S_{10} = \frac{\frac{1}{1024} - 1}{-\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = \frac{\frac{1023}{1024}}{-\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = \frac{1023}{512}$$

14)

$$S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1}$$

$$S_{20} = \frac{1 \,.\, 3^{20} - 1}{3-1}$$

$$S_{20} = \frac{3^{20} - 1}{2}$$

15) Seja a medida da base x e a medida da altura h, então temos a seguinte P.G.:

$$(x,\ h,\ \frac{x \, . \, h}{2})$$

Como a razão é 8, então temos que:

$$\frac{\frac{x \, . \, h}{2}}{h} = 8$$

$$\frac{x \, . \, h}{2h} = 8$$

$$\frac{x}{2} = 8$$

$$x = 16$$

Portanto, a medida da base é 16.

16)

a)

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$S_n = \frac{2}{1 - \frac{1}{5}}$$

$$S_n = \frac{2}{\frac{4}{5}}$$

$$S_n = \frac{5}{2}$$

b)

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S_n = \frac{-3}{1-\frac{1}{3}}$$

$$S_n = -\frac{3}{\frac{2}{3}}$$

$$S_n = -\frac{9}{2}$$

c)

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S_n = \frac{5}{1+\frac{1}{5}}$$

$$S_n = \frac{5}{\frac{6}{5}}$$

$$S_n = \frac{25}{6}$$

d)

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S_n = \frac{-\frac{4}{5}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$S_n = -\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{2}}$$

$$S_n = -\frac{8}{15}$$

17)

$$S = \frac{3}{5} + \frac{6}{35} + \frac{12}{245} + \cdots$$

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S = \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{2}{7}}$$

$$S = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{7}}$$

$$S = \frac{21}{25}$$

Portanto, S vale $\frac{21}{25}$.

Avaliação – Volumes 7 e 8

1)

$$\log_4(\log_3 9) + \log_2(\log_{81} 3) + \log_{0,8}(\log_{16} 32)$$

$$\log_4 2 + \log_2 \frac{1}{4} + \log_{0,8} \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{2} + (-2) + (-1) = -\frac{5}{2}$$

$$\log_4(\log_3 9) + \log_2(\log_{81} 3) + \log_{0,8}(\log_{16} 32)$$

$$\log_4 2 + \log_2 \frac{1}{4} + \log_{0,8} \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{2} + (-2) + (-1) = -\frac{5}{2}$$

2)

a)

$$3x - 9 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

b)

$$x - 4 \neq 1 \Rightarrow x \neq 5$$

$$x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid (x > 4) - \{5\}\}$

c)

$$x^2 - 7x > 0 \Rightarrow x < 0 \; ou \; x > 7$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid (x < 0) \cup (x > 7)\}$

d)

$$x^2 - 9 > 0 \Rightarrow x < -3 \; ou \; x > 3$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid (x < -3) \cup (x > 3)\}$

3)

$$\log_4(-x^2 + 10x - 15) = 0$$

$$-x^2 + 10x - 15 = 4^0$$

$$-x^2 + 10x - 15 = 1$$

$$-x^2 + 10x - 16 = 0$$

Resolvendo a equação, temos que:

$$x = 2 \quad e \quad x = 8$$

Portanto, a soma das raízes é $2 + 8 = 10$.

4)

$$\log_x(2x + 3) = 2$$

$$2x + 3 = x^2$$

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

Resolvendo a equação, temos que:

$$x = 3 \;\; e \;\; x = -1$$

Substituindo os dois valores de x, obtemos:

$$\log_x(2x + 3) = \log_x 1$$

$$\log_x(2x + 3) = \log_x 9$$

Portanto, $S = \{3\}$.

5) Como $0 < a < 1$, temos que:

$$\log_a(2x - 3) > 0 \Rightarrow 0 < 2x - 3 < a^0 = 1$$

$$\Rightarrow 3 < 2x < 4$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} < x < 2$$

6) Seja $x = \sqrt[5]{2}$, então temos que:

$$\log x = \log \sqrt[5]{2}$$

$$\log x = \frac{1}{5} \log 2$$

$$\log x = \frac{1}{5} \, . \, 0{,}3010$$

$$\log x = 0{,}0602$$

Analisando o resultado com a Tabela de Mantissa, temos que:

$$x \cong 1{,}15$$

7) Para escrever a P.A. é necessário determinar a_1 e r.

Temos:

$$\begin{cases} a_{10} = 7 \Rightarrow a_1 + 9r = 7 & (\mathbf{1}) \\ a_{12} = -8 \Rightarrow a_1 + 11r = -8 & (\mathbf{2}) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$(\mathbf{2}) - (\mathbf{1}) \Rightarrow 2r = -15 \Rightarrow r = -\frac{15}{2}$$

$$(\mathbf{1}) \Rightarrow a_1 + 9\,.\,\left(-\frac{15}{2}\right) \Rightarrow a_1 = \frac{149}{2}$$

Portanto, a P.A. é

$$\left(\frac{149}{2},\ \frac{134}{2},\ \frac{119}{2}\right)$$

8)

a) V

b) V

c) F

d) F

e) V

f) V

g) V

h) F

i) V

j) F

k) F

l) F

9) Determinar uma P.A. é obter a_1 e r. Temos:

$$a_{20} = 2 \Rightarrow a_1 + 19r = 2 \quad (\mathbf{1})$$

$$S_{50} = \frac{650(2a_1 + 49r)}{2} = 650 \Rightarrow 2a_1 + 49r = 26 \quad (\mathbf{2})$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações $(\mathbf{1})$ e $(\mathbf{2})$, obtemos $a_1 = -36$ e $r = 2$. Portanto, a P.A. procurada é $(-36, -34, -32, \dots)$.

10) Para calcular a soma da série infinita, vamos dividi-la em duas P.G., para encontrarmos os valores da soma de seus termos infinitos. Depois somamos os dois resultados encontrados para obtermos a soma da série infinita.

1ª P.G.

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \cdots$$

A solução da soma da **1ª P.G**. é a seguinte:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$S_n = \frac{1}{\frac{2}{3}}$$

$$S_n = \frac{3}{2}$$

2ª P.G.

$$2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \cdots + 2\,.\left(\frac{1}{5}\right)^n + \cdots$$

A solução da soma da **2ª P.G**. é a seguinte:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S_n = \frac{2}{1-\frac{1}{5}}$$

$$S_n = \frac{2}{\frac{4}{5}}$$

$$S_n = \frac{5}{2}$$

Após encontrarmos a soma dos termos destas P.G., temos que:

$$1 + 2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{9} + \frac{2}{25} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\,.\left(\frac{1}{5}\right)^n + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \cdots + 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \cdots + 2\,.\left(\frac{1}{5}\right)^n + \cdots = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Portanto, a soma da série infinita é 4.

Volume 9

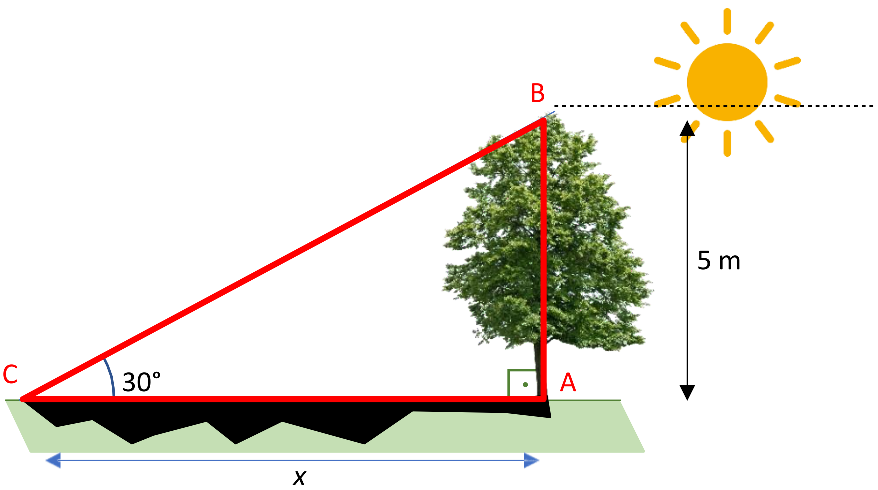
Capítulo 25

1)

a) $\frac{3}{5}$
b) $\frac{4}{5}$
c) $\frac{3}{4}$
d) $\frac{3}{5}$
e) $\frac{4}{5}$
f) $\frac{3}{5}$
g) $\frac{4}{3}$
h) $\frac{3}{4}$

2) O problema enuncia o episódio da conversão de Zaqueu e quer descobrir o comprimento *x* da sombra da árvore em que ele subiu para ver o Cristo. Note que a árvore é perpendicular ao solo, isto é, forma um ângulo reto em relação ao solo. Portanto, podemos considerar que há ali um triângulo retângulo, cujos vértices são:

- A: o pé da árvore.
- B: o topo da árvore.
- C: fim da sombra.



Neste problema é dado o ângulo de 30°. Tomando como referência este ângulo, o cateto oposto AB mede $5\ m$, e o cateto adjacente AC mede x. Ora, a razão que relaciona o cateto oposto e o cateto adjacente é a *tangente*. Logo,

$$\text{tg}\,30 = \frac{co}{ca}$$

Pela tabela, temos que $tg\ 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Logo,

$$\text{tg}\,30 = \frac{co}{ca}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{x}$$

$$\sqrt{3}\,.\,x = 5\,.\,3$$

$$x = \frac{15}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{15}{\sqrt{3}}\,.\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

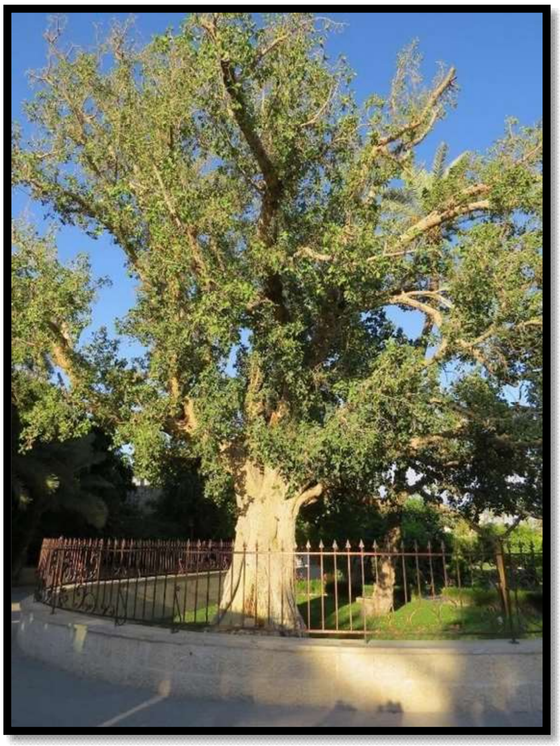
$$x = \frac{15\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 5\,.\,\sqrt{3}$$

$$x = 5\,.\,1{,}732$$

$$x = 8{,}66$$

Portanto, chegamos à conclusão que a sombra da árvore mede *8,66 m.*



Sicômoro no qual São Zaqueu subiu para ver nosso Senhor Jesus Cristo.

3) $b = 2\sqrt{5}$ e $c = 4\sqrt{3}$

4) A rampa deve ser vista como a hipotenusa de um triângulo retângulo e a altura h será o cateto oposto ao ângulo de 30°. Então temos que:

$$\text{sen}\,30° = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 3\,m$$

Como $3\,m = 300\,cm$ e a altura do degrau é $25\,cm$, temos que:

$$\frac{300}{25} = 12\,degraus$$

5)

$$\text{sen}\,30° = \frac{24}{A_e}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{24}{A_e}$$

$$\boxed{A_e = 48\,m}$$

6) $b = 2\sqrt{5}$ e $c = 4$.

7)

a) $\cos 35° = 0{,}8192$

b) $\text{sen}\,47° = 0{,}7314$

c) $\text{tg}\,30° = 0{,}5774$

d) $\text{sen}\,45° = 0{,}7071$

e) $\cos 90° = 0$

f) $\text{tg}\,1° = 0{,}0175$

g) $\text{sen}\,89° = 0{,}9998$

h) $\cos 75° = 0{,}2588$

8)

a) $\hat{A} = 31°$

b) $\hat{B} = 40°$

c) $\hat{C} = 77°$

d) $\hat{D} = 60°$

e) $\hat{E} = 55°$

f) $\hat{F} = 10°$

g) $\hat{G} = 1°$

h) $\hat{H} = 85°$

9) Para descobrirmos o valor de a, temos que:

$$\cos 35° = \frac{4}{a}$$

$$0{,}8192 \,.\, a = 4$$

$$a = \frac{4}{0{,}8192}$$

$$a = 4{,}8828125$$

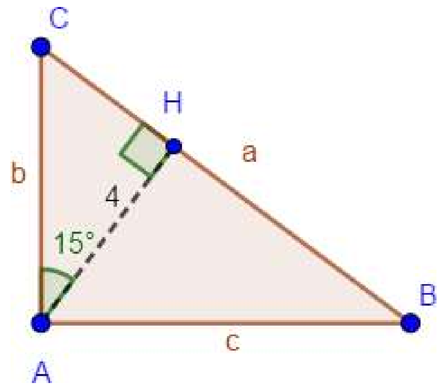
Para descobrirmos o valor de a, temos que:

$$\text{tg}\, 35° = \frac{b}{4}$$

$$b = 4 \,.\, 0{,}7002$$

$$b = 2{,}8008$$

10) Primeiramente, vamos fazer um esboço do triângulo.



O ΔHAC possui um ângulo $C\hat{} = 75°$. Assim, temos que:

$$\text{sen}\, C\hat{} = \frac{4}{b}$$

$$\text{sen}\, 75° = \frac{4}{b}$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{4}{b}$$

$$(\sqrt{2}+\sqrt{6})b = 16$$

$$b = \frac{16}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$$

$$b = \frac{16(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2-6}$$

$$b = -4\sqrt{2}\,(1-\sqrt{3})$$

$$b = 4\sqrt{2}\,(-1+\sqrt{3})$$

O ΔHAC possui um ângulo $A\hat{} = 75°$. Assim, temos que:

$$\cos \hat{A} = \frac{4}{c}$$

$$\cos 75° = \frac{4}{c}$$

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{4}{c}$$

$$(\sqrt{6} - \sqrt{2})c = 16$$

$$c = \frac{16}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$c = \frac{16(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{6 - 2}$$

$$c = 4\sqrt{2}\,(\sqrt{3} + 1)$$

Pelo Teorema de Pitágoras no ΔABC, temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (4\sqrt{2}\,(-1 + \sqrt{3}))^2 + (4\sqrt{2}\,(\sqrt{3} + 1))^2$$

$$a^2 = 32(4 - 2\sqrt{3}) + 32(4 + 2\sqrt{3})$$

$$a^2 = 128 - 64\sqrt{3} + 128 + 64\sqrt{3}$$

$$a^2 = 256$$

$$a = 16$$

Portanto,

$$a = 16 \qquad b = 4\sqrt{2}\,(-1 + \sqrt{3}) \qquad c = 4\sqrt{2}\,(\sqrt{3} + 1)$$

11) H é o ponto de interseção entre a altura (h) e a base $\overline{B}$ Assim, temos dois triângulos retângulos, o ΔABH e o ΔAHC. E o ângulo $\hat{B} = 60°$ e o ângulo $\hat{C} = 30°$.

__Dica:__ **tg 60° no ΔABH e o tg 30° no ΔAHC.**

$$\text{tg}\,60° = \frac{h}{p} \quad e \quad \text{tg}\,30° = \frac{h}{n}$$

$$\text{p}\,.\,\text{tg}\,60° = h \quad e \quad \text{n}\,.\,\text{tg}\,30° = h$$

Igualando as igualdades, temos que:

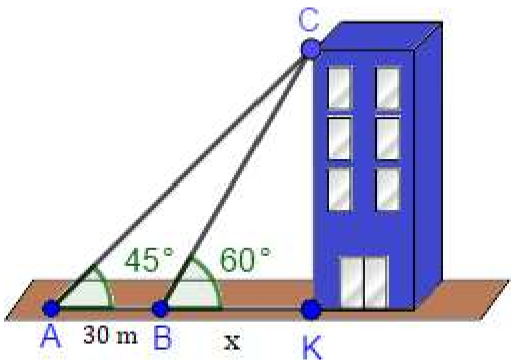
$$\text{p}\,.\,\text{tg}\,60° = \text{n}\,.\,\text{tg}\,30°$$

$$\text{p}\,.\,\sqrt{3} = n\,.\,\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{p}{n} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{p}{n} = \frac{1}{3}$$

12) No ΔBKC, temos que:



$$\text{tg}\,60° = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

No ΔBKC, temos que:

$$\text{tg}\,45° = \frac{h}{x+30} \Rightarrow h = x + 30 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2):

$$h = \frac{h}{\sqrt{3}} + 30 \Rightarrow h = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$\sqrt{3} - 1$

$-$

$= 45$

$+$

$15\sqrt{3}$

13) Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos o outro cateto

$$(3a)^2 = a^2 + x^2$$

$$9a^2 = a^2 + x^2$$

$$x^2 = 8a^2$$

$$x = 2a\sqrt{2}$$

Assim, temos que $x > a$, logo usaremos o ângulo α, que é o ângulo oposto ao lado de a. Então, temos que:

$$\cos\alpha = \frac{2a\sqrt{\cancel{2}}}{3a} = \frac{2\sqrt{\cancel{2}}}{3}$$

14) Tomando $\operatorname{tg} 40° \cong 0{,}8391$, temos que:

$$\operatorname{tg} 40° = \frac{137}{x}$$

$$0{,}8391 = \frac{137}{x}$$

$$x = \frac{137}{0{,}8391} \cong 163,2702\ m$$

Arredondamos para cima, para não perder nenhum pedaço da Basílica de São Pedro.

15) Tome $BD = y$ e $BE = x$. Assim temos que:

$$\Delta BDC \Rightarrow \cos\alpha = \frac{y}{5}$$

$$\Delta BED \Rightarrow \cos\alpha = \frac{x}{y}$$

$$\Delta BAE \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{x}$$

Multiplicando as três igualdades encontradas, temos que:

$$(\cos\alpha)^3 = \frac{y}{5} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{x}$$

$$(\cos\alpha)^3 = \frac{1}{5}$$

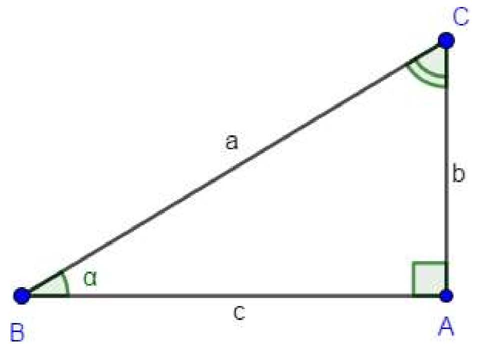
$$\cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$$

16) Seja um ΔABC, retângulo em A.

Sabemos:

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a}\ ;\ \cos\hat{B} = \frac{c}{a}$$



Então, temos que:

$$b = a\ .\ \operatorname{sen}\hat{B}\ ;\ c = a\ .\ \cos B$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (a\ .\ \operatorname{sen}\hat{B})^2 + (a\ .\ \cos B)^2$$

$$a^2 = a^2\ .\ \operatorname{sen}^2\hat{B} + a^2\ .\ cos^2 B$$

$$a^2 = a^2\ (\operatorname{sen}^2\hat{B} + cos^2\hat{B})$$

Portanto, a relação fundamental da trigonometria é:

$$\operatorname{sen}^2\hat{B} + cos^2\hat{B} = 1$$


A·M·D·G