

Passo a passo de Matemática

8º Ano - Volume 1

Lição 1 – Conjunto dos Naturais

1. Por que a adição e a multiplicação são as únicas operações que podem ser realizadas sem restrições no conjunto dos números naturais? Qual é o símbolo que representa este conjunto?

R: Porque a soma de dois números naturais será sempre um número natural e a multiplicação de dois números naturais também será sempre um número natural. Não podemos dizer o mesmo da subtração e da divisão, pois nem a diferença nem o quociente de dois números naturais são sempre números naturais. O símbolo dos naturais é $\mathbb{N}$.

2. Calcule o valor das expressões:

a) $6 \times 8 + 1$

$48 + 1$

49

b) $32 : 4 : 2 : 2$

$8 : 2 : 2$

$4 : 2$

2

c) $3^3 - 5^3 + 8^2$

$27 - 5^3 + 8^2$

$27 - 125 + 8^2$

$27 - 125 + 64$

$-98 + 64$

-34

d) $6^2 + \sqrt{4} + 3^0 - \sqrt{100}$

$36 + \sqrt{4} + 3^0 - \sqrt{100}$

$36 + 2 + 3^0 - \sqrt{100}$

$36 + 2 + 1 - \sqrt{100}$

$36 + 2 + 1 - 10$

$38 + 1 - 10$

3. Quanto vale B se $x = 5$?

$$B = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

Se $x = 5$, no lugar do “x” colocamos 5

$$B = (5-1)(5-2)(5-3)(5-4)(5-5)$$

$$B = (4)(5-2)(5-3)(5-4)(5-5)$$

$$B = (4)(3)(5-3)(5-4)(5-5)$$

$$B = (4)(3)(2)(5-4)(5-5)$$

$$B = (4)(3)(2)(1)(5-5)$$

$$B = (4)(3)(2)(1)(0)$$

Lembre-se que os parênteses estavam se multiplicando. Quando não há “nada” entre dois parênteses “colados” é porque há uma multiplicação.

$$B = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0$$

$$B = 12 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0$$

$$B = 24 \cdot 1 \cdot 0$$

$$B = 24 \cdot 0$$

$$B = 0$$

4. Quais desses números são naturais?

$$\begin{array}{cccc} 7 & 0 & 3,8 & 26 \\ -3 & 6,2 & 1 & 89 \\ \sqrt{4} & 154 & 1001 & \frac{15}{5} \end{array}$$

Lembre-se: números naturais são números inteiros (sem vírgula) e positivos.

7, 0, 26, 1, 89, 154, 1001 são todos **visivelmente** inteiros e positivos. Portanto, são naturais.

Contudo:

- $\sqrt{4} = 2$. Portanto $\sqrt{4}$ também é um número natural.

- $\frac{15}{5} = 15 \div 5 = 3$. Pois toda fração é uma divisão e podemos escrever uma fração como (numerador) $\div$ (denominador). $\frac{15}{5}$ é uma fração *aparente* e vale 3. Portanto, também é um número natural.

Logo, os números naturais são: 7, 0, 26, 1, 89, $\sqrt{4}$, 154, 1001, $\frac{15}{5}$

5. O valor da expressão $3 + 5 \times 2 - 4 : 2$ é:

$$3 + 5 \times 2 - 4 : 2$$

$$3 + 10 - 4 : 2$$

$$3 + 10 - 2$$

$$13 - 2$$

$$11$$

Portanto, a alternativa correta é a “c”).

- a) 6
- b) 8
- c) 11**
- d) 14

6. O valor da expressão, $x^2 + \sqrt{x}$ quando $x = 100$ é:

Se $x = 100$, no lugar do “x” colocamos 100

$$(100)^2 + \sqrt{100}$$

$$10000 + \sqrt{100}$$

$$10000 + 10$$

$$10010$$

Assim, a alternativa certa é a “d”).

- a) 210
- b) 250
- c) 1.010
- d) 10.010**

Lição 2 – Conjunto dos Inteiros

1. Qual é a definição do conjunto dos números inteiros? Qual é o símbolo utilizado para representá-lo? Que operação passou a ser realizada com a invenção deste conjunto?

R: Definição do conjunto dos inteiros: “pertence ao conjunto dos números inteiros todo número resultante da subtração de dois naturais”. O conjunto dos inteiros é indicado por $\mathbb{Z}$. A operação que passou a ser realizada sem restrições com a invenção deste conjunto foi a subtração.

2. Responda:

a) Existe o menor número inteiro?

R: Não, pois os inteiros crescem infinitamente para a esquerda do zero.

b) Existe o maior número inteiro?

R: Não, pois os inteiros crescem infinitamente para a direita do zero.

c) Quantos números inteiros existem?

R: Infinitos números.

3. Responda:

a) Quais são os números naturais entre -4 e 4 ?

R: 4 (0,1,2,3).

Note que não devemos contar os números “ -4 ” e “ 4 ”. Somente devemos contar os números naturais que estão ENTRE eles.

Lembre-se: os naturais são os números positivos.

b) Quais são os números inteiros entre -4 e 4 ?

R: 7 ($-3,-2,-1,0,1,2,3$)

Note que não devemos contar os números “ -4 ” e “ 4 ”. Somente devemos contar os números inteiros que estão ENTRE eles.

Lembre-se: os inteiros são os números negativos E positivos.

4. Calcule:

a) $-8 + 7$

R: -1

b) $-7 \cdot (-2)^6$

R: $-7 \cdot 64$

-448

Lembre-se que números negativos ao serem elevados a expoentes pares se tornam positivos.

$$(-2)^6 = -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 = 64$$

$$\text{c) } -(+5) \cdot (-1) + 10 - 4 - (-7)$$

$$- 5 \cdot (-1) + 10 - 4 - (-7)$$

$$5 + 10 - 4 - (-7)$$

$$5 + 10 - 4 + 7$$

$$15 - 4 + 7$$

$$11 + 7$$

$$18$$

$$\text{d) } -2 - (-2) - 4 - (-4)$$

$$-2 + 2 - 4 - (-4)$$

$$0 - 4 - (-4)$$

$$-4 + -(-4)$$

$$-4 + 4$$

$$0$$

$$\text{e) } -4^2 + (3-5) \cdot (-2)^3 + 3^2 - (-2)^4$$

Faça primeiro as potências.

Note que: -4^2 não está com um parêntese. Assim, o expoente só se aplica ao “4” e não ao “-”. Por isso, o resultado fica -16 (só o 4 é elevado ao quadrado).

$$-4^2 + (3-5) \cdot (-2)^3 + 3^2 - (-2)^4$$

$$-16 + (3-5) \cdot (-2)^3 + 3^2 - (-2)^4$$

$$-16 + (3-5) \cdot (-8) + 3^2 - (-2)^4$$

$$-16 + (3-5) \cdot (-8) + 9 - (-2)^4$$

$$-16 + (3-5) \cdot (-8) + 9 - (16)$$

Depois, faça as contas que ainda existirem dentro dos parênteses.

$$-16 + (-2) \cdot (-8) + 9 - (16)$$

Agora realize a multiplicação e tire o excesso de parênteses:

$$-16 + 16 + 9 - (16)$$

$$0 + 9 - 16$$

5. O quarto termo da sequência 2, 0, – 2... é:

Perceba que a sequência está indo de –2 em –2. Pois:

$$2 - 2 = 0$$

$$0 - 2 = -2$$

Assim, o próximo termo (o quarto termo) é:

$$-2 - 2 = -4$$

Assim, a alternativa correta é a “d”).

a) 0

b) 4

c) – 3

d) – 4

6. O valor da expressão numérica $(-1-2)[-7 \cdot (2-5) - 3 \cdot (4-2) - 1]$ é:

$$(-3)[-7 \cdot (2-5) - 3 \cdot (4-2) - 1]$$

$$(-3)[-7 \cdot (-3) - 3 \cdot (4-2) - 1]$$

$$(-3)[-7 \cdot (-3) - 3 \cdot (2) - 1]$$

$$(-3)[21 - 3 \cdot (2) - 1]$$

$$(-3)[21 - 6 - 1]$$

$$(-3)[14]$$

$$-42$$

Assim, a alternativa correta é a “d”).

a) – 36

b) – 38

c) – 40

d) – 42

7. O valor da expressão $a^3 - 3a^2x^2y^2$, para $a = 10$, $x = 2$ e $y = 1$ é:

Se $a = 10$, colocamos “10” no lugar do “a”.

Se $x = 2$, colocamos “2” no lugar do “x”.

Se $y = 1$, colocamos “1” no lugar do “y”.

$$a^3 - 3a^2x^2y^2$$

$$(10)^3 - 3 \cdot (10)^2 \cdot (2)^2 \cdot (1)^2$$

$$1000 - 3 \cdot (10)^2 \cdot (2)^2 \cdot (1)^2$$

$$1000 - 3 \cdot 100 \cdot (2)^2 \cdot (1)^2$$

$$1000 - 3 \cdot 100 \cdot 4 \cdot (1)^2$$

$$1000 - 3 \cdot 100 \cdot 4 \cdot 1$$

$$1000 - 300 \cdot 4 \cdot 1$$

$$1000 - 1200 \cdot 1$$

$$1000 - 1200$$

$$-200$$

Assim, a alternativa correta é a “d”).

- a) 100
- b) 250
- c) – 150
- d) – 200**

Lição 3 – Racionais

1. Qual é a definição do conjunto dos números racionais? Por que ele leva este nome? Que símbolo é utilizado para representá-lo? Que operação passou a ser realizada com a invenção deste conjunto?

R: A definição do conjunto dos racionais é: sejam $p, q \in \mathbb{Z}$ tal que $q \neq 0$, o resultado da razão de p sobre q pertence ao conjunto dos números racionais. Ou seja, a divisão de dois inteiros sempre resultará em um racional (o segundo inteiro deve ser diferente de 0). Ele leva esse nome porque a palavra razão significa, grosso modo, uma divisão (e a “divisão” é o que define esse conjunto). O símbolo utilizado para representar esse conjunto é $\mathbb{Q}$. A operação que passou a ser realizada sem restrições no conjunto dos racionais é a própria divisão.

2. Abaixo há diversos números:

0,5	- 72	1,2	40	- 3	$\frac{7}{3}$
- 1,53	0	0,001	$-\frac{1}{12}$	-20	1

a) Quantos deles são números naturais? Quais?

R: Três deles são naturais: 40 ; 0 ; 1 .

Lembre-se: os naturais são os números sem vírgula e positivos.

b) Quantos deles são números inteiros? Quais?

R: Seis deles são inteiros: -72 ; 40 ; -3 ; 0 ; -20 ; 1.

Lembre-se: os inteiros são os números sem vírgula, negativos E positivos.

c) Quantos deles são números racionais? Quais?

R: Todos são racionais: 0,5 ; - 72 ; 1,2 ; 40 ; - 3 ; $\frac{7}{3}$; - 1,53 ; 0 ; 0,001 ; $-\frac{1}{12}$; -20 ; 1.

Lembre-se: os racionais são os números com vírgula ou sem vírgula, positivos ou negativos (engloba a todos)

3. Responda: É possível determinar quantos inteiros existem entre - 1 e - 5, incluindo estes dois números? E números racionais, é possível?

R: Sim, é possível determinar quantos inteiros existem entre “- 1” e “- 5”, incluindo estes dois números (- 5, - 4, - 3, - 2, - 1 = 5 inteiros).

Mas, não é possível determinar quantos racionais existem entre - 1 e - 5, pois entre um número e seu sucessor (entre dois números racionais) há infinitos racionais. Por exemplo, entre “- 5” e “- 4” há infinitos racionais.

4. Sabendo que,

dobrar (ou o dobro) significa multiplicar por dois,

triplicar (ou o triplo) significa multiplicar por três,

quadruplicar (ou quádruplo) significa multiplicar por quatro.

Encontre o valor de:

a) O dobro de - 7

Dobro = multiplicar por 2

$$\text{Dobro de } -7 = -7 \cdot 2 = -14$$

b) O dobro de 12

Dobro = multiplicar por 2

$$\text{Dobro de } 12 = 12 \cdot 2 = 24$$

c) O triplo de 0,2222...

Triplo = multiplicar por 3

$$\text{Triplo de } 0,2222... = 0,2222... \cdot 3 = 0,666....$$

Observação: Também poderíamos buscar a **fração geratriz** de 0,2222... e multiplicá-la por 3.

A fração geratriz de 0,2222... é $\frac{2}{9}$.

$$\frac{2}{9} \cdot 3 = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{1} = \frac{6}{9}$$

Podemos simplificar a fração $\frac{6}{9}$, dividindo em cima e embaixo por 3 $\rightarrow \frac{6}{9} = \frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3}$

Haverá lições ainda neste volume explicando melhor o conceito de fração geratriz.

d) O triplo de 1,2444...

Triplo = multiplicar por 3

$$\text{Triplo de } 1,2444... = 1,2444... \cdot 3 = 3,7333....$$

Observação: Também poderíamos buscar a **fração geratriz** de 1,24444... e multiplicá-la por 3.

A fração geratriz de 1,24444... é $\frac{56}{45}$.

$$\frac{56}{45} \cdot 3 = \frac{56}{45} \cdot \frac{3}{1} = \frac{168}{45}$$

Podemos simplificar a fração $\frac{168}{45}$, dividindo em cima e embaixo por 3 $\rightarrow \frac{168}{45} = \frac{168 \div 3}{45 \div 3} = \frac{56}{15}$

Haverá lições ainda neste volume explicando melhor o conceito de fração geratriz.

e) O dobro de - 4,856.

Dobro = multiplicar por 2

$$\text{Dobro de } -4,856 = -4,856 \cdot 2 = -9,712$$

f) O dobro do triplo de -5 .

$$\text{Dobro de alguma coisa} = (\text{coisa}) \cdot 2$$

$$\text{Triplo de alguma coisa} = (\text{coisa}) \cdot 3$$

$$\text{Triplo de } -5 = -5 \cdot 3 = -15$$

$$\text{Dobro do (triplo de } -5) = (\text{triplo de } -5) \cdot 2$$

$$\text{Dobro do (triplo de } -5) = -15 \cdot 2 = -30$$

g) O triplo do dobro de -12 .

$$\text{Triplo de alguma coisa} = (\text{coisa}) \cdot 3$$

$$\text{Dobro de alguma coisa} = (\text{coisa}) \cdot 2$$

$$\text{Dobro de } -12 = -12 \cdot 2 = -24$$

$$\text{Triplo do (dobro de } -12) = (\text{dobro de } -12) \cdot 3$$

$$\text{Triplo do (dobro de } -12) = -24 \cdot 3 = -72$$

h) O quádruplo do dobro de -6 .

$$\text{Quádruplo de alguma coisa} = (\text{coisa}) \cdot 4$$

$$\text{Dobro de alguma coisa} = (\text{coisa}) \cdot 2$$

$$\text{Dobro de } -6 = -6 \cdot 2 = -12$$

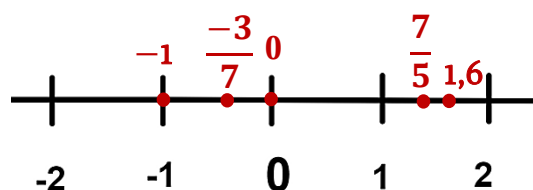
$$\text{Quádruplo do (dobro de } -6) = (\text{dobro de } -6) \cdot 4$$

$$\text{Quádruplo do (dobro de } -6) = -12 \cdot 4 = -48$$

5. Construa um segmento de reta de 8 cm. Subdivida-o em partes iguais e numere-as de -2 a 2 .

Em seguida, localize os seguintes pontos:

$$-\frac{3}{7} \qquad 1,6 \qquad \frac{7}{5} \qquad -1 \qquad 0$$



6. Compare os números racionais a seguir usando os símbolos $>$, $<$ e $=$:

a) $4,9 > 4,09$

b) $-15,3 < 15,3$

c) $\frac{19}{3} < \frac{23}{3}$

Para comparar frações de mesmo denominador, a maior é a com o maior numerador. Neste caso, ambas têm mesmo denominador (3). A maior é $\frac{23}{3}$, pois possui maior numerador ($23 > 19$).

d) $-\frac{89}{7} > -\frac{63}{4}$

Para comparar frações de denominadores diferentes há duas alternativas: buscar frações equivalentes ou transformar as frações em números decimais. O método que causa menos confusão é o segundo.

Para transformar uma fração em um número decimal, é necessário lembrar que TODA fração é uma divisão.

$$\frac{-89}{7} = 89 \div 7 = -12,7142857...$$

$$\frac{-63}{4} = -63 \div 4 = -15,75$$

Agora sabemos os valores decimais de cada fração.

Para comparar números negativos, o maior número é aquele que está mais próximo do zero (ou seja, tem menor valor absoluto).

Neste caso $-12,7142857...$ está mais próximo do zero que $-15,75$. Assim:

$$-12,7142857... > -15,75$$

E, portanto:

$$-\frac{89}{7} > -\frac{63}{4}$$

e) $-\frac{7}{5} = -1,4$

Para comparar uma fração e um número decimal, é preciso transformar a fração em um número decimal.

Para transformar uma fração em um número decimal, é necessário lembrar que TODA fração é uma divisão.

$$\frac{-7}{5} = -7 \div 5 = -1,4$$

Como:

$$1,4 = 1,4$$

Logo:

$$\frac{-7}{5} = -1,4.$$

f) $23,98 > 23,89$

Lição 4 – Adição e subtração

1. Efetue as adições e as subtrações:

a) $-\frac{7}{8} + 4,5$

Não podemos somar fração com número decimal. Ou transformamos a fração em decimal ou transformamos o decimal em fração. É mais fácil transformar o decimal, pois $4,5 = \frac{45}{10}$. Lembre-

se: toda fração é uma divisão e $\frac{45}{10} = 45 : 10 = 4,5$.

$$-\frac{7}{8} + \frac{45}{10}$$

Só podemos somar frações se seus denominadores forem iguais. Busquemos então frações equivalentes a $-\frac{7}{8}$ e a $\frac{45}{10}$ que tenham o mesmo denominador. Vamos multiplicar a primeira em cima e embaixo por 5 (isto é o que significa encontrar frações equivalentes) e a segunda por 4.

$$\frac{-7 \cdot 5}{8 \cdot 5} + \frac{45 \cdot 4}{10 \cdot 4} =$$

$$\frac{-35}{40} + \frac{180}{40} = \frac{-35 + 180}{40}$$

$$\frac{145}{40} = \frac{145 \div 5}{40 \div 5} = \frac{29}{8}$$

b) $\frac{13}{4} + \frac{19}{5}$

Só podemos somar frações se seus denominadores forem iguais. Devemos buscar frações equivalentes a $\frac{13}{4}$ e $\frac{19}{5}$ que tenham o mesmo denominador. Vamos multiplicar a primeira por 5 e

a segunda por 4.

$$\frac{13 \cdot 5}{4 \cdot 5} + \frac{19 \cdot 4}{5 \cdot 4} =$$

$$\frac{65}{20} + \frac{76}{20} = \frac{65 + 76}{20} =$$

$$\frac{141}{20}$$

c) $-\frac{8}{11} - \frac{5}{3}$

$$\frac{-8 \cdot 3}{11 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 11}{3 \cdot 11} =$$

$$\frac{-24}{33} - \frac{55}{33} = \frac{-24-55}{33}$$

$$\frac{-79}{33}$$

d) $79,05 - 12,4$

$12,4 = 12,40$. É necessário colocar um zero para efetuar a conta.

Efetue a subtração normalmente.

$$\begin{array}{r} 79,05 \\ - 12,40 \\ \hline 66,65 \end{array}$$

e) $123 - \frac{35}{4}$

Não é possível subtrair um número com uma fração. Fração só subtraímos com outra FRAÇÃO.

Vamos transformar o 123 em uma fração colocando o “1” como seu denominador: $123 = \frac{123}{1}$.

$$\frac{123}{1} - \frac{35}{4} =$$

$$\frac{123 \cdot 4}{1 \cdot 4} - \frac{35}{4} =$$

$$\frac{492}{4} - \frac{35}{4} = \frac{492-35}{4}$$

$$\frac{457}{4}$$

f) $1347,01 + 132,86$

Efetue a adição normalmente:

$$\begin{array}{r} 1347,01 \\ + 132,86 \\ \hline 1479,87 \end{array}$$

g) $\frac{49}{7} + \left(-\frac{18}{3}\right)$

$$\frac{49}{7} - \frac{18}{3} =$$

$$\frac{49 \cdot 3}{7 \cdot 3} - \frac{18 \cdot 7}{3 \cdot 7} =$$

$$\frac{147}{21} - \frac{126}{21} = \frac{147 - 126}{21} =$$

$$\frac{21}{21} = 21 \div 21 = 1$$

h) $50 - 4,99$

Para esta conta, devemos escrever o 50 como 50,00.

Efetue a subtração normalmente.

$$\begin{array}{r} 499 \\ 50,00 \\ - 4,99 \\ \hline 45,01 \end{array}$$

2. Uma barra de chocolate é dividida entre Maria, Cecília e Teresa. Sabendo que Maria ganha $\frac{2}{5}$ da barra, Cecília ganha $\frac{1}{4}$ e Teresa ganha 70 gramas, o peso da barra, em gramas, é:

Primeiro, vamos descobrir **que fração da barra Teresa ganhou**.

Se somarmos a quantidade que Maria e Cecília ganharam, temos:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} =$$

$$\frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{8+5}{20} = \frac{13}{20}$$

Ou seja, se dividíssemos a barra em 20 pedaços, Maria e Cecília já receberam (juntas) 13 pedacinhos.

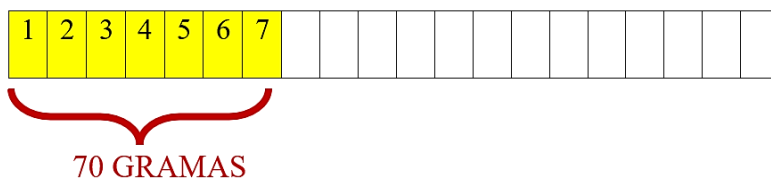


Se a barra tem 20 pedaços, Teresa recebeu $20 - 13 = 7$ pedaços (os pedaços que sobraram).

Ou seja, Teresa recebeu $\frac{7}{20}$ da barra.

Também sabemos que Teresa recebeu 70 gramas. Logo

$\frac{7}{20} \rightarrow$ correspondem a 70 gramas de chocolate



Se são 7 pedacinhos, cada um desses pedacinhos pesa 10 gramas ($70 : 7$ pedaços).

Se a barra tem 20 pedacinhos e cada um desses vinte pedaços pesa 10 gramas, a barra inteira tem:

$$20 \text{ pedaços} \times 10 \text{ gramas cada pedaço} = 200 \text{ gramas}$$

A barra tem 200 gramas.

Logo, a alternativa correta é a “b”).

a) 160

b) 200

c) 240

d) 280

e) 400

3. Uma casa tem 3,88 metros de altura. Um engenheiro foi contratado para projetar um segundo andar, e informaram-lhe que a prefeitura só permite construir casas de dois andares com altura de até 7,80 metros. Qual deve ser a altura máxima, em metros, do segundo andar?

R: Para saber qual é a altura máxima do segundo andar, precisamos saber QUANTO FALTA para dar o limite estabelecido pela prefeitura. Ou seja, precisamos realizar a seguinte subtração:

$$\text{Limite} - \text{altura do 1º andar} = \text{altura máxima do 2º andar}$$

$$7,80 - 3,88 = \text{altura máxima do 2º andar}$$

$$3,92 = \text{altura máxima do 2º andar}$$

Assim, o 2º andar pode ter no máximo 3,92 m. Logo, a alternativa correta é a “a”).

a) 3,92

b) 4,00

c) 4,92

d) 11,68

Lição 5 – Multiplicação e Divisão

1. Efetue as multiplicações a seguir:

a) $5,4 \cdot 3,1 = 16,74$

b) $\left(\frac{-45}{49}\right) \cdot \frac{48}{18} = -\frac{120}{49}$, pois:

$$-\frac{45 \cdot 48}{49 \cdot 18} = \frac{2160}{882}$$

Simplifique a fração.

$$-\frac{2160}{882} = -\frac{2160 \div 18}{882 \div 18} = -\frac{120}{49}$$

c) $8,7 \cdot \frac{5}{4} = \frac{87}{8}$, pois:

Transforme $8,7 = \frac{87}{10}$

$$\frac{87}{10} \cdot \frac{5}{4} =$$

$$\frac{87 \cdot 5}{10 \cdot 4} = \frac{435}{40}$$

Simplifique a fração.

$$\frac{435}{40} = \frac{435 \div 5}{40 \div 5} = \frac{87}{8}$$

d) $\left(-\frac{36}{15}\right) \cdot \left(\frac{-50}{12}\right) = 10$, pois:

$$\frac{-36}{15} \cdot \frac{-50}{12} = \frac{-36 \cdot -50}{15 \cdot 12}$$

$$\frac{1800}{180}$$

Lembre-se: toda fração é uma divisão... Logo:

$$\frac{1800}{180} = 1800 \div 180 = 10$$

$$e) (-4,6) \cdot (-0,7) = 3,22$$

$$f) \frac{19}{3} \cdot \frac{33}{7} = \frac{209}{7}, \text{ pois:}$$

$$\frac{19 \cdot 33}{3 \cdot 7} = \frac{627}{21}$$

Simplifique a fração.

$$\frac{627}{21} = \frac{627 \div 3}{21 \div 3} = \frac{209}{7}$$

$$g) 11,05 \cdot (-4) = -44,2$$

$$h) 3,9 \cdot 2,02 = 7,878$$

2. Encontre os quocientes das divisões seguir:

$$a) 16,38 : (-1,3) = -12,6$$

$$b) \left(-\frac{42}{13}\right) : \left(-\frac{7}{26}\right) = 52, \text{ pois:}$$

$$\frac{-42}{13} \cdot \frac{26}{-7} =$$

$$\frac{-42 \cdot 26}{13 \cdot -7} = \frac{-1092}{-91} = \frac{1092}{91}$$

Lembre-se: toda fração é uma divisão... Logo:

$$\frac{1092}{91} = 1092 \div 91 = 12$$

$$c) -1397 : (-20,5) = \frac{2794}{41} \text{ ou } 68,14634...$$

Há duas possibilidades:

- Realizar a divisão na chave e se deparar com a dízima não periódica: 68,14634... (Lembre-se que a divisão de dois negativos resulta num positivo → jogo de sinais)

- Transformar (20,5) em $\frac{205}{10}$. Na verdade, podemos ainda simplificar essa fração para

$$\frac{205}{10} = \frac{205 \div 5}{10 \div 5} = \frac{41}{2}.$$

A conta ficaria:

$$-1397 : -\frac{41}{2} =$$

$$\frac{-1397}{1} : \frac{-41}{2} =$$

$$\frac{-1397}{1} \cdot \frac{2}{-41} = \frac{-1397 \cdot 2}{1 \cdot -41} =$$

$$\frac{-2794}{-41} = \frac{2794}{41}$$

O aluno deve escolher o caminho que julgar mais fácil de entender e realizar.

d) $5 : \left(-\frac{78}{3}\right) = \frac{-5}{26}$, pois:

$$\frac{5}{1} : \left(-\frac{78}{3}\right) =$$

$$\frac{5}{1} \cdot \frac{3}{-78} = \frac{5 \cdot 3}{1 \cdot -78}$$

$$\frac{15}{-78} = -\frac{15}{78}$$

Simplifique a fração.

$$-\frac{15}{78} = \frac{-15 \div 3}{78 \div 3} = \frac{-5}{26}$$

e) $501,3 : 7,5 = 66,84$

f) $643,284 : 20,04 = 32,1$

g) $18331,2 : 304 = 60,3$

Lição 6 – Porcentagem

1. De que deriva a palavra porcentagem? Qual é o símbolo utilizado para representá-la?

R: A palavra porcentagem deriva do latim *per centum*, que quer dizer por um cento, isto é, dividido por cem. Matematicamente, isso pode ser escrito como uma fração cujo denominador é cem. O símbolo é %.

2. Por que é que se diz que as porcentagens são valores relativos e não absolutos?

R: Porque a porcentagem depende sempre do valor com que ela se relaciona: 30% de 10 é diferente de 30% de 20. Portanto, é relativa a *um valor*, não é absoluta.

3. Calcule as porcentagens abaixo através das frações centesimais:

a) 20% de 100

$$\text{R: } 100 \cdot \frac{20}{100} = \frac{100 \cdot 20}{100} = \frac{2000}{100} = 20$$

b) 45% de 70

$$\text{R: } 70 \cdot \frac{45}{100} = \frac{70 \cdot 45}{100} = \frac{3150}{100} = 31,5$$

c) 10% de 235

$$\text{R: } 235 \cdot \frac{10}{100} = \frac{235 \cdot 10}{100} = \frac{2350}{100} = 23,5$$

d) 0,5% de 500

$$\text{R: } 500 \cdot \frac{0,5}{100} = \frac{500 \cdot 0,5}{100} = \frac{250}{100} = 2,5$$

e) 25% de 25

$$\text{R: } 25 \cdot \frac{25}{100} = \frac{25 \cdot 25}{100} = \frac{625}{100} = 6,25$$

4. Complete a tabela abaixo:

Taxa Porcentual	Fração Centesimal	Fração Irredutível	Valor Decimal
100%	$\frac{100}{100}$	$\frac{1}{1}$	1
75%	$\frac{75}{100}$	$\frac{3}{4}$	0,75
50%	$\frac{50}{100}$	$\frac{1}{2}$	0,5
25%	$\frac{25}{100}$	$\frac{1}{4}$	0,25

10%	$\frac{10}{100}$	$\frac{1}{10}$	0,10 ou 0,1
1%	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	0,01
5%	$\frac{5}{100}$	$\frac{1}{20}$	0,05
0,5%	$\frac{0,5}{100}$	$\frac{0,5}{100}$	0,005

- 75 % → pode ser escrito como $\frac{75}{100}$

Essa fração pode ser *simplificada*: $\frac{75}{100} = \frac{75 \div 25}{100 \div 25} = \frac{3}{4}$

O valor decimal de 75% é $= \frac{75}{100} = 75 \div 100 = 0,75$

- 50% → pode ser escrito como $\frac{50}{100}$

Essa fração pode ser *simplificada*: $\frac{50}{100} = \frac{50 \div 50}{100 \div 50} = \frac{1}{2}$

O valor decimal de 50% é $= \frac{50}{100} = 50 \div 100 = 0,50 = 0,5$

- 25% → pode ser escrito como $\frac{25}{100}$

Essa fração pode ser *simplificada*: $\frac{25}{100} = \frac{25 \div 25}{100 \div 25} = \frac{1}{4}$

O valor decimal de 25% é $= \frac{25}{100} = 25 \div 100 = 0,25$

- 10% → pode ser escrito como $\frac{10}{100}$

Essa fração pode ser *simplificada*: $\frac{10}{100} = \frac{10 \div 10}{100 \div 10} = \frac{1}{10}$

O valor decimal de 10% é $= \frac{10}{100} = 10 \div 100 = 0,10 = 0,1$

- 1% → pode ser escrito como $\frac{1}{100}$

Não é possível *simplificar essa fração*.

O valor decimal de 1% é $= \frac{1}{100} = 1 \div 100 = 0,01$

- 5% pode ser escrito como $= \frac{5}{100}$

Essa fração pode ser *simplificada*: $\frac{5}{100} = \frac{5 \div 5}{100 \div 5} = \frac{1}{20}$

O valor decimal de 5% é $= \frac{5}{100} = 5 \div 100 = 0,05$

- 0,5% pode ser escrito como $= \frac{0,5}{100}$

Se o aluno possuir dificuldade com operações com decimais, não é necessário simplificar, mas é possível *simplificar*:

$$\frac{0,5}{100} = \frac{0,5 \div 0,5}{100 \div 0,5} = \frac{1}{200}$$

O valor decimal de 0,5 % é $= \frac{0,5}{100} = 0,5 \div 100 = 0,05$

5. Calcule as porcentagens através dos valores decimais:

a) 15% de 100

$$\text{R: } 15\% = \frac{15}{100} = 0,15$$

$$15\% \text{ de } 100 = 0,15 \cdot 100$$

$$15\% \text{ de } 100 = 15$$

b) 12% de 72

$$\text{R: } 12\% = \frac{12}{100} = 0,12$$

$$12\% \text{ de } 72 = 0,12 \cdot 72$$

$$12\% \text{ de } 72 = 8,64$$

c) 72% de 153

$$\text{R: } 72\% = \frac{72}{100} = 0,72$$

$$72\% \text{ de } 153 = 0,72 \cdot 153$$

$$72\% \text{ de } 153 = 110,16$$

d) 1% de 99

$$\text{R: } 1\% = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$1\% \text{ de } 99 = 0,01 \cdot 99$$

$$1\% \text{ de } 99 = 0,99$$

e) 99% de 5 000

$$\text{R: } 99\% = \frac{99}{100} = 0,99$$

$$99\% \text{ de } 5000 = 0,99 \cdot 5000$$

$$99\% \text{ de } 5000 = 4950$$

6. Complete as frases a seguir:

a) Calcular 50% de um valor é o mesmo que dividir esse número por 2.

$$\text{Pois } 50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = \text{dividir por } 2$$

Multiplicar por $\frac{1}{2}$ é o mesmo que dividir por 2.

b) Calcular 25% de um valor é o mesmo que dividir esse número por 4.

$$\text{Pois } 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \text{dividir por } 4$$

Multiplicar por $\frac{1}{4}$ é o mesmo que dividir por 4.

c) Calcular 10% de um valor é o mesmo que dividir esse número por 10.

$$\text{Pois } 10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = \text{dividir por } 10$$

Multiplicar por $\frac{1}{10}$ é o mesmo que dividir por 10.

d) Calcular 30% de um número é o mesmo que encontrar quanto vale 10% e depois multiplicar esse valor por 3.

$$\text{Pois } 30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} = 3 \cdot \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = 10\%$$

Ou seja, equivale a descobrir quando vale 10% e depois multiplicar esse valor por 3.

e) Calcular 1% de um valor é o mesmo que dividir esse número por 100.

$$\text{Pois } 1\% = \frac{1}{100} = \text{dividir por } 100$$

Multiplicar por $\frac{1}{100}$ é o mesmo que dividir por 100.

7. Calcule as porcentagens através das taxas percentuais notáveis:

a) 40% de 250

$$\frac{40}{100} \cdot 250 = 0,4 \cdot 250 = 100$$

b) 90% de 82,5

$$\frac{90}{100} \cdot 82,5 = 0,9 \cdot 82,5 = 74,25$$

c) 75% de 16

$$\frac{75}{100} \cdot 16 = 0,75 \cdot 16 = 12$$

O aluno pode pensar também que 75% equivale a $\frac{3}{4}$ e pode multiplicar 16 por $\frac{3}{4}$.

d) 0,5% de 72

$$\frac{0,5}{100} \cdot 72 = 0,005 \cdot 72 = 0,36$$

e) 78% de 13,4

$$\frac{78}{100} \cdot 13,4 = 0,78 \cdot 13,4 = 10,452$$

f) 3% de 7

$$\frac{3}{100} \cdot 7 = 0,03 \cdot 7 = 0,21$$

Lição 7 – Cálculo de Porcentagem

1. Uma família numerosa totaliza 30 pessoas, dentre as quais 12 são adultas. Qual é o percentual que as crianças representam nesta família?

R: Para saber que percentual as crianças representam nesta família, vamos montar em primeiro lugar a fração que representa o total de crianças:

Se há 30 pessoas, das quais 12 são adultas, então há 18 crianças ($30 - 12 = 18$).

Agora, queremos saber que percentual de crianças em relação ao total de pessoas. Faça a regra de três:

$$\begin{array}{l} 30 \text{ pessoas (total)} \text{ ---- } 100\% \\ 18 \text{ pessoas (crianças)} \text{ ----- } x \\ 30 \cdot x = 18 \cdot 100 \\ 30x = 1800 \end{array}$$

$$x = \frac{1800}{30}$$

$$x = 60\%$$

Logo, o percentual que as crianças representam nesta família é 60%.

2. A mãe de Valentina comprou-lhe um vestido branco para sua Primeira Eucaristia. O vestido custava R\$ 130,00, mas ela recebeu um desconto e pagou apenas R\$ 100,00. Qual é o percentual do desconto? De quanto foi esse desconto?

R: Em primeiro lugar, o desconto foi de R\$ 30,00 ($130 - 100 = 30$).

Agora, descubra qual é o percentual de R\$ 30,00 (desconto) em relação a R\$ 130,00 (preço antigo do vestido), através da seguinte regra de três:

130 reais ----- 100%

30 reais ----- x

$$130 \cdot x = 30 \cdot 100$$

$$130x = 3000$$

$$x = \frac{3000}{130}$$

$$x = 23,076... = 23,08 \%$$

Logo, o desconto foi de 23,08%.

3. Uma pessoa doou 40% do que tinha a uma instituição de caridade e ainda ficou com R\$ 570,00. Quanto essa pessoa doou à instituição?

R: Note que 570 é 60% do total. A pessoa tinha 100%. Doou 40% e ficou com 60%.

Não temos 100% do valor, mas temos 60%. Isto serve para a regra de três. Queremos saber quanto é 40%:

570 reais ----- 60%

x ----- 40%

$$60 \cdot x = 570 \cdot 40$$

$$60x = 22800$$

$$x = \frac{22800}{60}$$

$$x = 380$$

Assim, os 40% correspondem a 380 reais.

Logo, ela doou R\$380,00 à instituição.

4. Um produto que custa R\$ 120,00 e sofre um aumento de 15% passa a custar quanto?

R: Primeiro, devemos descobrir quando é 15% de 120:

$$\frac{15}{100} \cdot 120 = 0,15 \cdot 120 = 18$$

Logo, o produto custará 18 reais mais caro. Se seu preço era 120, custará R\$ 138,00 reais.

5. Um produto custava R\$ 500,00 e passou a custar R\$ 800,00. Qual foi o aumento porcentual?

R: O aumento foi de R\$ 300 ($800 - 500 = 300$).

Agora, descubra qual é o percentual de R\$ 300,00 (aumento) em relação a R\$ 500,00 (preço antigo do produto), através da seguinte regra de três:

$$\begin{array}{rcl} 500 & \text{-----} & 100\% \\ 300 & \text{-----} & x \\ 500 \cdot x & = & 300 \cdot 100 \\ 500x & = & 30000 \\ x & = & \frac{30000}{500} \\ x & = & 60\% \end{array}$$

300 reais corresponde a 60% do preço antigo do produto.

Logo, o aumento foi de 60%.

6. Um produto sofreu um aumento de 25%. Em seguida, devido à variação no mercado, seu preço teve de ser reduzido também em 25%, passando a custar R\$ 225,00. Qual era o preço desse produto antes do aumento?

R: **O preço final de um produto após um aumento é de:**

100% + aumento.

Pois, se um produto sofre um aumento de 20% ele não passa a custar 20%. Ele custa seu valor original (100%) + 20%

O preço final de um produto após um desconto é de:

Um desconto é 100% – desconto.

Da mesma forma, se um produto sofre um desconto de 20% ele não passa a custar 20%. Ele custa seu valor original (100%) – 20% = 80%

Voltando para os dados do exercício:

Se um produto sofre um aumento de 25%, seu preço final em relação ao preço inicial é:

$$100\% + 25\% = 125\%$$

Se um produto sofre um desconto de 25%, seu preço final em relação ao preço inicial é:

$$100\% - 25\% = 75\%$$

Também, **aumentos e descontos sucessivos são multiplicados para chegar ao preço final.**

Sabemos que o aumento foi de 125% e o desconto de 75%. Lembre-se:

$$125\% = \frac{125}{100} \quad \text{e} \quad 75\% = \frac{75}{100}$$

$$\frac{125}{100} \cdot \frac{75}{100} = \frac{9375}{10000} = \frac{9375 \div 100}{10000 \div 100} = \frac{93,75}{100} = 93,75\%$$

Logo, multiplicar um valor por 125% e 75% corresponde a multiplicar o valor inicial por 93,75%.

Assim, os R\$225,00 (preço final) correspondem a 93,75% do valor original.

Queremos saber o valor original do produto (100%). Basta fazer a regra de três:

$$\begin{array}{r} 225 \text{ ----- } 93,75\% \\ x \text{ ----- } 100\% \end{array}$$

$$225 \cdot 100 = 93,75 \cdot x$$

$$22500 = 93,75 \cdot x$$

$$\frac{22500}{93,75} = x$$

$$240 = x$$

Logo, o preço inicial do produto era R\$ 240,00.

7. Numa fábrica de tintas, certa quantidade de água deve ser misturada com 840 litros de tinta corante, de modo que a mistura tenha 25% de água. Quantos litros de água deve ter a mistura?

R: A mistura é o que corresponde a 100%.

Note que os 840 litros de tinta são os 75% , pois deve ter 25% de água na mistura (100% – 25% = 75%).

Não sabemos quantos litros são 100%, mas sabemos quanto litros são 75% da mistura = 840 litros. Com essa informação, é possível realizar a seguinte regra de três:

$$\begin{array}{r} 75\% \text{ ----- } 840 \text{ litros} \\ 25\% \text{ ----- } x \end{array}$$

$$75 \cdot x = 25 \cdot 840$$

$$75x = 21000$$

$$x = \frac{21000}{75}$$

$$x = 280$$

Assim, 25% da mistura são 280 L.

Portanto, a mistura deve levar 280 L de água (25% de água).

8. Joãozinho gastou a metade do dinheiro que tinha com um presente que comprou para a sua mãe. Em seguida, gastou 30% do que lhe restou, na compra de um jogo, e ainda ficou com R\$ 63,00. Quantos reais tinha Joãozinho antes das compras?

R: Quando alguém gasta algo, é semelhante a um desconto. A pessoa tinha 100%, perde uma porcentagem (gasta) e fica com uma outra porcentagem.

Por exemplo: se alguém gasta 20% do que tem, fica com 80% ($100 - 20 = 80$).

Joãozinho tinha um dinheiro (100%).

Se ele gastou metade desse dinheiro, significa que gastou 50% e ficou com 50% ($100\% - 50\% = 50\%$)

Se ele gastou 30% significa que ficou com 70% do dinheiro ($100\% - 30\% = 70\%$).

Se alguém tem descontos sucessivos (gastos sucessivos) devemos multiplicar as porcentagens.

Joãozinho gastou 50% → ficou com 50%

Depois, recebeu gastou 30% → ficou com 70%. Multiplicando:

$$50\% \cdot 70\% = \frac{50}{100} \cdot \frac{70}{100} = \frac{50 \cdot 70}{100 \cdot 100} = \frac{3500}{10000}$$

$$\frac{3500}{10000} = \frac{3500 \div 100}{10000 \div 100} = \frac{35}{100} = 35\%$$

Assim, gastar 50% do dinheiro e depois gastar mais 30% desses 50% que restaram, *equivale a ficar com 35% do que se tinha.*

O dinheiro que restou para Joãozinho foi de 63 reais, que é 35% do valor que Joãozinho tinha.

Montando a conta:

$$\begin{array}{rcl} 63 \text{ reais} & \text{-----} & 35\% \\ x \text{ reais} & \text{-----} & 100\% \end{array}$$

$$63 \cdot 100 = x \cdot 35$$

$$6300 = x \cdot 35$$

$$\frac{6300}{35} = x$$

$$180 = x$$

Assim, Joãozinho tinha R\$ 180,00.

Lição 8 – Juros simples

1. O que significam os termos Capital, Taxa, Tempo e Montante na Matemática?

R: Capital significa dinheiro. Taxa é valor que se cobra por unidade de tempo, podendo ser por dia, mês, ano. Sempre é dada em forma de porcentagem. O “tempo” é a quantidade de tempo em que se investiu um capital ou que se demorou para pagar um empréstimo, podendo ser em dias, meses ou anos. O montante é o capital final após a aplicação do juro (quanto de dinheiro rendeu aquele juros).

2. Um investidor quer aplicar a quantia de R\$ 800,00 por 3 meses, a uma taxa de 8% ao mês (a.m.) em juros simples, para retirar no final deste período. Quanto ele irá retirar?

Sabemos que:

- O capital (c) é = 800
- A taxa (i) é = 8% ao mês
- O tempo (t) = 3 meses
- Queremos saber o juros (j).

Basta aplicar tudo isto na expressão que já conhecemos:

$$j = \frac{c \cdot i \cdot t}{100}$$

$$j = \frac{800 \cdot 8 \cdot 3}{100} = \frac{6400 \cdot 3}{100} = \frac{19200}{100} = 192$$

Assim, o juros foi de 192 reais.

O que ele receberá será o montante (capital + juros) = $800 + 192 = 992$ reais

Logo, receberá R\$ 992,00.

3. O preço à vista de um eletrodoméstico é R\$ 350,00. Dando-se uma entrada de R\$ 80,00, o restante será pago com um cheque com vencimento para 3 meses depois da compra incluindo um acréscimo de juros simples de 4% ao mês. Qual será o valor do cheque?

Se a pessoa der uma entrada de 80 reais, o valor a ser parcelado será 270 reais ($350 - 80 = 270$).

Assim, o capital é 270 (esse é o valor que estará sujeito ao juros).

- Capital (c) = 270
- Tempo (t) = 3 meses
- Taxa (i) = 4% ao mês
- Juros = ??

Basta aplicar tudo isto na expressão que já conhecemos:

$$j = \frac{c \cdot i \cdot t}{100}$$

$$j = \frac{270 \cdot 4 \cdot 3}{100} = \frac{1080 \cdot 3}{100} = \frac{3240}{100} = 32,4 = 32,40$$

Perceba que quando se trata de dinheiro devemos sempre colocar duas casas decimais (duas casas após a vírgula). Neste caso como só havia o “4”, devemos o “0” um algarismo que não é significativo (não altera o valor do número).

Por exemplo: num supermercado, o preço não se escreve R\$ 5, mas sim R\$ 5,00. Zeros após a vírgula não alteram o número.

Se o juros foi de 32,40, o total a ser pago (montante) é:

$$270 + 32,40 = 302,40$$

Logo, o valor do cheque será R\$ 302,40.

4. Quanto rende de juro um capital de R\$ 8 920,00 empregado à taxa de 13% ao ano, durante 3 anos?

- Capital (c) = 8920
- Tempo (t) = 3 anos
- Taxa (i) = 13% ao ano
- Juros = ??

Basta aplicar tudo isto na expressão que já conhecemos:

$$j = \frac{c \cdot i \cdot t}{100}$$

$$j = \frac{8920 \cdot 13 \cdot 3}{100} = \frac{115960 \cdot 3}{100} = \frac{347880}{100} = 3478,8 = 3478,80$$

Perceba que quando se trata de dinheiro devemos sempre colocar duas casas decimais (duas casas após a vírgula). Neste caso como só havia o “8”, devemos o “0” um algarismo que não é significativo (não altera o valor do número).

Por exemplo: num supermercado, o preço não se escreve R\$ 5, mas sim R\$ 5,00. Zeros após a vírgula não alteram o número.

R: O juro desse capital será R\$ 3.478,80.

5. A que taxa mensal de juros simples um capital de R\$ 500,00, aplicado durante 10 meses, produz R\$ 150,00 de juros?

- Capital (c) = 500
- Tempo (t) = 10 meses
- Taxa (i) = ?????? ao mês
- Juros = 150

Basta aplicar tudo isto na expressão que já conhecemos:

$$j = \frac{c \cdot i \cdot t}{100}$$

$$150 = \frac{500 \cdot i \cdot 10}{100}$$

$$150 \cdot 100 = 500 \cdot i \cdot 10$$

$$15000 = 500 \cdot i \cdot 10$$

$$15000 = 5000 \cdot i$$

$$\frac{15000}{5000} = i$$

$$3 = i$$

R: A uma taxa de 3% ao mês.

Lição 9 – Aplicação Juros simples

1. Júlio empregou R\$ 4.800,00 a juros simples, à taxa de 1% ao mês, durante 3 anos e 4 meses. No final desse tempo, que montante Júlio vai receber?

- Capital (c) = 4800
- Taxa (i) = 1% ao mês
- Tempo (t) = 3 anos e 4 meses → **40 MESES**
- Juros = ??
- Montante = capital + juros

Atente-se: o tempo e a taxa DEVEM ESTAR na MESMA unidade de tempo.

Se o juros está “ao mês”, o tempo deve estar em meses. Se o juros está “ao ano”, o tempo deve estar em anos, etc.

Neste caso, o tempo está em anos e meses. É mais fácil converter os anos para meses (pois a taxa está ao mês). Então:

3 anos = 36 meses.

3 anos e 4 meses = 36 meses + 4 meses = 40 meses.

O tempo que deve ser substituído na conta é t = 40 meses.

Aplicando tudo isto na expressão, vamos descobrir o juros:

$$j = \frac{c \cdot i \cdot t}{100}$$

$$j = \frac{4800 \cdot 1 \cdot 40}{100}$$

$$j = \frac{192000}{100}$$

$$j = 1920$$

Assim, se o juros é de 1920, o montante é:

$$\text{Montante} = \text{capital} + \text{juros}$$

$$\text{Montante} = 4800 + 1920$$

$$\text{Montante} = 6720$$

Logo, ele receberá R\$ 6.720,00.

2. Determine quanto renderá, em juros simples, um capital de R\$ 60.000,00 aplicado à taxa de 24% ao ano, durante sete meses.

- Capital (c) = 60000
- Taxa (i) = 24% ao ano
- Tempo (t) = 7 meses $\rightarrow \frac{7}{12}$ **ANOS**
- Juros = ??

Atente-se: o tempo e o taxa DEVEM ESTAR na MESMA unidade de tempo.

Se o juros está “ao mês”, o tempo deve estar em meses. Se o juros está “ao ano”, o tempo deve estar em anos, etc.

Neste caso, o tempo está em meses. Como o juros está “ao ano”, precisamos converter 7 meses para anos. Faça a seguinte regra de três:

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ ano} & \text{-----} & 12 \text{ meses} \\ x \text{ ano} & \text{-----} & 7 \text{ meses} \end{array}$$

$$12 \cdot x = 7 \cdot 1$$

$$12x = 7$$

$$x = \frac{7}{12}$$

O tempo que deve ser substituído na conta é $t = \frac{7}{12}$ anos.

Aplicando tudo isto na expressão, vamos descobrir o juros:

$$j = \frac{c \cdot i \cdot t}{100}$$

$$j = \frac{60000 \cdot 24 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)}{100}$$

$$j = \frac{1440000 \cdot \frac{7}{12}}{100}$$

$$j = \frac{\frac{1440000 \cdot 7}{12}}{100}$$

$$j = \frac{\frac{10080000}{12}}{100}$$

$$j = \frac{(10080000 \div 12)}{100}$$

$$j = \frac{840000}{100}$$

$$j = 8400$$

O juros será de R\$ 8.400,00.

3. Qual é a taxa mensal de juros simples que faz um capital de R\$ 9.500,00 produzir um montante de R\$ 11.900,00 ao fim de 1 ano de aplicação?

- Capital (c) = 9500
- Taxa (i) = ?????? AO MÊS (O exercício diz que quer saber a taxa “MENSAL”)
- Tempo (t) = 1 ano → 12 MESES
- Juros = montante – capital = 11.900 – 9500 = 2400 (o quanto 9500 rendeu)

Atente-se: o tempo e a taxa DEVEM ESTAR na MESMA unidade de tempo.

Se o juros está “ao mês”, o tempo deve estar em meses. Se o juros está “ao ano”, o tempo deve estar em anos, etc.

Neste caso, o tempo está em ANOS. Como o juros está “ao mês”, precisamos converter 1 ano para meses. Sabemos que 1 ano tem 12 meses. Então, 1 ano = 12 meses.

Aplicando tudo isto na expressão, vamos descobrir a taxa:

$$j = \frac{c \cdot i \cdot t}{100}$$

$$2400 = \frac{9500 \cdot i \cdot 12}{100}$$

$$2400 \cdot 100 = 9500 \cdot i \cdot 12$$

$$240000 = 9500 \cdot i \cdot 12$$

$$240000 = 114000 \cdot i$$

$$\frac{240000}{114000} = i$$

$$2,10526... = i$$

Como “i” é uma dízima periódica, podemos arredondar:

$$2,10526... \cong 2,105$$

Logo, para que esse capital renda tal montante, é necessário aplicá-lo a uma taxa de 2,105 % ao mês.

4. Raul aplicou certo capital pelo prazo fixo de 2 anos, à taxa de 0,75% ao mês, e obteve um juro de R\$ 2.250,00. Qual foi o capital aplicado?

- Capital (c) = ??
- Taxa (i) = 0,75% AO MÊS
- Tempo (t) = 2 anos → 24 MESES
- Juros = 2250

Atente-se: o tempo e a taxa DEVEM ESTAR na MESMA unidade de tempo.

Se o juros está “ao mês”, o tempo deve estar em meses. Se o juros está “ao ano”, o tempo deve estar em anos, etc.

Neste caso, o tempo está em ANOS. Como o juros está “ao mês”, precisamos converter 2 anos para meses. Sabemos que 1 ano tem 12 meses. Então:

1 ano ----- 12 meses

2 anos ----- 24 meses

Logo, 2 anos = 24 meses.

Aplicando tudo isto na expressão, vamos descobrir o capital:

$$j = \frac{c \cdot i \cdot t}{100}$$

$$2250 = \frac{c \cdot 0,75 \cdot 24}{100}$$

$$2250 \cdot 100 = c \cdot 0,75 \cdot 24$$

$$225000 = c \cdot 0,75 \cdot 24$$

$$225000 = c \cdot 18$$

$$\frac{225000}{18} = c$$

$$12500 = c$$

Logo, o capital aplicado por Raul foi R\$ 12.500,00.

5. Mário devia, em seu cartão de crédito, R\$ 2.000,00. Como não conseguiu pagar, em dois meses essa dívida aumentou para R\$ 2.880,00. Neste caso, qual foi a taxa de juros simples cobrada mensalmente pelo cartão de crédito?

- Capital (c) = 2000

- Taxa (i) = ??? ao mês
- Tempo (t) = 2 meses
- Juros = Montante – capital = 2880 – 2000 = 880

Aplicando tudo isto na expressão, vamos descobrir a taxa:

$$j = \frac{c \cdot i \cdot t}{100}$$

$$880 = \frac{2000 \cdot i \cdot 2}{100}$$

$$880 \cdot 100 = 2000 \cdot i \cdot 2$$

$$88000 = 2000 \cdot i \cdot 2$$

$$88000 = 4000 \cdot i$$

$$\frac{88000}{4000} = i$$

$$22 = i$$

Logo, a taxa de juros foi de 22% ao mês.

6. Calcule o capital que se deve aplicar à taxa de 8% ao ano, durante 7 meses, para obter juro de R\$ 856,80.

- Capital (c) = ????
- Taxa (i) = 8% ao ANO
- Tempo (t) = 7 meses $\rightarrow \frac{7}{12}$ ANOS

Vimos no (exercício 2) desta mesma lição que 7 meses correspondem a $\frac{7}{12}$ anos.

- Juros = 856,80

Atente-se: o tempo e a taxa DEVEM ESTAR na MESMA unidade de tempo.

Se o juros está “ao mês”, o tempo deve estar em meses. Se o juros está “ao ano”, o tempo deve estar em anos, etc.

Neste caso, o tempo está em meses. Como o juros está “ao ano”, é necessário converter 7 meses em anos. $7 \text{ meses} = \frac{7}{12} \text{ anos}$.

Aplicando tudo isto na expressão, vamos descobrir o capital

$$j = \frac{c \cdot i \cdot t}{100}$$

$$856,80 = \frac{c \cdot 8 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)}{100}$$

$$856,80 \cdot 100 = c \cdot 8 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)$$

$$85680 = c \cdot 8 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)$$

$$85680 = c \cdot \frac{8 \cdot 7}{12}$$

$$85680 = c \cdot \frac{56}{12}$$

$$85680 \cdot 12 = c \cdot 56$$

$$1028160 = c \cdot 56$$

$$\frac{1028160}{56} = c$$

$$18360 = c$$

Logo, o capital é R\$ 18.360,00.

Lição 10 – Decimais exatos

1. Qual é a condição para um número ser denominado um ‘decimal exato’?

R: Os números denominados decimais exatos são todos aqueles que podem ser escritos como uma fração cujo denominador é 10, 100, 1.000, etc

2. Dadas as frações abaixo, classifique, sem realizar as divisões, quais números são decimais exatos e quais não são:

Como vimos no capítulo: para dizer se é decimal exato, precisamos que a fração esteja irredutível. Depois, devemos analisar seu denominador: se o número que está ali for múltiplo somente dos números primos 2 e/ou 5, então o número será um decimal exato. Caso contrário, isto é, se o denominador for múltiplo de qualquer outro primo senão 2 e/ou 5, então o número não é decimal exato.

a) $\frac{7}{20}$

R: Decimal exato, pois 20 é múltiplo somente dos primos 2 e 5 (ele é múltiplo de 4, 10 também, mas 4 e 10 NÃO SÃO PRIMOS).

b) $\frac{17}{15}$

R: Não é decimal exato, pois 15 é múltiplo do número primo 3.

c) $-\frac{37}{100}$

Decimal exato, pois 100 é múltiplo apenas dos primos 2 e 5 (ele é múltiplo de 4, 10, 20, 50... mas todos esses não são números primos)

d) $-\frac{102}{5}$

Decimal exato, pois 5 é múltiplo do próprio número primo 5 (todo número é múltiplo dele mesmo).

e) $\frac{32}{27}$

Não é decimal exato, pois 27 é múltiplo do número primo 3.

f) $\frac{15}{7}$

Não é decimal exato, pois 7 não é múltiplo de 2 e 5, pelo contrário, é outro número primo.

g) $\frac{42}{14}$

Não é decimal exato, pois é múltiplo do primo 7.

h) $\frac{13}{3}$

Não é decimal exato, pois 3 não é múltiplo de 2 e 5, pelo contrário, é outro número primo.

3. Transforme as frações em decimais e os decimais exatos em frações (simplifique quando necessário):

a) 1,28

Este número é lido como cento e vinte e oito centésimos. A fração $\frac{128}{100}$ também é lida como cento e vinte e oito centésimos. Pelo axioma de Euclides, temos que:

$$1,28 = \frac{128}{100}$$

$\frac{128}{100}$ pode ser simplificada: $\frac{128}{100} = \frac{128 \div 4}{100 \div 4} = \frac{32}{25}$

b) 3,125

Este número é lido como três mil cento e vinte e cinco milésimos. A fração $\frac{3125}{1000}$ também pode ser lida assim. Pelo axioma de Euclides, temos que:

$$3,125 = \frac{3125}{1000}$$

$$\frac{3125}{1000} \text{ pode ser simplificada: } \frac{3125}{1000} = \frac{3125 \div 125}{1000 \div 125} = \frac{25}{8}$$

c) -31,25

Este número é lido como menos três mil cento e vinte e cinco centésimos. A fração $-\frac{3125}{100}$ também pode ser lida assim. Pelo axioma de Euclides, temos que:

$$-31,25 = -\frac{3125}{100}$$

$$-\frac{3125}{100} \text{ pode ser simplificada: } \frac{-3125}{100} = \frac{-3125 \div 25}{100 \div 25} = \frac{-125}{4}$$

d) 0,72

Este número é lido como setenta e dois centésimos. A fração $\frac{72}{100}$ também pode ser lida assim. Pelo axioma de Euclides, temos que:

$$0,72 = \frac{72}{100}$$

$$\frac{72}{100} \text{ pode ser simplificada : } \frac{72}{100} = \frac{72 \div 4}{100 \div 4} = \frac{18}{25}$$

e) 0,153

Este número é lido como cento e cinquenta e três milésimos. A fração $\frac{153}{1000}$ também pode ser lida assim. Pelo axioma de Euclides, temos que:

$$0,153 = \frac{153}{1000}$$

Não é possível simplificar esta fração.

f) 1,332

Este número é lido como mil trezentos e trinta e dois milésimos. A fração $\frac{1332}{1000}$ também pode ser lida assim. Pelo axioma de Euclides, temos que:

$$1,332 = \frac{1332}{1000}$$

$$\frac{1332}{1000} \text{ pode ser simplificada: } \frac{1332}{1000} = \frac{1332 \div 4}{1000 \div 4} = \frac{333}{250}$$

g) 4,718365

Este número é lido como quatro milhões setecentos e dezoito mil trezentos e sessenta e cinco milionésios. A fração $\frac{4718365}{1000000}$ também pode ser lida assim. Pelo axioma de Euclides, temos que:

$$4,718365 = \frac{4718365}{1000000}$$

$$\frac{4718365}{1000000} \text{ pode ser simplificada: } \frac{4718365}{1000000} = \frac{4718365 \div 5}{1000000 \div 5} = \frac{943673}{200000}$$

$$\text{h) } \frac{7}{10}$$

$$\frac{7}{10} = 7 \div 10 = 0,7$$

$$\text{i) } \frac{29}{10}$$

$$\frac{29}{10} = 29 \div 10 = 2,9$$

$$\text{j) } \frac{31}{100}$$

$$\frac{31}{100} = 31 \div 100 = 0,31$$

$$\text{k) } \frac{37}{1000}$$

$$\frac{37}{1000} = 37 \div 1000 = 0,037$$

$$\text{l) } \frac{8}{5}$$

$$\frac{8}{5} = 8 \div 5 = 1,6$$

$$\text{m) } \frac{7}{20}$$

$$\frac{7}{20} = 7 \div 20 = 0,35$$

$$\text{n) } \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3} = 5 \div 3 = 1,666\bar{6}$$

$$\text{o) } \frac{-7}{6}$$

$$\frac{-7}{6} = -7 \div 6 = 1,166\bar{6}$$

$$\text{p) } \frac{-20}{9}$$

$$\frac{-20}{9} = -20 \div 9 = 2,222\bar{2}$$

Lição 11 – Dízima periódica

1. Qual é o inverso do oposto do número 2,2222....? Responda na forma decimal.

R: 0,45, pois:

Oposto de 2,2222.... = -2,2222...

Inverso do oposto de 2,2222.... = $\frac{1}{-2,2222...} = 1 \div -2,2222... = -0,45$

Observação → a conta $1 \div -2,2222...$ pode ser realizada na calculadora.

2. Escreva o período das dízimas abaixo:

Período é o algarismo ou os algarismos que se repetem infinitamente na dízima.

a) 0,342342342...

R: 342

b) 58,6777...

R: 7

c) 456,989898...

R: 98

Lição 12 – Fração Geratriz

1. Encontre a fração geratriz das seguintes dízimas periódicas:

a) 0,777...

R: À fração que dá origem à dízima, chamaremos de “x”.

Queremos encontrar “x” tal que:

$$x = 0,777... \text{ (I)}$$

Multiplique por 10 ambos os lados da igualdade:

$$10 \cdot x = 10 \cdot 0,777...$$

$$10x = 7,777... \text{ (II)}$$

Como 7,777... e 0,777... apresentam o mesmo período (7), vamos fazer a diferença entre a equação (II) e a equação (I):

$$10x - x = 7,777... - 0,777...$$

$$9x = 7$$

$$x = \frac{7}{9}$$

A fração geratriz de $0,777\ldots$ é $\frac{7}{9}$

b) $0,153153153\ldots$

R: À fração que dá origem à dízima, chamaremos de “x”.

Queremos encontrar “x” tal que:

$$x = 0,153153153\ldots \text{ (I)}$$

Vamos multiplicar ambos os lados da igualdade por 1.000.

Pois, se multiplicarmos a dízima por “10”, resultaria em “1,53153153...”. Perceba que o “53” antes do 153 não faz parte do período. É preciso que esse “53” passe para o lado esquerdo da vírgula (para parte inteira).

Se multiplicássemos a dízima por “100”, resultaria em 15,3153153...”; e ainda restaria passar o 3 para a parte inteira.

Logo, devemos multiplicar $0,153153\ldots$ por 1000 para resultar em “153,153153...”. Assim:

$$1000 \cdot x = 1000 \cdot 0,153153\ldots$$

$$1000x = 153,153153\ldots \text{ (II)}$$

Como $0,153153\ldots$ e $153,153153\ldots$ apresentam o mesmo período (153), vamos fazer a diferença entre a equação (I) e a equação (II):

$$1000x - x = 153,153153\ldots - 0,153153\ldots$$

$$999x = 153$$

$$x = \frac{153}{999}$$

Podemos simplificar essa fração:

$$x = \frac{153}{999} = \frac{153 \div 9}{999 \div 9} = \frac{17}{111}$$

Assim, a fração geratriz de $0,153153\ldots$ é $\frac{17}{111}$

c) $3,222\ldots$

R: À fração que dá origem à dízima, chamaremos de “x”.

Queremos encontrar “x” tal que:

$$x = 3,222\ldots \text{ (I)}$$

Vamos multiplicar ambos os lados da igualdade por 10.

$$10 \cdot x = 10 \cdot 3,222\ldots$$

$$10x = 32,222\ldots \text{ (II)}$$

Como 3,222... e 32,222... apresentam o mesmo período (2), vamos fazer a diferença entre a equação (I) e a equação (II):

$$10x - x = 32,222... - 3,222...$$

$$9x = 32 - 3$$

$$9x = 29$$

$$x = \frac{29}{9}$$

Assim, a fração geratriz de 3,222... é $\frac{29}{9}$

d) 5,474747...

R: À fração que dá origem à dízima, chamaremos de “x”.

Queremos encontrar “x” tal que:

$$x = 5,4747... \text{ (I)}$$

Vamos multiplicar ambos os lados da igualdade por 100.

Pois, se multiplicarmos a dízima por “10”, resultaria em “54,74747...”. Perceba que o período dessa nova dízima é “74” e não “47” como em “5,4747”. Então, não poderíamos fazer a subtração.

Se multiplicássemos a dízima por “100”, resultaria em “547,4747...”. Esta nova dízima possui o mesmo período de “5,4747” e, dessa forma, é possível subtraí-las.

Logo, devemos multiplicar 5,4747... por 100 para resultar em “547,4747...”. Assim:

$$100 \cdot x = 100 \cdot 5,474747...$$

$$100x = 547,4747... \text{ (II)}$$

Como “5,4747...” e “547,4747...” apresentam o mesmo período (47), vamos fazer a diferença entre a equação (I) e a equação (II):

$$100x - x = 547,4747... - 5,4747...$$

$$99x = 547 - 5$$

$$99x = 542$$

$$x = \frac{542}{99}$$

Assim, a fração geratriz de 5,4747... é $\frac{542}{99}$.

e) 6,333...

R: À fração que dá origem à dízima, chamaremos de “x”.

Queremos encontrar “x” tal que:

$$x = 6,333... \text{ (I)}$$

Vamos multiplicar ambos os lados da igualdade por 10.

$$10 \cdot x = 10 \cdot 6,333...$$

$$10x = 63,333... \text{ (II)}$$

Como “6,333...” e “63,333...” apresentam o mesmo período (3), vamos fazer a diferença entre a equação (I) e a equação (II):

$$10x - x = 63,333... - 6,333...$$

$$9x = 63 - 6$$

$$9x = 57$$

$$x = \frac{57}{9}$$

É possível simplificar essa fração:

$$\frac{57}{9} = \frac{57 \div 3}{9 \div 3} = \frac{19}{3}$$

Assim, a fração geratriz de 6,333... é $\frac{19}{3}$.

f) 6,1777...

R: À fração que dá origem à dízima, chamaremos de “x”.

Queremos encontrar “x” tal que:

$$x = 6,1777... \text{ (I)}$$

Perceba que o número “1” não faz parte do período (7). Vamos multiplicar ambos os lados da equação por 10 para que “1” passe para a parte inteira:

$$10 \cdot x = 10 \cdot 6,177...$$

$$10x = 61,777... \text{ (II)}$$

Contudo, a parte infinita (após a vírgula) não é igual em “6,1777...” e “61,777...”. Não podemos subtrair essas duas dízimas, esperando que os infinitos “se cancelem”.

Resta-nos achar uma terceira dízima, multiplicando a equação (I) por 100:

$$100 \cdot x = 100 \cdot 6,1777...$$

$$100x = 617,777... \text{ (III)}$$

Agora sim, a parte infinita (após a vírgula) é igual em “61,777...” e “617,777...”. Então, faça a subtração entre as equações (II) e (III):

$$100x - 10x = 617,777... - 61,777...$$

$$90x = 617 - 61$$

$$90x = 556$$

$$x = \frac{556}{90}$$

É possível simplificar essa fração:

$$\frac{556}{90} = \frac{556 \div 2}{90 \div 2} = \frac{278}{45}$$

Assim, a fração geratriz de 6,1777... é $\frac{278}{45}$.

g) 5,8333...

R: À fração que dá origem à dízima, chamaremos de “x”.

Queremos encontrar “x” tal que:

$$x = 5,8333.. \text{ (I)}$$

Perceba que o número “8” não faz parte do período (3). Vamos multiplicar ambos os lados da equação por 10 para que “8” passe para a parte inteira:

$$10 \cdot x = 10 \cdot 5,8333..$$

$$10x = 58,333... \text{ (II)}$$

Contudo, a parte infinita (após a vírgula) não é igual em “5,8333”... e “58,333...”. Não podemos subtrair essas duas dízimas, esperando que os infinitos “se cancelem”.

Resta-nos achar uma terceira dízima, multiplicando a equação (I) por 100:

$$100 \cdot x = 100 \cdot 5,8333...$$

$$100x = 583,333... \text{ (III)}$$

Agora sim, a parte infinita (após a vírgula) é igual em “58,333...” e “583,333...”. Então, faça a subtração entre as equações (II) e (III):

$$100x - 10x = 583,333... - 58,333...$$

$$90x = 583 - 58$$

$$90x = 525$$

$$x = \frac{525}{90}$$

É possível simplificar essa fração:

$$\frac{525}{90} = \frac{525 \div 15}{90 \div 15} = \frac{35}{6}$$

Assim, a fração geratriz de 5,8333... é $\frac{35}{6}$.

2. Calcule:

a) $2,3333... \times 1,75 = \frac{49}{12}$, pois:

É melhor transformar a dízima periódica e o decimal exato em fração e realizar a multiplicação dessas frações.

Portanto, encontre a fração geratriz de “2,333...”:

À fração que dá origem à dízima, chamaremos de “x”. Queremos encontrar “x” tal que:

$$x = 2,3333... \text{ (I)}$$

Multiplique a equação (I) por 10.

$$10 \cdot x = 10 \cdot 2,3333...$$

$$10x = 23,333...$$

Faça a subtração entre as equações (I) e (II):

$$10x - x = 23,333... - 2,333...$$

$$9x = 23 - 2$$

$$9x = 21$$

$$x = \frac{21}{9}$$

Simplifique essa fração:

$$\frac{21}{9} = \frac{21 \div 3}{9 \div 3} = \frac{7}{3}$$

Assim, a fração geratriz de “2,333...” é $\frac{7}{3}$. Assim:

$$2,333... = \frac{7}{3}$$

Agora, transforme 1,75 em fração:

1,75 se lê cento e setenta e cinco centésimos. A fração $\frac{175}{100}$ também é lida assim. Pelo teorema de Euclides:

$$1,75 = \frac{175}{100}$$

Simplifique essa fração:

$$\frac{175}{100} = \frac{175 \div 25}{100 \div 25} = \frac{7}{4}$$

$$1,75 = \frac{7}{4}$$

Assim:

$$2,333... \times 1,75 = \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{49}{12}$$

b) $1,2555... \times 4,444444... = \frac{452}{81}$, pois:

É melhor transformar as dízimas periódicas em fração e realizar a multiplicação dessas frações.

Comece, encontrando a fração geratriz de “1,2555...”:

À fração que dá origem à dízima, chamaremos de “x”. Queremos encontrar “x” tal que:

$$x = 1,2555.. \text{ (I)}$$

Multiplique a equação (I) por 10.

$$10 \cdot x = 10 \cdot 1,2555...$$

$$10x = 12,5555... \text{ (II)}$$

Multiplique a equação (I) por 100.

$$100 \cdot x = 100 \cdot 1,2555...$$

$$100x = 125,555... \text{ (III)}$$

Faça a subtração entre as equações (III) e (II):

$$100x - 10x = 125,555... - 12,555...$$

$$90x = 125 - 12$$

$$90x = 113$$

$$x = \frac{113}{90}$$

Assim, a fração geratriz de “1,2555...” é $\frac{113}{90}$. Assim:

$$1,2555... = \frac{113}{90}$$

Encontre a fração geratriz de “4,444...”:

À fração que dá origem à dízima, chamaremos de “x”. Queremos encontrar “x” tal que:

$$x = 4,4444... \text{ (I)}$$

Multiplique a equação (I) por 10.

$$10 \cdot x = 10 \cdot 4,444...$$

$$10x = 44,444... \text{ (II)}$$

Faça a subtração entre as equações (II) e (I):

$$10x - x = 44,444... - 4,444...$$

$$9x = 44 - 4$$

$$9x = 40$$

$$x = \frac{40}{9}$$

Assim, a fração geratriz de “4,444...” é $\frac{40}{9}$. Assim:

$$4,444... = \frac{40}{9}$$

Logo:

$$1,2555... \times 4,444444... = \frac{113}{90} \cdot \frac{40}{9} = \frac{4520}{810} = \frac{452}{81}$$

c) $0,757575... : 0,66666... = \frac{25}{22}$, pois:

É melhor transformar as dízimas periódicas em fração e realizar a multiplicação dessas frações.

Comece, encontrando a fração geratriz de “0,7575...”:

À fração que dá origem à dízima, chamaremos de “x”. Queremos encontrar “x” tal que:

$$x = 0,7575... \text{ (I)}$$

Multiplique a equação (I) por 100.

$$100 \cdot x = 100 \cdot 0,7575...$$

$$100x = 75,7575... \text{ (II)}$$

Faça a subtração entre as equações (II) e (I):

$$100x - x = 75,7575... - 0,7575...$$

$$99x = 75$$

$$x = \frac{75}{99}$$

Assim, a fração geratriz de “0,7575...” é $\frac{75}{99}$. Assim:

$$0,757575... = \frac{75}{99}$$

Encontre a fração geratriz de “0,666...”:

À fração que dá origem à dízima, chamaremos de “x”. Queremos encontrar “x” tal que:

$$x = 0,666... \text{ (I)}$$

Multiplique a equação (I) por 10.

$$10 \cdot x = 10 \cdot 0,666...$$

$$10x = 6,666... \text{ (II)}$$

Faça a subtração entre as equações (II) e (I):

$$10x - x = 6,666... - 0,666...$$

$$9x = 6$$

$$x = \frac{6}{9}$$

Assim, a fração geratriz de “0,666...” é $\frac{6}{9}$. Assim:

$$0,666... = \frac{6}{9}$$

Assim:

$$0,757575... : 0,66666... = \frac{75}{99} \div \frac{6}{9} = \frac{675}{594}$$

Simplifique a fração:

$$\frac{675}{594} = \frac{675 \div 27}{594 \div 27} = \frac{25}{22}$$

$$0,757575... : 0,66666... = \frac{25}{22}$$

Lição 13 – Fração Geratriz

1. Toda dízima periódica simples ou dízima periódica composta é:

- a) Número inteiro.
- b) Número racional.**
- c) Número irracional.
- d) Nenhuma das anteriores.

Toda dízima periódica simples ou dízima periódica composta é um número RACIONAL, pois pode ser escrita em forma de fração.

Não pode ser um número inteiro, porque possui vírgula.

Não é irracional porque números irracionais NÃO podem ser escritos em forma de fração e as dízimas periódicas compostas ou não podem ser escritas como frações (frações geratrizes).

Lição 14 – Números irracionais

1. Quais dos seguintes números são irracionais e quais são racionais?

a) 0,555...

R: Racional, pois:

- Este número é uma dízima periódica simples e, portanto, pode ser escrito na forma de fração (fração geratriz).
- Definição de racional = pode ser escrito na forma de fração.

Portanto, “0,555...” é racional.

b) -3,414587....

R: Irracional, pois:

- Este número é uma dízima NÃO PERIÓDICA e, portanto, NÃO pode ser escrito na forma de fração.
- Definição de irracional = NÃO pode ser escrito na forma de fração.

Portanto, “-3,414587....” é irracional.

c) $\sqrt{80}$

R: Irracional, pois:

- A raiz de 80 não é exata: resulta numa dízima NÃO PERIÓDICA. Portanto, NÃO pode ser escrita na forma de fração.
- Definição de irracional = NÃO pode ser escrito na forma de fração.

Portanto, $\sqrt{80}$ é irracional.

d) $\sqrt{121}$

R: Racional, pois:

- $\sqrt{121} = 11$.
- 11 é um número natural e todo número natural é um número racional (*lembre-se: o conjunto dos racionais contém o conjunto dos naturais e o conjunto dos inteiros*)

Portanto, $\sqrt{121}$ é racional.

e) $\sqrt{15+3\sqrt{49}}$

R: Racional, pois:

- Resolva a expressão: $\sqrt{15+3\sqrt{49}} = \sqrt{15+3\cdot 7} = \sqrt{15+21} = \sqrt{36} = 6$
- 6 é um número natural e todo número natural é um número racional (*lembre-se: o conjunto dos racionais contém o conjunto dos naturais e o conjunto dos inteiros*)

Portanto, $\sqrt{15+3\sqrt{49}}$ é racional.

f) $\sqrt{3+\sqrt{16}}$

R: Irracional, pois:

- Resolva a expressão: $\sqrt{3+\sqrt{16}} = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}$
- $\sqrt{7}$ não é exata, pois resulta numa dízima NÃO PERIÓDICA. Portanto, NÃO pode ser escrita na forma de fração.
- Definição de irracional = NÃO pode ser escrito na forma de fração.

Portanto, $\sqrt{3+\sqrt{16}}$ é irracional.

2. Toda dízima periódica simples ou dízima periódica composta é:

a) Número inteiro.

b) Número racional.

c) Número irracional.

d) Nenhuma das anteriores.

Toda dízima periódica simples ou dízima periódica composta é um número RACIONAL, pois pode ser escrita em forma de fração.

Não pode ser um número inteiro, porque possui vírgula.

Não é irracional porque números irracionais NÃO podem ser escritos em forma de fração e as dízimas periódicas compostas ou não podem ser escritas como frações (frações geratrizes).

Lição 15 – Aproximação de valores

1. Sabendo que $\sqrt{5} = 2,23606797\dots$ e que $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$, calcule utilizando aproximações com duas casas decimais:

Em primeiro lugar, faça a aproximação:

Quando se pede um arredondamento com duas casas decimais, a terceira casa deve ser ignorada.

$$\sqrt{5} = 2,23\textcolor{blue}{6}06797\dots$$

Como $6 > 5$:

$$\sqrt{5} = 2,24$$

(a segunda casa se altera: soma-se +1 ao algarismo da segunda casa)

$$\sqrt{2} = 1,41\textcolor{blue}{4}21356\dots$$

Como $4 < 5$:

$$\sqrt{2} = 1,41$$

(a segunda casa não se altera)

a) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$

Basta somar $1,41 + 2,24 = \mathbf{3,65}$

b) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

Basta subtrair $2,24 - 1,41 = \mathbf{0,83}$

2. Com os dados do exercício acima, calcule usando aproximações com três casas decimais:

Em primeiro lugar, faça a aproximação:

Quando se pede um arredondamento com três casas decimais, a 4ª casa deve ser ignorada.

$$\sqrt{5} = 2,236\textcolor{blue}{0}6797\dots$$

Como $0 < 5$:

$$\sqrt{5} = 2,236$$

(a 3ª casa não se altera)

$$\sqrt{2} = 1,414\textcolor{blue}{2}1356\dots$$

Como $2 < 5$:

$$\sqrt{2} = 1,414$$

(a 3ª casa não se altera)

a) $2\sqrt{2}$

Basta fazer: $2 \cdot 1,414 = 2,828$

b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Basta fazer: $2,236 : 2 = 1,118$.

c) $\frac{\sqrt{5}}{2} - 2\sqrt{2}$

Perceba que a letra c) pede a subtração do resultado da letra b) menos resultado da letra a). Ou seja:

Já vimos que $2 \cdot \sqrt{2} = 2,828$

E que $\frac{\sqrt{5}}{2} = 1,118$

Logo:

$$\frac{\sqrt{5}}{2} - 2\sqrt{2} = 1,118 - 2,828 = -1,71$$

d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$

Basta fazer $2,236 \cdot 1,414 = 3,161704$

3. Arredonde os seguintes valores para 4 casas decimais, 3 casas decimais, 2 casas decimais e 1 casa decimal:

a) 2,4681012141...

- 4 casas decimais: 2,4681

Quando se pede um arredondamento com 4 casas decimais, a 5ª casa deve ser ignorada.

$$2,4681\underline{0}12141...$$

Como $0 < 5$:

$$2,4681012141... \cong 2,4681$$

(a 4ª casa não se altera)

- 3 casas decimais: 2,468

Quando se pede um arredondamento com 3 casas decimais, a 4ª casa deve ser ignorada.

$$2,468\underline{1}012141...$$

Como $1 < 5$:

$$2,4681012141... \cong 2,468$$

(a 3ª casa não se altera)

- 2 casas decimais: 2,47

Quando se pede um arredondamento com 2 casas decimais, a 3ª casa deve ser ignorada.

$$2,46\mathbf{8}1012141...$$

Como $8 > 5$:

$$2,4681012141... \cong 2,47$$

(a segunda casa se altera: soma-se +1 ao algarismo da segunda casa)

- 1 casa decimal: 2,5

Quando se pede um arredondamento com 1 casa decimal, a 2ª casa deve ser ignorada.

$$2,4\mathbf{6}81012141...$$

Como $6 > 5$:

$$2,4681012141... \cong 2,5$$

(a primeira casa se altera: soma-se +1 ao algarismo da primeira casa)

b) 1,3579111315...

- 4 casas decimais: 1,3579

Quando se pede um arredondamento com 4 casas decimais, a 5ª casa deve ser ignorada.

$$1,3579\mathbf{1}11315...$$

Como $1 < 5$:

$$1,3579111315... \cong 1,3579$$

(a 4ª casa não se altera)

- 3 casas decimais: 1,358

Quando se pede um arredondamento com 3 casas decimais, a 4ª casa deve ser ignorada.

$$1,357\mathbf{9}111315...$$

Como $9 > 5$:

$$1,3579111315... \cong 1,358$$

(a 3ª casa se altera: soma-se +1 ao algarismo da 3ª casa)

- 2 casas decimais: 1,36

Quando se pede um arredondamento com 2 casas decimais, a 3ª casa deve ser ignorada.

$$1,35\mathbf{7}9111315...$$

Como $7 > 5$:

$$1,3579111315... \cong 1,36$$

(a 2ª casa se altera: soma-se +1 ao algarismo da 2ª casa)

- 1 casa decimal: 1,4

Quando se pede um arredondamento com 1 casa decimal, a 2ª casa deve ser ignorada.

$$1,3\textcolor{blue}{5}79111315...$$

Como $5 = 5$ (se a próxima casa for maior ou igual a 5 devemos somar +1 ao algarismo da casa):

$$1,3579111315... \cong 1,4$$

(a 1ª casa se altera: soma-se +1 ao algarismo da 1ª casa)

c) 1,234567892354...

- 4 casas decimais: 1,2346

Quando se pede um arredondamento com 4 casas decimais, a 5ª casa deve ser ignorada.

$$1,2345\textcolor{blue}{6}7892354...$$

Como $6 > 5$:

$$1,234567892354... \cong 1,2346$$

(a 4ª casa se altera: soma-se +1 ao algarismo da 1ª casa)

- 3 casas decimais: 1,235

Quando se pede um arredondamento com 3 casas decimais, a 4ª casa deve ser ignorada.

$$1,234\textcolor{blue}{5}67892354...$$

Como $5 = 5$ (se a próxima casa for maior ou igual a 5 devemos somar +1 ao algarismo da casa):

$$1,234567892354... \cong 1,235$$

(a 3ª casa se altera: soma-se +1 ao algarismo da 3ª casa)

- 2 casas decimais: 1,23

Quando se pede um arredondamento com 2 casas decimais, a 3ª casa deve ser ignorada.

$$1,23\textcolor{blue}{4}567892354...$$

Como $4 < 5$:

$$1,234567892354... \cong 1,23$$

(a 2ª casa não se altera)

- 1 casa decimal: 1,2

Quando se pede um arredondamento com 2 casas decimais, a 3ª casa deve ser ignorada.

$$1,2\textcolor{blue}{3}4567892354...$$

Como $3 < 5$:

$$1,234567892354... \cong 1,2$$

(a 1ª casa não se altera)

4. Dados os números $a = 1,3333333\ldots$ e $b = 1,757575\ldots$,

a) determine os valores exatos de $6a$ e $a + b$;

Para determinar o valor EXATO, é necessário encontrar a fração geratriz dessas dízimas periódicas.

Comece, encontrando a fração geratriz de “1,333...”:

À fração que dá origem à dízima, chamaremos de “x”. Queremos encontrar “x” tal que:

$$x = 1,333\ldots \text{ (I)}$$

Multiplique a equação (I) por 10.

$$10 \cdot x = 10 \cdot 1,333\ldots$$

$$10x = 13,333\ldots \text{ (II)}$$

Faça a subtração entre as equações (II) e (I):

$$10x - x = 13,333\ldots - 1,333\ldots$$

$$9x = 12$$

$$x = \frac{12}{9}$$

Simplifique a fração:

$$\frac{12}{9} = \frac{12 \div 3}{9 \div 3} = \frac{4}{3}$$

Assim, a fração geratriz de “1,3333...” é $\frac{4}{3}$. Assim:

$$a = 1,333\ldots = \frac{4}{3}$$

Encontre a fração geratriz de “1,7575...”:

À fração que dá origem à dízima, chamaremos de “x”. Queremos encontrar “x” tal que:

$$x = 1,7575\ldots \text{ (I)}$$

Multiplique a equação (I) por 100.

$$100 \cdot x = 100 \cdot 1,7575\ldots$$

$$100x = 175,7575\ldots \text{ (II)}$$

Faça a subtração entre as equações (II) e (I):

$$100x - x = 175,7575\ldots - 1,7575\ldots$$

$$99x = 174$$

$$x = \frac{174}{99}$$

Simplifique a fração:

$$\frac{174}{99} = \frac{174 \div 3}{99 \div 3} = \frac{58}{33}$$

Assim, a fração geratriz de “1,7575...” é $\frac{58}{33}$. Assim:

$$b = 1,7575... = \frac{58}{33}$$

Agora, faça $6 \cdot a$:

$$6a = 6 \cdot a = 6 \cdot \frac{4}{3} = \frac{6 \cdot 4}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

$$6a = 8$$

Agora, faça $a + b$:

$$a + b = \frac{4}{3} + \frac{58}{33} = \frac{44}{33} + \frac{58}{33} = \frac{102}{33} = \frac{34}{11}$$

$$a + b = \frac{34}{11}$$

Logo:

$$6a = 8 \text{ e } a + b = \frac{34}{11}$$

b) Use valores aproximados com seis casas decimais e calcule $6a$ e $a+b$.

Arredonde “a”:

Quando se pede um arredondamento com 6 casas decimais, a 7ª casa deve ser ignorada.

$$1,333333\underline{3}...$$

$$\text{Como } 3 < 5$$

$$1,333333... \cong 1,333333$$

(a 6ª casa não se altera)

$$a \cong 1,333333$$

Arredonde “b”:

Quando se pede um arredondamento com 6 casas decimais, a 7ª casa deve ser ignorada.

$$1,757575\underline{7}5...$$

$$\text{Como } 7 > 5$$

$$1,75757575... \cong 1,757576$$

(a 6ª casa se altera: soma-se +1 ao algarismo da 6ª casa)

$$b \cong 1,757576$$

Faça 6a:

$$6a = 6 \cdot 1,333333 = 7,999998$$

Faça $a + b$:

$$a + b = 1,333333 + 1,757576 = 3,090909$$

Logo:

$$6a = 7,999998 \text{ e } a + b = 3,090909$$

5. Sabendo que $x = 5,6789101112\dots$, $y = 2,777777777\dots$, $z = 0,9696969696\dots$, calcule usando as aproximações com 6 casas:

Atente-se com o arredondamento:

$$x = 5,678910$$

A 6ª casa não se altera, pois o algarismo da 7ª casa (1) é menor que 2.

$$y = 2,777778$$

A 6ª casa se altera, pois o algarismo da 7ª casa (7) é maior que 5. Então somamos +1 ao algarismo da 6ª casa.

$$z = 0,969697$$

A 6ª casa se altera, pois o algarismo da 7ª casa (6) é maior que 5. Então somamos +1 ao algarismo da 6ª casa.

a) $x + y$

$$R: 5,678910 + 2,777778 = 8,456688$$

b) $y + z$

$$R: 2,777778 + 0,969697 = 3,747475$$

c) $z - x$

$$R: 0,969697 - 5,678910 = -4,709213$$

d) $3y$

$$R: 3 \cdot 2,777778 = 8,333334$$

e) $11z$

$$R: 11 \cdot 0,969697 = 10,666667$$

f) $y + z$

$$R: 2,777778 + 0,969697 = 3,747475$$

g) $3y$

$$R: 3 \cdot 2,777778 = 8,333334$$

h) $y \cdot z$

R: $2,777778 \cdot 0,969697 = 2,6936029933$

Lição 16 – Raiz de 2

1. Demonstre com suas palavras por que o Teorema da $\sqrt{2}$ é irracional.

A demonstração do teorema se encontra no início desta lição.

2. Assinale a afirmação verdadeira:

Atente-se de que a raiz de 2 é infinita e não há indicação em nenhuma alternativa do infinito (...).

a) $\sqrt{2} = 1,414$

b) $\sqrt{2} = 1,4142$

c) $\sqrt{2} = 1,41421$

d) Nenhuma das anteriores.

Passo a passo de Matemática

8º Ano - Volume 2

Lição 17 – Os números reais

1. Que números pertencem ao conjunto dos números reais? Que símbolo é utilizado para representar este conjunto?

R: O conjunto dos números reais é formado pelos números racionais (todos os números vistos até o momento) e irracionais. Para representar o conjunto dos reais utilizamos a letra $\mathbb{R}$.

2. Pensando na reta numérica, responda:

a) O número -4 está à direita ou à esquerda do número -3 ?

À esquerda (-4 é menor que -3).

b) O número 1 está à direita ou à esquerda do número -1 ?

À direita (1 é maior que -1).

c) O número 5 está à direita ou à esquerda do número 8 ?

À esquerda (5 é menor que 8).

d) O número -200 está à direita ou à esquerda do número -7 ?

À esquerda (-200 é menor que -7).

e) O número $1,23456\dots$ está à direita ou a esquerda do número $1,2$?

À direita ($1,23456\dots$ é maior que $1,2$).

f) O número $\frac{29}{10}$ está à direita ou a esquerda do número 3 ?

À esquerda ($\frac{29}{10}$ é menor que 3).

g) O número $\frac{1}{3}$ está à direita ou a esquerda do número $\frac{1}{2}$?

À esquerda ($\frac{1}{3}$ é menor que $\frac{1}{2}$).

3. Classifique como verdadeira ou falsa.

(F) Todo número inteiro é um número natural, mas nem todo número natural é um número inteiro.

Na verdade, todo número natural é um inteiro, mas nem todo inteiro é um natural.

(V) O conjunto dos inteiros permitiu-nos realizar subtrações sem restrições, o que não ocorria apenas com o conjunto dos naturais.

(F) O conceito de números simétricos é diferente do conceito de números opostos.

Na verdade, números simétricos e números opostos significam a mesma coisa.

(F) A propriedade associativa da multiplicação diz que “a ordem das parcelas não altera o produto”.

O correto seria dizer: “A propriedade associativa da multiplicação diz que “a ordem dos fatores não altera o produto”.

(V) O valor absoluto de -5 é igual ao valor absoluto de 5 .

O valor absoluto de -5 é 5 . O valor absoluto de 5 é 5 .

(F) Os irracionais pertencem aos racionais.

Os irracionais não pertencem aos racionais; pertencem aos REAIS.

(F) Todo racional é um número inteiro, mas nem todo número inteiro é um número racional.

Na verdade, todo inteiro é um número racional, mas nem todo racional é um número inteiro.

(V) Ao conjunto dos números reais pertencem os números racionais e os irracionais.

Lição 18 – Valor absoluto

1. O que é o valor absoluto de um número? Como representamos o valor absoluto de um número real?

R: O valor absoluto (ou módulo) de um número real é a distância desse número em relação ao zero. A representação do valor absoluto de um número se dará sempre entre duas barras $| \quad |$.

2. Calcule o módulo dos números abaixo:

a) $|0| = 0$

b) $|0,222\dots| = 0,222\dots$

c) $|-2| = 2$

d) $|-1,131313\dots| = 1,131313\dots$

e) $|\pi| = \pi$

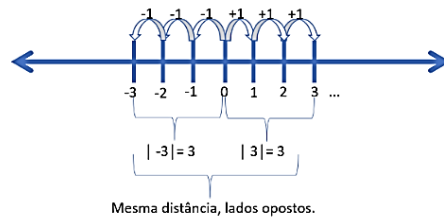
f) $|-5| = 5$

g) $\left| -\frac{3}{5} \right| = \frac{3}{5}$

Lição 19 – Números simétricos

1. O que são números simétricos? Dê exemplos utilizando a reta numérica.

R: São números que possuem o mesmo valor absoluto. Por exemplo, 3 e -3 são simétricos:



Podemos dizer que 3 e -3 são simétricos porque seu valor absoluto (seu módulo), ou seja, a sua distância em relação ao zero é a mesma.

2. A soma de dois números opostos sempre resulta em _____?

R: Zero.

3. Utilizando o método do cancelamento de opostos, resolva as expressões numéricas abaixo:

a) $3 - 7 + 4 + 7 - 1 - 7 + 1$

Reorganize:

$$3 - 7 + 7 + 4 - 1 + 1 - 7 =$$

$$3 + (-7) + 7 + 4 + (-1) + 1 - 7 =$$

Some os opostos:

$$3 + (-7 + 7) + 4 + (-1 + 1) - 7 =$$

$$3 + 0 + 4 + 0 - 7 =$$

$$3 + 4 - 7 =$$

$$7 - 7 =$$

$$0$$

b) $16 - 8 - 4 + 16 - 4 + 8$

Reorganize:

$$16 + 16 - 4 - 4 - 8 + 8 =$$

$$16 + 16 - 4 - 4 + (-8) + 8 =$$

Some os opostos:

$$16 + 16 - 4 - 4 + (-8 + 8) =$$

$$16 + 16 - 4 - 4 + 0 =$$

$$32 - 4 - 4 =$$

$$32 - 8 =$$

24

$$\text{c) } 4 + 100 - 100 - 7 + 6 - 1$$

$$4 + (100 - 100) - 7 + 6 - 1 =$$

$$4 + 0 - 7 + 6 - 1 =$$

$$4 - 7 + 6 - 1 =$$

$$-3 + 6 - 1 =$$

$$3 - 1 =$$

2

$$\text{d) } -23 - 8 + 17 + 6 - 4 + 8$$

Reorganize:

$$-23 - 8 + 8 + 17 + 6 - 4 =$$

$$-23 + (-8) + 8 + 17 + 6 - 4 =$$

$$-23 + (-8 + 8) + 17 + 6 - 4 =$$

$$-23 + 0 + 17 + 6 - 4 =$$

$$-23 + 17 + 6 - 4 =$$

$$-6 + 6 - 4$$

$$0 - 4$$

$$-4$$

Lição 20 - Comparação

1. Comparar os números utilizando $<$, $>$ ou $=$:

$$\text{a) } 2 > -3$$

Pois um número positivo será sempre maior que um número negativo.

$$\text{b) } -3 > -5$$

O maior número negativo é aquele que está mais próximo do zero (ou seja, possui menor módulo).

$$\text{c) } \frac{3}{5} < \frac{7}{5}$$

Quando as frações possuem o mesmo denominador, a maior é aquela com maior numerador. Neste caso, ambas possuem o denominador 5. A maior, portanto, é a com numerador 7 ($7 > 3$).

$$\text{d) } \frac{-2}{7} > \frac{-3}{7}$$

Quando as frações possuem o mesmo denominador, a maior é aquela com maior numerador. Neste caso, ambas possuem o denominador 7. A maior, portanto, é a com numerador -2 ($-2 > -3$).

Lembre-se: o maior número negativo é aquele que está mais próximo do zero (ou seja, possui menor módulo).

$$e) 0,75 = 0,75$$

$$f) 2,98 > 2,957$$

$$g) 0,71 < \frac{71}{99}$$

$$\frac{71}{99} = 0,717171...$$

$$0,71 < 0,717171...$$

$$h) -0,83333... < 0,83411$$

$$i) 1,25 > 1,2345672...$$

$$j) -0,333... = -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} = -0,333....$$

Lição 21 – Propriedades dos Reais

1. Explique as três propriedades fundamentais da aritmética e dê dois exemplos numéricos –cada uma.

• **A comutativa:** enuncia que a ordem dos elementos em uma adição e em uma multiplicação pode ser trocada, sem alterar o resultado do cálculo final.

$$5 + 2 = 2 + 5$$

$$7 = 7$$

(A ordem das parcelas não altera a soma)

$$1 \times 3 = 3 \times 1$$

$$3 = 3$$

(A ordem dos fatores não altera o produto)

• **A associativa:** enuncia que a adição entre três números produz o mesmo resultado, quer adicionemos ao primeiro a soma do segundo e do terceiro, ou ao terceiro a soma do primeiro e do segundo. O mesmo vale para a multiplicação.

$$(5 + 2) + 3 = 5 + (2 + 3)$$

$$7 + 3 = 5 + 5$$

$$10 = 10$$

$$(1 \times 2) \times 3 = 1 \times (2 \times 3)$$

$$2 \times 3 = 1 \times 6$$

$$6 = 6$$

• Propriedade distributiva: para multiplicar uma soma por um número natural, podemos multiplicar cada termo da soma pelo número natural e adicionar os produtos.

$$5 \times (2 + 1) = 5 \times 2 + 5 \times 1$$

$$5 \times 3 = 10 + 5$$

$$15 = 15$$

$$2 \times (4 + 8) = 2 \times 4 + 2 \times 8$$

$$2 \times 12 = 8 + 16$$

$$24 = 24$$

(Os exemplos são pessoais)

2. Observe a multiplicação abaixo:

$$7 \cdot 53 = 7 \cdot (50 + 3) = 7 \cdot 50 + 7 \cdot 3 = 350 + 21 = 371$$

Utilizando o mesmo modelo, calcule:

a) $5 \cdot 21$

$$5 \cdot (20 + 1) =$$

$$5 \cdot 20 + 5 \cdot 1 =$$

$$100 + 5 =$$

$$105$$

b) $8 \cdot 34$

$$8 \cdot (30 + 4) =$$

$$8 \cdot 30 + 8 \cdot 4 =$$

$$240 + 32 =$$

$$272$$

c) $9 \cdot 57$

$$9 \cdot (50 + 7) =$$

$$9 \cdot 50 + 9 \cdot 7 =$$

$$450 + 63 =$$

$$513$$

d) $6 \cdot 123$

$$\begin{aligned}
 &6 \cdot (100 + 20 + 3) = \\
 &6 \cdot 100 + 6 \cdot 20 + 6 \cdot 3 = \\
 &600 + 120 + 18 = \\
 &738
 \end{aligned}$$

3. Aplique a distributiva e encontre os resultados das expressões numéricas:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } &4 \cdot (7 - 3) \\
 &4 \cdot 7 + 4 \cdot (-3) \\
 &28 - 12 \\
 &16
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } &-2 \cdot (5 + 4) \\
 &-2 \cdot 5 + -2 \cdot 4 \\
 &-10 - 8 \\
 &-18
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } &3 \cdot (-4 - 5) \\
 &3 \cdot -4 + 3 \cdot -5 \\
 &-12 - 15 \\
 &-27
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } &-1 \cdot (-7 - 10) \\
 &-1 \cdot -7 + -1 \cdot -10 \\
 &+7 + 10 \\
 &17
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } &x \cdot (y + z) \\
 &x \cdot y + x \cdot z \\
 &xy + xz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } &x \cdot (y - z) \\
 &x \cdot y + x \cdot -z \\
 &xy - xz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g) } &(a + b) \cdot c \\
 &a \cdot c + a \cdot b \\
 &ac + ab
 \end{aligned}$$

$$h) -x \cdot (y - z)$$

$$-x \cdot y - x \cdot -z$$

$$-xy + xz$$

Lição 22 – Propriedades dos Reais

1. Explique as seis propriedades fundamentais da aritmética e dê dois exemplos numéricos para cada uma.

- A comutativa: enuncia que a ordem dos elementos em uma adição e em uma multiplicação pode ser trocada, sem alterar o resultado do cálculo final.

$$5 + 2 = 2 + 5$$

$$7 = 7$$

(A ordem das parcelas não altera a soma)

$$1 \times 3 = 3 \times 1$$

$$3 = 3$$

(A ordem dos fatores não altera o produto)

- A associativa: enuncia que a adição entre três números produz o mesmo resultado, quer adicionemos ao primeiro a soma do segundo e do terceiro, ou ao terceiro a soma do primeiro e do segundo. O mesmo vale para a multiplicação.

$$(5 + 2) + 3 = 5 + (2 + 3)$$

$$7 + 3 = 5 + 5$$

$$10 = 10$$

$$(1 \times 2) \times 3 = 1 \times (2 \times 3)$$

$$2 \times 3 = 1 \times 6$$

$$6 = 6$$

- Propriedade distributiva: para multiplicar uma soma por um número natural, podemos multiplicar cada termo da soma pelo número natural e adicionar os produtos.

$$5 \times (2 + 1) = 5 \times 2 + 5 \times 1$$

$$5 \times 3 = 10 + 5$$

$$15 = 15$$

$$2 \times (4 + 8) = 2 \times 4 + 2 \times 8$$

$$2 \times 12 = 8 + 16$$

$$24 = 24$$

- Elemento neutro: O elemento neutro da adição é o número zero (0). O elemento neutro da multiplicação é o número um (1).

$$8 + 0 = 8$$

$$8 = 8$$

$$8 \cdot 1 = 8$$

$$8 = 8$$

- Elemento oposto: enuncia que, qualquer que seja o número real a , existe um real $-a$, de tal forma que: $a + (-a) = 0$.

$$5 + (-5) = 0.$$

$$0 = 0$$

$$9 + (-9) = 0.$$

$$0 = 0$$

- Elemento inverso: enuncia que, qualquer que seja o número real a , com $a \neq 0$, existe um real $\frac{1}{a}$ ou (a^{-1}) , tal que $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$.

$$4 \cdot 4^{-1} = 1$$

$$4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$1 = 1$$

$$2 \cdot 2^{-1} = 1$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$1 = 1$$

(Os exemplos são pessoais)

2. Encontre o elemento oposto de cada valor abaixo:

a) -12

R: 12 (sinal contrário de -12)

b) $-5,153153153...$

R: $5,153153153...$ (sinal contrário de $-5,153153153...$)

c) $\frac{72}{3}$

R: $-\frac{72}{3}$ (sinal contrário de $\frac{72}{3}$)

d) 3,14159265...

R: $-3,14159265...$ (sinal contrário de 3,14159265...)

3. Qual é o elemento neutro da adição? Qual é o elemento neutro da multiplicação?

R: O elemento neutro da adição é o número zero (0). O elemento neutro da multiplicação é o número um (1).

Lição 23 – Potência

1. O que é uma potência? Explique cada parte de uma potência e dê três exemplos de como resolvê-la.

R: Potência é um produto com fatores repetidos. Em uma potência os termos se chamam base e expoente. A base indica o fator que se repetirá, e o expoente indica quantas vezes esse fator se repetirá. Por exemplo:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \text{ (o 2 se repete 3 vezes)} = 8$$

$$2^2 = 2 \cdot 2 \text{ (o 2 se repete 2 vezes)} = 4$$

$$2^1 = 2 \text{ (o 2 se repete 1 vez)} = 2$$

(Os exemplos são pessoais)

2. Explique com as suas palavras como se lê uma potência e dê três exemplos.

R: Para ler uma potência, primeiro lê-se a base; e depois o expoente antecedido por “elevado à”. Algumas potências têm expoentes com nomes especiais. O expoente “2” se diz “ao quadrado” e o expoente “3” se diz “ao cubo”. Por exemplo:

$$2^3 = \text{“dois elevado ao cubo”}$$

$$2^2 = \text{“dois elevado ao quadrado”}$$

$$2^4 = \text{“dois elevado à quarta potência” ou “dois elevado a quatro”}$$

3. Um auditório tem n fileiras, cada uma com n assentos. Se a capacidade é de 196 pessoas sentadas, quantas são as fileiras?

R: A capacidade total do auditório é:

$$(n^\circ \text{ de fileiras}) \times (n^\circ \text{ de assentos por fileira}) = \text{total de pessoas no auditório}$$

O número de fileiras e o número de assentos é “n”. O número total de pessoas no auditório é 196. Substitua esses valores na expressão anterior:

$$(n^{\circ} \text{ de fileiras}) \times (n^{\circ} \text{ de assentos por fileira}) = \text{total de pessoas no auditório}$$

$$n \times n = 196$$

$$n^2 = 196$$

$$n = 14$$

$$\text{Pois } 14^2 = 196.$$

Portanto, o número de fileiras, n, é 14.

Lição 24 – Potência de um racional

1. Calcule:

a) $\frac{27}{3^5}$

$$\frac{27}{3^5} = \frac{27}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{27}{243}$$

Simplifique a fração.

$$\frac{27}{243} = \frac{27 \div 27}{243 \div 27} = \frac{1}{9}$$

b) $\frac{32^3}{1024}$

$$\frac{32^3}{1024} = \frac{32 \cdot 32 \cdot 32}{1024} = \frac{32768}{1024}$$

32768 pode ser dividido por 1024 (*toda fração é uma divisão*):

$$\frac{32768}{1024} = 32768 \div 1024 = 32$$

c) $\left(\frac{3}{7}\right)^3$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{3^3}{7^3} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{27}{343}$$

d) $\left(\frac{8}{5}\right)^5$

$$\left(\frac{8}{5}\right)^5 = \frac{8^5}{5^5} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{32768}{3125}$$

e) $0,9^4$

$$0,9^4 = \left(\frac{9}{10}\right)^4 = \frac{9^4}{10^4} = \frac{6561}{10000}$$

f) $0,5^4$

$$0,5^4 = \left(\frac{5}{10}\right)^4 = \left(\frac{5}{10}\right)^4 = \frac{5^4}{10^4} = \frac{625}{10000}$$

Simplifique a fração:

$$\frac{625}{10000} = \frac{625 \div 625}{10000 \div 625} = \frac{1}{16}$$

Lição 25 – Propriedades das potências

1. Aplique a propriedade da multiplicação de potências de mesma base, reduza a uma só potência e calcule o valor (quando possível):

a) $2^8 \cdot 2^3$

$$2^8 \cdot 2^3 = 2^{8+3} = 2^{11} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2048$$

b) $2^5 \cdot 2^2 \cdot 2$

$$2^5 \cdot 2^2 \cdot 2 = 2^5 \cdot 2^2 \cdot 2^1 = 2^{5+2+1} = 2^8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256$$

c) $3^4 \cdot 3^{-2}$

$$3^4 \cdot 3^{-2} = 3^{4+(-2)} = 3^{4-2} = 3^2 = 9$$

d) $4^5 \cdot 4^2 \cdot 4^{-6}$

$$4^5 \cdot 4^2 \cdot 4^{-6} = 4^{5+2+(-6)} = 4^{7-6} = 4^1 = 4$$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+5} = \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{2^7}{3^7} = \frac{128}{78125}$$

f) $(0,3)^4 \cdot (0,3)^2$

$$(0,3)^4 \cdot (0,3)^2 = (0,3)^{4+2} = (0,3)^6 = \left(\frac{3}{10}\right)^6 = \frac{3^6}{10^6} = \frac{729}{1.000.000}$$

g) $a^4 \cdot a^3$

$$a^4 \cdot a^3 = a^{4+3} = a^7$$

h) $x^{-3} \cdot x^{-4}$

$$x^{-3} \cdot x^{-4} = x^{-3+(-4)} = x^{-3-4} = x^{-7}$$

2. Aplique as propriedades, reduza a uma só potência e calcule o valor (quando possível):

a) $2^4 : 2^3$

$$2^4 : 2^3 = 2^{4-3} = 2^1 = 2$$

b) $\frac{3^8}{3^4}$

$$\frac{3^8}{3^4} = 3^{8-4} = 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

c) $\frac{0,2^5}{0,2^3}$

$$\frac{0,2^5}{0,2^3} = 0,2^{5-3} = 0,2^2 = \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{2^2}{10^2} = \frac{4}{100}$$

Simplifique a fração:

$$\frac{4}{100} = \frac{4 \div 4}{100 \div 4} = \frac{1}{25}$$

d) $a^7 : a^b$

$$a^7 : a^b = a^{7-b}$$

e) $3^4 \cdot 2^4$

$$3^4 \cdot 2^4 = (3 \cdot 2)^4 = 6^4 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$$

f) $7^3 \cdot 2^3$

$$7^3 \cdot 2^3 = (7 \cdot 2)^3 = 14^3 = 14 \cdot 14 \cdot 14 = 2744$$

g) $3^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2$

$$3^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(3 \cdot \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{3 \cdot 2}{5}\right)^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{6^2}{5^2} = \frac{36}{25}$$

h) $a^4 \cdot x^4$

$$a^4 \cdot x^4 = (a \cdot x)^4 = (ax)^4$$

i) $4^7 : 2^7$

$$4^7 : 2^7 = (4:2)^7 = 2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$$

$$\text{j)} \frac{2^8}{3^8}$$

$$\frac{2^8}{3^8} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{256}{6561}$$

$$\text{k)} (2^3)^2$$

$$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

$$\text{l)} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^2 \right)^4$$

$$\left(\left(\frac{3}{2} \right)^2 \right)^4 = \left(\frac{3}{2} \right)^{2 \cdot 4} = \left(\frac{3}{2} \right)^8 = \frac{3^8}{2^8} = \frac{6561}{256}$$

3. Prove que $(a^b)^c \neq a^{b^c}$ substituindo $a = 2$, $b = 3$ e $c = 4$.

$$(2^3)^4 \neq 2^{3^4}$$

$$(8)^4 \neq 2^{3^4}$$

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$$

$$4096 \neq 2^{3^4}$$

$$4096 \neq 2^{81}$$

$$4096 \neq 2^{81}$$

$$\text{Note que } 4096 = 2^{12}$$

$$2^{12} \neq 2^{81}$$

Como queríamos demonstrar.

4. Classifique como verdadeiro (V) ou falso (F), e corrija as afirmações falsas.

$$\text{(V)} \quad 2^7 \cdot 2^2 = 2^9$$

$$\text{(F)} \quad (7^3)^2 = 7^5$$

$$\text{Correção: } (7^3)^2 = 7^{3 \cdot 2} = 7^6$$

$$\text{(F)} \quad 2^{3^2} = (2^3)^2$$

$$\text{Correção: } 2^{3^2} = 2^9$$

(F) $(5+2)^2 = 5^2 + 2^2$

Correção: $(5+2)^2 = 7^2$

(V) $\frac{10^3}{10^5} = 10^{-2}$

5. Que potência devemos colocar em lugar do símbolo * para que cada uma das seguintes sentenças seja verdadeira?

a) $3^{11} : * = 3^7$

$* = 3^4$, pois:

$3^{11} : 3^4 = 3^{11-4} = 3^7$

b) $(*)^3 = 2^{15}$

$* = 2^5$, pois:

$(2^5)^3 = 2^{5 \cdot 3} = 2^{15}$

c) $* \cdot (-10)^9 = (-10)^{11}$

$* = (-10)^2$

$(-10)^2 \cdot (-10)^9 = (-10)^{2+9} = (-10)^{11}$

d) $(-0,1)^{10} \cdot (-0,1)^5 \cdot * = (-0,1)^{16}$

$* = (-0,1)^1$ ou $(-0,1)$, pois:

$(-0,1)^{10} \cdot (-0,1)^5 \cdot (-0,1)^1 = (-0,1)^{10+5+1} = (-0,1)^{16}$

$(-0,1)^{10} \cdot (-0,1)^5 \cdot (-0,1) = (-0,1)^{10+5+1} = (-0,1)^{16}$

Lição 26 – Propriedades das potências

1. Explique, com suas palavras, por que qualquer número elevado a zero é sempre 1.

R: Tomemos 2^0 por exemplo.

2^0 pode ser escrito como 2^{1-1} , 2^{2-2} , 2^{3-3} , por exemplo. Afinal, $1 - 1 = 0$, $2 - 2 = 0$, $3 - 3 = 0$ e assim por diante. Para nossa demonstração, vamos tomar a potência 2^{1-1} . Logo:

$$2^0 = 2^{1-1}$$

2^{1-1} pode ser escrito como $2^1 : 2^1$ (pela propriedade da divisão de potências de mesma base)

$$2^0 = 2^{1-1} = \frac{2^1}{2^1}$$

$$\frac{2^1}{2^1} = \frac{2}{2} = 1$$

Como queríamos provar.

2. Prove que as propriedades das potências são verdadeiras substituindo as letras das definições por números para efetuar as contas.

R: Multiplicação de potências de mesma base: quando multiplicamos potências de mesma base, mantemos a base e somamos os expoentes.

$$2^1 \cdot 2^2 = 2^{1+2}$$

$$2 \cdot 4 = 2^3$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$8 = 8$$

Divisão de potências de mesma base: Quando dividimos potências de mesma base, mantemos a base e subtraímos os expoentes.

$$2^2 : 2^1 = 2^{2-1}$$

$$4 : 2 = 2^1$$

$$2 = 2$$

Potência de potência: quando há uma potência de potência, mantemos a base e multiplicamos os expoentes.

$$(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3}$$

$$4^3 = 2^6$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$64 = 64$$

Expoente zero: todo número elevado a 0 resulta em 1.

$$2^0 = 2^{1-1} = \frac{2^1}{2^1} = \frac{2^1}{2^1} = \frac{2}{2} = 1$$

Expoente um: todo número elevado a 1 resulta nele mesmo.

$$2^1 = 2$$

(os exemplos são pessoais)

3. Encontre os valores das potências abaixo:

a) 2^{-4}

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

b) 2^{-7}

$$2^{-7} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$$

c) $(0,2)^{-2}$

$$(0,2)^{-2} = \left(\frac{2}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{10}{2}\right)^2 = (10:2)^2 = 5^2 = 25$$

d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{16}{81}$$

4. Classifique como positivo ou negativo os resultados das potências abaixo:

Assuma que “x” é um número positivo. Então, -x, seu oposto, é negativo.

a) $(-x)^5$

R: É um número negativo porque uma base negativa elevada a um expoente ímpar (5) leva a um número negativo.

b) $(-x)^6$

R: É um número positivo porque uma base negativa elevada a um expoente par (6) leva a um número positivo.

c) $(-x)^3$

R: É um número negativo porque uma base negativa elevada a um expoente ímpar (3) leva a um número negativo.

d) $-x^4$

R: É um número negativo, pois o “4” está elevando apenas o “x” e não o sinal -. Mesmo que o resultado da potência seja positivo, o sinal torna o número negativo.

e) $-x^5$

R: É um número negativo, pois o “5” está elevando apenas o “x” e não o sinal -. Mesmo que o resultado da potência seja positivo, o sinal torna o número negativo.

5. Calcule x, de modo que 10^{2x-4} .

FALTA UMA INFORMAÇÃO NO ENUNCIADO → “Calcule x de modo que $10^{2x-4} = 1$ ”.

x = 2, pois:

$$10^{2x-4} = 1$$

$$10^{2x-4} = 10^0$$

$$2x - 4 = 0$$

$$2x = 4$$

$$x = 4 : 2$$

$$x = 2$$

6. Calcule $\frac{x^2y^2 - x^3y}{y^2 - x^2}$ para $x = 2$ e $y = 5$. (Pode deixar o resultado em forma de fração.)

Se $x = 2$ e $y = 5$, basta substituir na expressão:

- no lugar de “x” coloque 2;
- no lugar de “y” coloque 5.

$$\frac{x^2y^2 - x^3y}{y^2 - x^2} = \frac{x^2 \cdot y^2 - x^3 \cdot y}{y^2 - x^2} = \frac{2^2 \cdot 5^2 - 2^3 \cdot 5}{5^2 - 2^2} = \frac{4 \cdot 25 - 8 \cdot 5}{25 - 4} = \frac{100 - 40}{21} = \frac{60}{21}$$

Simplifique a fração.

$$\frac{60}{21} = \frac{60 \div 3}{21 \div 3} = \frac{20}{7}$$

7. Calcule $3\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot 2^{-1} - 3 \cdot 2^0$.

$$3\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot 2^{-1} - 3 \cdot 2^0 =$$

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot 2^{-1} - 3 \cdot 2^0 =$$

$$3 \cdot \frac{1^3}{2^3} - 5 \cdot \frac{1^2}{2^2} + 5 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 1 =$$

$$3 \cdot \frac{1}{8} - 5 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 1 =$$

$$\frac{3}{8} - \frac{5}{4} + \frac{5}{2} - 3 = \frac{3}{8} - \frac{5 \cdot 2}{4 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 4} - \frac{3}{1} = \frac{3}{8} - \frac{10}{8} + \frac{20}{8} - \frac{3 \cdot 8}{1 \cdot 8} = \frac{3}{8} - \frac{10}{8} + \frac{20}{8} - \frac{24}{8} = \frac{3 - 10 + 20 - 24}{8} = \frac{-11}{8}$$

8. Calcule o valor de $(-1)^n + (-1)^{2n} + (-1)^{3n}$, em duas situações:

a) 1ª situação: n é ímpar.

Lembre-se:

- Se um número é negativo e é elevado a um expoente PAR, ele se torna positivo.
- Se um número é negativo e é elevado a um expoente ÍMPAR, ele permanece negativo.
- O número “-1” elevado a algum expoente só pode resultar em -1 ou $+1$ (Pois, fazemos número vezes número e depois fazemos o jogo de sinal $\rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$; o que muda será apenas o sinal).

$$\text{Então: } (-1)^{\text{par}} = 1 \quad \text{e} \quad (-1)^{\text{ímpar}} = -1$$

Se “n” é ímpar:

$$\rightarrow (-1)^n = (-1)^{\text{ímpar}} = -1$$

$$\rightarrow (-1)^{2n} = (-1)^{2 \cdot \text{ímpar}} = (-1)^{\text{par}} = 1$$

Perceba que quando multiplicamos um número ímpar por 2, formamos um número par:

$$(p.e : 3 \times 2 = 6)$$

$$\rightarrow (-1)^{3n} = (-1)^{3 \cdot \text{ímpar}} = (-1)^{\text{ímpar}} = -1$$

Perceba que quando multiplicamos um número ímpar por outro número ímpar, formamos OUTRO número ímpar:

$$(p.e : 3 \times 5 = 15)$$

$$\text{Logo, se “n” é ímpar: } (-1)^n = -1 \quad ; \quad (-1)^{2n} = 1 \quad \text{e} \quad (-1)^{3n} = -1 .$$

Assim:

$$(-1)^n + (-1)^{2n} + (-1)^{3n} =$$

$$-1 + 1 - 1 =$$

$$0 - 1 =$$

$$-1$$

b) 2ª situação: n é par.

$$\text{Lembre-se: } (-1)^{\text{par}} = 1 \quad \text{e} \quad (-1)^{\text{ímpar}} = -1$$

Se “n” é par:

$$\rightarrow (-1)^n = (-1)^{\text{par}} = 1$$

$$\rightarrow (-1)^{2n} = (-1)^{2 \cdot \text{par}} = (-1)^{\text{par}} = 1$$

Perceba que quando multiplicamos um número par por 2, formamos um OUTRO número par:

$$(p.e : 4 \times 2 = 8)$$

$$\rightarrow (-1)^{3n} = (-1)^{3 \cdot \text{par}} = (-1)^{\text{par}} = 1$$

*Perceba que quando multiplicamos um número ímpar (3) por um número par, formamos um número **par**:*

$$(p.e : 3 \times 4 = 12)$$

$$\text{Logo, se “n” é ímpar: } (-1)^n = -1 \quad ; \quad (-1)^{2n} = 1 \quad \text{e} \quad (-1)^{3n} = -1 .$$

Assim:

$$(-1)^n + (-1)^{2n} + (-1)^{3n} =$$

$$1 + 1 + 1 =$$

$$3$$

9. Escreva na forma mais simples a expressão: $(a \cdot b \cdot c)^5 \cdot (a \cdot b)^3 \cdot c^2$.

R: Utilize a propriedade da multiplicação de potências de mesmo expoente:

$$a^5 \cdot b^5 \cdot c^5 \cdot (a \cdot b)^3 \cdot c^2$$

$$a^5 \cdot b^5 \cdot c^5 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot c^2$$

Rearranje os fatores (a multiplicação é comutativa, ou seja, a ordem dos fatores não altera o produto → logo, tanto faz a ordem da multiplicação):

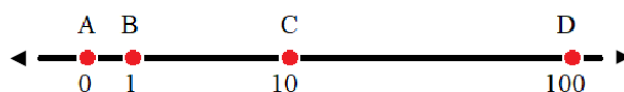
$$a^5 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot b^5 \cdot c^5 \cdot c^2$$

Utilize a propriedade da multiplicação com potências de mesma base:

$$a^{5+3} \cdot b^{5+3} \cdot c^{5+2}$$

$$a^8 \cdot b^8 \cdot c^7$$

10. Na reta numérica estão assinalados alguns pontos:



Entre que pontos consecutivos devem ser assinalados o número resultante do cálculo de:

$$\frac{10^{4+n} - 10^3 \cdot 10^n}{10^4 \cdot 10^n}$$

Resolução:

Comece “abrindo” a potência 10^{4+n} . Se há uma soma no expoente é porque é uma multiplicação de potências de mesma base:

$$\frac{10^{4+n} - 10^3 \cdot 10^n}{10^4 \cdot 10^n} = \frac{10^4 \cdot 10^n - 10^3 \cdot 10^n}{10^4 \cdot 10^n}$$

Agora, evidencie 10^n :

$$\frac{10^4 \cdot 10^n - 10^3 \cdot 10^n}{10^4 \cdot 10^n} = \frac{10^n \cdot (10^4 - 10^3)}{10^n \cdot (10^4)}$$

Corte o 10^n :

$$\frac{10^n \cdot (10^4 - 10^3)}{10^n \cdot (10^4)} = \frac{10^4 - 10^3}{10^4}$$

$$= \frac{10000 - 1000}{10000}$$

$$= \frac{9000}{10000} = 9000 \div 10000 = 0,9$$

O número 0,9 está entre 0 e 1. Logo, o resultado desta expressão está entre os pontos A e B.

Lição 27 – Notação científica com expoentes positivos

1. Quando procuramos “Virgem Maria” no Google, encontramos 2.460.000 resultados.

a) Quando procuramos “Virgem Maria” no Google, encontramos **2.460.000** resultados.

$$2,46 \cdot 10^6$$

A vírgula anda 6 casas para a esquerda (o 6 fica positivo).

b) A distância do Brasil ao Vaticano é de **9.062.000** metros.

$$9,062 \cdot 10^6$$

A vírgula anda 6 casas para a esquerda (o 6 fica positivo).

c) O homem foi criado há cerca de **7.000** anos.

$$7,0 \cdot 10^3$$

A vírgula anda 3 casas para a esquerda (o 3 fica positivo).

d) Nosso Senhor jejuou por **3.456.000** segundos, tempo equivalente a 40 dias.

$$3,456 \cdot 10^6$$

A vírgula anda 6 casas para a esquerda (o 6 fica positivo).

e) A extensão territorial do Brasil é equivalente a **8.516.000.000.000** m².

$$8,516 \cdot 10^{12}$$

A vírgula anda 12 casas para a esquerda (o 12 fica positivo).

f) Estima-se que a população mundial esteja perto de **8.000.000.000** de pessoas.

$$8,0 \cdot 10^9$$

A vírgula anda 9 casas para a esquerda (o 9 fica positivo).

g) Até 2015 havia **1.285.000.000** católicos no mundo.

$$1,285 \cdot 10^9$$

A vírgula anda 9 casas para a esquerda (o 9 fica positivo).

Lição 28 – Notação científica com expoentes negativos

1. Passe para notação científica os seguintes números:

a) Tenho uma relíquia de São João Bosco! Um pedaço do osso dele, que mede **0,0024** metros.

$$2,4 \cdot 10^{-3}$$

A vírgula anda 3 casas para a direita (o 3 fica negativo).

b) O diâmetro das contas de um terço de Jaspe Oceânica é **0,008** metros.

$$8,0 \cdot 10^{-3}$$

A vírgula anda 3 casas para a direita (o 3 fica negativo).

c) O diâmetro de um grão de mostarda é **0,002** m.

$$2,0 \cdot 10^{-3}$$

A vírgula anda 3 casas para a direita (o 3 fica negativo).

d) O diâmetro de um grão de areia é equivalente a **0,000000062** km.

$$6,2 \cdot 10^{-8}$$

A vírgula anda 8 casas para a direita (o 8 fica negativo).

2. Calcule (dica: utilize as notações científicas):

a) $0,002 \cdot 0,000000062$

Resolução:

Transforme os números para notação científica:

$$\rightarrow 0,002 = 2,0 \cdot 10^{-3}$$

$$\rightarrow 0,000000062 = 6,2 \cdot 10^{-8}$$

$$0,002 \cdot 0,000000062 =$$

$$2,0 \cdot 10^{-3} \cdot 6,2 \cdot 10^{-8} =$$

$$2,0 \cdot 6,2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-8} =$$

$$12,4 \cdot 10^{-3+(-8)} =$$

$$12,4 \cdot 10^{-3-8} = 12,4 \cdot 10^{-11}$$

$$= 1,24 \cdot 10^{-10} \text{ (como a vírgula anda 1 casa para a esquerda, o expoente aumenta 1).}$$

b) $3.456.000 \cdot 0,0024$

Resolução:

Transforme os números para notação científica:

$$\rightarrow 3.456.000 = 3,456 \cdot 10^6$$

$$\rightarrow 0,0024 = 2,4 \cdot 10^{-3}$$

$$3.456.000 \cdot 0,0024 =$$

$$3,456 \cdot 10^6 \cdot 2,4 \cdot 10^{-3} =$$

$$3,456 \cdot 2,4 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} =$$

$$8,2944 \cdot 10^{6+(-3)} =$$

$$8,2944 \cdot 10^{6-3} = 8,2944 \cdot 10^3 = 8294,4$$

$$\text{c) } 9.062.000 \cdot 2.460.000$$

Resolução:

Transforme os números para notação científica:

$$\rightarrow 9.062.000 = 9,062 \cdot 10^6$$

$$\rightarrow 2.460.000 = 2,46 \cdot 10^6$$

$$9.062.000 \cdot 2.460.000 =$$

$$9,062 \cdot 10^6 \cdot 2,46 \cdot 10^6 =$$

$$9,062 \cdot 2,46 \cdot 10^6 \cdot 10^6 =$$

$$22,29252 \cdot 10^{6+6} = 22,29252 \cdot 10^{12}$$

$$= 2,229252 \cdot 10^{13} \text{ (como a vírgula anda 1 casa para a esquerda, o expoente aumenta 1).}$$

3. Compare os racionais com o símbolo de maior (>), menor (<) ou igual (=):

$$\text{a) } 3,2 \cdot 10^6 > 9,4 \cdot 10^5$$

$$\text{b) } 7,3 \cdot 10^{-10} > 3,0 \cdot 10^{-15}$$

$$\text{c) } 2,5 \cdot 10^{-3} < 8,0 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{d) } 9,9 \cdot 10^{21} < 1,1 \cdot 10^{23}$$

Lição 29 – Raiz quadrada exata

1. Qual é o nome dos itens que compõem uma raiz?

R: Os termos que compõem a raiz são o radicando, o índice da raiz e o radical.

2. Dê o valor das expressões:

$$\text{a) } \sqrt[3]{-1} = -1, \text{ pois}$$

$$-1 \cdot -1 \cdot -1 = (-1)^3 = -1$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{5}, \text{ pois}$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\frac{2}{3}, \text{ pois}$$

$$-\frac{2}{3} \cdot -\frac{2}{3} \cdot -\frac{2}{3} = -\frac{8}{27}$$

$$\text{d) } \sqrt[4]{256} = 4, \text{ pois:}$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$$

$$\text{e) } \sqrt[4]{\frac{1}{10000}} = \frac{1}{10}, \text{ pois:}$$

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10000}$$

$$\text{f) } \sqrt[5]{32} = 2$$

$$\text{g) } \sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}, \text{ pois:}$$

$$\frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2} = \frac{-1}{32}$$

$$\text{h) } \sqrt[6]{0} = 0, \text{ pois:}$$

$$0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$\text{i) } \sqrt[10]{1024} = 2$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$$

3. Calcule:

$$\text{a) } 3 + \sqrt{16} - 25$$

$$3 + 4 - 25 =$$

$$7 - 25 =$$

$$-18$$

$$\text{b) } 5\sqrt{49} - \sqrt{121}$$

$$5 \cdot 7 - 11 =$$

$$35 - 11 =$$

$$24$$

$$c) \sqrt{\frac{4}{25}} + 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}}$$

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} + 3 \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} =$$

$$\frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} =$$

$$\frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{1}{3} =$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3 \cdot 1}{3} = \frac{2}{5} + \frac{3}{3} =$$

$$\frac{2}{5} + 1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{1} = \frac{2}{5} + \frac{1 \cdot 5}{1 \cdot 5} = \frac{2}{5} + \frac{5}{5} = \frac{7}{5}$$

4. Calcule:

$$a) 5\sqrt{9} - 3\sqrt[3]{8}$$

$$5 \cdot 3 - 3 \cdot \sqrt[3]{8} =$$

$$5 \cdot 3 - 3 \cdot 2 =$$

$$15 - 3 \cdot 2 =$$

$$15 - 6 =$$

$$9$$

$$b) \sqrt{21 \cdot 4 - 3}$$

$$\sqrt{84 - 3} =$$

$$\sqrt{81} =$$

$$9$$

$$c) \sqrt{6^2 + 8^2}$$

$$\sqrt{36 + 8^2} =$$

$$\sqrt{36 + 64} =$$

$$\sqrt{100} =$$

$$10$$

$$d) 3^0 - \sqrt[3]{0}$$

$$1 - \sqrt[3]{0} =$$

$$1 - 0 =$$

$$1$$

$$e) (\sqrt{9-4 \cdot 2} - 5)^2 x$$

$$(\sqrt{9-8} - 5)^2 x =$$

$$(\sqrt{1} - 5)^2 x =$$

$$(1-5)^2 x =$$

$$(-4)^2 x =$$

$$16x$$

$$f) \sqrt{52-32} \cdot \sqrt[3]{7-2^3}$$

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt[3]{7-2^3} =$$

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt[3]{7-8} =$$

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt[3]{-1} = \sqrt{20} \cdot -1 = -\sqrt{20}$$

Simplifique o radical:

$$-\sqrt{20} = -\sqrt{4 \cdot 5} = -\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = -2\sqrt{5}$$

5. Calcule utilizando a relação entre potência e raiz:

$$a) 4^{\frac{1}{2}}$$

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^1} = \sqrt{4} = 2$$

$$b) 16^{\frac{3}{2}}$$

$$16^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{16^3} = \sqrt{16 \cdot 16 \cdot 16} = \sqrt{4096} = \sqrt{2^{12}} = 2^{\frac{12}{2}} = 2^6 = 64$$

$$c) 9^{0,5}$$

$$9^{0,5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1} = \sqrt{9} = 3$$

$$d) 81^{-\frac{1}{4}}$$

$$81^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{81^1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{81}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{1}{3}$$

6. Escreva como potência:

Utilize a relação: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$a) \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$$

$$b) \sqrt{7} = \sqrt[2]{7^1} = 7^{\frac{1}{2}}$$

Lição 30 – Cálculo das raízes: fatoração

1. Faça a fatoração dos seguintes radicandos:

$$a) \sqrt{729}$$

$$729 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$$

(A ordem dos fatores da esquerda para a direita é a que deve constar na chave da fatoração de cima para baixo).

$$\sqrt{729} = \sqrt{3^6} = 3^{\frac{6}{2}} = 3^3 = 27$$

$$b) \sqrt[3]{343}$$

$$343 = 7 \times 7 \times 7 = 7^3$$

(A ordem dos fatores da esquerda para a direita é a que deve constar na chave da fatoração de cima para baixo).

$$\sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7$$

$$c) \sqrt[5]{1024}$$

$$1024 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10}$$

(A ordem dos fatores da esquerda para a direita é a que deve constar na chave da fatoração de cima para baixo).

$$\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2 = 4$$

$$d) \sqrt{1089}$$

$$1089 = 3 \times 3 \times 11 \times 11 = 3^2 \cdot 11^2$$

(A ordem dos fatores da esquerda para a direita é a que deve constar na chave da fatoração de cima para baixo).

$$\sqrt{1089} = \sqrt{3^2 \cdot 11^2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{11^2} = 3 \cdot 11 = 33$$

Lição 31 – Raiz quadrada aproximada

1. Qual é o menor inteiro positivo que devemos multiplicar por 360 para obter um inteiro quadrado perfeito?

R: Para que possamos responder à pergunta é necessário, em primeiro lugar, fatorar o 360:

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Para que esse número seja um quadrado perfeito todos os seus fatores devem estar ao quadrado.

Então, devemos multiplicar por 2 e por 5:

$$2^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$$

Reorganize os fatores

$$2^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 5$$

$$2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 =$$

$$4 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 25 =$$

$$3600$$

Quando multiplicamos o 360 ($2^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5$) por 2 e por 5 obtemos o quadrado perfeito 3600 ($2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$).

Note que multiplicar por 2 e por 5 é o mesmo que multiplicar por 10.

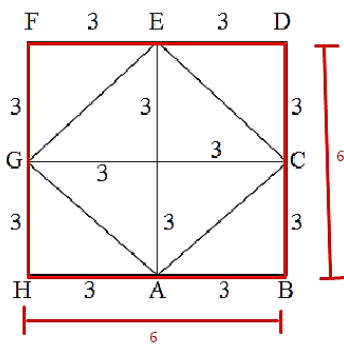
Logo, devemos multiplicar 360 por 10 para obter um quadrado perfeito.

2. Observe a figura e responda:

a) Qual é a área do quadrado BDFH?

R: A área de um quadrado se obtém multiplicando: *lado x lado*.

O lado do quadrado BDFH é 6:



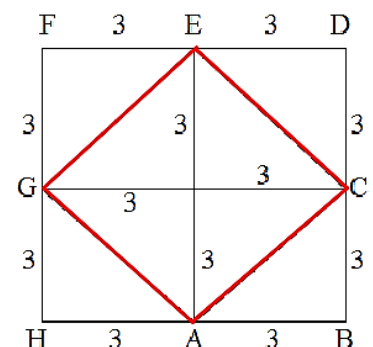
Então, a área desse quadrado é:

$$6 \times 6 = 36$$

b) Qual é a área do quadrado ACEG?

Perceba que o quadrado BDFH é formado por 4 quadrados menores, de lado 3.

O quadrado ACEG é formado justamente pela *metade* de cada um desses 4 quadradinhos.



Logo, o quadrado ACEG ocupa *metade* do espaço que o quadrado BDFH ocupa; ou seja, a área do quadrado ACEG é *a metade* da área do quadrado BDFH.

A área do quadrado BDFH é 36, logo, a área do quadrado ACEG é 18.

c) Quanto mede o lado do quadrado ACEG?

R: Sabemos que a área de ACEG é 18. Também sabemos que a área de qualquer quadrado é:

$$\text{Área} = \text{lado} \times \text{lado}$$

Chame o lado de ACEG que queremos descobrir de “n”. Substitua os valores na equação:

$$\text{Área} = \text{lado} \times \text{lado}$$

$$18 = n \times n$$

$$18 = n^2$$

Que número que ao quadrado dá 18...?

Estamos querendo saber a raiz quadrada de 18, pois queremos saber que número ao quadrado que resulta em 18!

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Então:

$$n = 3\sqrt{2}$$

Logo, o lado do quadrado ACEG é $3\sqrt{2}$.

d) Calcule o perímetro:

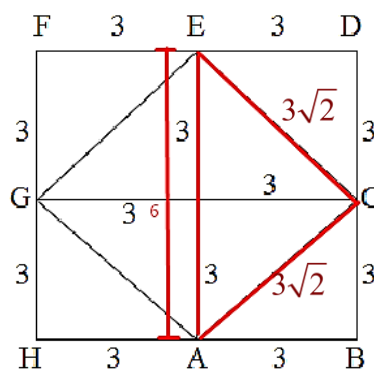
R: Perímetro é a soma de todos os lados.

- Do quadrado ACEG:

O lado desse quadrado é $3\sqrt{2}$. Ele possui 4 lados; logo, seu perímetro é:

$$3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (3+3+3+3)\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

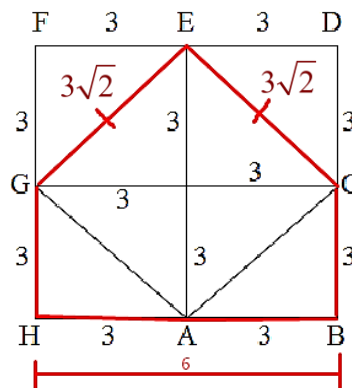
- Do triângulo ACE:



Um dos lados do triângulo é 6. Os outros dois lados são os lados do quadrado ACEG, que já vimos que valem $3\sqrt{2}$. Logo, seu perímetro é:

$$6 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6 + (3+3)\sqrt{2} = 6 + 6\sqrt{2}$$

- Do pentágono BCEGH:

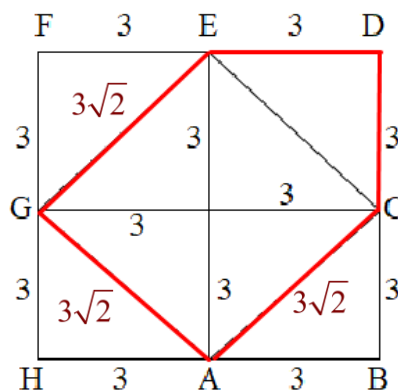


Os lados do pentágono em questão são: 6, 3, 3, $3\sqrt{2}$ e $3\sqrt{2}$. Dois de seus lados são os lados do quadrado ACEG ($3\sqrt{2}$). Logo, seu perímetro é:

$$6 + 3 + 3 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (6 + 3 + 3) + (3 + 3)\sqrt{2} = 12 + 6\sqrt{2}$$

- Do pentágono ACDEG:

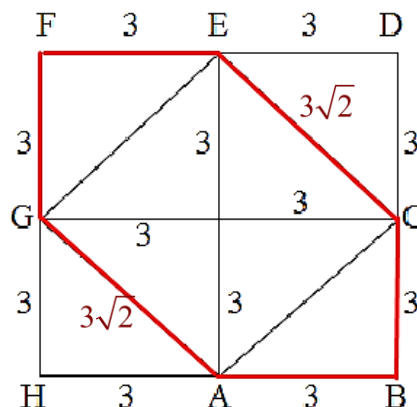
Os lados do pentágono em questão são: 3, 3, $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ e $3\sqrt{2}$. Três de seus lados são os lados do quadrado ACEG ($3\sqrt{2}$). Observe a imagem:



Logo, seu perímetro é:

$$3 + 3 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (3 + 3) + (3 + 3 + 3)\sqrt{2} = 6 + 9\sqrt{2}$$

- Do hexágono ABCEFG:



Os lados do hexágono são 3, 3, 3, 3, $3\sqrt{2}$ e $3\sqrt{2}$. Dois de seus lados são os lados do quadrado ACEG ($3\sqrt{2}$). Logo, seu perímetro é:

$$3+3+3+3+3\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(3+3+3+3)+(3+3)\sqrt{2}=12+6\sqrt{2}$$

3. Simplifique os radicais e reduza os termos:

a) $2\sqrt{3}+7\sqrt{3}$

Some “número” com “número”:

$$(2+7)\sqrt{3} =$$

$$9\sqrt{3}$$

b) $6\sqrt{2}-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}$

Some e subtraia “número” com “número”:

$$(6-4+2)\sqrt{2} =$$

$$(2+2)\sqrt{2} =$$

$$4\sqrt{2}$$

c) $\sqrt{50}+4\sqrt{18}-6\sqrt{2}$

Simplifique a raiz de 50:

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Simplifique a raiz de 18:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Substitua as raízes simplificadas na expressão:

$$\sqrt{50}+4\sqrt{18}-6\sqrt{2} =$$

$$5\sqrt{2}+4 \cdot 3\sqrt{2}-6\sqrt{2} =$$

$$5\sqrt{2}+12\sqrt{2}-6\sqrt{2} =$$

Some e subtraia “número” com “número”:

$$(5+12-6)\sqrt{2} =$$

$$(17-6)\sqrt{2} =$$

$$11\sqrt{2}$$

d) $2\sqrt{20}-4\sqrt{45}+\sqrt{125}$

Simplifique a raiz de 20:

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Simplifique a raiz de 45:

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Simplifique a raiz de 125:

$$\sqrt{125} = \sqrt{25 \cdot 5} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

Substitua as raízes simplificadas na expressão:

$$2\sqrt{20} - 4\sqrt{45} + \sqrt{125} =$$

$$2 \cdot 2\sqrt{5} - 4 \cdot 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} =$$

$$4\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$$

Some e subtraia “número” com “número”:

$$(4 - 12 + 5)\sqrt{5} =$$

$$(-8 + 5)\sqrt{5} =$$

$$(-3)\sqrt{5} = -3\sqrt{5}$$

e) $3 + \sqrt{16} - 25$

Comece resolvendo a raiz de 16:

$$3 + 4 - 25 =$$

$$7 - 25 =$$

$$-18$$

f) $5\sqrt{49} - \sqrt{121}$

Comece resolvendo as raízes:

$$5 \cdot 7 - \sqrt{121} =$$

$$5 \cdot 7 - 11 =$$

$$35 - 11 =$$

$$24$$

g) $\sqrt{\frac{4}{25}} + 3\sqrt{\frac{1}{9}}$

Comece resolvendo as raízes:

$$\sqrt{\frac{4}{25}} + 3\sqrt{\frac{1}{9}} =$$

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} + 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}} =$$

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} + 3 \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} =$$

$$\frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} =$$

$$\frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{5} + \frac{3 \cdot 1}{3} =$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{3} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} + \frac{15}{15} = \frac{6+15}{15} = \frac{21}{15}$$

Simplifique essa fração:

$$\frac{21}{15} = \frac{21 \div 3}{15 \div 3} = \frac{7}{5}$$

h) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}$

Utilize a propriedade da multiplicação de fração: $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{5 \cdot 6} = \sqrt{30}$$

i) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{10}$

Utilize a propriedade da multiplicação de raízes: $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$

$$\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{10} = \sqrt[4]{5 \cdot 2 \cdot 10} =$$

$$\sqrt[4]{10 \cdot 10} = \sqrt[4]{100}$$

Note que $100 = 10^2$

$$\sqrt[4]{100} = \sqrt[4]{10^2} = 10^{\frac{2}{4}} = 10^{\frac{2 \div 2}{4 \div 2}} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{10^1} = \sqrt{10}$$

j) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Utilize a propriedade da multiplicação de raízes: $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$

$$\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6 \cdot 3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$$

Utilize a propriedade da divisão de raízes: $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$

$$= \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$k) \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}$$

Utilize a propriedade da divisão de raízes: $\frac{\sqrt[z]{x}}{\sqrt[z]{y}} = \sqrt[z]{\frac{x}{y}}$

$$\sqrt{\frac{18}{6}} = \sqrt{3}$$

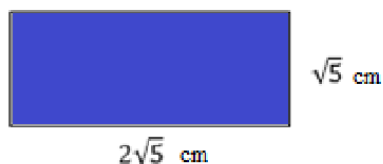
$$l) \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[3]{10}}$$

$$\frac{\sqrt{2 \cdot 5}}{\sqrt[3]{10}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[3]{10}} = \frac{10^{\frac{1}{2}}}{10^{\frac{1}{3}}} =$$

$$10^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 10^{\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}} = 10^{\frac{3}{6} - \frac{2}{6}} = 10^{\frac{3-2}{6}}$$

$$= 10^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{10^1} = \sqrt[6]{10}$$

4. Calcule a área da figura:



R: A área de um retângulo é: *base x altura*.

A base deste retângulo é: $2\sqrt{5}$

E a altura deste retângulo é: $\sqrt{5}$

Substitua esses valores na equação:

$$\text{Área} = \text{base} \times \text{altura}$$

$$\text{Área} = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$$

$$\text{Área} = 2 \cdot \sqrt{5 \cdot 5}$$

$$\text{Área} = 2 \cdot \sqrt{25}$$

$$\text{Área} = 2 \cdot 5 = 10$$

Lição 32 - Avaliação

1. Sobre os conjuntos numéricos responda:

a) Quantos são os conjuntos aprendidos até agora?

R: São 4 (naturais, inteiros, racionais e reais).

b) Quais são os símbolos utilizados para representar cada um deles?

Naturais: $\mathbb{N}$

Inteiros: $\mathbb{Z}$

Racionais: $\mathbb{Q}$

Reais: $\mathbb{R}$

c) Que operação podia ser realizada no Conjunto dos Naturais? Qual passou a ser realizada nos Inteiros? E nos Racionais?

R: As operações que podem ser realizadas sem restrições no Conjunto dos Naturais são a adição e a multiplicação. Depois, no conjunto dos inteiros, a operação que passa a ser realizada sem restrições é a subtração. Por fim, nos racionais, a operação que passa a ser realizada sem restrições é a divisão.

2. Indique com a letra V as sentenças verdadeiras e com a letra F as sentenças falsas. Transforme a sentença falsa em uma sentença verdadeira:

(F) O conjunto dos Reais é o menor conjunto numérico que existe.

Correção: O conjunto dos Reais é o maior conjunto numérico que existe.

(V) No conjunto dos Reais as operações da adição, subtração, multiplicação e divisão podem ser realizadas sem qualquer restrição.

(F) As dízimas periódicas são números infinitos que não apresentam período.

Correção: As dízimas periódicas são números infinitos que apresentam período.

(V) O infinito dos Naturais é menor que o infinito dos Reais.

(F) A propriedade Comutativa da multiplicação enuncia que “a ordem das parcelas não altera a soma.”

Correção: A propriedade Comutativa da adição enuncia que “a ordem das parcelas não altera a soma.”

(V) Se retirássemos todos os números racionais do conjunto dos Reais, ainda sobriam os irracionais.

(V) A divisão de dois inteiros sempre resulta em um Racional.

(F) Uma dízima periódica pode ser representada como uma fração cujo denominador é 10, 100 ou 1.000.

Correção: Um decimal exato pode ser representado como uma fração cujo denominador é 10, 100 ou 1.000.

3. Transforme as frações em decimais exatos e os decimais exatos em frações:

a) $\frac{7}{10} = 0,7$

Pois: $\frac{7}{10} = 7 \div 10 = 0,7$

b) $\frac{3}{1000} = 0,003$

Pois: $\frac{3}{1000} = 3 \div 1000 = 0,003$

c) $\frac{25}{10} = 2,5$

Pois: $\frac{25}{10} = 25 \div 10 = 2,5$

d) $\frac{-153}{10} = -15,3$

Pois: $\frac{-153}{10} = -153 \div 10 = -15,3$

e) $-\frac{21}{100} = -0,21$

Pois: $\frac{-21}{100} = -21 \div 100 = -0,21$

f) $0,31 = \frac{31}{100}$

Pois: $\frac{31}{100} = 31 \div 100 = 0,31$

g) $-0,127 = -\frac{127}{1000}$

Pois: $-\frac{127}{1000} = -127 \div 1000 = -0,127$

h) $31,47 = \frac{3147}{100}$

Pois: $\frac{3147}{100} = 3147 \div 100 = 31,47$

i) $918,9 = \frac{9189}{10}$

Pois: $\frac{9189}{10} = 9189 \div 10 = 918,9$

4. Indique o período de cada dízima e encontre a fração geratriz de cada uma:

a) 0,44444...

R: O período é 4 (o número que se repete).

Queremos encontrar a fração geratriz “x” que gera 0,444....

$$x = 0,444... \text{ (I)}$$

Multiplique por 10 ambos os lados da igualdade.

$$10x = 4,444... \text{ (II)}$$

Faça a equação (II) – (I):

$$10x - x = 4,444... - 0,444...$$

$$9x = 4$$

$$x = \frac{4}{9}$$

b) 1,535353...

R: O período é 53 (os números que se repetem).

Queremos encontrar a fração geratriz “x” que gera 1,535353....

$$x = 1,535353... \text{ (I)}$$

Multiplique por 100 ambos os lados da igualdade. Note que devemos multiplicar por 100 para obter um período igual ao de 1,535353...

$$100x = 153,535353... \text{ (II)}$$

Faça a equação (II) – (I):

$$100x - x = 153,535353... - 1,535353...$$

$$99x = 153 - 1$$

$$99x = 152$$

$$x = \frac{152}{99}$$

c) 0,123333....

R: O período é 3 (o número que se repete).

Queremos encontrar a fração geratriz “x” que gera 0,12333...

$$x = 0,12333... \text{ (I)}$$

Multiplique por 100 ambos os lados da igualdade. Note que devemos multiplicar por 100 para tirar o “12” do lado esquerdo:

$$100x = 12,333... \text{ (II)}$$

Multiplique por 10 novamente para obter uma outra equação com uma dízima de período 3.

$$1000x = 123,333... \text{ (III)}$$

Faça a equação (III) – (II):

$$1000x - 100x = 123,333... - 12,333...$$

$$900x = 123 - 12$$

$$900x = 111$$

$$x = \frac{111}{900}$$

5. Dados os valores $x = 4,555...$ e $y = 1,727272...$

a) Use valores aproximados com 4 casas decimais e calcule os valores aproximados de $x + y$ e $2x + 3y$.

R: Valores aproximados:

- $x = 4,5555.... \cong 4,5556$
- $y = 1,727272... \cong 1,7273$

Agora, calcule o valor de $x + y$ com esses valores:

$$x + y = 4,5556 + 1,7273 = 6,2829$$

Agora, calcule o valor de $2x + 3y$ com esses valores:

$$2x = 2 \cdot 4,5556 = 9,1112$$

$$3y = 3 \cdot 1,7273 = 5,1819$$

$$2x + 3y = 9,1112 + 5,1819 = 14,2931$$

b) Determine os valores exatos de $x + y$ e $2x + 3y$.

R: Para encontrar o valor EXATO das expressões é preciso encontrar a fração geratriz das dízimas periódicas.

Frações geratrizes:

- $x = 4,5555....$

Queremos encontrar a fração geratriz “x” que gera 4,5555....

$$x = 4,5555.... \text{ (I)}$$

Multiplique por 10 ambos os lados da igualdade.

$$10x = 45,555... \text{ (II)}$$

Faça a equação (II) – (I):

$$10x - x = 45,555... - 4,5555...$$

$$9x = 45 - 4$$

$$9x = 41$$

$$x = \frac{41}{9}$$

$$x = 4,555... = \frac{41}{9}$$

- $y = 1,727272... =$

Queremos encontrar a fração geratriz “y” que gera 1,727272....

$$y = 1,727272.... \text{ (I)}$$

Multiplique por 100 ambos os lados da igualdade.

$$100y = 172,727272... \text{ (II)}$$

Faça a equação (II) – (I):

$$100y - y = 172,7272... - 1,7272...$$

$$99y = 172 - 1$$

$$99y = 171$$

$$y = \frac{171}{99}$$

$$y = 1,727272... = \frac{171}{99}$$

Agora, calcule o valor de $x + y$ com esses valores:

$$x + y = \frac{41}{9} + \frac{171}{99} = \frac{41 \cdot 11}{9 \cdot 11} + \frac{171}{99} = \frac{451}{99} + \frac{171}{99} = \frac{622}{99}$$

Agora, calcule o valor de $2x + 3y$ com esses valores:

$$2x = 2 \cdot \frac{41}{9} = \frac{2 \cdot 41}{9} = \frac{82}{9}$$

$$3y = 3 \cdot \frac{171}{99} = \frac{3 \cdot 171}{99} = \frac{513}{99}$$

$$2x + 3y = \frac{82}{9} + \frac{513}{99} = \frac{82 \cdot 11}{9 \cdot 11} + \frac{513}{99} = \frac{902}{99} + \frac{513}{99} = \frac{1415}{99}$$

6. Sobre as potências responda:

a) Quem inventou a notação para potências? Como é essa notação?

R: Quem instituiu a notação utilizada atualmente foi René Descartes em seu livro Géometrie. Em uma potência a^n os termos se chamam base (a) e expoente (n). A base indica o fator que se repetirá e o expoente indica quantas vezes esse fator se repetirá.

b) Como se lê uma potência?

R: Para ler uma potência, primeiro lê-se a base; e depois o expoente antecedido por “elevado à”. Algumas potências têm expoentes com nomes especiais. O expoente “2” se diz “ao quadrado” e o expoente “3” se diz “ao cubo”. Por exemplo:

$$2^3 = \text{“dois elevado ao cubo”}$$

$$2^2 = \text{“dois elevado ao quadrado”}$$

$$2^4 = \text{“dois elevado à quarta potência” ou “dois elevado a quatro”}$$

7. Aplique as propriedades, reduza a uma só potência e calcule o valor (quando possível):

a) $4^3 \cdot 4^2$

$$4^{3+2} = 4^5 = 1024$$

b) $2^6 \cdot 2^3$

$$2^{6+3} = 2^9 = 512$$

c) $x^5 : x^3$

$$x^{5-3} = x^2$$

d) $4^7 : 4^5$

$$4^{7-5} = 4^2 = 16$$

e) $\frac{2^9}{2^9}$

$$2^{9-9} = 2^0 = 1$$

f) $a^b \cdot c^b$

Aplique a propriedade: $x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$

$$a^b \cdot c^b = (a \cdot c)^b$$

g) $(2^3 \cdot 2^4) : 2^5$

$$(2^{3+4}) : 2^5 = 2^7 : 2^5 = 2^{7-5} = 2^2 = 4$$

h) $(2^4)^2$

$$2^{4 \cdot 2} = 2^8 = 256$$

8. Explique, com suas próprias palavras, por que qualquer coisa elevada a zero sempre é 1. Se preferir, utilize um exemplo numérico.

R: Tomemos 2^0 por exemplo.

2^0 pode ser escrito como 2^{1-1} , 2^{2-2} , 2^{3-3} , por exemplo. Afinal, $1 - 1 = 0$, $2 - 2 = 0$, $3 - 3 = 0$ e assim por diante. Para nossa demonstração, vamos tomar a potência 2^{1-1} . Logo:

$$2^0 = 2^{1-1}$$

2^{1-1} pode ser escrito como $2^1 : 2^1$ (pela propriedade da divisão de potências de mesma base)

$$2^0 = 2^{1-1} = \frac{2^1}{2^1}$$

$$\frac{2^1}{2^1} = \frac{2}{2} = 1$$

Como queríamos provar.

9. Uma população de bactérias dobra seu número a cada 30 minutos. Considerando que o processo se inicia com uma única bactéria, quantas existirão após 4 horas e meia?

Resolução:

Havia uma bactéria = 1.

Após meia hora = 1×2 (o número dobra) = 2

Após 1 hora (+ $\frac{1}{2}$ hora) = $1 \times 2 \times 2$ (o número dobra de novo) = 2^2

Após 1,5 hora (+ $\frac{1}{2}$ hora) = $1 \times 2 \times 2 \times 2$ (o número dobra de novo) = 2^3

A cada $\frac{1}{2}$ hora o expoente do dois aumenta 1 (pois o número dobra de novo).

Agora: quantas “meias-horas” há em 4,5 horas?

Há 9 “meias-horas” em 4,5 horas ($0,5 \text{ hora} \times 9 = 4,5 \text{ horas}$).

Logo, o expoente da potência de base 2 é 9 $\rightarrow 2^9$.

Haverá 2^9 (= 512) bactérias.

10. Passe para notação científica:

a) Estima-se que a Terra possui 40.075.000 metros de circunferência

R: $4,0075 \cdot 10^7$

(A vírgula anda 7 casas para esquerda, por isso o 7 fica positivo no expoente)

b) Quando procuramos “Igreja Católica” no Google, encontramos 1.200.000 resultados.

R: $1,2 \cdot 10^6$

(A vírgula anda 6 casas para esquerda, por isso o 6 fica positivo no expoente)

c) Quando procuramos “Santidade” no Google, encontramos 3.630.000 resultados.

R: $3,63 \cdot 10^6$

(A vírgula anda 6 casas para esquerda, por isso o 6 fica positivo no expoente)

d) Se nossa fé fosse do tamanho de um grão de mostarda, que mede 0,000002 km, moveríamos montanhas.

R: $2,0 \cdot 10^{-6}$

(A vírgula anda 6 casas para direita, por isso o 6 fica negativo no expoente)

11. Resolvas as expressões abaixo:

a) $6\sqrt{16} - 2\sqrt[3]{125}$

$$6 \cdot 4 - 2 \cdot \sqrt[3]{125} =$$

$$6 \cdot 4 - 2 \cdot 5 =$$

$$24 - 10 =$$

$$14$$

b) $\sqrt{64} - \sqrt{625}$

$$8 - \sqrt{625} =$$

$$8 - 25 = -17$$

c) $\sqrt{\frac{81}{64}}$

$$\sqrt{\frac{81}{64}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{64}} = \frac{9}{8}$$

d) $\sqrt{\frac{1}{100}}$

$$\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$$

e) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$

$$\sqrt[3]{\frac{-8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{-2}{3}$$

f) $\sqrt{3^2 + 4^2}$

$$\sqrt{9 + 4^2} =$$

$$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

g) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6 \cdot 3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

h) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{10}$

$$\sqrt[4]{5 \cdot 2 \cdot 10} = \sqrt[4]{10 \cdot 10} = \sqrt[4]{100} = 10^{\frac{2}{4}} = 10^{\frac{2 \div 2}{4 \div 2}} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{10^1} = \sqrt{10}$$

Passo a passo de Matemática

8º ano, Volume 3

Lição 33 – Expressões algébricas

1. O que o ramo da matemática chamado Álgebra estuda? Por que existe a necessidade de utilizar letras na matemática?

R: A álgebra é o ramo da matemática que recorre a números, letras e sinais (símbolos) para generalizar as diversas operações aritméticas. Utilizam-se letras, pois estas podem assumir qualquer valor numérico, generalizando assim as operações.

2. Transforme as sentenças escritas na linguagem matemática:

a) A soma de dois números: $x + y$

b) O quádruplo de um número: $4 \cdot x = 4x$

c) O produto de dois números: $x \cdot y$

d) O quociente de dois números: $\frac{x}{y}$

e) Um número subtraído de três: $x - 3$

f) Três subtraído de um número: $3 - x$

g) A soma de cinco com o triplo de um número: $5 + 3 \cdot x$

h) Metade de um número: $\frac{x}{2}$

i) A quinta parte de um número: $\frac{x}{5}$

j) A terça parte de um número: $\frac{x}{3}$

k) O produto de um número pela sua terça parte: $x \cdot \frac{x}{3}$

l) A soma de um número e a sua metade: $x + \frac{x}{2}$

m) A soma de três números: $x + y + z$

n) O produto de três números: $x \cdot y \cdot z$

3. O que é uma expressão algébrica?

R: É uma expressão que contém números, letras e operações.

4. O que é o valor numérico de uma expressão algébrica?

R: Quando substituímos as letras das expressões algébricas por um número qualquer, dizemos que esta expressão assume um valor numérico.

5. Encontre o valor numérico das expressões abaixo:

a) $2x + 1$, para $x = 1$

Se sabemos o valor de x , basta substituir esse valor na expressão algébrica:

$$2x + 1 = 2 \cdot x + 1$$

$$2 \cdot 1 + 1 =$$

$$2 + 1 =$$

$$3$$

b) $x - 3y$, para $x = 4$ e $y = 1$

Se sabemos o valor de x e y , basta substituir esses valores na expressão algébrica:

$$x - 3y = x - 3 \cdot y$$

$$4 - 3 \cdot 1 =$$

$$4 - 3 =$$

$$1$$

c) $x + 2xy + y$, para $x = 4$ e $y = 2$

Se sabemos o valor de x e y , basta substituir esses valores na expressão algébrica:

$$x + 2xy + y = x + 2 \cdot x \cdot y + y =$$

$$4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 2 =$$

$$4 + 8 \cdot 2 + 2 =$$

$$4 + 16 + 2 =$$

$$22$$

d) $1 + 2x$, para $x = 7$

Se sabemos o valor de x , basta substituir esse valor na expressão algébrica:

$$1 + 2x = 1 + 2 \cdot x =$$

$$1 + 2 \cdot 7 =$$

$$1 + 14 =$$

$$15$$

6. Encontre o valor numérico da expressão $\frac{x+2}{5}$ para:

a) $x = 3$

Se sabemos o valor de x , basta substituir esse valor na expressão algébrica:

$$\frac{x+2}{5} = \frac{3+2}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

b) $x = 4$

Se sabemos o valor de x , basta substituir esse valor na expressão algébrica:

$$\frac{x+2}{5} = \frac{4+2}{5} = \frac{6}{5}$$

c) $x = 0$

Se sabemos o valor de x , basta substituir esse valor na expressão algébrica:

$$\frac{x+2}{5} = \frac{0+2}{5} = \frac{2}{5}$$

d) $x = -2$

Se sabemos o valor de x , basta substituir esse valor na expressão algébrica:

$$\frac{x+2}{5} = \frac{-2+2}{5} = \frac{0}{5} = 0 : 5 = 0$$

7. Preencha os espaços em branco da tabela abaixo:

a	b	a + b	a · b	3a + 4b	$\frac{a-b}{2}$
-1	3	$-1 + 3 = 2$	$-1 \cdot 3 = -3$	$3 \cdot -1 + 4 \cdot 3 =$ $-3 + 12 = 9$	$\frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$
0	4	$0 + 4$	$0 \cdot 4 = 0$	$3 \cdot 0 + 4 \cdot 4 =$ $0 + 16 = 16$	$\frac{0-4}{2} = \frac{-4}{2} = -2$
1	5	$1 + 5 = 6$	$1 \cdot 5 = 5$	$3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 =$ $3 + 20 = 23$	$\frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

Lição 34 – Grau de um monômio

1. Classifique as expressões algébricas:

a) $2x$

R: Monômio

b) $4x - 1$

R: Binômio

c) $x + xy - y$

R: Trinômio

d) $4x + 2y + 3xy$

R: Trinômio

e) 4

R: Monômio

f) $x + y + z + w + q + 1$

R: Polinômio

2.

a) $13x$

R: Coeficiente: 13 ; parte literal: x

b) $-10y$

R: Coeficiente: -10 ; parte literal: y

c) xy

R: Coeficiente: 1 ; parte literal: xy

d) $2xy$

R: Coeficiente: 2 ; parte literal: xy

e) -4

R: Coeficiente: -4 ; parte literal: não tem

f) $2,5x$

R: Coeficiente: 2,5 ; parte literal: x

g) $\frac{1}{2}x$

R: Coeficiente: $\frac{1}{2}$; parte literal: x

Lição 35 – Monômios semelhantes

1. O que são termos semelhantes?

R: São dois ou mais monômios apresentam a mesma parte literal.

2. Reduza os termos semelhantes e classifique as expressões algébricas:

a) $2x + 3x$

$$2x + 3x = 5x$$

$5x \rightarrow$ monômio

b) $6y - 4y + 5y$

$$2y + 5y =$$

$7y \rightarrow$ monômio

c) $3a - 6a - a$

$$-3a - a =$$

$-4a \rightarrow$ monômio

d) $2x + x - 3x$

$$3x - 3x =$$

$0 \rightarrow$ monômio

e) $\frac{2}{5}m + \frac{3}{2}m$

Para somar duas frações é preciso que elas tenham o mesmo denominador. Assim, o MMC (5,2) = 10. Encontre as frações equivalentes.

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} \quad \text{e} \quad \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{15}{10}$$

$$\frac{2}{5}m + \frac{3}{2}m = \frac{4}{10}m + \frac{15}{10}m = \frac{4+15}{10}m =$$

$\frac{19}{10}m \rightarrow$ monômio

f) $7a + 3 - 2a + 5$

$$7a - 2a + 3 + 5 =$$

$5a + 8 \rightarrow$ binômio

g) $3x + 7x - 5 + 2$

$$3x + 7x - 5 + 2 =$$

$10x - 3 \rightarrow$ binômio

h) $2y - x - 1 + 3y + 2x + 1$

$$2y + 3y - x + 2x - 1 + 1 =$$

$$5y + x + 0 =$$

$5y + x \rightarrow$ binômio

i) $2x - 7 + 3x + 4 - 5x + 1 - 11x$

$$2x + 3x - 5x - 11x - 7 + 4 + 1 =$$

$$5x - 5x - 11x - 3 + 1 =$$

$$0 - 11x - 2 =$$

$$-11x - 2 \rightarrow \text{binômio}$$

$$j) 3x + 2y - 1 + 7x - 5y + 3 - 2x + y + 6$$

$$3x + 7x - 2x + 2y - 5y + y - 1 + 3 + 6 =$$

$$10x - 2x - 3y + y + 2 + 6 =$$

$$8x - 2y + 8 \rightarrow \text{trinômio}$$

Lição 36 - Adição algébrica de monômios

1. Como dois monômios devem ser somados/subtraídos?

R: Dois monômios podem ser somados/subtraídos se, e somente se, possuírem a mesma parte literal. dois termos semelhantes de uma expressão algébrica podem ser somados da seguinte forma: 1º passo $\rightarrow$ conserva a parte literal; 2º passo $\rightarrow$ soma/subtrai os coeficientes.

2. Sejam os polinômios $P = x^2 + 3x - 4$ e $Q = x^2 + 2$, determine:

$$a) P + Q =$$

$$x^2 + 3x - 4 + x^2 + 2 =$$

$$x^2 + x^2 + 3x - 4 + 2$$

$$2x^2 + 3x - 2$$

$$b) P - Q =$$

$$x^2 + 3x - 4 - (x^2 + 2) =$$

$$x^2 + 3x - 4 - x^2 - 2 =$$

$$x^2 - x^2 + 3x - 4 - 2 =$$

$$0 + 3x - 6 =$$

$$3x - 6$$

$$c) P \cdot Q$$

$$(x^2 + 3x - 4) \cdot (x^2 + 2) =$$

$$x^2 \cdot x^2 + x^2 \cdot 2 + 3x \cdot x^2 + 3x \cdot 2 - 4 \cdot x^2 - 4 \cdot 2 =$$

$$x^4 + 2x^2 + 3x^3 + 6x - 4x^2 - 8 =$$

$$x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 4x^2 + 6x - 8 =$$

$$x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 8$$

3. Dados:

$$A = x^2 + 3x + 3$$

$$B = 3x^2 - 2x - 1$$

$$C = -x^2 - x + 2$$

$$a) A - B - C$$

$$x^2 + 3x + 3 - (3x^2 - 2x - 1) - (-x^2 - x + 2)$$

$$x^2 + 3x + 3 - 3x^2 + 2x + 1 + x^2 + x - 2 =$$

$$x^2 - 3x^2 + x^2 + 3x + 2x + x + 3 + 1 - 2 =$$

$$-2x^2 + x^2 + 5x + x + 4 - 2 =$$

$$-x^2 + 6x + 2$$

$$b) -A - B + C$$

$$-(x^2 + 3x + 3) - (3x^2 - 2x - 1) + (-x^2 - x + 2) =$$

$$-x^2 - 3x - 3 - 3x^2 + 2x + 1 - x^2 - x + 2 =$$

$$-x^2 - 3x^2 - x^2 - 3x + 2x - x - 3 + 1 + 2 =$$

$$-5x^2 - x - x - 2 + 2 =$$

$$-5x^2 - 2x + 0 =$$

$$-5x^2 - 2x$$

$$c) -C + B - A$$

$$-(-x^2 - x + 2) + (3x^2 - 2x - 1) - (x^2 + 3x + 3)$$

$$+x^2 + x - 2 + 3x^2 - 2x - 1 - x^2 - 3x - 3$$

$$x^2 + 3x^2 - x^2 + x - 2x - 3x - 2 - 1 - 3 =$$

$$4x^2 - x^2 - x - 3x - 3 - 3 =$$

$$3x^2 - 4x - 6$$

$$d) A + (B - C)$$

$$x^2 + 3x + 3 + [3x^2 - 2x - 1 - (-x^2 - x + 2)] =$$

$$x^2 + 3x + 3 + [3x^2 - 2x - 1 + x^2 + x - 2] =$$

$$x^2 + 3x + 3 + [3x^2 + x^2 - 2x + x - 1 - 2] =$$

$$x^2 + 3x + 3 + [4x^2 - x - 3] =$$

$$x^2 + 3x + 3 + 4x^2 - x - 3 =$$

$$x^2 + 4x^2 + 3x - x + 3 - 3 =$$

$$5x^2 + 2x + 0 =$$

$$5x^2 + 2x$$

$$e) A - (B - C)$$

$$x^2 + 3x + 3 - [3x^2 - 2x - 1 - (-x^2 - x + 2)] =$$

$$x^2 + 3x + 3 - [3x^2 - 2x - 1 + x^2 + x - 2] =$$

$$x^2 + 3x + 3 - [3x^2 + x^2 - 2x + x - 1 - 2] =$$

$$\begin{aligned}
 x^2 + 3x + 3 - [4x^2 - x - 3] &= \\
 x^2 + 3x + 3 - 4x^2 + x + 3 &= \\
 x^2 - 4x^2 + 3x + x + 3 + 3 &= \\
 -3x^2 + 4x + 6
 \end{aligned}$$

Lição 37 – Multiplicação de monômios

1. Como devem ser feitas as multiplicações entre dois monômios?

R: Para encontrar o produto entre dois monômios, basta multiplicar coeficiente por coeficiente e parte literal por parte literal (os monômios não precisam ter a mesma parte literal).

2. Calcule as multiplicações entre os monômios:

a) $6 \cdot 5x = 30x$

b) $3x \cdot 4x^2 = 3 \cdot 4 \cdot x \cdot x^2 = 12x^3$

c) $-2x^2 \cdot 2x = -2 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x = -4x^3$

d) $x^3y \cdot 5xy = 5 \cdot x^3 \cdot x \cdot y \cdot y = 5x^4y^2$

3. Calcule os seguintes produtos:

a) $b^5 \cdot b^3 = b^{5+3} = b^8$

b) $5x^6 \cdot x = 5x^{6+1} = 5x^7$

c) $(-7y) \cdot (-2y) = -7 \cdot -2 \cdot y \cdot y = 14y^2$

d) $(-2a) \cdot \left(+\frac{1}{3}a^2\right) = -2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 = -\frac{2}{3}a^{1+2} = -\frac{2}{3}a^3$

e) $\left(+\frac{3}{2}xy\right) \cdot (+4xy) = \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot x^2 \cdot y^2 = \frac{12}{2} \cdot x^2y^2 = 6x^2y^2$

f) $(-2ay^2) \cdot (2,6a) = -2 \cdot 2,6 \cdot a \cdot a \cdot y^2 = -5,2 \cdot a^2 \cdot y^2 = -5,2a^2y^2$

g) $(-9a^4m) \cdot (-3am^2) = -9 \cdot -3 \cdot a^4 \cdot a \cdot m \cdot m^2 = 27 \cdot a^{4+1} \cdot m^{1+2} = 27 \cdot a^5 \cdot m^3 = 27a^5m^3$

h) $(1,5x) \cdot (-0,5xy^3) = 1,5 \cdot -0,5 \cdot x \cdot x \cdot y^3 = -0,75 \cdot x^2 \cdot y^3 = -0,75x^2y^3$

i) $\left(-\frac{mn}{2}\right) \cdot \left(+\frac{m}{7}\right) = \frac{-m \cdot n \cdot m}{2 \cdot 7} = \frac{-m \cdot m \cdot n}{14} = \frac{-m^2 \cdot n}{14} = -\frac{m^2n}{14}$

j) $\left(+\frac{9}{4}am^2\right) \cdot \left(-\frac{4}{9}a^4\right) = \frac{9}{4} \cdot \frac{-4}{9} \cdot a \cdot a^4 \cdot m^2 = \frac{9 \cdot -4}{4 \cdot 9} \cdot a^{1+4} \cdot m^2 = \frac{-36}{36} \cdot a^5 \cdot m^2 = -1 \cdot a^5 \cdot m^2 = -a^5m^2$

4. Calcule:

$$\text{a) } (-5a^4bc^3) \cdot (-b^2c) \cdot (+4a^2c) = -5 \cdot 4 \cdot a^4 \cdot a^2 \cdot b \cdot -b^2 \cdot c^3 \cdot c \cdot c = -20 \cdot a^{4+2} \cdot -b^{1+2} \cdot c^{3+1+1} = -20 \cdot a^6 \cdot -b^3 \cdot c^5 \\ = 20 \cdot a^6 \cdot b^3 \cdot c^5 = 20a^6b^3c^5$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{10}ax\right) \cdot (+10xy) \cdot (-3xy) = \frac{1}{10} \cdot 10 \cdot -3 \cdot a \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y = \frac{10}{10} \cdot -3 \cdot a \cdot x^3 \cdot y^2 = 1 \cdot -3 \cdot a \cdot x^3 \cdot y^2 = -3ax^3y^2$$

$$\text{c) } (4,5y^2) \cdot (-0,3y) \cdot (-y^4) = 4,5 \cdot -0,3 \cdot y^2 \cdot y \cdot -y^4 = -1,35 \cdot y^3 \cdot -y^4 = 1,35 \cdot y^{3+4} = 1,35y^7$$

$$\text{d) } (0,1xy) \cdot (100xy^2) \cdot (0,001x^3) = 0,1 \cdot 100 \cdot 0,001 \cdot x \cdot x \cdot x^3 \cdot y \cdot y^2 = 10 \cdot 0,001 \cdot x^{1+1+3} \cdot y^{1+2} = 0,01 \cdot x^5 \cdot y^3 = 0,01x^5y^3$$

$$\text{e) } (-xy) \cdot (-15x^2y) = -15 \cdot -x \cdot x^2 \cdot y \cdot y = 15 \cdot x^{1+2} \cdot y^2 = 15 \cdot x^3 \cdot y^2 = 15x^3y^2$$

$$\text{f) } (5l^3) \cdot \left(-\frac{2}{5}l\right) = 5 \cdot \frac{-2}{5} \cdot l^3 \cdot l = \frac{5 \cdot -2}{5} \cdot l^{3+1} = \frac{-10}{5} \cdot l^4 = -2 \cdot l^4 = -2l^4$$

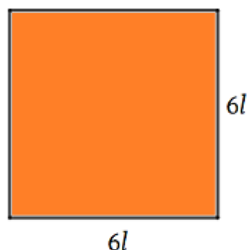
$$\text{g) } (2x^4) \cdot (-3x^2) \cdot (+7x) = 2 \cdot -3 \cdot 7 \cdot x^4 \cdot x^2 \cdot x = -6 \cdot 7 \cdot x^{4+2+1} = -42 \cdot x^7 = -42x^7$$

$$\text{h) } (-12mnp) \cdot \left(-\frac{2}{3}m^2n\right) \cdot (5np) = -12 \cdot -\frac{2}{3} \cdot 5 \cdot m \cdot m^2 \cdot n \cdot n \cdot n \cdot p \cdot p = \frac{-12 \cdot -2 \cdot 5}{3} \cdot m^{1+2} \cdot n^3 \cdot p^2 = \frac{120}{3} \cdot m^3 \cdot n^3 \cdot p^2 = 40 \cdot m^3 \cdot n^3 \cdot p^2 = 40m^3n^3p^2$$

$$\text{i) } (-x^2z) \cdot (-xy^3z) \cdot (xyz) = -x^2 \cdot -x \cdot x \cdot y^3 \cdot y \cdot z \cdot z \cdot z = x^{2+1+1} \cdot y^{3+1} \cdot z^3 = x^4 \cdot y^4 \cdot z^3 = x^4y^4z^3$$

$$\text{j) } \left(+\frac{2}{5}am^2\right) \cdot \left(-\frac{5}{7}an\right) \cdot (+7mn) = \frac{2}{5} \cdot -\frac{5}{7} \cdot 7 \cdot a \cdot a \cdot m^2 \cdot m \cdot n \cdot n = \frac{2 \cdot -5 \cdot 7}{5 \cdot 7} \cdot a^2 \cdot m^{2+1} \cdot n^2 = \frac{-70}{35} \cdot a^2 \cdot m^3 \cdot n^2 = -2 \cdot a^2 \cdot m^3 \cdot n^2 = -2a^2m^3n^2$$

5. Determine o monômio que representa a área do quadrado da figura.



R: A área do quadrado é dada por: (lado)²

O lado deste quadrado é 6l. Logo:

$$A_{\text{quadrado}} = (6l)^2 = 6^2 \cdot l^2 = 36 \cdot l^2 = 36l^2$$

6. Dados os monômios $-2a^2x$ e $-16ax$, determine:

a) O produto desses monômios.

$$R: -2a^2x \cdot -16ax = -2 \cdot -16 \cdot a^2 \cdot a \cdot x \cdot x = 32 \cdot a^{2+1} \cdot x^2 = 32 \cdot a^3 \cdot x^2 = 32a^3x^2.$$

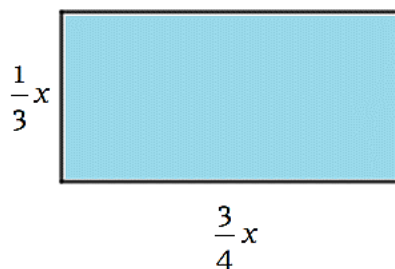
b) O valor numérico do produto, quando $a = x = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} -2a^2x \cdot -16ax &= \left[-2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{-1}{2} \right] \cdot \left(-16 \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \right) = \\ &= \left[-2 \cdot \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{-1}{2} \right] \cdot \left(-16 \cdot \frac{-1 \cdot -1}{2 \cdot 2} \right) = \\ &= \left[-2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{-1}{2} \right] \cdot \left(-16 \cdot \frac{1}{4} \right) = \\ &= \left[-2 \cdot \frac{1 \cdot -1}{4 \cdot 2} \right] \cdot \left(-\frac{16}{1} \cdot \frac{1}{4} \right) = \\ &= \left[-2 \cdot \frac{-1}{8} \right] \cdot \left(-\frac{16 \cdot 1}{1 \cdot 4} \right) = \left[\frac{-2}{1} \cdot \frac{-1}{8} \right] \cdot \left(-\frac{16 \cdot 1}{1 \cdot 4} \right) = \\ &= \left[\frac{-2 \cdot -1}{1 \cdot 8} \right] \cdot \left(-\frac{16}{4} \right) = \left[\frac{2}{8} \right] \cdot (-4) = \frac{2}{8} \cdot \frac{-4}{1} = \\ &= \frac{2 \cdot -4}{8 \cdot 1} = \frac{-8}{8} = -1 \end{aligned}$$

Ou, você pode substituir os valores na expressão que encontrou no item a) $32a^3x^2$:

$$32a^3x^2 = 32 \cdot a^3 \cdot x^2 = 32 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^2 = 32 \cdot -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{32 \cdot -1 \cdot 1}{8 \cdot 4} = \frac{-32}{32} = -1$$

7. Escreva o monômio que representa a área do retângulo.



R: A área de um retângulo pode ser encontrada multiplicando o largura vezes o comprimento do triângulo.

A largura deste retângulo é: $\frac{1}{3}x$.

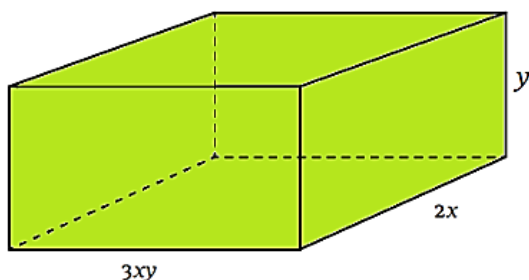
O comprimento desse retângulo é: $\frac{3}{4}x$.

Então, a área é:

$$\frac{1}{3}x \cdot \frac{3}{4}x = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4}x \cdot x = \frac{1}{4}x^2$$

Note que podemos cortar os “3” e resta apenas o $\frac{1}{4}$.

8. O volume do paralelepípedo retângulo é dado pelo produto de suas dimensões. Nessas condições, determine o volume do paralelepípedo retângulo abaixo.



R: O volume de um paralelepípedo é dado pelo produto de suas dimensões, isto é:

$$V_{\text{paralelepípedo}} = \text{comprimento} \cdot \text{largura} \cdot \text{altura}$$

$$V_{\text{paralelepípedo}} = 3xy \cdot 2x \cdot y$$

$$V_{\text{paralelepípedo}} = 3 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y$$

$$V_{\text{paralelepípedo}} = 6 \cdot x^2 \cdot y^2$$

$$V_{\text{paralelepípedo}} = 6x^2y^2$$

9. Com que monômio devemos multiplicar $5ab$ para ter $20a^2b$?

R: Queremos descobrir um monômio tal que:

$$5ab \cdot (\text{monômio}) = 20a^2b$$

- Que número, multiplicado com 5 resulta em 20?

$$R = 4.$$

Então, o coeficiente desse monômio só pode ser **4**.

- Como podemos sair de “ab” chegando em “a²b”?

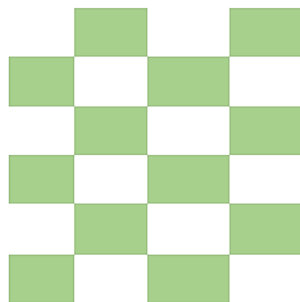
R = Multiplicando “ab” por a:

$$ab \cdot a = a \cdot a \cdot b = a^2b$$

Então, a parte literal do monômio só pode ser **a**.

Logo, o monômio é **4a**.

10. Cada ladrilho retangular da figura ao lado tem x unidades de comprimento por $\frac{1}{2}x$ unidades de largura. Nessas condições, escreva o monômio que representa:



a) a área de cada ladrilho;

R: Como o ladrilho é um retângulo, para saber a área do ladrilho, basta utilizar a expressão que calcula a área de um retângulo.

A área de cada retângulo é dada por: (comprimento $\cdot$ largura). Logo:

$$A_{\text{ladrilho}} = x \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x^2$$

b) a área ocupada pelos ladrilhos coloridos;

R: Há 12 ladrilhos coloridos. Se cada um tem área $\frac{1}{2}x^2$, a área que os doze ocupam é doze vezes esse valor:

$$\text{Área ocupada pelos 12 ladrilhos} = \text{área de 1 ladrilho} \cdot 12$$

$$\text{Área ocupada pelos 12 ladrilhos} = \frac{1}{2}x^2 \cdot 12 = 12 \cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{12}{2}x^2 = 6x^2$$

c) a área ocupada pelos ladrilhos brancos;

R: Há 12 ladrilhos brancos (e eles são iguais aos verdes). Se cada um tem área $\frac{1}{2}x^2$ (assim como os verdes), a área que os doze ocupam é doze vezes esse valor:

$$\text{Área ocupada pelos 12 ladrilhos} = \text{área de 1 ladrilho} \cdot 12$$

$$\text{Área ocupada pelos 12 ladrilhos} = \frac{1}{2}x^2 \cdot 12 = 12 \cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{12}{2}x^2 = 6x^2$$

d) a área total da figura.

R: A área total da figura é:

$$A_{\text{total}} = \text{área dos ladrilhos verdes} + \text{área dos ladrilhos brancos}$$

$$A_{\text{total}} = 6x^2 + 6x^2 = 12x^2$$

11. A sequência $5ab$, $10a^3b^2$, $20a^5b^3$, ... tem seis termos. Qual é o último termo desta sequência?

R: Perceba que para obtermos o sucessor de um elemento da sequência, devemos multiplicar esse elemento por $2a^2b$.

O primeiro termo é $5ab$.

O sucessor de $5ab$ é $10a^3b^2$, pois:

$$5ab \cdot 2a^2b = 5 \cdot 2 \cdot a \cdot a^2 \cdot b \cdot b = 10a^3b^2$$

$10a^3b^2$ é o 2º termo.

O sucessor de $10a^3b^2$ é $20a^5b^3$, pois:

$$10a^3b^2 \cdot 2a^2b = 10 \cdot 2 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot b = 20a^5b^3$$

$20a^5b^3$ é o 3º termo.

O 4º termo, sucessor de $20a^5b^3$ deve ser calculado da mesma forma, multiplicando $20a^5b^3$ por $2a^2b$:

$$20a^5b^3 \cdot 2a^2b = 20 \cdot 2 \cdot a^5 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot b = 40a^7b^4$$

$40a^7b^4$ é o 4º termo.

O 5º termo, sucessor de $40a^7b^4$ deve ser calculado da mesma forma, multiplicando $40a^7b^4$ por $2a^2b$:

$$40a^7b^4 \cdot 2a^2b = 40 \cdot 2 \cdot a^7 \cdot a^2 \cdot b^4 \cdot b = 80a^9b^5$$

$80a^9b^5$ é o 5º termo.

O 6º termo (e último termo) é o sucessor de $80a^9b^5$ deve ser calculado da mesma forma, multiplicando $80a^9b^5$ por $2a^2b$:

$$80a^9b^5 \cdot 2a^2b = 80 \cdot 2 \cdot a^9 \cdot a^2 \cdot b^5 \cdot b = 160a^{11}b^6$$

$160a^{11}b^6$ é o 6º termo.

Lição 38 – Divisão de monômios

1. Como devem ser feitas as divisões entre dois monômios?

R: Assim como na multiplicação, a divisão de monômios ocorre independentemente de possuírem a mesma parte literal ou não. Para encontrar o quociente entre dois monômios, basta dividir coeficiente por coeficiente e parte literal por parte literal.

2. Calcule:

a) $a^7 : a^2 = a^{7-2} = a^5$

b) $t^4 : t^4 = t^{4-4} = t^0 = 1$

c) $-32x^4 : -8x = (-32 : -8) \cdot x^{4-1} = 4 \cdot x^3 = 4x^3$

d) $(+9y^6) : (-3y^3) = (+9 : -3) \cdot y^{6-3} = -3 \cdot y^3 = -3y^3$

$$e) \left(\frac{2}{7}a^4x^3\right) : \left(\frac{4}{7}ax^2\right) = \left(\frac{2}{7} : \frac{4}{7}\right) \cdot a^{4-1} \cdot x^{3-2} = \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{4}\right) \cdot a^3 \cdot x^1 = \left(\frac{2}{4}\right) \cdot a^3 \cdot x^1 = \left(\frac{2:2}{4:2}\right) \cdot a^3x = \frac{1}{2} \cdot a^3x = \frac{1}{2}a^3x$$

$$f) (-7am) : (-21am) = (-7 : -21) \cdot a^{1-1} \cdot m^{1-1} = \left(\frac{7}{21}\right) \cdot a^0 \cdot m^0 = \frac{7:7}{21:7} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$g) \left(\frac{5}{9}x^6y^6\right) : (-2x^5y^2) = \left(\frac{5}{9} : -2\right) \cdot x^{6-5} \cdot y^{6-2} = \left(\frac{5}{9} : \frac{-2}{1}\right) \cdot x^1 \cdot y^4 = \left(\frac{5}{9} \cdot \frac{1}{-2}\right) \cdot x \cdot y^4 = \left(\frac{5 \cdot 1}{9 \cdot -2}\right) \cdot x \cdot y^4 =$$

$$\frac{5}{-18} \cdot xy^4 = -\frac{5xy^4}{18}$$

$$h) \left(-\frac{1}{2}an^6\right) : \left(-\frac{1}{8}an^5\right) = \left(-\frac{1}{2} : -\frac{1}{8}\right) \cdot a^{1-1} \cdot n^{6-5} = \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{-8}{1}\right) \cdot a^0 \cdot n^1 = \frac{-1 \cdot -8}{2 \cdot 1} \cdot 1 \cdot n = \frac{8}{2} \cdot n = 4n$$

$$i) (-0,4b^2c^4) : (0,25bc^4) = (-0,4 : 0,25) \cdot b^{2-1} \cdot c^{4-4} = \left(-\frac{4}{10} : \frac{25}{100}\right) \cdot b^1 \cdot c^0 = \left(-\frac{4}{10} \cdot \frac{100}{25}\right) \cdot b = \left(-\frac{400}{250}\right) \cdot b =$$

$$\left(-\frac{400:50}{250:50}\right) \cdot b = \frac{-8}{5} \cdot b = -\frac{8}{5}b$$

$$j) \left(-\frac{3}{5}xy^2z^2\right) : (-0,4xyz^2) = \left(-\frac{3}{5} : -0,4\right) \cdot x^{1-1} \cdot y^{2-1} \cdot z^{2-2} = \left(-\frac{3}{5} : -\frac{4}{10}\right) \cdot x^0 \cdot y^1 \cdot z^0 = \left(\frac{-3}{5} \cdot \frac{-10}{4}\right) \cdot 1 \cdot y \cdot 1 =$$

$$\left(\frac{30}{20}\right) \cdot y = \frac{30:10}{20:10} \cdot y = \frac{3}{2}y$$

3. Por qual monômio você deve dividir $20x^2y^3$ para obter $5xy^2$?

R: Queremos descobrir um monômio tal que:

$$20x^2y^3 : (\text{monômio}) = 5xy^2$$

- Por qual número devemos dividir o 20 para obter 5?
- $R = 4$.

Então, o coeficiente desse monômio só pode ser **4**.

- Como podemos sair de " x^2y^3 " chegando em " xy^2 "?

$R =$ Dividindo x^2y^3 por xy :

$$\frac{x^2y^3}{xy} = \frac{x^2 \cdot y^3}{x \cdot y} = \frac{x^2 \cdot y^3}{x^1 \cdot y^1} = x^{2-1} \cdot y^{3-1} = x^1 \cdot y^2 = x \cdot y^2 = xy^2$$

Então, a parte literal do monômio só pode ser **xy**.

Logo, o monômio é **4xy**.

4. Multiplique o monômio $-20xy$ pelo monômio $-5x^2y^3$. A seguir, divida o resultado por $10xy^2$. Qual é o monômio que você vai obter?

R: Comece pela multiplicação:

$$(-20xy) \cdot (-5x^2y^3) = (-20 \cdot -5)x \cdot x^2 \cdot y \cdot y^3 = 100x^{1+2} \cdot y^{1+3} = 100x^3y^4$$

Agora, a divisão:

$$\frac{(100x^3y^4)}{10xy^2} = \left(\frac{100}{10}\right) \cdot x^{3-1} \cdot y^{4-2} = 10 \cdot x^2 \cdot y^2 = 10x^2y^2$$

5. Felipe dividiu a soma $2x^6 + x^6$ pelo monômio $-x^3$ e deu como resposta o monômio $-3x^3$. A resposta de Felipe está certa ou errada?

R: Comece reduzindo $2x^6 + x^6$:

$$2x^6 + x^6 = 3x^6$$

Depois de realizar a soma, faça a divisão:

$$\frac{3x^6}{-x^3} = \frac{3}{-1} \cdot x^{6-3} = -3x^3$$

Então, a resposta de Felipe está certa.

6. Se dividir $-21a^4b^4$ por um monômio, você obtém $7ab$. Qual é esse monômio?

R: Queremos descobrir um monômio tal que:

$$-21a^4b^4 : (\text{monômio}) = 7ab$$

- Por qual número devemos dividir o -21 para obter 7 ?
- $R = -3$.

Então, o coeficiente desse monômio só pode ser **-3**.

- Como podemos sair de " a^4b^4 " chegando em " ab "?
- $R =$ Dividindo a^4b^4 por a^3b^3 :

$$\frac{a^4b^4}{a^3b^3} = \frac{a^4 \cdot b^4}{a^3 \cdot b^3} = a^{4-3} \cdot b^{4-3} = a^1 \cdot b^1 = a \cdot b = ab$$

Então, a parte literal do monômio só pode ser **a^3b^3** .

Logo, o monômio é **$-3a^3b^3$** .

Lição 39 – Potenciação de monômios

1. Calcule:

a) $(a^5)^2 = a^{5 \cdot 2} = a^{10}$

b) $(-2x^4)^2 = (-2)^2 \cdot (x^4)^2 = 4 \cdot x^{4 \cdot 2} = 4 \cdot x^8 = 4x^8$

$$c) (-5y^3)^3 = (-5)^3 \cdot (y^3)^3 = -125 \cdot y^{3 \cdot 3} = -125 \cdot y^9 = -125y^9$$

$$d) -10a^2b^2 = -10a^2b^2 \text{ (não há o que ser calculado)}$$

$$e) (-3x^2y)^4 = (-3)^4 \cdot (x^2)^4 \cdot (y)^4 = 81 \cdot x^{2 \cdot 4} \cdot y^4 = 81 \cdot x^8 \cdot y^4 = 81x^8y^4$$

$$f) \left(-\frac{1}{5}m^2n\right)^2 = \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \cdot (m^2)^2 \cdot (n)^2 = \left(\frac{(-1)^2}{(5^2)}\right) \cdot m^{2 \cdot 2} \cdot n^2 = \frac{1}{25} \cdot m^4 \cdot n^2 = \frac{1}{25}m^4n^2$$

$$g) (0,5ab^2)^2 = (0,5)^2 \cdot (a)^2 \cdot (b^2)^2 = 0,25 \cdot a^2 \cdot b^{2 \cdot 2} = 0,25 \cdot a^2 \cdot b^4 = 0,25a^2b^4$$

Note que 0,25 pode ser escrito como:

$$\frac{25}{100} = \frac{25 : 25}{100 : 25} = \frac{1}{4}$$

Assim, $0,25a^2b^4$ também pode ser escrito como: $\frac{1}{4}a^2b^4$

$$h) (a^2c^3)^7 = (a^2)^7 \cdot (c^3)^7 = a^{2 \cdot 7} \cdot c^{3 \cdot 7} = a^{14} \cdot c^{21} = a^{14}c^{21}$$

$$i) \left(\frac{2}{3}x^3y^2\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot (x^3)^2 \cdot (y^2)^2 = \frac{2^2}{3^2} \cdot x^{3 \cdot 2} \cdot y^{2 \cdot 2} = \frac{4}{9} \cdot x^6 \cdot y^4 = \frac{4}{9}x^6y^4$$

$$j) \left(-\frac{x^2y^2}{5}\right)^2 = \frac{(-x^2)^2 \cdot (y^2)^2}{5^2} = \frac{(-x)^{2 \cdot 2} \cdot y^{2 \cdot 2}}{25} = \frac{x^4 \cdot y^4}{25} = \frac{x^4y^4}{25}$$

2. Determine:

a) o quadrado de $-1,5b^2c^3$.

$$(-1,5b^2c^3)^2 = (-1,5)^2 \cdot (b^2)^2 \cdot (c^3)^2 = 2,25 \cdot b^{2 \cdot 2} \cdot c^{3 \cdot 2} = 2,25 \cdot b^4 \cdot c^6 = 2,25b^4c^6$$

Note que 2,25 pode ser escrito como:

$$2,25 = \frac{225}{100} = \frac{225 : 25}{100 : 25} = \frac{9}{4}$$

Assim, $2,25b^4c^6$ também pode ser escrito como: $\frac{9}{4}b^4c^6$

b) o cubo de $0,4a^5b^3$.

$$(0,4a^5b^3)^3 = (0,4)^3 \cdot (a^5)^3 \cdot (b^3)^3 = 0,064 \cdot a^{5 \cdot 3} \cdot b^{3 \cdot 3} = 0,064 \cdot a^{15} \cdot b^9 = 0,064a^{15}b^9$$

Note que 0,064 pode ser escrito como:

$$0,064 = \frac{64}{1000} = \frac{64 : 8}{1000 : 8} = \frac{8}{125}$$

Assim, $0,064a^{15}b^9$ também pode ser escrito como: $\frac{8}{125}a^{15}b^9$

3. Calcule o quadrado do monômio $-2xy$. A seguir, divida pelo monômio $8xy^2$. Que monômio você vai obter?

R: Comece calculando o quadrado:

$$(-2xy)^2 = (-2)^2 \cdot x^2 \cdot y^2 = 4 \cdot x^2 \cdot y^2 = 4x^2y^2$$

Agora, realize a divisão:

$$4x^2y^2 : 8xy^2 = \frac{4}{8} \cdot \left(\frac{x^2}{x}\right) \cdot \left(\frac{y^2}{y^2}\right) = \frac{4:4}{8:4} \cdot x^{2-1} \cdot y^{2-2} = \frac{1}{2} \cdot x^1 \cdot y^0 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1 = \frac{1}{2}x$$

Assim, o monômio que obtemos é $\frac{1}{2}x$.

4. Se você dividir o cubo da soma $(-7y + 10y + 2y)$ pela soma $(-10y^2 - 15y^2)$, que monômio você vai encontrar?

Primeiro, realize a soma: $(-7y + 10y + 2y) = (3y + 2y) = 5y$

Agora, calcule o cubo da soma: $(5y)^3 = 5^3 \cdot y^3 = 125 \cdot y^3 = 125y^3$

Realize a segunda soma: $(-10y^2 - 15y^2) = -25y^2$

Divida o resultado do cubo da primeira soma pela segunda soma:

$$125y^3 : -25y^2 = \frac{125}{-25} \cdot \frac{y^3}{y^2} = -5 \cdot y^{3-2} = -5 \cdot y^1 = -5 \cdot y = -5y$$

Assim, o monômio que obtemos é $-5y$.

5. Calcule:

a) O quadrado do monômio $-4x^2y^3$;

$$(-4x^2y^3)^2 = (-4)^2 \cdot (x^2)^2 \cdot (y^3)^2 = 16 \cdot x^{2 \cdot 2} \cdot y^{3 \cdot 2} = 16 \cdot x^4 \cdot y^6 = 16x^4y^6$$

b) O monômio que representa a expressão $-x^2y^2 + 9x^2y^2$.

$$-x^2y^2 + 9x^2y^2 = (-1 + 9) x^2y^2 = 8x^2y^2$$

6. Efetue a divisão de $\left(-\frac{1}{2}a^2c^5\right)^4$ por $\left(-\frac{1}{4}a^4c^9\right)^2$. A seguir, adicione o monômio c^2 ao resultado. Que monômio você vai obter?

R: Comece pela divisão:

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}a^2c^5\right)^4}{\left(-\frac{1}{4}a^4c^9\right)^2} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (a^2)^4 \cdot (c^5)^4}{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 \cdot (a^4)^2 \cdot (c^9)^2} = \frac{\left(\frac{(-1)^4}{2^4}\right) \cdot a^{2 \cdot 4} \cdot c^{5 \cdot 4}}{\left(\frac{(-1)^2}{4^2}\right) \cdot a^{4 \cdot 2} \cdot c^{9 \cdot 2}} = \frac{\frac{1}{16} \cdot a^8 \cdot c^{20}}{\frac{1}{16} \cdot a^8 \cdot c^{18}} =$$

Note que $\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}} = 1$ e quando multiplicamos por “1” a fração não altera seu valor. É por

isso que podemos “cortar” o $\frac{1}{16}$ do numerador com o $\frac{1}{16}$ do denominador.

$$\frac{a^8 \cdot c^{20}}{a^8 \cdot c^{18}} = a^{8-8} \cdot c^{20-18} = a^0 \cdot c^2 = 1 \cdot c^2 = c^2$$

Agora, some o resultado da divisão (c^2) com o monômio c^2 :

$$c^2 + c^2 = 2c^2$$

Assim, obtemos o monômio $2c^2$.

Lição 40 – Polinômios

1. Em um jogo de basquete um jogador marcou x cestas de 2 pontos e y cestas de 3 pontos. Qual é o polinômio que representa o número de pontos que o jogador marcou nessa partida?

R: O número de pontos é calculado através da soma dos pontos das cestas feitas:

$$\text{Número de pontos} = (\text{quantidade de cestas feitas que valem 2 pontos}) \cdot 2 \text{ pontos} + (\text{quantidade de cestas feitas que valem 3 pontos}) \cdot 3 \text{ pontos}$$

Foram feitas “x” cestas que valem 2 pontos e “y” cestas que valem 3 pontos. Assim:

$$\text{Número de pontos} = x \cdot 2 \text{ pontos} + y \cdot 3 \text{ pontos} = x \cdot 2 + y \cdot 3$$

$$\text{Número de pontos} = 2x + 3y$$

Logo, o polinômio que representa o número de pontos que o jogador marcou nessa partida é $2x + 3y$.

2. Maria tinha x reais. Passou em uma livraria e comprou 5 livros. Cada livro custou y reais. Escreva o polinômio que representa a quantia que restou a Maria após ela pagar a conta na livraria.

R: Primeiro, escreva quanto custou os livros:

$$\text{Quanto custou os livros} = (\text{quantidade de livros comprados}) \cdot (\text{preço dos livros})$$

Se ela comprou 5 livros que custavam y reais, temos:

$$\text{Quanto custou os livros} = 5 \cdot y$$

Agora, escreva a expressão de quanto sobrou:

$$\text{Quanto sobrou} = (\text{quantia inicial}) - (\text{quanto gastou na livraria}) =$$

Ela possuía x reais (quantia inicial). Gastou $5y$. Assim:

$$\text{Quanto sobrou} = x - 5y$$

3. Em um estacionamento, há x carros e y motos. Qual é o polinômio que representa o número de rodas dos veículos que estão nesse estacionamento?

R: Carros tem 4 rodas e motos tem 2 rodas. Assim, a quantidade total de rodas:

$$\text{quantidade total de rodas} = (4 \text{ rodas}) \cdot (\text{quantidade de carros}) + (2 \text{ rodas}) \cdot (\text{quantidade de motos})$$

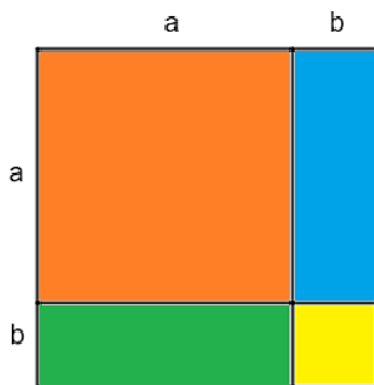
Se há x carros e y motos, a quantidade total de rodas é:

$$\text{quantidade total de rodas} = 4 \text{ rodas} \cdot x + 2 \text{ rodas} \cdot y$$

$$\text{quantidade total de rodas} = 4x + 2y$$

4. QUESTÃO ANULADA.

5. Escreva o polinômio que representa a área da figura abaixo.



R: A área total da figura é:

$$A_{\text{total}} = \text{Área do quadrado laranja} + \text{área do retângulo azul} + \text{área do retângulo verde} + \text{área do quadrado amarelo.}$$

A área do quadrado laranja é:

$$A_{\text{quadrado}} = (\text{lado})^2$$

$$A_{\text{quadrado}} = a^2$$

A área do retângulo azul é:

$$A_{\text{retângulo}} = (\text{comprimento}) \cdot (\text{largura})$$

$$A_{\text{retângulo}} = a \cdot b = ab$$

A área do retângulo verde é:

$$A_{\text{retângulo}} = (\text{comprimento}) \cdot (\text{largura})$$

$$A_{\text{retângulo}} = a \cdot b = ab$$

A área do quadrado amarelo é:

$$A_{\text{quadrado}} = (\text{lado})^2$$

$$A_{\text{quadrado}} = b^2$$

Assim, a área total é:

$$A_{\text{total}} = a^2 + ab + ab + b^2$$

Lição 41 – Polinômio reduzido

1. Escreva os seguintes polinômios na forma reduzida:

a) $5y + 4y^3 - 1 + 2y^2 - y^3 - y + 7y^2 - 1$

$$4y^3 - y^3 + 2y^2 + 7y^2 + 5y - y - 1 - 1 =$$

$$3y^3 + 2y^2 + 7y^2 + 5y - y - 1 - 1 =$$

$$3y^3 + 9y^2 + 5y - y - 1 - 1 =$$

$$3y^3 + 9y^2 + 4y - 1 - 1 =$$

$$3y^3 + 9y^2 + 4y - 2$$

b) $a^2x - 5a^2x^2 + 3a^2x - 7ax^2 + a^2x^2 - 2a^2x + 5ax^2$

$$a^2x + 3a^2x - 2a^2x - 5a^2x^2 + a^2x^2 - 7ax^2 + 5ax^2 =$$

$$4a^2x - 2a^2x - 5a^2x^2 + a^2x^2 - 7ax^2 + 5ax^2 =$$

$$2a^2x - 5a^2x^2 + a^2x^2 - 7ax^2 + 5ax^2 =$$

$$2a^2x - 4a^2x^2 - 7ax^2 + 5ax^2 =$$

$$2a^2x - 4a^2x^2 - 2ax^2$$

c) $7a + 5b - 9c + 13b + 10c - 5a - 8b + c$

$$7a - 5a + 5b + 13b - 8b - 9c + 10c + c =$$

$$2a + 5b + 13b - 8b - 9c + 10c + c =$$

$$2a + 18b - 8b - 9c + 10c + c =$$

$$2a + 10b - 9c + 10c + c =$$

$$2a + 10b + 1c + c =$$

$$2a + 10b + 2c$$

$$d) 6x - 5y + 3xy + 2xy - 5x + 9y + 4x - xy - y$$

$$6x - 5x + 4x - 5y + 9y - y + 3xy + 2xy - xy =$$

$$1x + 4x - 5y + 9y - y + 3xy + 2xy - xy =$$

$$5x - 5y + 9y - y + 3xy + 2xy - xy =$$

$$5x + 4y - y + 3xy + 2xy - xy =$$

$$5x + 3y + 3xy + 2xy - xy =$$

$$5x + 3y + 5xy - xy =$$

$$5x + 3y + 4xy$$

$$e) 8x^2 - 6x + 1 + 7x - 6x^2 - 3 - 3x - x^2 - 5$$

$$8x^2 - 6x^2 - x^2 - 6x + 7x - 3x + 1 - 3 - 5 =$$

$$2x^2 - x^2 - 6x + 7x - 3x + 1 - 3 - 5 =$$

$$1x^2 - 6x + 7x - 3x + 1 - 3 - 5 =$$

$$x^2 + 1x - 3x + 1 - 3 - 5 =$$

$$x^2 - 2x + 1 - 3 - 5 =$$

$$x^2 - 2x - 2 - 5 =$$

$$x^2 - 2x - 7$$

2. Escreva a forma reduzida do polinômio:

$$\frac{1}{2}a + 2b - \frac{2}{3}ab - \frac{1}{4}b + \frac{5}{6}ab + a$$

R: Comece reorganizando:

$$\frac{1}{2}a + a + 2b - \frac{1}{4}b - \frac{2}{3}ab + \frac{5}{6}ab =$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{1} \cdot a + \frac{2}{1} \cdot b - \frac{1}{4}b - \frac{2}{3}ab + \frac{5}{6}ab =$$

Para somar frações, é preciso que estejam com o mesmo denominador. Encontre as frações equivalentes:

$$\frac{1}{2}a + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot a + \frac{2}{1} \cdot b - \frac{1}{4}b - \frac{2}{3}ab + \frac{5}{6}ab =$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{2}{2}a + \frac{2}{1} \cdot b - \frac{1}{4}b - \frac{2}{3}ab + \frac{5}{6}ab =$$

$$\frac{1+2}{2}a + \frac{2}{1} \cdot b - \frac{1}{4}b - \frac{2}{3}ab + \frac{5}{6}ab =$$

$$\frac{3}{2}a + \frac{2}{1} \cdot b - \frac{1}{4}b - \frac{2}{3}ab + \frac{5}{6}ab =$$

$$\frac{3}{2}a + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 4} \cdot b - \frac{1}{4}b - \frac{2}{3}ab + \frac{5}{6}ab =$$

$$\frac{3}{2}a + \frac{8}{4} \cdot b - \frac{1}{4}b - \frac{2}{3}ab + \frac{5}{6}ab =$$

$$\frac{3}{2}a + \frac{8-1}{4} \cdot b - \frac{2}{3}ab + \frac{5}{6}ab =$$

$$\frac{3}{2}a + \frac{7}{4} \cdot b - \frac{2}{3}ab + \frac{5}{6}ab =$$

$$\frac{3}{2}a + \frac{7}{4} \cdot b - \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2}ab + \frac{5}{6}ab =$$

$$\frac{3}{2}a + \frac{7}{4} \cdot b - \frac{4}{6}ab + \frac{5}{6}ab =$$

$$\frac{3}{2}a + \frac{7}{4} \cdot b + \frac{-4+5}{6}ab = \frac{3}{2}a + \frac{7}{4} \cdot b + \frac{1}{6}ab =$$

$$\frac{3}{2}a + \frac{7}{4}b + \frac{1}{6}ab$$

3. Qual é a forma reduzida de cada um dos seguintes polinômios?

a) $7a^2 - (5a^2 - 9a + 2) + (-2a + a^2 - 1)$

$$7a^2 - 5a^2 + 9a - 2 - 2a + a^2 - 1 =$$

$$2a^2 + 9a - 2 - 2a + a^2 - 1 =$$

$$2a^2 + a^2 + 9a - 2a - 2 - 1 =$$

$$3a^2 + 9a - 2a - 2 - 1 =$$

$$3a^2 + 7a - 2 - 1 =$$

$$3a^2 + 7a - 3$$

b) $8ab - (a + 7b - 5) + (-5ab + 2 - b) - (-4a - 2ab + 6b)$

$$8ab - a - 7b + 5 - 5ab + 2 - b + 4a + 2ab - 6b =$$

$$8ab - 5ab + 2ab - a + 4a - 7b - b - 6b + 5 + 2 =$$

$$3ab + 2ab - a + 4a - 7b - b - 6b + 5 + 2 =$$

$$5ab - a + 4a - 7b - b - 6b + 5 + 2 =$$

$$5ab + 3a - 7b - b - 6b + 5 + 2 =$$

$$5ab + 3a - 8b - 6b + 5 + 2 =$$

$$5ab + 3a - 14b + 5 + 2 =$$

$$5ab + 3a - 14b + 7$$

$$\text{c) } 5a + 3b - [5a - (a - 4b) - b]$$

$$5a + 3b - [5a - a + 4b - b] =$$

$$5a + 3b - 5a + a - 4b + b =$$

$$5a - 5a + a + 3b - 4b + b =$$

$$0 + a + 3b - 4b + b =$$

$$a - b + b =$$

$$a + 0 =$$

$$a$$

$$\text{d) } 2x^2 - [2xy + x^2 - (3xy + y^2) + 2y^2] - xy$$

$$2x^2 - [2xy + x^2 - 3xy - y^2 + 2y^2] - xy =$$

$$2x^2 - 2xy - x^2 + 3xy + y^2 - 2y^2 - xy =$$

$$2x^2 - x^2 - 2xy + 3xy - xy + y^2 - 2y^2 =$$

$$x^2 - 2xy + 3xy - xy + y^2 - 2y^2 =$$

$$x^2 + 1xy - xy + y^2 - 2y^2 =$$

$$x^2 + 0 + y^2 - 2y^2 =$$

$$x^2 + y^2 - 2y^2 =$$

$$x^2 - y^2$$

$$\text{e) } 3m + [-5m + n - (-2m + 3n)] + 4m$$

$$3m + [-5m + n + 2m - 3n] + 4m =$$

$$3m + -5m + n + 2m - 3n + 4m =$$

$$3m + -5m + n + 2m - 3n + 4m =$$

$$-2m + n + 2m - 3n + 4m =$$

$$-2m + 2m + 4m + n - 3n =$$

$$0 + 4m + n - 3n =$$

$$4m - 2n$$

$$f) 2x^2 + [-5xy + 2y^2 - (x^2 + 2xy - y^2)] - (4xy - 2y^2)$$

$$2x^2 + [-5xy + 2y^2 - x^2 - 2xy + y^2] - 4xy + 2y^2 =$$

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 - x^2 - 2xy + y^2 - 4xy + 2y^2 =$$

$$2x^2 - x^2 - 5xy - 2xy - 4xy + 2y^2 + y^2 + 2y^2 =$$

$$x^2 - 5xy - 2xy - 4xy + 2y^2 + y^2 + 2y^2 =$$

$$x^2 - 7xy - 4xy + 2y^2 + y^2 + 2y^2 =$$

$$x^2 - 11xy + 2y^2 + y^2 + 2y^2 =$$

$$x^2 - 11xy + 3y^2 + 2y^2 =$$

$$x^2 - 11xy + 5y^2$$

4. Determine:

a) A forma reduzida do polinômio $-3a^2 + 5ab - (-9a^2 - ab + 6b^2) - 14b^2 + (6a^2 + 5ab + 8b^2)$

$$-3a^2 + 5ab + 9a^2 + ab - 6b^2 - 14b^2 + 6a^2 + 5ab + 8b^2 =$$

$$-3a^2 + 9a^2 + 6a^2 + 5ab + ab + 5ab - 6b^2 - 14b^2 + 8b^2 =$$

$$6a^2 + 6a^2 + 5ab + ab + 5ab - 6b^2 - 14b^2 + 8b^2 =$$

$$12a^2 + 5ab + ab + 5ab - 6b^2 - 14b^2 + 8b^2 =$$

$$12a^2 + 6ab + 5ab - 6b^2 - 14b^2 + 8b^2 =$$

$$12a^2 + 11ab - 6b^2 - 14b^2 + 8b^2 =$$

$$12a^2 + 11ab - 20b^2 + 8b^2 =$$

$$12a^2 + 11ab - 12b^2$$

b) O valor numérico quando $a = 0,5$ e $b = 0,2$.

Se sabemos o valor de a e b , basta substituí-los na expressão algébrica:

$$12a^2 + 11ab - 12b^2 =$$

$$12 \cdot a^2 + 11 \cdot a \cdot b - 12 \cdot b^2 =$$

$$12 \cdot (0,5)^2 + 11 \cdot (0,5) \cdot (0,2) - 12 \cdot (0,2)^2 =$$

$$12 \cdot 0,25 + 11 \cdot (0,5) \cdot (0,2) - 12 \cdot (0,2)^2 =$$

$$\begin{aligned}
& 12 \cdot 0,25 + 11 \cdot (0,1) - 12 \cdot (0,2)^2 = \\
& 12 \cdot 0,25 + 11 \cdot (0,1) - 12 \cdot 0,04 = \\
& 3 + 11 \cdot (0,1) - 12 \cdot 0,04 = \\
& 3 + 1,1 - 12 \cdot 0,04 = \\
& 3 + 1,1 - 0,48 = \\
& 4,1 - 0,48 = \\
& 3,62
\end{aligned}$$

Note que 3,62 pode ser escrito como:

$$3,62 = \frac{362}{100} = \frac{362 : 2}{100 : 2} = \frac{181}{50}$$

Assim, o valor numérico quando $a = 0,5$ e $b = 0,2$ é 3,62 ou $\frac{181}{50}$.

Lição 42 - Grau de um polinômio

1. Organize os polinômios abaixo e dê o grau de cada polinômio:

a) $A = 2x + 3x^2 + 1$

$3x^2 + 2x + 1$; grau = 2

b) $B = 4 + x^3 + 2x$

$x^3 + 2x + 4$; grau = 3

c) $C = 2x^2 - 2$

$2x^2 - 2$; grau = 2

d) $D = 7$

7 ; grau = 0

e) $E = 1 + x + x^2 + x^3$

$x^3 + x^2 + x + 1$; grau = 3

f) $F = 4 - 5x^2 + 4x$

$-5x^2 + 4x + 4$; grau = 2

g) $G = x^3 + 3x - 2 + x^2$

$x^3 + x^2 + 3x - 2$; grau = 3

h) $H = 3x^2 - 1 + x^4$

$$x^4 + 3x^2 - 1 ; \text{ grau} = 4$$

Lição 43 – Polinômio com uma variável real

1. Qual é o grau do polinômio $5a^3 - 2a^2x^4 + x^5$?

R: Grau 6.

Quando há duas variáveis em um polinômio, o grau é obtido somando os expoentes do monômio com maior expoente do polinômio.

Neste caso, o monômio com maior expoente é $-2a^2x^4$.

O grau é obtido somando o expoente de a com o expoente de x : $2 + 4 = 6$.

Então, o grau do polinômio é 6.

2. Qual é o grau do polinômio $ax^2 - bx^3 + 2abx$ em relação à variável x?

R: Em relação a x, o grau é 3 (maior expoente).

3. Dado o polinômio $2x + x^3 - 9x^2 - 2$, escreva-o na forma ordenada, segundo as potências decrescentes da variável x.

R: $x^3 - 9x^2 + 2x - 2$

4. O polinômio $x^3 - 1$ é completo ou incompleto? Se for incompleto, escreva-o na forma geral.

R: Ele é incompleto, pois faltam os termos x^2 , x . A forma geral: $x^3 + 0x^2 + 0x - 1$

5. É dado o polinômio $3 - 5x^2 + 7x^4 - x + 5x^5 + 2x^3$, e agora responda:

a) Escreva-o na forma ordenada.

R: $5x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 5x^2 - x + 3$

b) Determine o grau desse polinômio.

R: Grau 5

6. Qual é a forma geral do polinômio $x^5 + 1$?

$x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$

7. Considere o polinômio $x^4 - 10x^2 + 9$ e responda:

a) De que grau é esse polinômio?

R: Grau 4.

b) O polinômio é completo ou incompleto?

R: Incompleto (faltam os termos x^3 e x).

c) Se for incompleto, escreva a forma geral do polinômio.

R: $x^4 + 0x^3 - 10x^2 + 0x + 9$

Lição 44 - Adição algébrica de polinômios

1. Calcule as somas e subtrações dos polinômios abaixo:

a) $(3x + 4) + (6x - 1)$

$$3x + 6x + 4 - 1 =$$

$$9x + 4 - 1 =$$

$$9x + 3$$

b) $3x^2 + 2x - 1 + (-2x^2 + 4x + 2)$

$$3x^2 + 2x - 1 - 2x^2 + 4x + 2 =$$

$$3x^2 - 2x^2 + 2x + 4x - 1 + 2 =$$

$$x^2 + 2x + 4x - 1 + 2 =$$

$$x^2 + 6x - 1 + 2 =$$

$$x^2 + 6x + 1$$

c) $(x^2 - 2x + 1) + (3x^2 + 4x - 2) + (x^2 - 2x + 2)$

$$x^2 - 2x + 1 + 3x^2 + 4x - 2 + x^2 - 2x + 2 =$$

$$x^2 + 3x^2 + x^2 - 2x + 4x - 2x + 1 - 2 + 2 =$$

$$4x^2 + x^2 - 2x + 4x - 2x + 1 - 2 + 2 =$$

$$5x^2 - 2x + 4x - 2x + 1 - 2 + 2 =$$

$$5x^2 + 2x - 2x + 1 - 2 + 2 =$$

$$5x^2 + 0 + 1 - 2 + 2 =$$

$$5x^2 + 1 - 2 + 2 =$$

$$5x^2 - 1 + 2 =$$

$$5x^2 + 1$$

d) $(7x + 5) - (2x + 3)$

$$7x + 5 - 2x - 3 =$$

$$7x - 2x + 5 - 3 =$$

$$5x + 5 - 3 =$$

$$5x + 2$$

$$e) \left(2x^2 + \frac{5x}{2} - 2 \right) - \left(x^2 + 9x + \frac{2}{5} \right)$$

$$2x^2 + \frac{5x}{2} - 2 - x^2 - 9x - \frac{2}{5} =$$

$$2x^2 - x^2 + \frac{5x}{2} - 9x - 2 - \frac{2}{5} =$$

$$x^2 + \frac{5x}{2} - 9x - 2 - \frac{2}{5} =$$

$$x^2 + \frac{5}{2} - \frac{9}{1}x - \frac{2}{1} - \frac{2}{5} =$$

$$x^2 + \frac{5}{2} - \frac{9 \cdot 2}{1 \cdot 2}x - \frac{2}{1} - \frac{2}{5} =$$

$$x^2 + \frac{5}{2} - \frac{18}{2}x - \frac{2}{1} - \frac{2}{5} =$$

$$x^2 + \frac{5-18}{2}x - \frac{2}{1} - \frac{2}{5} =$$

$$x^2 + \frac{-13}{2}x - \frac{2}{1} - \frac{2}{5} =$$

$$x^2 + \frac{-13}{2}x + \frac{-2}{1} - \frac{2}{5} =$$

$$x^2 - \frac{13}{2}x + \frac{-2 \cdot 5}{1 \cdot 5} - \frac{2}{5} =$$

$$x^2 - \frac{13}{2}x + \frac{-10}{5} - \frac{2}{5} =$$

$$x^2 - \frac{13}{2}x + \frac{-10-2}{5} =$$

$$x^2 - \frac{13}{2}x + \frac{-12}{5} =$$

$$x^2 - \frac{13}{2}x - \frac{12}{5}$$

$$f) (2x^2 + 3x - 1) + (3x^2 + 4x + 5) - (x^2 + 3x + 3)$$

$$2x^2 + 3x - 1 + 3x^2 + 4x + 5 - x^2 - 3x - 3 =$$

$$2x^2 + 3x^2 - x^2 + 3x - 3x + 4x - 1 + 5 - 3 =$$

$$5x^2 - x^2 + 3x - 3x + 4x - 1 + 5 - 3 =$$

$$4x^2 + 3x - 3x + 4x - 1 + 5 - 3 =$$

$$4x^2 + 0 + 4x - 1 + 5 - 3 =$$

$$4x^2 + 4x - 1 + 5 - 3 =$$

$$4x^2 + 4x + 4 - 3 =$$

$$4x^2 + 4x + 1$$

2. Bernardo comprou 5 lápis e 2 canetas, enquanto Vinícius comprou 2 lápis e 3 canetas. Cada lápis custou x reais e cada caneta custou y reais. Nessas condições, responda:

a) Que polinômio representa a quantia que Bernardo gastou?

R: A quantia gasta por alguém pode ser representada por:

$$\text{Quantia gasta} = (\text{quantidade de lápis comprados}) \cdot (\text{preço do lápis}) + (\text{quantidade de canetas compradas}) \cdot (\text{preço da caneta})$$

Assim, se Bernardo comprou 5 lápis que custam x reais e 2 canetas que custam y reais, ele gastou:

$$\text{Quantia gasta por Bernardo} = 5 \cdot x + 2 \cdot y$$

$$\text{Quantia gasta por Bernardo} = 5x + 2y$$

b) Que polinômio representa a quantia que Vinícius gastou?

R: A quantia gasta por alguém pode ser representada por:

$$\text{Quantia gasta} = (\text{quantidade de lápis comprados}) \cdot (\text{preço do lápis}) + (\text{quantidade de canetas compradas}) \cdot (\text{preço da caneta})$$

Assim, se Vinícius comprou 2 lápis que custam x reais e 3 canetas que custam y reais, ele gastou:

$$\text{Quantia gasta por Vinícius} = 2 \cdot x + 3 \cdot y$$

$$\text{Quantia gasta por Vinícius} = 2x + 3y$$

c) Que polinômio representa a quantia que os dois gastaram juntos?

R: Basta somar os polinômios obtidos nos itens a e b:

$$\text{Quantia gasta por Bernardo} + \text{Quantia gasta por Vinícius}$$

$$5x + 2y + 2x + 3y =$$

$$5x + 2x + 2y + 3y =$$

$$7x + 5y$$

d) Qual é o valor numérico desse polinômio, quando $x = +4$ e $y = 5$.

R: Se temos os valores de x e y, basta que os substituamos na expressão algébrica:

$$\begin{aligned}7x + 5y &= 7 \cdot x + 5 \cdot y = \\7 \cdot 4 + 5 \cdot 5 &= \\28 + 25 &= \\53 &= \end{aligned}$$

3. QUESTÃO ANULADA. Falta figura.

4. Duas lojas vendem o mesmo aparelho por um mesmo preço, x reais, quando o pagamento é à vista. Para comprar a prazo, esse aparelho tem preços diferentes:

Loja A: entrada de 60% do preço x mais duas prestações de y reais.

Loja B: entrada de 40% do preço x mais três prestações de y reais.

Nessas condições, escreva o polinômio que representa

a) O preço a prazo do aparelho na loja A.

R: 60% de um valor é calculado da seguinte forma: $\frac{60}{100} \cdot (\text{valor})$

Assim, 60% do preço x é: $\frac{60}{100} \cdot x = \frac{60 : 20}{100 : 20} \cdot x = \frac{3}{5} \cdot x = 0,6 \cdot x = 0,6x$

Logo, 60% do preço x mais duas prestações de y reais é: $0,6x + y + y = 0,6x + 2y$

b) O preço a prazo do aparelho na loja B.

R: 40% de um valor é calculado da seguinte forma: $\frac{40}{100} \cdot (\text{valor})$

Assim, 40% do preço x é: $\frac{40}{100} \cdot x = \frac{40 : 20}{100 : 20} \cdot x = \frac{2}{5} \cdot x = 0,4 \cdot x = 0,4x$

Logo, 40% do preço x mais três prestações de y reais é: $0,4x + y + y + y = 0,4x + 3y$

c) A diferença entre os preços a prazo da loja A e da loja B.

R: Basta fazer a diferença entre as expressões algébricas encontradas nos itens a e b:

$$\begin{aligned}0,6x + 2y - (0,4x + 3y) &= \\0,6x + 2y - 0,4x - 3y &= \\0,6x - 0,4x + 2y - 3y &= \\0,2x + 2y - 3y &= \\0,2x - y &= \end{aligned}$$

5. São dados os polinômios:

$$P_1 = a + b + c \quad , \quad P_2 = a - b + c \quad , \quad P_3 = a + b - c$$

Nessas condições, determine:

a) $P_1 + P_2 + P_3$

$$(a + b + c) + (a - b + c) + (a + b - c) = a + b + c + a - b + c + a + b - c =$$

$$a + a + a + b - b + b + c + c - c =$$

$$3a + 0 + b + 2c - c =$$

$$3a + b + 2c - c =$$

$$3a + b + c$$

b) $P_1 + P_2 - P_3$

$$(a + b + c) + (a - b + c) - (a + b - c) =$$

$$a + b + c + a - b + c - a - b + c =$$

$$a + a - a + b - b - b + c + c + c =$$

$$2a - a + b - b - b + c + c + c =$$

$$a + 0 - b + c + c + c =$$

$$a - b + 2c + c =$$

$$a - b + 3c$$

c) $P_1 - P_2 + P_3$

$$(a + b + c) - (a - b + c) + (a + b - c) =$$

$$a + b + c - a + b - c + a + b - c =$$

$$a - a + a + b + b + b + c - c - c =$$

$$0 + a + b + b + b + c - c - c =$$

$$a + 3b + c - c - c =$$

$$a + 3b + 0 - c =$$

$$a + 3b - c$$

d) $P_1 - P_2 - P_3$

$$(a + b + c) - (a - b + c) - (a + b - c) =$$

$$a + b + c - a + b - c - a - b + c =$$

$$a - a - a + b + b - b + c - c + c =$$

$$0 - a + b + b - b + c - c + c =$$

$$-a + 2b - b + c - c + c =$$

$$-a + b + 0 + c =$$

$$-a + b + c$$

Lição 45 – Multiplicando um monômio por um polinômio

1. Encontre os produtos:

$$a) 2(3x + 4) =$$

$$2 \cdot 3x + 2 \cdot 4 =$$

$$6 \cdot x + 8 = 6x + 8$$

$$b) 3(2x^2 - x - 3) =$$

$$3 \cdot 2x^2 - 3 \cdot x - 3 \cdot 3 = 6 \cdot x^2 - 3x - 9 =$$

$$6x^2 - 3x - 9$$

$$c) -2x^2(x^2 - x + 4) =$$

$$-2x^2 \cdot x^2 - 2x^2 \cdot (-x) - 2x^2 \cdot 4 =$$

$$-2x^{2+2} - 2 \cdot (-1) \cdot x^{2+1} - 2 \cdot 4 \cdot x^2 =$$

$$-2x^4 + 2x^3 - 8 \cdot x^2 =$$

$$-2x^4 + 2x^3 - 8x^2$$

$$d) x^2y(2x^2 + xy - y^2) =$$

$$x^2y \cdot 2x^2 + x^2y \cdot xy - x^2y \cdot y^2 =$$

$$2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot y + x^2 \cdot x \cdot y \cdot y - x^2 \cdot y \cdot y^2 =$$

$$2 \cdot x^{2+2} \cdot y + x^2 \cdot x^1 \cdot y^1 \cdot y^1 - x^2 \cdot y^1 \cdot y^2 =$$

$$2 \cdot x^4 \cdot y + x^{2+1} \cdot y^{1+1} - x^2 \cdot y^{1+2} =$$

$$2 \cdot x^4 \cdot y + x^3 \cdot y^2 - x^2 \cdot y^3 =$$

$$2x^4y + x^3y^2 - x^2y^3$$

2. Qual é o polinômio que multiplicado por $5x^2$ dá o produto $10x^5 - 15x^4 + 5x^3 + 25x^2$?

R: Basta dividir $10x^5 - 15x^4 + 5x^3 + 25x^2$ por $5x^2$:

$$\frac{10x^5 - 15x^4 + 5x^3 + 25x^2}{5x^2} = \frac{10x^5}{5x^2} - \frac{15x^4}{5x^2} + \frac{5x^3}{5x^2} + \frac{25x^2}{5x^2} =$$

$$\left(\frac{10}{5}\right) \cdot \left(\frac{x^5}{x^2}\right) - \left(\frac{15}{5}\right) \cdot \left(\frac{x^4}{x^2}\right) + \left(\frac{5}{5}\right) \cdot \left(\frac{x^3}{x^2}\right) + \left(\frac{25}{5}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^2}\right) =$$

$$2 \cdot x^{5-2} - 3 \cdot x^{4-2} + 1 \cdot x^{3-2} + 5 \cdot x^{2-2} =$$

$$2x^3 - 3x^2 + x^1 + 5 \cdot x^0 =$$

$$2x^3 - 3x^2 + x + 5$$

3. Efetue a expressão $a(a - b + c) + b(a + b - c) + c(-a + b + c)$.

R: Comece pelas distributivas:

$$a \cdot a + a \cdot (-b) + a \cdot c + b \cdot a + b \cdot b + b \cdot (-c) + c \cdot (-a) + c \cdot b + c \cdot c =$$

$$a^2 - ab + ac + ab + b^2 - bc - ac + bc + c^2 =$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab + ab + ac - ac + bc - bc =$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 0 + ac - ac + bc - bc = a^2 + b^2 + c^2 + 0 + 0 + bc - bc = a^2 + b^2 + c^2 + 0 + 0 + 0 =$$

$$a^2 + b^2 + c^2$$

Lição 46 - Multiplicando um polinômio por um polinômio

1. Encontre os produtos:

$$a) (2a + 3b) \cdot (5a - b) =$$

$$2a \cdot 5a + 2a \cdot (-b) + 3b \cdot 5a + 3b \cdot (-b) =$$

$$2 \cdot 5 \cdot a \cdot a - 2ab + 3 \cdot 5 \cdot a \cdot b - 3 \cdot b \cdot b =$$

$$10 \cdot a^2 - 2ab + 3 \cdot 5 \cdot a \cdot b - 3 \cdot b \cdot b =$$

$$10 \cdot a^2 - 2ab + 15 \cdot ab - 3 \cdot b^2 =$$

$$10 \cdot a^2 - 2ab + 15ab - 3b^2 =$$

$$10a^2 + 13ab - 3b^2$$

$$b) (x - 3y + 1) \cdot (2x + 2y - 6) =$$

$$x \cdot 2x + x \cdot 2y + x \cdot (-6) - 3y \cdot 2x - 3y \cdot 2y - 3y \cdot (-6) + 1 \cdot 2x + 1 \cdot 2y + 1 \cdot (-6) =$$

$$2 \cdot x \cdot x + 2xy - 6x - 3 \cdot 2x \cdot y - 3 \cdot 2 \cdot y \cdot y - 3 \cdot (-6) \cdot y + 2x + 2y - 6 =$$

$$2x^2 + 2xy - 6x - 6xy - 6y^2 + 18y + 2x + 2y - 6 =$$

$$2x^2 + 2xy - 6xy - 6x + 2x + 18y + 2y - 6y^2 - 6 =$$

$$2x^2 - 4xy - 6x + 2x + 18y + 2y - 6y^2 - 6 =$$

$$2x^2 - 4xy - 4x + 18y + 2y - 6y^2 - 6 =$$

$$2x^2 - 4xy - 4x + 20y - 6y^2 - 6$$

2. Efetue:

$$a) (x-2)(16+8x+4x^2+2x^3+x^4)+32$$

$$x \cdot 16 + x \cdot 8x + x \cdot 4x^2 + x \cdot 2x^3 + x \cdot x^4 - 2 \cdot 16 - 2 \cdot 8x - 2 \cdot 4x^2 - 2 \cdot 2x^3 - 2 \cdot x^4 + 32 =$$

$$16x + 8x^2 + 4x^2 \cdot x^1 + 2x^3 \cdot x^1 + x^1 \cdot x^4 - 32 - 16x - 8x^2 - 4x^3 - 2x^4 + 32 =$$

$$16x + 8x^2 + 4x^3 + 2x^4 + x^5 - 32 - 16x - 8x^2 - 4x^3 - 2x^4 + 32 =$$

$$x^5 + 2x^4 - 2x^4 + 4x^3 - 4x^3 + 8x^2 - 8x^2 + 16x - 16x + 32 - 32 =$$

$$x^5 + 0 + 4x^3 - 4x^3 + 8x^2 - 8x^2 + 16x - 16x + 32 - 32 = x^5 + 0 + 0 + 8x^2 - 8x^2 + 16x - 16x + 32 - 32 =$$

$$x^5 + 0 + 0 + 0 + 16x - 16x + 32 - 32 = x^5 + 0 + 0 + 0 + 0 + 32 - 32 = x^5 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 =$$

$$x^5$$

$$b) (1-x) \cdot (1+x+x^2) \cdot (1+x^3+x^6) =$$

$$(1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 - x \cdot 1 - x \cdot x - x \cdot x^2) \cdot (1+x^3+x^6) =$$

$$(1+x+x^2-x-x^2-x^3) \cdot (1+x^3+x^6) =$$

$$(1+x-x+x^2-x^2-x^3) \cdot (1+x^3+x^6) =$$

$$(1+0+x^2-x^2-x^3) \cdot (1+x^3+x^6) =$$

$$(1+0+0-x^3) \cdot (1+x^3+x^6) = (1-x^3) \cdot (1+x^3+x^6) =$$

$$(1-x^3) \cdot (1+x^3+x^6) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^6 - x^3 \cdot 1 - x^3 \cdot x^3 - x^3 \cdot x^6 =$$

$$1+x^3+x^6-x^3-x^{3+3}-x^{3+6} =$$

$$1+x^3+x^6-x^3-x^6-x^9 = 1+x^3-x^3+x^6-x^6+x^9 =$$

$$1+0+x^6-x^6+x^9 =$$

$$1+0+0+x^9 =$$

$$1-x^9$$

3. Dados $A = 2x + 3$, $B = 3x - 1$ e $C = x^2 + 4$, calcule as expressões a seguir, lembrando que as multiplicações devem ser efetuadas antes das adições e subtrações.

a) $3A + 2B$

$$3 \cdot (A) + 2 \cdot (B) = 3 \cdot (2x + 3) + 2 \cdot (3x - 1) =$$

$$3 \cdot 2x + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3x + 2 \cdot (-1) =$$

$$6x + 9 + 6x - 2 =$$

$$6x + 6x + 9 - 2 =$$

$$12x + 7$$

b) $AB + C$

$$(2x + 3) \cdot (3x - 1) + (x^2 + 4) =$$

$$2x \cdot 3x + 2x \cdot (-1) + 3 \cdot 3x + 3 \cdot (-1) + (x^2 + 4) =$$

$$2 \cdot 3 \cdot x \cdot x - 2x + 9x - 3 + (x^2 + 4) =$$

$$6x^2 - 2x + 9x - 3 + (x^2 + 4) =$$

$$6x^2 + 7x - 3 + (x^2 + 4) =$$

$$6x^2 + 7x - 3 + x^2 + 4 =$$

$$6x^2 + x^2 + 7x - 3 + 4 =$$

$$7x^2 + 7x + 1$$

c) $5C - 2AB$

$$5 \cdot (C) - [2 \cdot (A) \cdot (B)] =$$

$$5 \cdot (x^2 + 4) - [2 \cdot (2x + 3) \cdot (3x - 1)] =$$

$$5 \cdot x^2 + 5 \cdot 4 - [2 \cdot (2x + 3) \cdot (3x - 1)] =$$

$$5x^2 + 20 - [2 \cdot (2x + 3) \cdot (3x - 1)] =$$

$$5x^2 + 20 - [(2 \cdot 2x + 2 \cdot 3) \cdot (3x - 1)] =$$

$$5x^2 + 20 - [(4x + 6) \cdot (3x - 1)] =$$

$$5x^2 + 20 - [4x \cdot 3x + 4x \cdot (-1) + 6 \cdot 3x + 6 \cdot (-1)] =$$

$$5x^2 + 20 - [4 \cdot 3 \cdot x \cdot x - 4x + 18x - 6] =$$

$$5x^2 + 20 - [12x^2 - 4x + 18x - 6] =$$

$$5x^2 + 20 - [12x^2 + 14x - 6] =$$

$$5x^2 + 20 - 12x^2 - 14x + 6 =$$

$$5x^2 - 12x^2 - 14x + 6 + 20 =$$

$$-7x^2 - 14x + 6 + 20 =$$

$$-7x^2 - 14x + 26$$

4. As dimensões de um paralelepípedo retângulo são $3x$, y e $(x + y)$ unidades de comprimento. Qual é o volume desse paralelepípedo retângulo? (Lembre-se de que o volume do paralelepípedo é dado pelo produto das medidas das três dimensões).

R: Sabemos que o volume é:

$$\text{Volume} = (\text{dimensão 1}) \cdot (\text{dimensão 2}) \cdot (\text{dimensão 3})$$

As dimensões são $3x$, y e $(x + y)$. Logo, o volume é:

$$\text{Volume} = 3x \cdot y \cdot (x + y)$$

$$\text{Volume} = 3xy \cdot (x + y)$$

$$\text{Volume} = 3xy \cdot x + 3xy \cdot y$$

$$\text{Volume} = 3 \cdot x \cdot x \cdot y + 3 \cdot x \cdot y \cdot y$$

$$\text{Volume} = 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2$$

$$\text{Volume} = 3x^2y + 3xy^2$$

5. Determine o polinômio que representa a área da figura abaixo, cujas medidas estão nela indicadas.

QUESTÃO ANULADA. Falta figura.

6. Vamos calcular:

$$\text{a) } (2x + 1) \cdot (-6x^2 - 5x + 3) =$$

$$2x \cdot (-6x^2) + 2x \cdot (-5x) + 2x \cdot 3 + 1 \cdot (-6x^2) + 1 \cdot (-5x) + 1 \cdot 3 =$$

$$2 \cdot (-6) \cdot x \cdot x^2 + 2 \cdot (-5) \cdot x \cdot x + 6x - 6x^2 - 5x + 3 =$$

$$-12x^3 - 10x^2 + 6x - 6x^2 - 5x + 3 =$$

$$-12x^3 - 10x^2 - 6x^2 + 6x - 5x + 3 =$$

$$-12x^3 - 16x^2 + 6x - 5x + 3 =$$

$$-12x^3 - 16x^2 + x + 3$$

$$\text{b) } (a^2 - 1) \cdot (2a^2 - 2a + 1)$$

$$a^2 \cdot 2a^2 + a^2 \cdot (-2a) + a^2 \cdot 1 - 1 \cdot 2a^2 - 1 \cdot (-2a) - 1 \cdot 1 =$$

$$2a^4 + a^2 \cdot (-2a) + a^2 \cdot 1 - 1 \cdot 2a^2 - 1 \cdot (-2a) - 1 \cdot 1 =$$

$$2a^4 - 2a^3 + a^2 - 2a^2 + 2a - 1 =$$

$$2a^4 - 2a^3 - a^2 + 2a - 1$$

$$\text{c) } (a + x) \cdot (a^2 - ax + x^2)$$

$$a \cdot a^2 + a \cdot (-ax) + a \cdot x^2 + x \cdot a^2 + x \cdot (-ax) + x \cdot x^2 =$$

$$a^3 - a^2x + ax^2 + a^2x - ax^2 + x^3 =$$

$$a^3 - a^2x + a^2x + ax^2 - ax^2 + x^3 =$$

$$a^3 + 0 + ax^2 - ax^2 + x^3 =$$

$$a^3 + 0 + 0 + x^3 =$$

$$a^3 + x^3$$

$$\text{d) } (9a^2 + 6ab + 4b^2)(3a - 2b)$$

$$9a^2 \cdot 3a + 9a^2 \cdot (-2b) + 6ab \cdot 3a + 6ab \cdot (-2b) + 4b^2 \cdot 3a + 4b^2 \cdot (-2b) =$$

$$9 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot a + 9 \cdot (-2) a^2 \cdot b + 6 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b + 6 \cdot (-2) \cdot a \cdot b \cdot b + 4 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2 + 4 \cdot (-2) \cdot b \cdot b =$$

$$27a^3 - 18a^2b + 18a^2b - 12ab^2 + 12ab^2 - 8b^2 =$$

$$27a^3 + 0 - 12ab^2 + 12ab^2 - 8b^2 =$$

$$27a^3 + 0 + 0 - 8b^2 =$$

$$27a^3 - 8b^2$$

$$\text{e) } (m - n)(m - n - mn)$$

$$m \cdot m + m \cdot (-n) + m \cdot (-mn) - n \cdot m - n \cdot (-n) - n \cdot (-mn) =$$

$$m^2 - mn - m^2n - mn + n^2 + m \cdot n \cdot n =$$

$$m^2 - mn - m^2n - mn + n^2 + mn^2 =$$

$$m^2 - mn - mn - m^2n + n^2 + mn^2 =$$

$$m^2 - 2mn - m^2n + n^2 + mn^2$$

$$\text{f) } (a^3 + a^2 - a - 1) \cdot (a^2 + a)$$

$$a^3 \cdot a^2 + a^3 \cdot a + a^2 \cdot a^2 + a^2 \cdot a - a \cdot a^2 - a \cdot a - 1 \cdot a^2 - 1 \cdot a =$$

$$a^{3+2} + a^3 \cdot a^1 + a^{2+2} + a^2 \cdot a^1 - a^1 \cdot a^2 - a^2 - a^2 - a =$$

$$a^5 + a^{3+1} + a^4 + a^{2+1} - a^{1+2} - a^2 - a^2 - a =$$

$$a^5 + a^4 + a^4 + a^3 - a^3 - a^2 - a^2 - a =$$

$$a^5 + 2a^4 + a^3 - a^3 - a^2 - a^2 - a =$$

$$a^5 + 2a^4 + 0 - a^2 - a^2 - a =$$

$$a^5 + 2a^4 - 2a^2 - a$$

$$g) (2x^2 - 3x + 2)(x - 3)$$

$$2x^2 \cdot x + 2x^2 \cdot (-3) - 3x \cdot x - 3x \cdot (-3) + 2 \cdot x + 2 \cdot (-3) =$$

$$2x^2 \cdot x^1 + 2 \cdot (-3) \cdot x^2 - 3x^2 - 3 \cdot (-3) \cdot x + 2x - 6 =$$

$$2x^{2+1} - 6 \cdot x^2 - 3x^2 + 9 \cdot x + 2x - 6 =$$

$$2x^3 - 6x^2 - 3x^2 + 9x + 2x - 6 =$$

$$2x^3 - 9x^2 + 9x + 2x - 6 =$$

$$2x^3 - 9x^2 + 11x - 6$$

$$h) (4a^2 - 3ay + 2y^2) \cdot (2a - y)$$

$$4a^2 \cdot 2a + 4a^2 \cdot (-y) - 3ay \cdot 2a - 3ay \cdot (-y) + 2y^2 \cdot 2a + 2y^2 \cdot (-y) =$$

$$4 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a - 4a^2y - 3 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot y - 3 \cdot (-1)a \cdot y \cdot y + 2 \cdot 2 \cdot a \cdot y^2 - 2 \cdot y^2 \cdot y =$$

$$8 \cdot a^3 - 4a^2y - 6 \cdot a^2 \cdot y + 3 \cdot a \cdot y^2 + 4 \cdot a \cdot y^2 - 2 \cdot y^3 =$$

$$8a^3 - 4a^2y - 6a^2y + 3ay^2 + 4ay^2 - 2y^3 =$$

$$8a^3 - 10a^2y + 3ay^2 + 4ay^2 - 2y^3 =$$

$$8a^3 - 10a^2y + 7ay^2 - 2y^3$$

Lição 47 - Dividindo um polinômio por um monômio

1. Encontre os quocientes:

$$a) 81x^3 : 27x$$

$$(81 : 27) \cdot (x^3 : x) =$$

$$3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$$

$$\text{b) } -63a^2b^2 : 9ab^3$$

$$(-63 : 9) \cdot (a^2 : a) \cdot (b^2 : b^3) =$$

$$-7 \cdot a^{2-1} \cdot b^{2-3} =$$

$$-7 \cdot a^1 \cdot b^{-1} =$$

$$-\frac{7a}{b}$$

$$\text{c) } \frac{32x^2b^5}{8xy^3}$$

$$\frac{32}{8} \cdot \frac{x^2}{x} \cdot b^5 \cdot \frac{1}{y^3} =$$

$$4 \cdot x^{2-1} \cdot b^5 \cdot \frac{1}{y^3} =$$

$$4 \cdot x^1 \cdot b^5 \cdot \frac{1}{y^3} =$$

$$4xb^5 \cdot \frac{1}{y^3} =$$

$$\frac{4xb^5}{y^3}$$

$$\text{d) } \frac{x^4 + 2x^3}{x^2}$$

$$\frac{x^4}{x^2} + \frac{2x^3}{x^2} =$$

$$x^{4-2} + 2 \cdot x^{3-2} =$$

$$x^2 + 2 \cdot x^1 =$$

$$x^2 + 2x$$

$$\text{e) } \frac{4a^4 - 2a^3 + 8a}{2a}$$

$$\frac{4a^4}{2a} - \frac{2a^3}{2a} + \frac{8a}{2a} =$$

$$\frac{4}{2} \cdot \frac{a^4}{a^1} - \frac{2}{2} \cdot \frac{a^3}{a^1} + \frac{8}{2} \cdot \frac{a}{a} =$$

$$2 \cdot a^{4-1} - \frac{2}{2} \cdot \frac{a^3}{a^1} + \frac{8}{2} \cdot \frac{a}{a} =$$

$$2 \cdot a^{4-1} - 1 \cdot a^{3-1} + 4 \cdot 1 =$$

$$2 \cdot a^3 - 1 \cdot a^2 + 4 =$$

$$2a^3 - a^2 + 4$$

2. Divida $P(x)$ e $Q(x)$, e indique o quociente e o resto:

Esse exercício exigia conhecimentos da lição seguinte. Pode ser realizada depois do término do estudo da próxima lição.

a) $P(x) = 8x^2 + 6x + 5$ e $Q(x) = 2x + 1$

$$\begin{array}{r}
 8x^2 + 6x + 5 \\
 - 8x^2 - 4x \\
 \hline
 0 + 2x + 5 \\
 - 2x - 1 \\
 \hline
 0 + 4 = 4
 \end{array}$$

$8x^2 : 2x = 4x$
 $2x : 2x = 1$

Quociente: $4x + 1$

Resto: 4

b) $P(x) = 12x^3 + 10x^2 - 1$ e $Q(x) = 6x^2 + 2x - 2$

$$\begin{array}{r}
 12x^3 + 10x^2 - 1 \\
 - 12x^3 - 4x^2 + 4x \\
 \hline
 0 + 6x^2 + 4x - 1 \\
 - 6x^2 - 2x + 2 \\
 \hline
 0 + 2x + 1 = 2x + 1
 \end{array}$$

$12x^3 : 6x^2 = 2x$
 $6x^2 : 6x^2 = 1$

Quociente: $2x + 1$

Resto: $2x + 1$

c) $P(x) = x^3 + 1$ e $Q(x) = x^2 - x + 1$

Quociente: $x + 1$

Resto: 0

A conta se encontra na próxima página.

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 1 \\
 \underline{-x^3 + x^2 - x} \\
 0 + x^2 - x + 1 \\
 \underline{-x^2 + x - 1} \\
 0 + 0 + 0 = 0
 \end{array}$$

3. Qual o polinômio que, dividido por $B = 3x^2 + 4x - 1$, dá quociente $Q = x + 1$ e resto $R = -3x + 1$?

R: Para qualquer divisão, o dividendo vale: *divisor $\times$ quociente + resto*.

O divisor é: $3x^2 + 4x - 1$

O quociente é: $x + 1$

O resto é: $-3x + 1$

Então:

Dividendo = divisor $\cdot$ quociente + resto

Dividendo = $(3x^2 + 4x - 1) \cdot (x + 1) + (-3x + 1)$

Dividendo = $3x^3 + 3x^2 + 4x^2 + 4x - x - 1 - 3x + 1$

Dividendo = $3x^3 + 7x^2 + 3x - 3x - 1 + 1$

Dividendo = $3x^3 + 7x^2 + 0 + 0$

Dividendo = $3x^3 + 7x^2$

4. O polinômio $2x^4 - x^3 - 2x - 1$ é divisível por $x^3 - 1$? Por quê?

R: Sim, pois o grau do dividendo é maior que o grau do divisor.

Lição 48 - Dividindo um polinômio por um polinômio

1. Divida o polinômio $6x^2 + 13x - 5$ por $3x - 1$ e determine o valor numérico do quociente quando $x = -\frac{1}{2}$.

R: O quociente é $2x + 5$ e o resto é 0 (zero).

A conta se encontra na próxima página.

$$\begin{array}{r}
 6x^2 + 13x - 5 \\
 \underline{-6x^2 + 2x} \\
 0 + 15x - 5 \\
 \underline{-15x + 5} \\
 0 + 0 = 0
 \end{array}$$

Diagram illustrating the division of $6x^2 + 13x - 5$ by $3x - 1$. The quotient is $2x + 5$ and the remainder is 0. The steps shown are:

- $6x^2 : 3x = 2x$
- $15x : 3x = 5$

O valor numérico do quociente quando $x = \frac{-1}{2}$ é 4, pois:

$$\text{Quociente} = 2x + 5 = 2 \cdot \frac{-1}{2} + 5 = \frac{2}{1} \cdot \frac{-1}{2} + 5 = \frac{2 \cdot -1}{1 \cdot 2} + 5 = \frac{-2}{2} + 5 = -1 + 5 = 4$$

2. Qual é o quociente de $12x^2 + 5x - 2$ por $3x + 2$?

R: O quociente é $4x - 1$ e o resto é 0 (zero).

$$\begin{array}{r}
 12x^2 + 5x - 2 \\
 \underline{-12x^2 - 8x} \\
 0 - 3x - 2 \\
 \underline{+ 3x + 2} \\
 0 + 0 = 0
 \end{array}$$

Diagram illustrating the division of $12x^2 + 5x - 2$ by $3x + 2$. The quotient is $4x - 1$ and the remainder is 0. The steps shown are:

- $12x^2 : 3x = 4x$
- $-3x : 3x = -1$

3. A área de um retângulo é expressa pelo polinômio $12x^2 - x - 1$, e a medida do comprimento desse retângulo é expressa pelo polinômio $4x + 1$. Se dividir a área pela medida do comprimento, você obtém a medida da largura do retângulo. Qual é o polinômio que expressa a largura desse retângulo?

R: Como o próprio enunciado diz, para encontrar a medida da largura do retângulo basta dividir $12x^2 - x - 1$ por $4x + 1$:

$$\begin{array}{r}
 12x^2 - x - 1 \\
 \underline{-12x^2 - 3x} \\
 0 - 4x - 1 \\
 \underline{+ 4x + 1} \\
 0 + 0 = 0
 \end{array}$$

Diagram illustrating the division of $12x^2 - x - 1$ by $4x + 1$. The quotient is $3x - 1$ and the remainder is 0. The steps shown are:

- $12x^2 : 4x = 3x$
- $-4x : 4x = -1$

Logo, a medida da largura do retângulo é $3x - 1$.

4. Dividindo o polinômio $2x^4 - 9x^3 - 6x^2 + 16x - 3$ por $2x^2 + x - 3$, você obtém um polinômio P. Determine P e seu valor numérico quando $x = 5$.

$$\begin{array}{r}
 2x^4 - 9x^3 - 6x^2 + 16x - 3 \\
 \underline{-2x^4 - x^3 + 3x^2} \\
 0 - 10x^3 - 3x^2 + 16x - 3 \\
 \underline{+10x^3 + 5x^2 - 15x} \\
 0 + 2x^2 + x - 3 \\
 \underline{-2x^2 - x + 3} \\
 0 + 0 + 0 = 0
 \end{array}$$

$2x^4 : 2x^2 = x^2$
 $-10x^3 : 2x^2 = -5x$
 $2x^2 : 2x^2 = +1$

O polinômio P é: $P = x^2 - 5x + 1$.

Quando $x = 5$, o valor numérico de P é:

$$P = x^2 - 5x + 1$$

$$P = (5)^2 - 5 \cdot 5 + 1$$

$$P = 25 - 25 + 1$$

$$P = 0 + 1$$

$$P = 1$$

Logo, quando $x = 5$, o polinômio P vale 1.

5. Vamos determinar o quociente e o resto da divisão de:

a) $x^3 - 3x^2 - x + 6$ por $x - 2$

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 - x + 6 \\
 \underline{-x^3 + 2x^2} \\
 0 - x^2 - x + 6 \\
 \underline{+x^2 - 2x} \\
 0 - 3x + 6 \\
 \underline{+3x - 6} \\
 0 + 0 = 0
 \end{array}$$

$x^3 : x = x^2$
 $-x^2 : x = -x$
 $-3x : x = -3$

Logo, o quociente = $x^2 - x - 3$ e o resto = 0.

b) $2x^2 + 7x - 15$ por $x + 5$

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + 7x - 15 \\
 \underline{-2x^2 - 10x} \\
 0 - 3x - 15 \\
 \underline{+3x + 15} \\
 0 + 0 = 0
 \end{array}$$

Diagram illustrating the division process for $2x^2 + 7x - 15$ by $x + 5$. The quotient is $2x - 3$ and the remainder is 0.

Logo, o quociente = $2x - 3$ e o resto = 0.

c) $x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ por $x^2 + x - 2$

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 2x^2 - 3x - 5 \\
 \underline{-x^3 - x^2 + 2x} \\
 0 + x^2 - x - 5 \\
 \underline{-x^2 - x + 2} \\
 0 - 2x - 3 = \\
 -2x - 3
 \end{array}$$

Diagram illustrating the division process for $x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ by $x^2 + x - 2$. The quotient is $x + 1$ and the remainder is $-2x - 3$.

Logo, o quociente = $x + 1$ e o resto = $-2x - 3$.

d) $x^3 - 1$ por $x - 1$

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 1 \\
 \underline{-x^3 + x^2} \\
 0 + x^2 - 1 \\
 \underline{-x^2 + x} \\
 0 + x - 1 \\
 \underline{-x + 1} \\
 0 + 0 = 0
 \end{array}$$

Diagram illustrating the division process for $x^3 - 1$ by $x - 1$. The quotient is $x^2 + x + 1$ and the remainder is 0.

Logo, o quociente = $x^2 + x + 1$ e o resto = 0.

e) $6x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ por $3x^3 - 2x - 1$

$$\begin{array}{r}
 6x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 4x^2 + 5x + 3 \\
 \underline{-6x^5 + 4x^3 + 2x^2} \\
 0 + 3x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 5x + 3 \\
 \underline{-3x^4 + 2x^2 + x} \\
 0 - 9x^3 + 0 + 6x + 3 \\
 \underline{+9x^3 - 6x - 3} \\
 0 + 0 = 0
 \end{array}$$

$3x^3 - 2x - 1$
 $2x^2 + x - 3$
 $6x^5 : 3x^3 = 2x^2$
 $3x^4 : 3x^3 = x$
 $-9x^3 : 3x^3 = -3$

Logo, o quociente = $2x^2 + x - 3$ e o resto = 0.

Gabarito de Matemática

8º ano, Volume 4

Lição 49 – Quadrado da soma de dois termos

1. Calcule os produtos notáveis.

a) $(x + 1)^2$

R: $x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1$

b) $(x + 6)^2$

R: $x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 \Rightarrow x^2 + 12x + 36$

c) $(a + 10)^2$

R: $a^2 + 2 \cdot a \cdot 10 + 10^2 \Rightarrow a^2 + 20a + 100$

d) $(y + 4)^2$

R: $y^2 + 2 \cdot y \cdot 4 + 4^2 \Rightarrow y^2 + 8y + 16$

e) $(3x + 1)^2$

R: $(3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1$

f) $(2a + 5)^2$

R: $(2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 5 + 5^2 \Rightarrow 4a^2 + 20a + 25$

g) $(a + 2b)^2$

R: $a^2 + 2 \cdot a \cdot 2b + (2b)^2 \Rightarrow a^2 + 4ab + 4b^2$

h) $(x^2 + 4)^2$

R: $(x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 4 + 4^2 \Rightarrow x^4 + 8x^2 + 16$

i) $(a^2 + 1)^2$

R: $(a^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot 1 + 1^2 \Rightarrow a^4 + 2a^2 + 1$

j) $(5a + 3b)^2$

R: $(5a)^2 + 2 \cdot 5a \cdot 3b + (3b)^2 \Rightarrow 25a^2 + 30ab + 9b^2$

2. Observe o exemplo:

$$\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4x + 4}$$

Agora calcule:

a) $\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2$

R: $\frac{(3x+1)^2}{(x+2)^2} = \frac{9x^2 + 6x + 1}{x^2 + 4x + 4}$

b) $\left(\frac{a}{2a+2}\right)^2$

R: $\frac{(a)^2}{(2a+2)^2} = \frac{a^2}{4a^2 + 8a + 4}$

c) $\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2$

R: $\frac{(x^2+1)^2}{(x)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2}$

3. Responda: certo ou errado?

a) $(x + a)^2 = x^2 + a^2$

R: Errado

b) $(x + a)^2 = x^2 + a^2 + 2ax$

R: Certo

c) $p^2 + q^2 = (p + q)^2$

R: Errado

d) $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4$

R: Errado

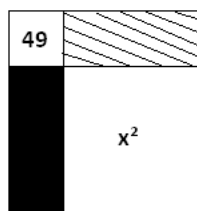
e) $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

R: Certo

4. Sabe-se que $x^2 + y^2 = 20$ e $xy = 3$. Qual é o valor de $(x + y)^2$?

R: Sabendo que $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, podemos escrever como $x^2 + y^2 + 2xy$. Assim, $(x + y)^2 = 20 + 2 \cdot 3 = 26$

5. Observe que, na figura, a área de um quadrado é x^2 e a área do outro quadrado é 49:



a) Qual é a área do retângulo hachurado (riscado)?

R: Sabendo que o lado do quadrado de área 49 e o de área x^2 são, respectivamente 7 e x , a área do retângulo hachurado é $7x$.

b) Qual é a área do retângulo colorido (preto)?

R: Assim como no item anterior, a área do retângulo colorido é $7x$.

c) Qual é a área total da figura?

R: Como a lateral do quadrado menor e dos retângulos mede 7, a área total do quadrado é $(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$.

Lição 50 – Quadrado da diferença de dois termos

1. Se $A = 5x^2 - 2$, determine o valor de $A^2 - 3A + 1$

R: $(5x^2 - 2)^2 - 3(5x^2 - 2) + 1 = 25x^4 - 20x^2 + 4 - 15x^2 + 6 + 1 = 25x^4 - 35x^2 + 11$

2. A diferença entre o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois números reais é igual:

a) à diferença dos quadrados dos dois números;

b) à soma dos quadrados dos dois números;

c) à diferença dos dois números;

d) ao dobro do produto dos números;

e) ao quádruplo do produto dos números.

3. Sabendo que $x^2 + y^2 = 153$ e que $xy = 36$, calcule o valor de $(x+y)^2$.

R: Sabendo que $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, podemos escrever como $x^2 + y^2 + 2xy$. Assim, $(x + y)^2 = 153 + 2 \cdot 36 = 225$

4. Qual é o valor numérico da expressão $(a - 2b)^2$, sabendo-se que $a^2 + 4b^2 = 30$ e $ab = 5$?

R: Sabendo que $(a - 2b)^2 = a^2 - 4ab + 4b^2$, podemos escrever como $a^2 + 4b^2 - 4ab$. Assim, $(a - 2b)^2 = 30 - 2 \cdot 5 = 20$.

5. Veja o seguinte exemplo para calcular o quadrado de um número:

$$42^2 = (40 + 2)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2 = 1600 + 160 + 4 = 1764$$

Calcule os quadrados dos números abaixo utilizando o mesmo método.

a) 13

$$\text{R: } 13^2 = (10 + 3)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 3 + 3^2 = 100 + 60 + 9 = 169$$

b) 19

$$\text{R: } 19^2 = (20 - 1)^2 = 10^2 - 2 \cdot 20 \cdot -1 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361$$

c) 23

$$\text{R: } 23^2 = (20 + 3)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2 = 400 + 120 + 9 = 529$$

d) 42

$$\text{R: } 42^2 = (40 + 2)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2 = 1600 + 160 + 4 = 1764$$

Lição 51 – Produto da soma pela diferença

1. Desenvolva:

a) $(x - a)^2$

$$\text{R: } x^2 - 2 \cdot x \cdot a + a^2 \Rightarrow x^2 - 2xa + a^2$$

b) $(x - 10)^2$

$$\text{R: } x^2 - 2 \cdot x \cdot 10 + 10^2 \Rightarrow x^2 - 20x + 100$$

c) $(4x - 1)^2$

$$\text{R: } (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 1 + 1^2 \Rightarrow 16x^2 - 8x + 1^2$$

d) $(5a - 3b)^2$

$$\text{R: } (5a)^2 - 2 \cdot 5a \cdot 3b + (3b)^2 \Rightarrow 25a^2 - 30ab + 9b^2$$

e) $(3a - 2b)^2$

$$\text{R: } (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 2b + (2b)^2 \Rightarrow 9a^2 - 12ab + 4b^2$$

2. Calcule:

a) $(x + 1)(x - 1)$

$$\text{R: } x^2 - 1^2 = x^2 - 1$$

b) $(a + 5)(a - 5)$

$$\text{R: } a^2 - 5^2 = a^2 - 25$$

$$\text{c) } (3b + 7)(3b - 7)$$

$$\text{R: } (3b)^2 - 7^2 = 9b^2 - 49$$

$$\text{d) } (3x - 2y)(3x + 2y)$$

$$\text{R: } (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2$$

3. Calcule mentalmente utilizando o produto notável da soma pela diferença:

$$\text{a) } 52 \cdot 48$$

$$\text{R: } (50 + 2)(50 - 2) = 50^2 - 2^2 = 2.496$$

$$\text{b) } 57 \cdot 63$$

$$\text{R: } (60 + 3)(60 - 3) = 60^2 - 3^2 = 3.591$$

$$\text{c) } 91 \cdot 89$$

$$\text{R: } (90 + 1)(90 - 1) = 90^2 - 1^2 = 8.099$$

$$\text{d) } 210 \cdot 190$$

$$\text{R: } (200 + 10)(200 - 10) = 200^2 - 10^2 = 39.900$$

$$\text{e) } 301 \cdot 299$$

$$\text{R: } (300 + 1)(300 - 1) = 300^2 - 1^2 = 89.999$$

4. Calcule, usando as regras dos produtos notáveis:

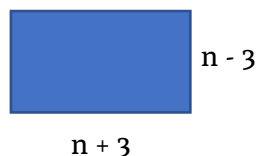
$$\text{a) } (x + 1)^2 + (x - 1)^2 + 2(x + 1)(x - 1)$$

$$\text{R: } x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 + 2x^2 - 2 \Rightarrow 4x^2$$

$$\text{b) } (x + 3)(x - 3) - (x + 2)(x - 2)$$

$$\text{R: } x^2 - 9 - x^2 + 4 \Rightarrow -5$$

5. A área do retângulo abaixo é 216



a) Calcule o valor de n.

$$\text{R: } (n + 3)(n - 3) = 216 \Rightarrow n^2 - 9 = 216 \Rightarrow n^2 = 225 \Rightarrow n = 15.$$

b) Quanto mede o lado maior.

$$\text{R: } n + 3 = 15 + 3 = 18$$

6. Calcule um número par n , positivo, sabendo que o produto de seus dois vizinhos ímpares é 255.

$$\text{R: } (n+1)(n-1) = 255 \Rightarrow n^2 - 1 = 255 \Rightarrow n^2 = 256 \Rightarrow n = 16$$

7. Associe cada igualdade a uma das afirmações, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes.

I. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

II. $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

III. $(x+y) \cdot (x-y) = x^2 - y^2$

(II) O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo, menos duas vezes o 1º termo vezes o 2º, mais o quadrado do 2º termo.

(I) O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo, mais duas vezes o 1º termo vezes o 2º termo, mais o quadrado do 2º termo.

(III) O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo menos o quadrado do 2º termo.

8. Se $x+y=8$ e $xy=15$, qual é o valor de $x^2+6xy+y^2$?

$$\text{R: } x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy. \text{ Assim, } x^2 + 6xy + y^2 = (x+y)^2 - 2xy + 6xy \Rightarrow 8^2 + 4 \cdot 15 = 64 + 60 = 124.$$

9. Desenvolva, utilizando as regras para produtos notáveis, as contas abaixo:

a) $(x+2)^2$

$$\text{R: } x^2 + 4x + 4$$

b) $(3x+1)^2$

$$\text{R: } 9x^2 + 6x + 1$$

c) $(x-3)^2$

$$\text{R: } x^2 - 6x + 9$$

d) $(5x-2y)^2$

$$\text{R: } 25x^2 - 20xy + 4y^2$$

e) $(x+1) \cdot (x-1)$

$$\text{R: } x^2 - 1$$

f) $\left(\frac{x^2 \cdot y^3}{z} - \frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{x^2 \cdot y^3}{z} + \frac{5}{6}\right)$

$$\text{R: } \frac{x^4 y^6}{z^2} - \frac{25}{36}$$

g) $(5x^3 + 2) \cdot (2 - 5x^3)$

R: $-25x^6 + 4$

h) $(11a^2b^3 + 7)^2$

R: $121a^4b^6 + 154a^2b^3 + 49$

i) $(X^{2m} - x^{3m})^2$

R: $X^{4m} - 2X^{2m}x^{3m} + x^{6m}$

j) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + y)$

R: $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$

Lição 52 – Fatoração por evidência

1. Coloque em evidência o fator comum e fatore:

a) $mx + nx - px$

R: $x(m + n - p)$

b) $20x^2 + 25x$

R: $5x(4x + 5)$

c) $4m^3 - 6m^2$

R: $2m^2(2m - 3)$

d) $a^3b^2c^2 + a^2b^3c^2 + a^2b^2c^3$

R: $a^2b^2c^2(a + b + c)$

e) $3x^2y^2 - 9xy$

R: $3xy(xy - 3)$

f) $16a^4 - 64a^3$

R: $16a^3(a - 4)$

g) $(a+b)x + 2(a+b)$

R: $(a + b)(x + 2)$

h) $(a+1)x + (a+1)y$

R: $(a + 1)(x + y)$

Lição 53 – Fatoração por agrupamento

1. Agrupe convenientemente os termos e fatore:

a) $ax + ay - bx - by$

R: $a(x + y) - b(x + y) = (a - b)(x + y)$

b) $m^2 - mp - 3m + 3p$

R: $m(m - p) + 3(m - p) = (m - p)(m + 3)$

c) $x^3 + 2x^2 + 2x + 4$

R: $x^2(x + 2) + 2(x + 2) = (x + 2)(x^2 + 2)$

d) $12 + 4a + 3b + ab$

R: $4(3 + a) + b(4 + a) = (3 + a)(4 + b)$

Lição 54 – Trinômio do quadrado perfeito

1. Faça os trinômios, escrevendo-os nas formas de quadrado da soma ou da subtração:

a) $x^2 + 2xy + y^2$

R: $(x + y)^2$

b) $a^2 + 2a + 1$

R: $(a + 1)^2$

c) $x^2 - 6x + 9$

R: $(x - 3)^2$

d) $4x^2 - 4x + 1$

R: $(2x - 1)^2$

e) $m^2 + 4mn + 4n^2$

R: $(m + 2n)^2$

f) $x^2 - 12x + 36$

R: $(x - 6)^2$

g) $9x^2 + 6x + 1$

R: $(3x + 1)^2$

h) $x^3 + 2x^2 + x$

R: $x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$

Lição 55 – Diferença de dois quadrados

1. Fatore as diferenças de quadrados:

a) $x^2 - 81$

R: $(x + 9)(x - 9)$

b) $25b^2 - 16$

R: $(5b + 4)(5b - 4)$

c) $100x^2 - 1$

R: $(10x + 1)(10x - 1)$

d) $a^2b^2 - 4$

R: $(ab + 2)(ab - 2)$

e) $4p^2 - 9b^2$

R: $(2p + 3b)(2p - 3b)$

f) $(x + y)^2 - y^2$

R: $((x + y) + y)((x + y) - y)$

g) $(a + b)^2 - (a - b)^2$

R: $((a + b) + (a - b))((a + b) - (a - b))$

h) $1 - (x + y)^2$

R: $(1 + x + y)(1 - x - y)$

i) $7x^2 - y + x - 7xy$

$$\text{R: } (x\sqrt{7} + \sqrt{y})(x\sqrt{7} - \sqrt{y}) + (\sqrt{x} + \sqrt{7xy})(\sqrt{x} - \sqrt{7xy})$$

$$\text{j) } m^2u - 1 + u - m^2$$

$$\text{R: } (m\sqrt{u} + 1)(m\sqrt{u} - 1) + (\sqrt{u} + m)(\sqrt{u} - m)$$

Lição 56 – Fatoração completa

1. Fatore completamente:

$$\text{a) } a^4 - a^2$$

$$\text{R: } (a^2 + a)(a^2 - a)$$

$$\text{b) } 2ax^2 - 32a$$

$$\text{R: } 2a(x^2 - 16) = 2a(x + 4)(x - 4)$$

$$\text{c) } a^3 + a^2 - 4a + 4$$

$$\text{R: } a^2(a + 1) - 4(a - 1)$$

$$\text{d) } x^8 - 1$$

$$\text{R: } (x^4 + 1)(x^4 - 1) = (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

$$\text{e) } x^4 - 2x + 1$$

$$\text{R: } x(x^3 - 2) + 1$$

$$\text{f) } x^5 + 2x^4 + x^3$$

$$\text{R: } x^3(x^2 + 2x + 1) = x^3(x + 1)^2$$

2. Fatore as expressões abaixo (da maneira que for mais conveniente):

$$\text{a) } 2a - 2m + 2n$$

$$\text{R: } 2(a - m + n)$$

$$\text{b) } 5a + 20x + 10$$

$$\text{R: } 5(a + 4x + 2)$$

$$\text{c) } 64a^2 - 80a + 25$$

$$\text{R: } (8a - 5)^2$$

$$\text{d) } x^2 - y^2$$

$$\text{R: } (x + y)(x - y)$$

$$\text{e) } 15x^3 - 3ax$$

$$\text{R: } 3x(5x^2 - a)$$

$$\text{f) } 6x^3 - 10x^2 + 4x$$

$$\text{R: } 2x(3x^2 - 5x + 2)$$

$$\text{g) } a^2 - 25$$

$$\text{R: } (a + 5)(a - 5)$$

$$\text{h) } 3a - 3b + ax - bx$$

$$\text{R: } 3(a - b) + x(a - b) = (a - b)(3 + x)$$

$$\text{i) } 7ax - 7a + bx - b$$

$$\text{R: } 7a(x - 1) + b(x - 1) = (x - 1)(7a + b)$$

$$\text{j) } 2x - 2 + yx - y$$

$$\text{R: } 2(x - 1) + y(x - 1) = (x - 1)(2 + y)$$

$$\text{k) } ax + a + bx + b$$

$$\text{R: } a(x + 1) + b(x + 1) = (x + 1)(a + b)$$

$$\text{l) } x^3 - x^2 + x - 1$$

$$\text{R: } x^2(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(x^2 + 1)$$

$$\text{m) } x^3 + 2x^2 + xy + 2y$$

$$\text{R: } x^2(x + 2) + y(x + 2) = (x + 2)(x^2 + y)$$

$$\text{n) } 9 - x^2$$

$$\text{R: } (3 + x)(3 - x)$$

$$\text{o) } x^3 - 5x^2 + 4x - 20$$

$$\text{R: } x^2(x - 5) + 4(x - 5) = (x - 5)(x^2 + 4)$$

$$\text{p) } 6x^2y + 12xy - 9xyz$$

$$\text{R: } 3xy(2x + 4 - 3z)$$

q) $x^2 - 1$

R: $(x + 1)(x - 1)$

r) $a^2 - 4$

R: $(a + 2)(a - 2)$

s) $x^2 + 2x + 5x + 10$

R: $x(x + 2) + 5(x + 2) = (x + 2)(x + 5)$

t) $4x^2 - y^2$

R: $(2x + y)(2x - y)$

u) $16x^2 - 9$

R: $(4x + 3)(4x - 3)$

v) $36x^2 - 4y^2$

R: $(6x + 2y)(6x - 2y)$

w) $16a^2 - 9x^2y^2$

R: $(4a + 3xy)(4a - 3xy)$

x) $55m + 33n$

R: $11(5m + 3n)$

y) $9x^2 - 6xy + y^2$

R: $(3x - y)^2$

z) $x^2 + 20x + 100$

R: $(x + 10)^2$

aa) $a^2 - 12ab + 36b^2$

R: $(a - 6b)^2$

bb) $9 + 24a + 16a^2$

R: $(3 + 4a)^2$

cc) $4 - 8x - 16y$

R: $4(1 - 2x - 4y)$

3. A expressão $(x + y) \cdot (x^2 + y^2) \cdot (x - y)$ é igual a:

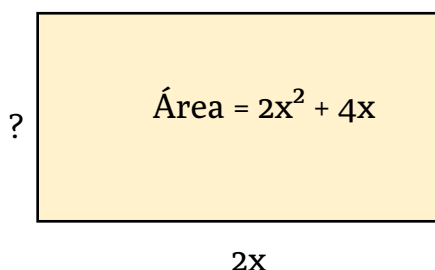
a) $x^4 + y^4$

b) $x^4 - y^4$

c) $x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$

d) $x^3 + xy^2 + x^2y + y^3$.

4. A área de um retângulo é dada pela expressão $2x^2 + 4x$, e um dos lados é $2x$. Qual é a expressão que dá a medida do outro lado?



R: Sendo o lado desconhecido igual a l , e a área dada por base $\cdot$ lado, a expressão da área desse retângulo é: $2x^2 + 4x = 2x \cdot l \Rightarrow l =$

$$\frac{2x^2 + 4x}{2x} = \frac{2x(x + 2)}{2x} \Rightarrow l = x + 2.$$

Lição 57 – Equações

1. Sobre as equações responda:

a) O que significa a palavra equação?

R: Equação é uma expressão algébrica com uma ou mais incógnitas que contém uma igualdade.

b) Qual é a principal diferença entre uma equação e uma expressão algébrica?

R: Uma equação, diferentemente de uma simples expressão algébrica, apresentará uma igualdade e que, portanto, será possível encontrar um valor numérico para a incógnita presente.

c) De que é composta uma equação?

R: Expressão algébrica, incógnitas e uma igualdade.

d) Por que as letras em expressões se chamam variáveis e em equações se chamam incógnitas?

R: Pois em equações essas letras têm um valor que deve ser conhecido, enquanto nas expressões elas não o apresentam.

e) O que significa dizer que determinado número é **raiz** de uma equação?

R: Significa que o número é o valor da incógnita que soluciona a equação.

2. O número 2 é raiz de que equações abaixo:

a) $3x + 7 = 13$

b) $2x + 4 = x + 6$

c) $-4x + 3 = 5$

d) $-6x - 3 = 3 - 9x$

3. O número -1 é raiz de que equações abaixo:

a) $x + 4 = 2x + 5$

b) $5x + 2 = 3x - 5$

c) $14 - x = 18 - 3x$

4. Resolva as equações abaixo:

a) $1 - x = -1$

R: $-x = -1 - 1 \Rightarrow x = 2$

b) $5 - 2x = -17$

R: $-2x = -17 - 5 \Rightarrow 2x = 22 \Rightarrow x = 11$

c) $3x - 1 = 0$

$$\text{R: } 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\text{d) } -2x - 2 = -5$$

$$\text{R: } -2x = -5 + 2 \Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$\text{e) } -9x + 8 = -43$$

$$\text{R: } -9x = -43 - 8 \Rightarrow 9x = 51 \Rightarrow$$

$$x = \frac{51}{9} \Rightarrow x = \frac{17}{3}$$

$$\text{f) } 0 = 11x - 4$$

$$\text{R: } 11x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{11}$$

$$\text{g) } 2x + 11 = x$$

$$\text{R: } 2x - x = -11 \Rightarrow x = -11$$

$$\text{h) } 3x + 1 = 2x$$

$$\text{R: } 3x - 2x = -1 \Rightarrow x = -1$$

$$\text{i) } 5x - 1 = 2 - x$$

$$\text{R: } 5x + x = 2 + 1 \Rightarrow 6x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{6}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\text{j) } 1 - 3x = 17 - 4x$$

$$\text{R: } -3x + 4x = 17 - 1 \Rightarrow x = 16$$

$$\text{k) } 3 - 2x = 17 - 4x$$

$$\text{R: } -2x + 4x = 17 - 3 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$$

$$\text{l) } x - 1 = 7 - 2x$$

$$\text{R: } x + 2x = 7 + 1 \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

$$\text{m) } 1045 - x = 729 - 3x$$

$$\text{R: } -x + 3x = 729 - 1045 \Rightarrow 2x = -316 \Rightarrow x = -158$$

$$\text{n) } 1 - 2y = 7y + 8$$

$$\text{R: } -2y - 7y = 8 - 1 \Rightarrow -9y = 7 \Rightarrow y = -\frac{7}{9}$$

5. Resolva as equações abaixo.

$$\text{a) } 5 + 2x = 1$$

$$\text{R: } 2x = 1 - 5 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

$$\text{b) } 5x + 3 = 7$$

$$\text{R: } 5x = 7 - 3 \Rightarrow 5x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

$$\text{c) } x - 3 = 1$$

$$\text{R: } x = 1 + 3 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{d) } 2x - 3 = 17$$

$$\text{R: } 2x = 17 + 3 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10$$

$$\text{e) } -2x - 2 = -5$$

$$\text{R: } -2x = -5 + 2 \Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\text{f) } 3x - 1 = 0$$

$$\text{R: } 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\text{g) } 6 - 2x = 17 - 3x$$

$$\text{R: } -2x + 3x = 17 - 6 \Rightarrow x = 11$$

$$\text{h) } 1 - x = -1$$

$$\text{R: } -x = -1 - 1 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{h) } -9x + 8 = -43$$

$$\text{R: } -9x = -43 - 8 \Rightarrow 9x = 51 \Rightarrow x = \frac{51}{9} \Rightarrow x = \frac{17}{3}$$

$$\text{i) } 0 = 11x - 4$$

$$\text{R: } 11x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{11}$$

$$\text{j) } -4 = 2 - 3x$$

$$\text{R: } -3x = -4 - 2 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{k) } 4 = 2x + 4$$

$$\text{R: } 2x = 4 - 4 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{l) } 2x + 11 = x$$

$$\text{R: } 2x - x = -11 \Rightarrow x = -11$$

$$\text{m) } 3x + 1 = 2x$$

$$\text{R: } 3x - 2x = -1 \Rightarrow x = -1$$

$$\text{o) } 1 + 2x = 3 - 5x$$

$$\text{R: } 2x + 5x = 3 - 1 \Rightarrow 7x = 2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$\text{p) } 5x - 1 = 2 - x$$

$$\text{R: } 5x + x = 2 + 1 \Rightarrow 6x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{q) } 1 - 3x = 17 - 4x$$

$$\text{R: } -3x + 4x = 17 - 1 \Rightarrow x = 16$$

$$\text{r) } 3 - 2x = 17 - 4x$$

$$\text{R: } -2x + 4x = 17 - 3 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$$

$$\text{s) } x + 1 + 2x = 1 - 3x$$

$$\text{R: } 3x + 3x = 1 - 1 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{t) } 5 + 3y = -1 + 4y$$

$$\text{R: } 3y - 4y = -1 - 5 \Rightarrow -y = -6 \Rightarrow y = 6$$

$$\text{u) } -15 - 11x = -9 - 3x$$

$$\text{R: } -11x + 3x = -9 + 5 \Rightarrow 8x = -4 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{v) } 3(x + 3) - 1 = 2$$

$$\text{R: } 3x + 9 - 1 = 2 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2$$

$$\text{w) } 3(x + 2) = 2(x - 7)$$

$$\text{R: } 3x + 6 = 2x - 14 \Rightarrow 3x - 2x = -14 - 6 \Rightarrow x = -20$$

$$\text{x) } 3(x + 2) - 1 = 2(x + 3) - 7$$

$$\text{R: } 3x + 6 - 1 = 2x + 6 - 7 \Rightarrow 3x - 2x = -7 + 1 \Rightarrow x = -6$$

$$\text{y) } 3(x + 1) + 2 = 5 + 2(x - 1)$$

$$\text{R: } 3x + 3 + 2 = 5 + 2x - 2 \Rightarrow 3x - 2x = 5 - 2 - 2 - 3 \Rightarrow x = -2$$

$$\text{z) } 5(2x + 7) - 1 = 4(x - 5) + 9$$

$$\text{R: } 10x + 35 - 1 = 4x - 20 + 9 \Rightarrow 10x - 4x = -20 + 9 - 35 + 1 \Rightarrow 6x = -45 \Rightarrow x = -\frac{45}{6} = -\frac{15}{2}$$

$$\text{aa) } 2(x - 1) + 3(x + 1) = 4(x + 2)$$

$$\text{R: } 2x - 2 + 3x + 3 = 4x + 8 \Rightarrow 2x + 3x - 4x = 8 - 3 + 2 \Rightarrow x = 7$$

$$\text{bb) } 2(2x + 3) + 5(x + 1) = 8 - 3(x - 1)$$

$$\text{R: } 4x + 6 + 5x + 5 = 8 - 3x + 3 \Rightarrow 4x + 5x + 3x = 8 + 3 - 5 - 6 \Rightarrow 12x = 0 \Rightarrow x = 0$$

6. Somando o triplo de um número ao quadrado desse número, obtemos zero. Qual é o número?

$$\text{R: } 3x + x^2 = 0 \Rightarrow x(3 + x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -3$$

Lição 58 – Equações com fatoração e equacionando problemas

1. Se um retângulo tem 20 cm de comprimento e 100 cm² de área, qual é a medida de sua largura?

$$\text{R: } 20 \cdot x = 100 \Rightarrow x = 100/20 \Rightarrow x = 5 \text{ cm.}$$

2. Se um retângulo tem 35 cm de comprimento e 175 cm^2 de área, qual é a medida de sua largura?

R: $35 \cdot x = 175 \Rightarrow x = 175/35 \Rightarrow x = 5 \text{ cm}.$

3. Quando os gêmeos Anderson e Ricardo nasceram, Maria tinha 7 anos. Hoje, quando a soma das idades dos três irmãos é 34 anos, qual é a idade dos gêmeos?

R: $2x + (x + 7) = 34 \Rightarrow 3x = 27 \Rightarrow x = 9 \text{ anos}.$

4. Metade da distância de São Paulo a Belo Horizonte mais 15 km é igual à distância entre José dos Campos e o Rio de Janeiro, que é de 300 km. Qual é a distância de São Paulo a Belo Horizonte?

R: $\frac{x}{2} + 15 = 300 \Rightarrow \frac{x}{2} = 285 \Rightarrow x = 285 \cdot 2 \Rightarrow x = 570$

5. Determine um número cujo dobro de seu antecessor menos 3 é igual a 25.

R: $2(x - 1) - 3 = 25 \Rightarrow 2x - 2 - 3 = 25 \Rightarrow 2x = 25 + 5 \Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow x = 15$

6. Quatro amigos se reuniram para comer numa lanchonete. A conta de R\$ 32,00 foi paga da seguinte forma: Vicente pagou mais R\$ 2,00 que Rubens; Rubens pagou mais R\$ 3,50 que Laerte; Laerte pagou a metade do que José pagou.

R: $x + \frac{x}{2} + (\frac{x}{2} + 3,50) + (\frac{x}{2} + 3,50 + 2) = 32 \Rightarrow \frac{5x}{2} + 9 = 32 \Rightarrow \frac{5x}{2} = 23 \Rightarrow 5x = 46 \Rightarrow x = \text{R\$}9,20$

- a) Quem pagou a maior quantia? Quanto foi?

R: Vicente, pagou $4,70 + 3,5 + 2 = \text{R\$}10,20.$

- b) Quem pagou a menor quantia? Quanto foi?

R: Laerte, pagou $\frac{9,20}{2} = \text{R\$} 4,70.$

7. Bento tem mais três anos que Teresa. A soma de suas idades é, atualmente, 31 anos. Determine suas idades.

R: $x + x + 3 = 31 \Rightarrow 2x = 28 \Rightarrow x = 14.$ Portanto Teresa tem 14 anos e Bento 17 anos.

8. A soma de quatro números naturais consecutivos é 62. Determine esses números.

R: $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 62 \Rightarrow 4x = 62 - 6 \Rightarrow 4x = 56 \Rightarrow x = 14$

9. Que número é igual à metade de seu quadrado?

$$\text{R: } x = \frac{x^2}{2} \Rightarrow 2x = x^2 \Rightarrow x = 2$$

10. Numa cidade, uma corrida de táxi custa R\$ 4,00 mais a quantia de R\$ 0,75 por quilômetro rodado.

a) Quanto custa uma corrida de x quilômetros?

$$\text{R: } 0,75x + 4 = \text{Valor}$$

b) Quantos quilômetros tem uma corrida que custa R\$ 10,00?

$$\text{R: } 0,75x + 4 = 10 \Rightarrow 0,75x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{0,75} \Rightarrow x = 8 \text{ km}$$

11. Marcos, de 42 anos, é pai de Mariana, de 12 anos. Daqui a quantos anos a idade do pai será o dobro da idade da filha?

R: $x = 2(42 - 12) \Rightarrow x = 2 \cdot 30 \Rightarrow x = 60$. Portanto quando Marcos estiver com 60 anos terá o dobro da idade de Mariana, de 30 anos, ou seja, daqui a $30 - 12 = 18$ anos isso ocorrerá.

12. Na última eleição papal três candidatos apareceram mais vezes. O 1º candidato obteve o dobro dos votos do 2º, que teve mais 18 votos que o 3º candidato. Foram 214 os cardeais, entretanto 20 deles não votaram devido à idade muito avançada. Dê a classificação final e o número de votos de cada candidato.

R: $x + (x + 18) + 2(x + 18) = 214 - 20 \Rightarrow 4x = 214 - 20 - 54 \Rightarrow 4x = 140 \Rightarrow x = 35$ votos. Dessa forma, o 3º candidato obteve 35 votos, o 2º, 53 e o 1º, 106.

13. Calcule x em cada equação.

a) $x^2 = 4x$

$$\text{R: } x = 4$$

b) $3x^2 = 6x$

$$\text{R: } x^2 = \frac{6x}{3} \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x = 2$$

c) $2x^2 = 5x$

$$\text{R: } x^2 = \frac{5x}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

d) $25x = 4x^2$

$$\text{R: } x^2 = \frac{25x}{4} \Rightarrow x = \frac{25}{4}$$

14. Calcule x em cada equação:

a) $15(x + 2) = 0$

R: $15x + 30 = 0 \Rightarrow x = -2$

b) $(x + 1)(2x - 1) = 0$

R: $2x^2 - x + 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$

c) $5x(x - 1)(x - 2) = 0$

R: $(5x^2 - 5x)(x - 2) = 0 \Rightarrow 5x^3 - 10x^2 - 5x^2 + 10x = 0 \Rightarrow 5x^3 - 15x^2 + 10x = 0 \Rightarrow x(5x^2 - 15x + 10) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = 1$

Lição 59 – Classificação das equações

1. Resolva as equações a seguir e classifique-as como Possível Determinada, Possível Indeterminada e Impossível:

a) $x + 4 = x + 5$

R: $x - x = 5 - 4 \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow \text{Impossível}$

b) $2x - 2 = x - 2$

R: $2x - x = -2 + 2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{Possível determinado}$

c) $4x - 4 = 4 - 4x$

R: $4x + 4x = 4 + 4 \Rightarrow 8x = 8 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{Possível determinado}$

d) $15x + 3 = 12(x + 1) + 3x$

R: $15x - 12x - 3x = 12 - 3 \Rightarrow 0 = 9 \Rightarrow \text{Impossível}$

e) $2x + 5 = 5 + 2x$

R: $2x - 2x = 5 - 5 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \text{Possível indeterminado}$

f) $3(x + 2) = 2(x + 4) + x - 4$

R: $3x - 2x - x = 8 - 4 - 6 \Rightarrow 0 = -2 \Rightarrow \text{Impossível}$

2. Dada a equação $(a + 1)x = 2$

a) resolva-a no caso de $a = 1$

R: $(1 + 1)x = 2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$

b) resolva-a no caso de $a = -1$

R: $(-1 + 1)x = 2 \Rightarrow 0x = 2 \Rightarrow 0 = 2 \Rightarrow \text{Impossível}$

c) encontre x em função de a .

R: $x = \frac{2}{a+1}$

3. Determine a solução geral de cada equação em x .

a) $x - a = b - x$

R: $x + x = a + b \Rightarrow 2x = a + b \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$

b) $x + m = -m - x$

R: $x + x = -m + m \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

c) $a - 2x = 2x - a$

R: $2x + 2x = a + a \Rightarrow 4x = 2a \Rightarrow x = \frac{a}{2}$

4. Dada a equação $mx + 1 = 2x + m$ na incógnita x , responda:

a) Qual é a raiz no caso $m = 1.002$?

R: $1.002x + 1 = 2x + 1.002 \Rightarrow 1.002x - 2x = 1.002 - 1 \Rightarrow 1.000x = 1.001 \Rightarrow x = 1,001$

b) Se a raiz é 2, qual é o valor de m ?

R: $m \cdot 2 + 1 = 2 \cdot 2 + m \Rightarrow 2m - m = 4 - 1 \Rightarrow m = 3$

c) Se a raiz é 1.001, qual é o valor de m ?

R: $1.001m + 1 = 2 \cdot 1.001 + m \Rightarrow 1.001m - m = 2.002 - 1 \Rightarrow 1.000m = 2.001 \Rightarrow m = 2,001$

Lição 60 – Sistema de equações: método da adição e substituição

1. O que é um sistema linear de equações?

R: Um sistema linear de equações do 1º grau (ou simplesmente um sistema linear) com duas equações e duas incógnitas é um conjunto formado por duas equações lineares (ou de 1º grau), em que cada uma dessas equações possui duas incógnitas.

Portanto, qualquer sistema de equações do 1º grau com duas equações e duas incógnitas é escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

onde x e y são as incógnitas e as letras a, b, c, d, e, f são valores numéricos.

2. Por que denominamos par ordenado a solução de um sistema linear?

R: Dizemos que a solução de um sistema é um par ordenado porque x e y irão assumir um valor. Isso significa que teremos dois números, isto é, um par de números. Depois o chamamos de ordenado porque a ordem desses valores importa: sempre representaremos essa solução entre parênteses, onde o primeiro valor corresponde ao x, e o segundo valor corresponde ao y.

3. A soma das idades dos irmãos Inácio e Jonas é 73 anos. Sabendo que Inácio é 9 anos mais velho que Jonas, calcule as idades dos irmãos.

R: $\begin{matrix} x+y=73 \\ x=y-9 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x+y=73 \\ x-y=-9 \end{matrix} \Rightarrow 2x = 73 - 9 \Rightarrow x = \frac{64}{2} = 32$. Portanto, Jonas tem 32 anos e Inácio 41

4. Se dois tijolos e três sacos de areia pesam juntos 64 kg, e um tijolo e dois sacos de areia pesam juntos 41 kg, qual é o peso conjunto de um tijolo e de um saco de areia?

R: $\begin{matrix} 2x+3y=64 \\ 1x+2y=41 \end{matrix}$ Assim, se subtrairmos a equação de baixo da de cima, obtemos: $x + y = 64 - 41 \Rightarrow x + y = 23$, onde x é o peso do tijolo e y o do saco de areia, assim um tijolo e um saco pesam 23 kg.

5. Uma livraria católica cobra R\$ 3,00 por cada chaveiro dos santo e R\$ 5,00 por cada dezena de madeira comprados. Ao final de um dia, o caixa registrou R\$ 382,00 para um total de 100 produtos vendidos. Quantas chaveiros e quantas dezenas foram vendidos nesse dia?

R: Sendo x e y são a quantidade de chaveiros e dezenas vendidas, respectivamente, temos: $\begin{matrix} 3x+5y=382 \\ x+y=100 \end{matrix} \Rightarrow$ multiplicando a de baixo por 3 $\Rightarrow$

$3x + 5y = 382$
 $3x + 3y = 300$ $\Rightarrow$ subtraindo $\Rightarrow 2y = 82 \Rightarrow y = 41$. Portanto foram vendidos 41 dezenas de madeira e 59 chaveiros.

6. Encontre todos os possíveis valores dos números reais positivos a e b sabendo que a soma das raízes desses números vale 17 e a raiz de a é o triplo da raiz de b acrescido de três unidades.

R: $a + b = 17$
 $a = 3b + 3$ $\Rightarrow$ substituindo $\Rightarrow 3b + 3 + b = 17 \Rightarrow 4b = 17 - 3 \Rightarrow 4b = 14 \Rightarrow b = \frac{7}{2}$,

portando, $a + \frac{7}{2} = 17 \Rightarrow a = 17 - \frac{7}{2} \Rightarrow a = \frac{34 - 7}{2} \Rightarrow a = \frac{27}{2}$

7. Em uma cozinha, existem garfos para peixe, com três dentes, e para carne bovina, com quatro dentes, num total de 32 garfos e 108 dentes. Determine a quantidade de garfos de carne bovina desta cozinha.

R: Sendo x e y a quantidade de garfos para peixe e para carne bovina, respectivamente, temos: $3x + 4y = 108$
 $x + y = 32$ $\Rightarrow$ multiplicando a de baixo por 3 $\Rightarrow$

$3x + 4y = 108$
 $3x + 3y = 96$ $\Rightarrow$ subtraindo $\Rightarrow y = 12$. Portanto, existem 12 garfos para carne bovina na cozinha.

8. Na doceria Santa Luzia, dona Maria vende dois pedaços de bolo e três pedaços de pudim por R\$ 36,00. Já cinco pedaços de bolo e quatro pudins custam R\$ 62,00. Qual o preço de cada pedaço de bolo? E de pudim?

R: $2b + 3p = 36$
 $5b + 4p = 62$ $\Rightarrow$ multiplicando a de cima por 4 e a de baixo por 3 $\Rightarrow$

$8b + 12p = 144$
 $15b + 12p = 186$ $\Rightarrow$ Subtraindo a de baixo pela de cima $\Rightarrow 7b = 42 \Rightarrow b = 6$. Assim,

$2 \cdot 6 + 3p = 36 \Rightarrow 12 + 3p = 36 \Rightarrow 3p = 36 - 12 \Rightarrow 3p = 24 \Rightarrow p = 8$. Portanto, o pedaço de bolo custa R\$ 6,00 e o pudim R\$ 8,00

Lição 61 – Comparação e sistema com três incógnitas

1. Quais são os três métodos de resolução de um sistema linear? Dê um exemplo de cada método.

R: Adição: $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$

Substituição: $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} \Rightarrow 2(3 + y) + 3y = 16 \Rightarrow 6 + 5y = 16 \Rightarrow y = 2$

Comparação: $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 - y \\ x = 3 + y \end{cases} \Rightarrow 11 - y = 3 + y \Rightarrow 2y = 8 \Rightarrow y = 4$

2. Resolva os sistemas de equações abaixo pelo método que preferir:

a) $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 3 \end{cases}$

R: $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Adição} \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$
 $\Rightarrow y = 4$

b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 9 \end{cases}$

R: Adição $\Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 4$

c) $\begin{cases} x - y = 16 \\ x + y = 74 \end{cases}$

R: Adição $\Rightarrow 2x = 90 \Rightarrow x = 45 \Rightarrow y = 29$

d) $\begin{cases} 2x - y = 20 \\ 2x + y = 48 \end{cases}$

R: Adição $\Rightarrow 4x = 68 \Rightarrow x = 17 \Rightarrow y = 14$

e) $\begin{cases} 2x - 3y = -16 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$

R: Adição $\Rightarrow 7x = -14 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = 4$

f) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 11x - y = 42 \end{cases}$

R: Adição $\Rightarrow 14x = 42 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = -9$

g) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$

R: $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 6x - 3y = -12 \end{cases} \Rightarrow \text{Adição} \Rightarrow 7x = -7 \Rightarrow$
 $x = -1 \Rightarrow y = 2$

h) $\begin{cases} 3x + 3y = 21 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

R: $\begin{cases} 3x + 3y = 21 \\ 6x - 3y = 15 \end{cases} \Rightarrow \text{Adição} \Rightarrow 9x = 36 \Rightarrow$
 $x = 4 \Rightarrow y = 3$

i) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$

R: $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} \Rightarrow$

Substituição $\Rightarrow 2(3 + y) + 3y = 16 \Rightarrow$
 $6 + 5y = 16 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 5$

j) $\begin{cases} 5x + y = 5 \\ 10x - 2y = -2 \end{cases}$

$$\text{R: } \begin{cases} 10x + 2y = 10 \\ 10x - 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{Adição} \Rightarrow 20x = 8 \Rightarrow$$

$$x = \frac{2}{5} \Rightarrow y = 3$$

$$\text{k) } \begin{cases} x - 3 = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\text{R: Adição} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow 6 - y = 1 \Rightarrow y = 5$$

$$\text{l) } \begin{cases} 5x - y = 4 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$$

$$\text{R: } \begin{cases} 5x - y = 4 \\ -2x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{Adição} \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 11$$

3. Vitor tem 2 filhos. Para que as pessoas descubram as respectivas idades, ele fez duas afirmações:

I) A soma das idades das crianças é 7.

II) A diferença entre o dobro da idade do mais novo e a idade do mais velho é 2.

Quais são as idades dos filhos de Vitor?

$$\text{R: } \begin{cases} a + b = 7 \\ 2a - b = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Adição} \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3, \text{ assim } b = 4. \text{ Portanto a idade do filho}$$

mais novo e do mais velho é 3 e 4 anos, respectivamente.

4. As paróquias de São Pedro e Santa Maria têm juntas 195 relíquias. Se a paróquia São Pedro tem mais 45 relíquias que a de Santa Maria, quantas relíquias cada uma tem?

$$\text{R: } \begin{cases} P + M = 195 \\ P = M + 45 \end{cases} \Rightarrow \text{Substituição} \Rightarrow M + 45 + M = 195 \Rightarrow 2M = 150 \Rightarrow M = 75 \text{ relíquias.}$$

Assim, a paróquia São Pedro tem 120 relíquias e a Santa Maria 75.

5. Construa e resolva um sistema de equações no qual a soma de dois números é 70 e a diferença é 28.

$$\text{R: } \begin{cases} x + y = 70 \\ x - y = 28 \end{cases} \Rightarrow \text{Adição} \Rightarrow 2x = 98 \Rightarrow x = 49 \Rightarrow y = 21$$

6. A sequência $(2, x, y, 29)$ é chamada de progressão aritmética porque a diferença entre cada termo e seu antecessor é constante. Determine x e y .

$$\text{R: } \begin{cases} y - x = r \\ x - 2 = r \\ 29 - y = r \end{cases} \Rightarrow \text{Somando as três equações, temos } \Rightarrow y - x + x - 2 + 29 - y = r + r + r$$

$$\Rightarrow 27 = 3r \Rightarrow r = 9. \text{ Assim, temos: } \begin{cases} y - x = 9 \\ x - 2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x = 9 \\ x = 11 \end{cases} \Rightarrow y = 20$$

7. Ana e Beatriz têm juntas 15 anos, Ana e Carla têm juntas 17 anos, Beatriz e Carla têm juntas 18 anos. Quantos anos têm juntas as três?

$$\text{R: } \begin{cases} a + b = 15 \\ a + c = 17 \\ b + c = 18 \end{cases} \Rightarrow \text{Multiplicando a última por } (-1) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 15 \\ a + c = 17 \\ -b - c = -18 \end{cases} \Rightarrow \text{Somando } \Rightarrow$$

$2a = 14 \Rightarrow a = 7$. Substituindo na primeira: $7 + b = 15 \Rightarrow b = 8$. Substituindo a na segunda: $7 + c = 17 \Rightarrow c = 10$. Portanto Ana tem 7 anos, Beatriz 8 e Carla 10.

Lição 62 – Sistema impossível e indeterminado

1. Classifique os sistemas abaixo como: Sistema Possível e Determinado (S.P.D), Sistema Possível e Indeterminado (S.P.I) e Sistema Impossível (S.I).

a) $\begin{cases} y = x - 7 \\ x = y + 3 \end{cases}$

R: Sistema impossível.

b) $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ x = 2y + 2 \end{cases}$

R: Sistema possível determinado.

c) $\begin{cases} y = x + 2 \\ x = y - 2 \end{cases}$

R: Sistema possível indeterminado.

d) $\begin{cases} 2x + 3y = x + y + 7 \\ 1 + 2y = 3 - x \end{cases}$

R: Sistema impossível.

$$e) \begin{cases} 5x = 1 - 3y \\ 2x + 4y = y - 3x \end{cases}$$

R: Sistema impossível.

$$f) \begin{cases} 7x - y = y - x - 7 \\ 2y - 5x - 3 = 3x + 4 \end{cases}$$

R: Sistema possível indeterminado.

Desafios: Encontre o valor de cada incógnita nos sistemas a seguir:

$$a) \begin{cases} a + c = 2004 \\ b + c = 2007 \\ c + d = 2016 \\ c + e = 2021 \\ d + e = 2023 \end{cases}$$

R: Analisando as três últimas equações, temos: $\begin{cases} c + d = 2016 \\ c + e = 2021 \\ d + e = 2023 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c + d = 2016 \\ -c - e = -2021 \\ d + e = 2023 \end{cases} \Rightarrow$

$2d = 2018 \Rightarrow d = 1009$. Assim, substituindo, temos que $c = 1007$ e $e = 1014$. Sabendo c , $a = 997$ e $b = 1000$.

$$b) \begin{cases} a + b + c = 12 \\ b + c + d = 12 \\ c + d + e = 12 \\ d + e + f = 12 \\ e + f + g = 12 \\ f + g + h = 12 \\ g + h + i = 12 \\ h + i + j = 12 \\ i + j + a = 12 \\ j + a + b = 12 \end{cases}$$

R: Como $a + b$ está presente em mais de uma equação, temos que seus complementos são iguais, uma vez que o resultado é o mesmo (12). Assim, $c = j$. O mesmo vale para $b + c$, onde $a = d$; $c + d \Rightarrow b = e$; $d + e \Rightarrow c = f$; $e + f \Rightarrow d = g$; $f + g \Rightarrow e = h$; $g + h \Rightarrow f = i$; $h + i \Rightarrow g = j$; $i + j \Rightarrow h = a$; $e, j + a \Rightarrow i = b$. Assim, temos que $a = b = c = d = e = f = g = h = i = j = 4$, ou seja, todas as letras valem 4.

Lição 63 - Equação do 2º grau ($ax^2 + b = 0$)

1. Qual é o conjunto solução de cada uma das seguintes equações do 2º grau, sendo $U = \mathbb{R}$?

a) $(x+5)(x-6) = 51 - x$

R: $x^2 - x - 30 = 51 - x \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = \sqrt{81} \Rightarrow x = \pm 9$. $S = \{x \in \mathbb{R} / x=9 \text{ ou } x=-9\}$

b) $2x(x+1) - x(x+5) = 3(12 - x)$

R: $x^2 - 3x = 36 - 3x \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{36} \Rightarrow x = \pm 6$. $S = \{x \in \mathbb{R} / x=6 \text{ ou } x=-6\}$

2. Calcule o conjunto solução de cada equação:

a) $3x - \frac{1}{3x} = 0$, $x \neq 0$, $U = \mathbb{R}$

R: $\frac{9x^2 - 1}{3x} = 0 \Rightarrow 9x^2 - 1 = 0 \cdot 3x \Rightarrow 9x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 9x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{9}} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3}$.

$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = -\frac{1}{3}\}$

b) $\frac{x^2}{4} - \frac{5}{2} = -1$, $U = \mathbb{R}$

R: $\frac{x^2 - 10}{4} = -1 \Rightarrow x^2 - 10 = -4 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$. $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \sqrt{6} \text{ ou } x = -\sqrt{6}\}$

3. Observe as equações:

$$\frac{3x}{x-4} = 3 + \frac{2}{x} \quad (x \neq 0, x \neq 4)$$

$$\frac{5}{y^2-9} = \frac{-3}{y+3} \quad (y \neq -3, y \neq 3)$$

Resolvendo cada uma dessas equações, o quociente $x : y$ é:

a) $-\frac{3}{5}$

b) $-\frac{5}{3}$

c) $\frac{3}{5}$

d) $\frac{5}{3}$

e) $-\frac{2}{5}$

R: Primeira equação: $\frac{3x}{x-4} = \frac{3x+2}{x} \Rightarrow 3x^2 = 3x^2 + 2x - 12x - 8 \Rightarrow 3x^2 - 3x^2 + 10x = -8 \Rightarrow 10x = -8 \Rightarrow x = \frac{-8}{10} = \frac{-4}{5}$.

Segunda equação: $\frac{5}{y^2-9} = \frac{-3}{y+3} \Rightarrow \frac{5}{(y+3)(y-3)} = \frac{-3}{y+3} \Rightarrow \frac{5}{\cancel{(y+3)}(y-3)} = \frac{-3}{\cancel{y+3}} \Rightarrow \frac{5}{(y-3)} = -3 \Rightarrow 5 = -3y + 9 \Rightarrow 3y = 9 - 5 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$

Dessa forma a razão $x:y = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{4}{3}} = -\frac{12}{20} = -\frac{3}{5} \Rightarrow$ Alternativa a.

4. A altura de uma árvore, em metros, é dada por $h = 10 - \frac{100}{10+t}$, sendo t a idade da árvore em anos. Se essa árvore tem 6 metros de altura, quantos anos ela tem?

a) 12 anos.

b) 13 anos.

c) 14 anos.

d) 15 anos.

e) 16 anos.

R: $6 = 10 - \frac{100}{10+t} \Rightarrow 6 - 10 = -\frac{100}{10+t} \Rightarrow -4 = -\frac{100}{10+t} \Rightarrow 40 + 4t = 100 \Rightarrow 4t = 100 - 40 \Rightarrow 4t = 60 \Rightarrow t = 15$ anos. Alternativa d.

Lição 64 – Avaliação 1

1. Resolva as equações a seguir e classifique-as como Possível Determinada, Possível Indeterminada e Impossível:

a) $2x - 2 = x - 2$

R: $2x - x = -2 + 2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ Possível determinado

b) $4x - 4 = 4 - 4x$

R: $4x + 4x = 4 + 4 \Rightarrow 8x = 8 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ Possível determinado

c) $15x + 3 = 12(x + 1) + 3x$

R: $15x - 12x - 3x = 12 - 3 \Rightarrow 0 = 9 \Rightarrow$ Impossível

d) $2x + 5 = 5 + 2x$

R: $2x - 2x = 5 - 5 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ Possível indeterminado

2. Determine a solução geral de cada equação em x .

a) $x - a = b - x$

R: $x + x = a + b \Rightarrow 2x = a + b \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$

b) $x + m = -m - x$

R: $x + x = -m + m \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

c) $a - 2x = 2x - a$

R: $2x + 2x = a + a \Rightarrow 4x = 2a \Rightarrow x = \frac{a}{2}$

3. Dada a equação $mx + 1 = 2x + m$ na incógnita x , responda:

a) Qual é a raiz no caso $m = 1.002$

R: $1.002x + 1 = 2x + 1.002 \Rightarrow 1.002x - 2x = 1.002 - 1 \Rightarrow 1.000x = 1.001 \Rightarrow x = 1,001$

b) Se a raiz é 2, qual é o valor de m ?

R: $m \cdot 2 + 1 = 2 \cdot 2 + m \Rightarrow 2m - m = 4 - 1 \Rightarrow m = 3$

c) Se a raiz é 1.001, qual é o valor de m ?

R: $1.001m + 1 = 2 \cdot 1.001 + m \Rightarrow 1.001m - m = 2.002 - 1 \Rightarrow 1.000m = 2.001 \Rightarrow m = 2,001$

4. O que é um sistema linear de equações? Por que se chama par ordenado a solução de um sistema linear?

R: Um sistema linear de equações do 1º grau (ou simplesmente um sistema linear) com duas equações e duas incógnitas é um conjunto formado por duas equações lineares (ou de 1º grau), em que cada uma dessas equações possui duas incógnitas. Portanto, qualquer sistema de equações do 1º grau com duas equações e duas incógnitas é escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

onde x e y são as incógnitas e as letras a, b, c, d, e, f são valores numéricos.

Dizemos que a solução de um sistema é um par ordenado porque x e y irão assumir um valor. Isso significa que teremos dois números, isto é, um par de números. Depois o chamamos de ordenado porque a ordem desses valores importa: sempre representaremos essa solução entre parênteses, onde o primeiro valor corresponde ao x, e o segundo valor corresponde ao y.

5. Resolva os sistemas de equações abaixo pelo método que preferir:

a) $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 3 \end{cases}$

R: $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Adição} \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x$

$= 7 \Rightarrow y = 4$

b) $\begin{cases} 2x - y = 20 \\ 2x + y = 48 \end{cases}$

R: Adição $\Rightarrow 4x = 68 \Rightarrow x = 17 \Rightarrow y = 14$

c) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 11x - y = 42 \end{cases}$

R: Adição $\Rightarrow 14x = 42 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = -9$

d) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$

R: $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 6x - 3y = -12 \end{cases} \Rightarrow \text{Adição} \Rightarrow 7x = -7 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2$

e) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$

R: $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} \Rightarrow$

Substituição $\Rightarrow 2(3 + y) + 3y = 16 \Rightarrow 6 + 5y = 16 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 5$

$$f) \begin{cases} 5x + y = 5 \\ 10x - 2y = -2 \end{cases}$$

$$R: \begin{cases} 10x + 2y = 10 \\ 10x - 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{Adição} \Rightarrow 20x = 8$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{5} \Rightarrow y = 3$$

$$g) \begin{cases} x - 3 = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$R: \text{Adição} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow 6 - y = 1 \Rightarrow y = 5$$

6. Uma livraria católica cobra R\$ 3,00 por cada chaveiro dos santos e R\$ 5,00 por cada dezena de madeira. Ao final de um dia, o caixa registrou R\$ 382,00 para um total de 100 produtos vendidos. Quantas chaveiros e quantas dezenas foram vendidos nesse dia?

R: Sendo x e y são a quantidade de chaveiros e dezenas vendidas, respectivamente, temos: $3x + 5y = 382$
 $x + y = 100 \Rightarrow$ multiplicando a de baixo por 3 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 382 \\ 3x + 3y &= 300 \end{aligned} \Rightarrow \text{subtraindo} \Rightarrow 2y = 82 \Rightarrow y = 41. \text{ Portanto foram vendidos 41 dezenas de madeira e 59 chaveiros.}$$

7. Classifique os sistemas abaixo como: Sistema Possível e Determinado (S.P.D), Sistema Possível e Indeterminado (S.P.I) e Sistema Impossível (S.I).

$$a) \begin{cases} y = x - 7 \\ x = y + 3 \end{cases}$$

R: Sistema impossível.

$$b) \begin{cases} y = 2x + 2 \\ x = 2y + 2 \end{cases}$$

R: Sistema possível determinado.

$$c) \begin{cases} y = x + 2 \\ x = y - 2 \end{cases}$$

R: Sistema possível indeterminado.

$$d) \begin{cases} 2x + 3y = x + y + 7 \\ 1 + 2y = 3 - x \end{cases}$$

R: Sistema impossível.

$$e) \begin{cases} 5x = 1 - 3y \\ 2x + 4y = y - 3x \end{cases}$$

R: Sistema impossível.

- 8.** Ana e Beatriz têm juntas 15 anos; Ana e Carla têm juntas 17 anos; Beatriz e Carla têm juntas 18 anos. Quantos anos têm juntas as três?

$$\text{R: } \begin{cases} a + b = 15 \\ a + c = 17 \\ b + c = 18 \end{cases} \Rightarrow \text{Multiplicando a última por } (-1) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 15 \\ a + c = 17 \\ -b - c = -18 \end{cases} \Rightarrow \text{Somando} \Rightarrow$$

$2a = 14 \Rightarrow a = 7$. Substituindo na primeira: $7 + b = 15 \Rightarrow b = 8$. Substituindo a na segunda: $7 + c = 17 \Rightarrow c = 10$. Portanto Ana tem 7 anos, Beatriz 8 e Carla 10.

- 9.** Na Doceria Santa Luzia, dona Maria vende dois pedaços de bolo e três pedaços de pudim por R\$ 36,00. Já cinco pedaços de bolo e quatro pudins custam R\$ 62,00. Qual é o preço de cada pedaço de bolo? E de pudim?

$$\text{R: } \begin{cases} 2b + 3p = 36 \\ 5b + 4p = 62 \end{cases} \Rightarrow \text{multiplicando a de cima por 4 e a de baixo por 3} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 8b + 12p = 144 \\ 15b + 12p = 186 \end{cases} \Rightarrow \text{Subtraindo a de baixo pela de cima} \Rightarrow 7b = 42 \Rightarrow b = 6. \text{ Assim,}$$

$$2 \cdot 6 + 3p = 36 \Rightarrow 12 + 3p = 36 \Rightarrow 3p = 36 - 12 \Rightarrow 3p = 24 \Rightarrow p = 8. \text{ Portanto, o pedaço de bolo custa R\$ 6,00 e o pudim R\$ 8,00}$$

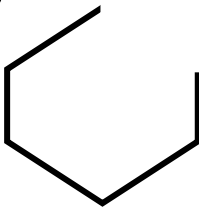
Gabarito Passo a passo de Matemática

8º ano, Volume 5

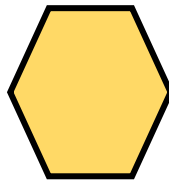
Lição 65 – Revisão de Geometria: parte I

1. Quantos segmentos de reta estão destacados em cada uma das figuras?

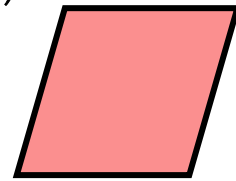
a)



b)



c)



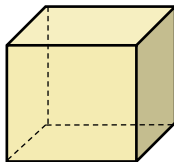
R. a) 5 segmentos.

b) 6 segmentos.

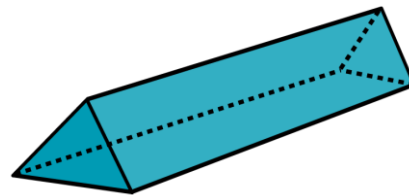
c) 4 segmentos.

2. Cada segmento que você vê destacado nos sólidos abaixo chama-se aresta. Quantas arestas temos em cada um deles?

a)



b)



R. a) 12 arestas.

b) 10 arestas.

3. Observando a figura abaixo, temos que M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e N é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Se $\text{med}(\overline{AB}) = x$ e $\text{med}(\overline{BC}) = y$, qual é a expressão algébrica que representa $\text{med}(\overline{MN})$?



R. Sendo $\overline{AB} = x$, então $\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{x}{2}$. Da mesma forma, se $\overline{BC} = y$, então $\overline{BN} = \overline{CN} = \frac{y}{2}$.

Portanto, $\overline{MN} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{x+y}{2}$

Lição 66 – Revisão de Geometria: parte II

1. Quantas retas você pode traçar passando por um ponto de um plano?

R. Infinitas.

2. Quantas retas você pode traçar passando por dois pontos distintos de um plano?

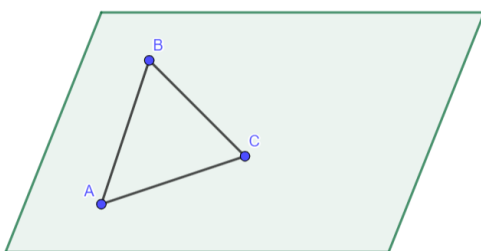
R. Um única reta.

3. Se a intersecção de duas retas de um mesmo plano é vazia, como podem ser essas duas retas?

R. Elas são paralelas.

4. São dados três pontos A, B e C, não alinhados, de um plano. Quantas semirretas com origem em cada um desses pontos e passando por um dos outros pontos podem ser traçadas?

R. Três: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.



5. Usando as palavras *ponto*, *reta* ou *plano*, escreva ideia que você tem quando vê:

a) uma estrela no céu

R. Ponto.

b) um barbante bem esticado

R. Reta.

c) um campo de futebol

R. Plano.

d) uma porta de geladeira

R. Plano.

e) a marca de giz na lousa

R. Ponto.

f) o encontro de duas paredes

R. Reta.

g) a superfície de um lago

R. Plano.

h) um furo de compasso na folha de papel

R. Ponto.

i) esta folha da apostila de Matemática

R. Plano.

j) um fio bem esticado entre dois postes

R. Reta.

k) uma pequena mancha no chão

R. Ponto.

l) a lousa da sala de aula

R. Plano.

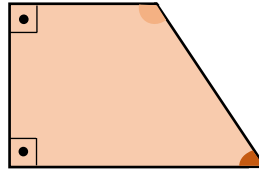
Lição 67 - Ângulos

1. Que tipo de ângulos você encontra em cada figura?

a)



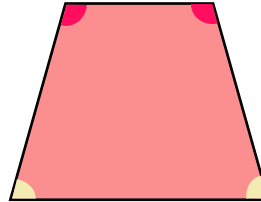
c)



b)



d)



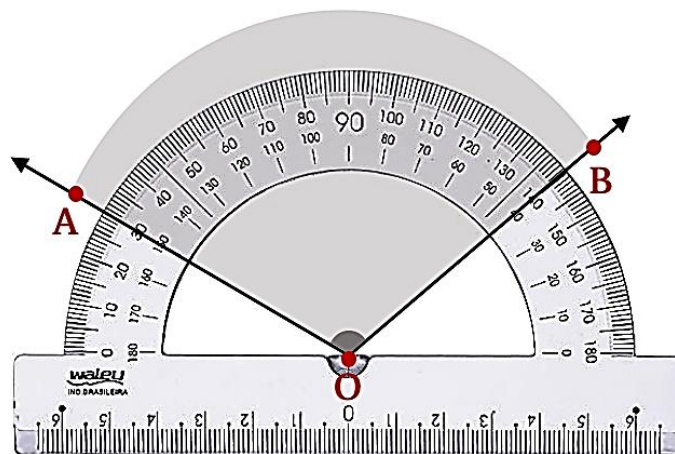
R. a) Quatro ângulos retos.

b) Dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos.

c) Dois ângulos retos, um agudo e um obtuso.

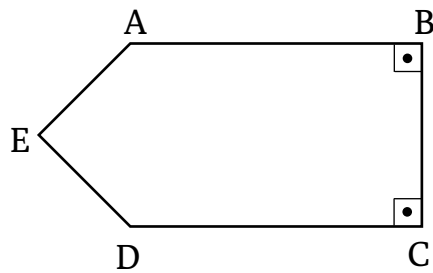
d) Dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos.

2. Qual é a medida do ângulo $\widehat{AOB}$?



R. $\widehat{AOB} = 140 - 30 = 110^\circ$.

3. Identifique na figura:



a) Os ângulos retos.

R. ABC e BCD .

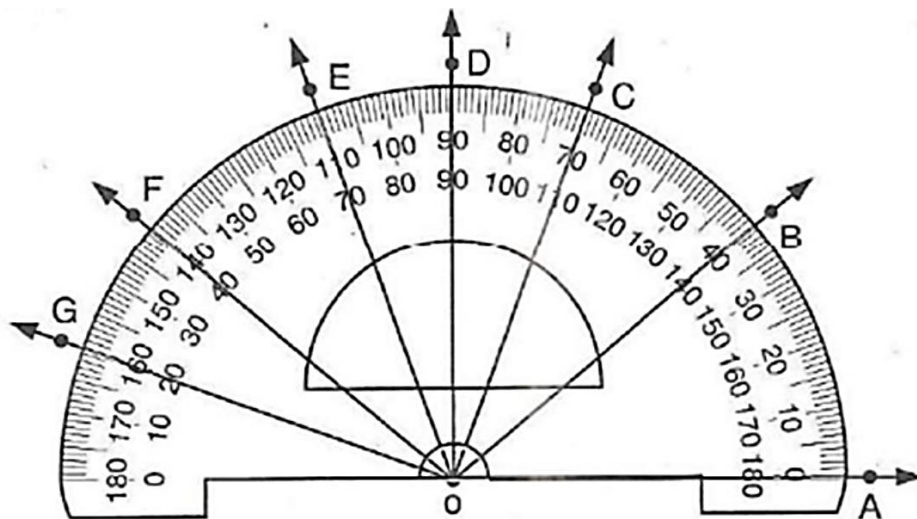
b) Os ângulos agudos.

R. DEA .

c) Os ângulos obtusos.

R. EAB e CDE .

4. Escreva as medidas em graus dos ângulos indicados pelo transferidor:



a) $\widehat{AOB}$

R. 40° .

b) $\widehat{AOC}$

R. 70° .

c) $\widehat{AOD}$

R. 90° .

d) $\widehat{AOE}$

R. 110° .

e) $\widehat{AOF}$

R. 140° .

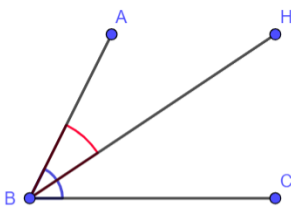
g) $\widehat{AOG}$

R. 160° .

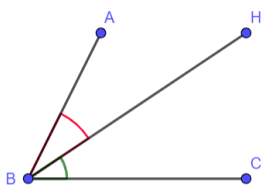
Lição 68 – Ângulos consecutivos e adjacentes

1. Defina o que são ângulos consecutivos e dê dois exemplos.

R. Dois ângulos são consecutivos quando possuem o mesmo vértice e um lado comum.



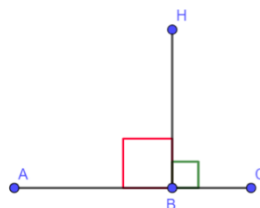
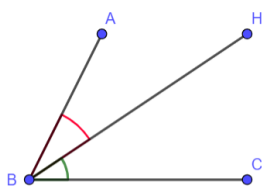
Os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{CBH}$ são consecutivos pois possuem em comum o vértice B e o lado BA.



Os ângulos $\widehat{ABH}$ e $\widehat{CBH}$ são consecutivos pois possuem em comum o vértice B e o lado BH.

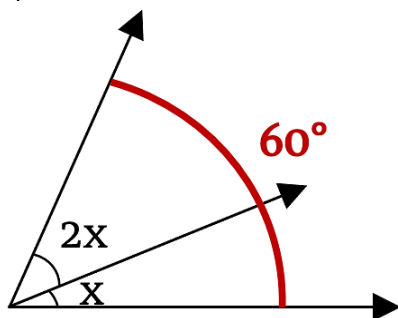
2. Defina o que são ângulos adjacentes e dê dois exemplos.

R. Dois ângulos são adjacentes quando são consecutivos e não possuem pontos internos.

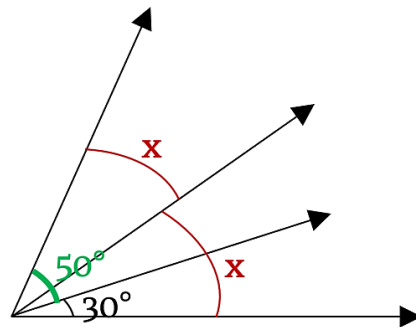


3. Determine o valor de x:

a)



b)



R.

a)

$$2x + x = 60$$

$$3x = 60$$

$$x = \frac{60}{3}$$

$$x = 20$$

b)

$$x + x = 50 + 30$$

$$2x = 80$$

$$x = \frac{80}{2}$$

$$x = 40^\circ$$

Lição 69 – Bissetriz de um ângulo

1. O que é a bissetriz de um ângulo?

R. Bissetriz é a semirreta que divide um ângulo em dois ângulos congruentes.

2. Responda:

a) Foi construída a bissetriz do ângulo 40° . Quanto medem os dois novos ângulos?

$$x = \frac{40}{2}$$

$$x = 20^\circ$$

b) Foi construída a bissetriz do ângulo x° . Quanto medem os dois novos ângulos?

R. Cada ângulo mede $\frac{x}{2}$

c) Foi construída a bissetriz do ângulo $2x + 6$. Quanto medem os dois novos ângulos?

R. $\frac{2x+6}{2} = x + 3$

3. Construa a bissetriz de um ângulo qualquer com o compasso.

R. Resposta pessoal.

4. Construa um triângulo qualquer. Trace as bissetrizes de cada ângulo. O que é possível observar?

R. Resposta pessoal.

5. Usando um transferidor, construa os ângulos abaixo. A seguir, com o compasso, trace a bissetriz destes ângulos.

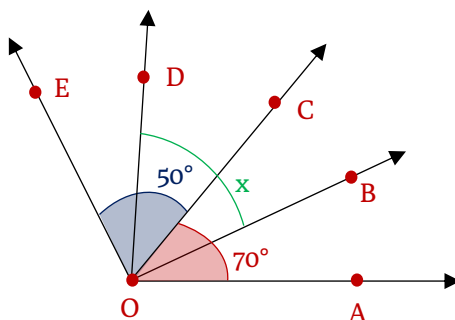
a) 75°

b) 68°

c) 130°

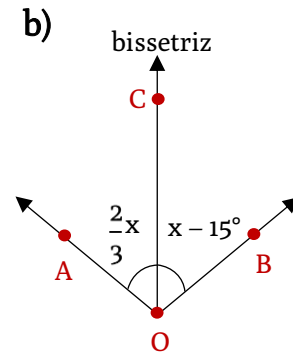
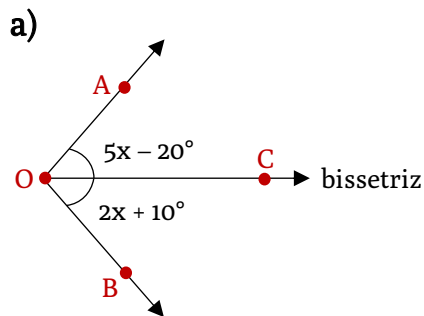
d) 155°

6. Na figura abaixo, $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}C$, e $\overrightarrow{OD}$ é bissetriz do ângulo $C\hat{O}E$. Determine a medida x indicada.



R. Se $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz, significa que dividiu o ângulo $A\hat{O}C$ em duas partes iguais. Assim, fica claro que $B\hat{O}C = 50^\circ$. Como x é formado pela soma dos ângulos $B\hat{O}C$ e $C\hat{O}D$, temos que $x = 70^\circ + 50^\circ = 120^\circ$.

7. Calcule x em cada caso, sabendo que $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo dado.



R.

a)

$$5x - 20 = 2x + 10$$

$$5x - 2x = 10 + 20$$

$$3x = 30$$

$$x = \frac{30}{3}$$

$$x = 10$$

b)

$$\frac{2}{3}x = x - 15$$

$$\frac{2}{3}x - x = -15$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{3}{3}x = -15$$

$$-\frac{1}{3}x = -15$$

$$-x = -15 \cdot 3$$

$$x = 45$$

Lição 70 – Ângulos complementares

1. Determine a medida do complemento de um ângulo de:

a) 35°

R. $90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

b) 40°

R. $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

c) 69°

R. $90^\circ - 69^\circ = 21^\circ$

d) 12°

R. $90^\circ - 12^\circ = 78^\circ$

2. A medida de um ângulo é igual à medida do seu complemento aumentada de 70° .

Qual é a medida desse ângulo?

R. Medida do ângulo: x

Medida do seu complemento: $90^\circ - x$.

$$x = (90^\circ - x) + 70^\circ$$

$$x = 90^\circ - x + 70^\circ$$

$$x = 160^\circ - x$$

$$x + x = 160^\circ$$

$$2x = 160^\circ$$

$$x = \frac{160}{2}$$

$$x = 80^\circ.$$

3. Sabendo que a medida de um ângulo é igual ao quádruplo da medida do seu complemento, determine a medida desse ângulo.

R. Medida do ângulo: x

Medida do seu complemento: $90^\circ - x$.

Quádruplo do seu complemento: $4 \cdot (90^\circ - x) = 360^\circ - 4x$

$$x = 360 - 4x$$

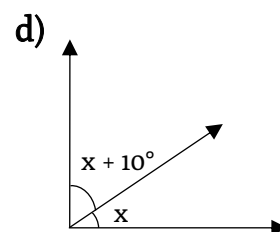
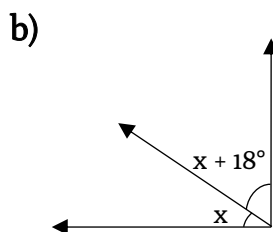
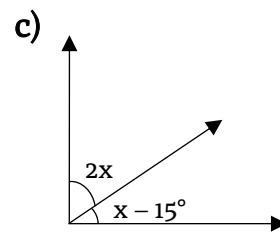
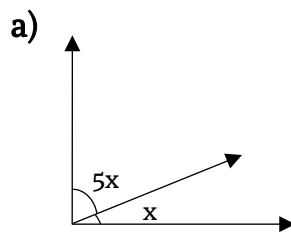
$$x + 4x = 360$$

$$5x = 360$$

$$x = \frac{360}{5}$$

$$x = 72^\circ.$$

4. Calcule x , sabendo que os ângulos são complementares:



R. a)

$$5x + x = 90$$

$$6x = 90$$

$$x = \frac{90}{6}$$

$$x = 15$$

b)

$$x + 18 + x = 90$$

$$2x = 90 - 18$$

$$x = \frac{72}{2}$$

$$x = 36$$

c)

$$2x + x - 15 = 90$$

$$3x = 90 + 15$$

$$x = \frac{105}{3}$$

$$x = 35$$

d)

$$x + 10 + x = 90$$

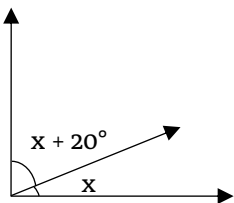
$$2x = 90 - 10$$

$$x = \frac{80}{2}$$

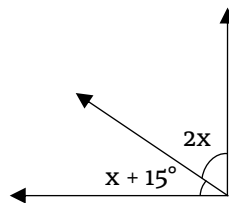
$$x = 40$$

5. Calcule x sabendo que os ângulos são complementares:

a)



b)



R. a)

$$x + 20 + x = 90$$

$$2x = 90 - 20$$

$$x = \frac{70}{2}$$

$$x = 35$$

b)

$$2x + x + 15 = 90$$

$$3x = 90 - 15$$

$$x = \frac{75}{3}$$

$$x = 25$$

6. A medida de um ângulo é a metade da medida do seu complemento. Calcule a medida desse ângulo.

R. Medida de um ângulo: x

Medida de seu complemento: $90 - x$

Metade do seu complemento: $\frac{90 - x}{2}$

$$x = \frac{90 - x}{2}$$

$$2 \cdot x = 90 - x$$

$$2x + x = 90$$

$$3x = 90$$

$$x = \frac{90}{3}$$

$$x = 30^\circ$$

7. O dobro do complemento de um ângulo aumentado de 20° é igual a 70° . Calcule esse ângulo.

R. Medida de um ângulo: x

Medida de seu complemento: $90 - x$

Dobro do seu complemento: $2 \cdot (90 - x) = 180 - 2x$

$$(180 - 2x) + 20 = 70$$

$$180 - 2x + 20 = 70$$

$$200 - 2x = 70$$

$$-2x = 70 - 200$$

$$x = \frac{130}{2}$$

$$x = 65^\circ$$

8. Dois ângulos são complementares, e suas medidas são x e y . Sabe-se, também, que o dobro da medida do menor ângulo é igual à medida do maior, aumentada de 30° . Monte um sistema de duas equações e calcule as medidas x e y desses dois ângulos.

R. Sabendo que são complementares, temos: $x + y = 90$

Consideremos que x seja o menor deles. Sabemos então que $2x + 30 = y$

Dadas as duas equações, podemos substituir y da primeira por $2x + 30$. Assim, temos:

$$x + y = 90$$

$$x + 2x + 30 = 90$$

$$3x = 90 - 30$$

$$x = \frac{60}{3}$$

$$x = 20^\circ$$

Como x e y são complementares, sabemos que $y = 70^\circ$, pois $20^\circ + 70^\circ = 90^\circ$.

9. Calcule a medida de um ângulo que é igual ao dobro do seu complemento.

R. Medida de um ângulo: x

Medida de seu complemento: $90 - x$

Dobro do seu complemento: $2 \cdot (90 - x) = 180 - 2x$

$$x = 180 - 2x$$

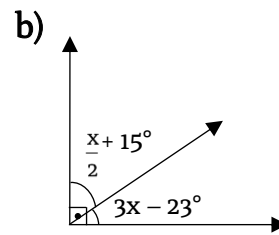
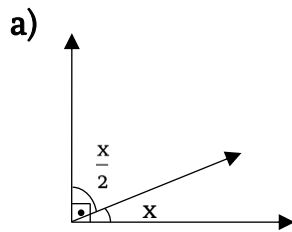
$$x + 2x = 180$$

$$3x = 180$$

$$x = \frac{180}{3}$$

$$x = 60^\circ$$

10. Calcule o x :



R.

$$a) \frac{x}{2} + x = 90$$

$$\frac{3x}{2} = 90$$

$$3x = 90 \cdot 2$$

$$x = \frac{180}{3}$$

$$x = 60$$

R.

$$b) \frac{x}{2} + 15 = 3x - 23$$

$$\left[\frac{x}{2} + 15 = 3x - 23 \right] \cdot 2$$

$$x + 30 = 6x - 46$$

$$6x - x = 30 + 46$$

$$x = \frac{76}{5}$$

$$x = 15,2.$$

Lição 71 – Ângulos suplementares

1. Determine a medida do suplemento de um ângulo de:

a) 75°

c) 150°

b) 135°

d) 9°

R.

a) $180 - 75 = 105^\circ$

b) $180 - 135 = 45^\circ$

c) $180 - 150 = 30^\circ$

d) $180 - 9 = 171^\circ$

2. A medida de um ângulo é igual à terça parte da medida do seu suplemento. Qual é a medida desse ângulo?

R. Medida de um ângulo: x

Medida de seu suplemento: $180 - x$

Terça parte do suplemento: $\frac{180 - x}{3}$

$$x = \frac{180 - x}{3}$$

$$3x = 180 - x$$

$$3x + x = 180$$

$$4x = 180$$

$$x = \frac{180}{4}$$

$$x = 45^\circ$$

3. O triplo da medida de um ângulo é igual ao dobro da medida do seu suplemento. Pede-se a medida desse ângulo.

R. Medida de um ângulo: x

Triplo da medida: $3x$.

Medida de seu suplemento: $180 - x$

Dobro do suplemento: $2 \cdot (180 - x) = 360 - 2x$

$$3x = 360 - 2x$$

$$3x + 2x = 360$$

$$x = \frac{360}{5}$$

$$x = 72^\circ$$

4. A medida do suplemento de um ângulo é igual ao quádruplo da medida do complemento desse mesmo ângulo. Quanto mede esse ângulo?

R. Medida de um ângulo: x

Medida de seu suplemento: $180 - x$

Medida de seu complemento: $90 - x$

Quádruplo do complemento: $4 \cdot (90 - x) = 360 - 4x$

$$180 - x = 360 - 4x$$

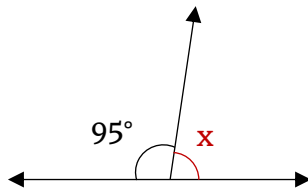
$$-x + 4x = 360 - 180$$

$$x = \frac{180}{3}$$

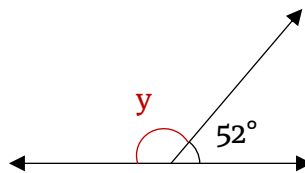
$$x = 60^\circ$$

5. Calcule o valor de x , y e z :

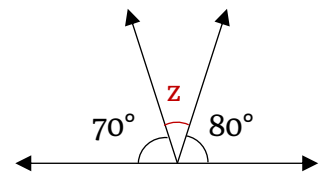
a)



b)



c)



R.

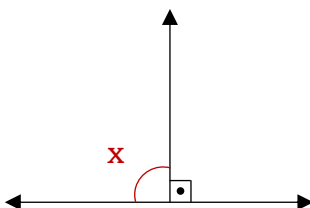
a) $x = 180 - 95 = 85^\circ$

b) $y = 180 - 52 = 128^\circ$

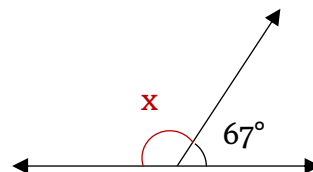
c) $z = 180 - 70 - 80 = 30^\circ$

6. Determine o valor de x :

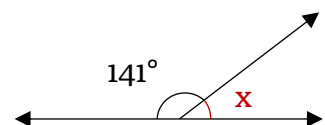
a)



b)



c)



R.

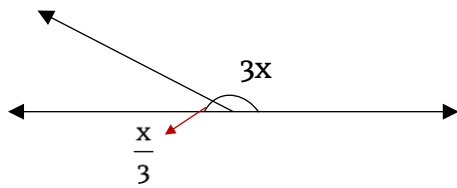
a) $x = 180 - 90 = 90^\circ$

b) $y = 180 - 52 = 128^\circ$

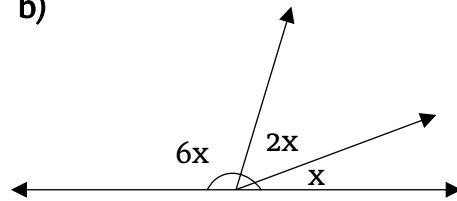
c) $z = 180 - 70 - 80 = 30^\circ$

7. Calcule x , sabendo que os ângulos são suplementares:

a)



b)



R.

$$a) \frac{x}{3} + 3x = 180$$

$$\frac{10x}{3} = 180$$

$$10x = 180 \cdot 3$$

$$x = \frac{540}{10}$$

$$x = 54$$

$$b) 6x + 3x + x = 180$$

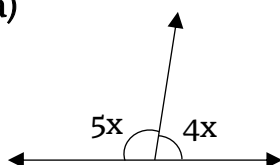
$$10x = 180$$

$$x = \frac{180}{10}$$

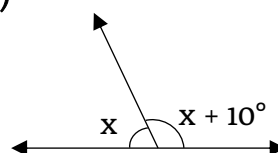
$$x = 18$$

8. Calcule x , sabendo que os ângulos são suplementares:

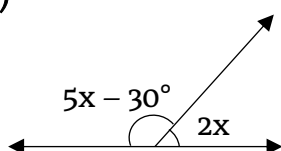
a)



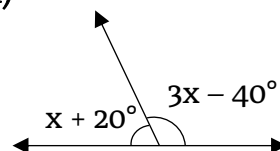
b)



c)



d)



R.

$$a) 5x + 4x = 180$$

$$9x = 180$$

$$x = \frac{180}{9}$$

$$x = 20$$

$$b) x + x + 10 = 180$$

$$2x = 180 - 10$$

$$x = \frac{170}{2}$$

$$x = 85$$

$$c) 5x - 30 + 2x = 180$$

$$7x = 180 + 30$$

$$x = \frac{210}{7}$$

$$x = 30$$

$$d) x + 20 + 3x - 40 = 180$$

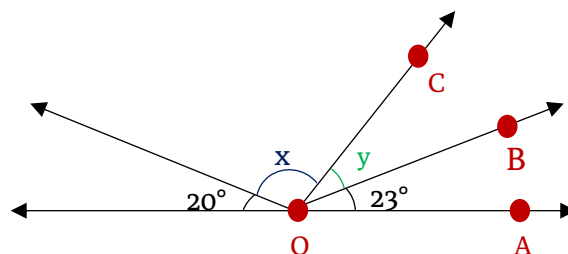
$$4x - 20 = 180$$

$$4x = 180 + 20$$

$$x = \frac{200}{4}$$

$$x = 50$$

9. Sabendo-se que $\overrightarrow{OB}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{AOC}$, quais são as medidas x e y indicadas na figura?



R. Como $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz, sabemos que $\widehat{AOB} \equiv \widehat{BOC}$. Como $\widehat{AOB} = 23^\circ$, portanto $\widehat{BOC} = y = 23^\circ$.
Agora, sabemos que a soma de todos os ângulos deve ser 180° . Portanto,

$$20^\circ + x + y + 23^\circ = 180^\circ$$

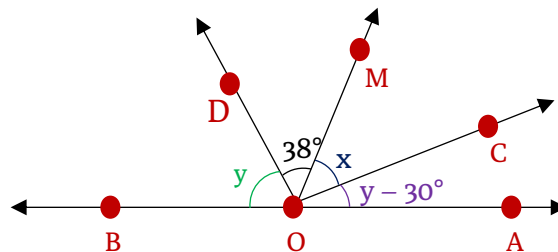
$$20^\circ + x + 23^\circ + 23^\circ = 180^\circ$$

$$x + 66^\circ = 180^\circ$$

$$x = 180 - 66$$

$$x = 114^\circ$$

10. Na figura seguinte, $\overrightarrow{OM}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{COD}$. Nessas condições, dê as medidas x e y indicadas.



R. Como $\overrightarrow{OM}$ é bissetriz, sabemos que $\widehat{DOM} \equiv \widehat{COM}$. Como $\widehat{DOM} = 38^\circ$, portanto $\widehat{COM} = x = 38^\circ$.
Agora, sabemos que a soma de todos os ângulos deve ser 180° . Portanto,

$$y + 38 + x + y - 30 = 180^\circ$$

$$y + 38 + 38 + y - 30 = 180^\circ$$

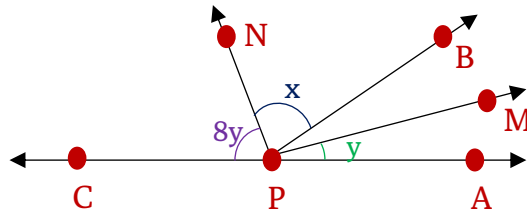
$$2y + 46 = 180^\circ$$

$$2y = 180 - 46$$

$$y = \frac{134}{2}$$

$$y = 67$$

11. Sabendo que $\overrightarrow{PM}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{P}B$ e $\overrightarrow{PN}$ é a bissetriz do ângulo $B\hat{P}C$, determine a medida de x indicada na figura.



R. Como $\overrightarrow{OM}$ é bissetriz, sabemos que $A\hat{P}B \equiv M\hat{P}B$. Portanto, $M\hat{P}B = y$. Além disso, sabemos que $\overrightarrow{PN}$ é bissetriz, então $B\hat{P}N \equiv C\hat{P}N$. Portanto, $x = 8y$.

Ao somar todos os ângulos, temos 180° . Portanto,

$$8y + x + y + y = 180$$

Como $x = 8y$, podemos substituir x por $8y$. Assim, temos:

$$8y + 8y + y + y = 180$$

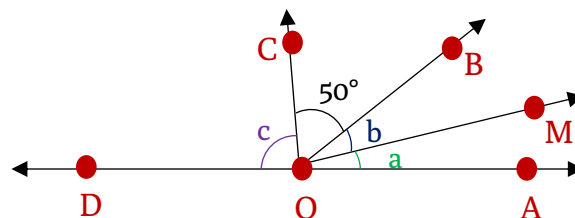
$$18y = 180$$

$$y = \frac{180}{18}$$

$$y = 10$$

Como $y = 10^\circ$, então $x = 8 \cdot 10 = 80^\circ$.

12. Sabendo que $\overrightarrow{OM}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$, escreva uma expressão algébrica que indique a medida c .



R. A soma de todas os ângulos deve ser 180° . Assim, temos:

$$a + b + 50^\circ + c = 180^\circ$$

$$c = 180^\circ - 50^\circ - a - b$$

$$c = 130^\circ - a - b$$

Como $a = b$, temos:

$$c = 130^\circ - b - b$$

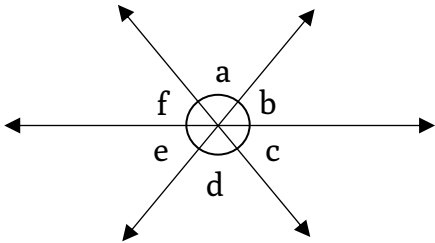
$$c = 130^\circ - 2b$$

Lição 72 - Ângulos opostos pelo vértice

- 1.** Demonstre com suas palavras o teorema que diz que os ângulos OPV são congruentes.

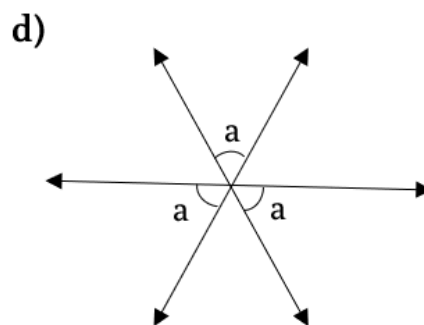
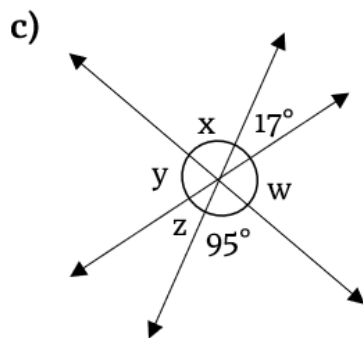
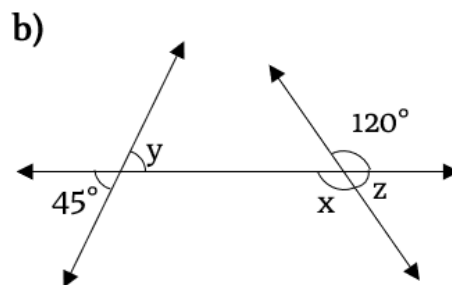
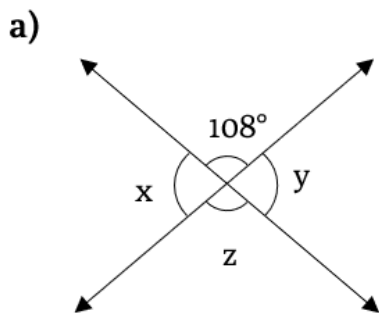
R. A resposta é pessoal, mas deve seguir a lógica da demonstração da apostila.

- 2.** Quais são os três pares de ângulos opostos pelo vértice?



R. $\hat{a}$ é O.P.V de $\hat{d}$; $\hat{b}$ é O.P.V de $\hat{e}$; $\hat{c}$ é O.P.V de $\hat{f}$.

- 3.** Calcule os ângulos indicados pelas letras:



R.

a) 108° é O.P.V de $\hat{z}$, portanto $\hat{z} = 108^\circ$

Além disso, sabemos que 108° é o ângulo suplementar de $\hat{x}$ e de $\hat{y}$. Portanto, temos:

$$\hat{x} = \hat{y} = 180 - 108$$

$$\hat{x} = \hat{y} = 72^\circ$$

b) 45° é O.P.V de $\hat{y}$, portanto $\hat{y} = 45^\circ$.

120° é O.P.V de $\hat{x}$, portanto $\hat{x} = 120^\circ$.

Além disso, sabemos que 120° é o ângulo suplementar de $\hat{z}$. Portanto, temos:

$$\hat{z} = 180 - 120$$

$$\hat{z} = 60^\circ$$

c) 17° é O.P.V de $\hat{z}$, portanto $\hat{z} = 17^\circ$.

95° é O.P.V de $\hat{x}$, portanto $\hat{x} = 95^\circ$.

Além disso, sabemos $17^\circ + w + 95^\circ$ é igual a 180. Resolvendo essa equação, temos:

$$17 + w + 95 = 180$$

$$w = 180 - 17 - 95$$

$$w = 68^\circ$$

d) Todos os ângulos dessa figura possuem a mesma medida. Basta aplicar o princípio do O.P.V para perceber. Sabemos que em um círculo, a soma de todos os ângulos é sempre 360° . Portanto, temos:

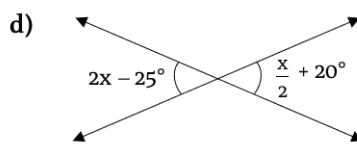
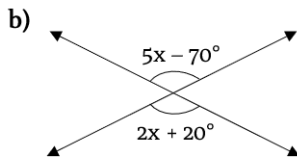
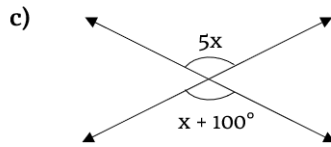
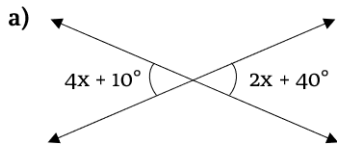
$$a + a + a + a + a + a = 360$$

$$6a = 360$$

$$a = \frac{360}{6}$$

$$a = 60^\circ$$

4. Calcule:



R. Em todos os casos, os ângulos são O.P.V. Portanto, precisamos os igualar e resolver as equações:

a)

$$4x + 10 = 2x + 40$$

$$4x - 2x = 40 - 10$$

$$2x = 30$$

$$x = \frac{30}{2}$$

$$x = 15$$

b)

$$5x - 70 = 2x + 20$$

$$5x - 2x = 20 + 70$$

$$3x = 90$$

$$x = \frac{90}{3}$$

$$x = 30.$$

c)

$$5x = x + 100$$

$$5x - x = 100$$

$$4x = 100$$

$$x = \frac{100}{4}$$

$$x = 25$$

d)

$$2x - 25 = \frac{x}{2} + 20$$

$$[2x - 25 = \frac{x}{2} + 20] \cdot 2$$

$$4x - 50 = x + 40$$

$$4x - x = 40 + 50$$

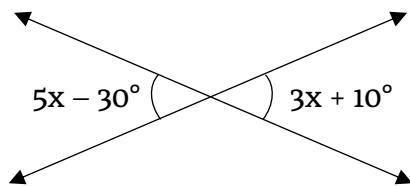
$$3x = 90$$

$$x = \frac{90}{3}$$

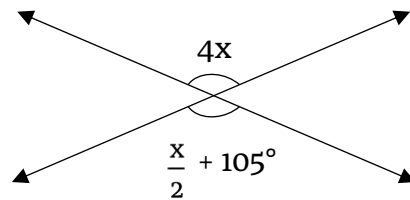
$$x = 30$$

5. Calcule x:

a)



b)



R. a)

$$5x - 30 = 3x + 10$$

$$5x - 3x = 10 + 30$$

$$2x = 40$$

$$x = \frac{40}{2}$$

$$x = 20$$

a)

$$4x = \frac{x}{2} + 105$$

$$[4x = \frac{x}{2} + 105] \cdot 2$$

$$8x = x + 210$$

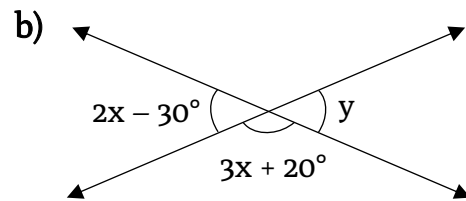
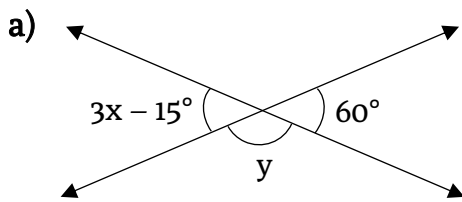
$$8x - x = 210$$

$$7x = 210$$

$$x = \frac{210}{7}$$

$$x = 30$$

6. Calcole x e y:



R. a)

$$3x - 15 = 60$$

$$3x = 60 + 15$$

$$3x = 75$$

$$x = \frac{75}{3}$$

$$x = 25$$

$$y + 60 = 180$$

$$y = 180 - 60$$

$$y = 120$$

b)

$$2x - 30 + 3x + 20 = 180$$

$$5x - 10 = 180$$

$$5x = 180 + 10$$

$$x = \frac{190}{5}$$

$$x = 38$$

$$2x - 30 = y$$

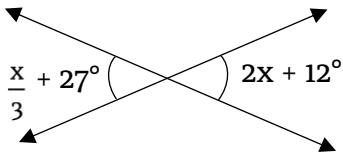
$$2 \cdot 38 - 30 = y$$

$$76 - 30 = y$$

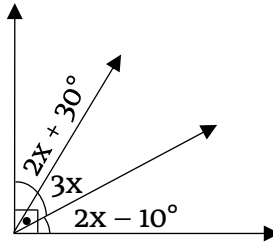
$$y = 46.$$

7. Calcule x:

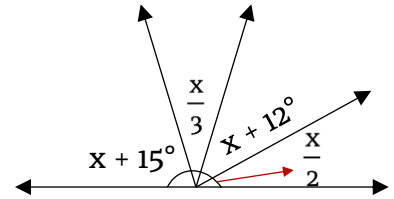
a)



b)



c)



R. a)

$$\left[\frac{x}{3} + 27 = 2x + 12 \right] \cdot 3$$

$$x + 81 = 6x + 36$$

$$6x - x = 81 - 36$$

$$5x = 45$$

$$x = \frac{45}{5}$$

$$x = 9$$

b)

$$2x + 30 + 3x + 2x - 10 = 90$$

$$7x + 20 = 90$$

$$7x = 90 - 20$$

$$7x = 70$$

$$x = 10$$

c)

$$\left[x + 15 + \frac{x}{3} + x + 12 + \frac{x}{2} = 180 \right] \cdot 6$$

$$6x + 90 + 2x + 6x + 72 + 3x = 1080$$

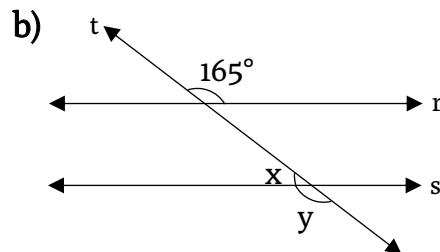
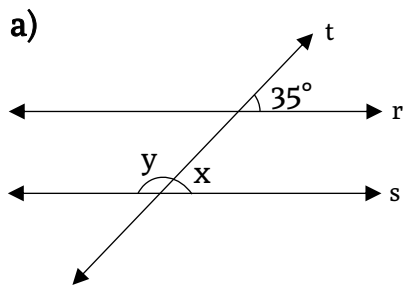
$$17x + 162 = 1080$$

$$17x = 1080 - 162$$

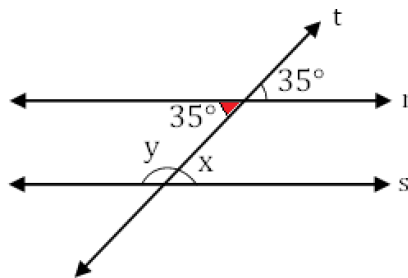
$$x = \frac{918}{17}$$

$$x = 54.$$

8. Sabendo que $r \parallel s$, determine os ângulos indicados pelas letras:



R. a) O Ângulo de 35° é um ângulo oposto pelo vértice com o ângulo vermelho.



O ângulo vermelho é Alternos Internos com x , então $x = 35^\circ$ e como x e y são ângulos suplementares, temos que:

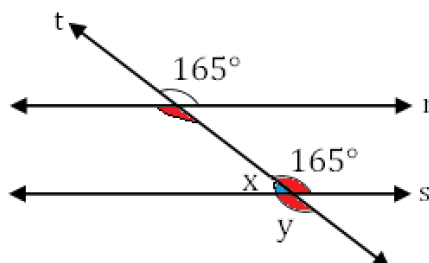
$$x + y = 180^\circ$$

$$35^\circ + y = 180^\circ$$

$$y = 180^\circ - 35^\circ$$

$$y = 145^\circ$$

b) O Ângulo de 165° é um ângulo oposto pelo vértice com o ângulo vermelho.



O ângulo vermelho é Alternos Internos com o ângulo suplementar a x , então temos que

$$x + 165^\circ = 180^\circ$$

$$x = 15^\circ$$

Como o ângulo y é oposto pelo vértice com o ângulo vermelho de 165° temos que $y = 165^\circ$.

Lição 73 – Triângulos

1. Construa um triângulo equilátero.

R. Ver construção passo a passo na apostila.

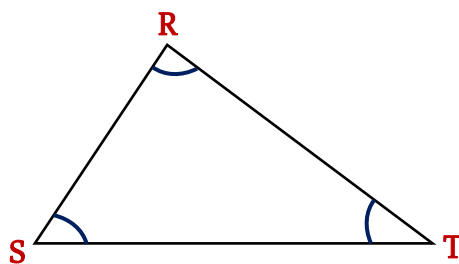
2. Construa um triângulo isósceles.

R. Ver construção passo a passo na apostila.

3. Construa um triângulo escaleno.

R. Ver construção passo a passo na apostila.

4. Observe o triângulo e responda:



a) Quais são os vértices?

R. R, S e T.

b) Quais são os lados?

R. $\overline{RS}$, $\overline{ST}$, $\overline{TR}$

c) Quais são os ângulos?

R. $\hat{R} = \widehat{SRT}$; $\hat{S} = \widehat{RST}$; $\hat{T} = \widehat{RTS}$.

5. O perímetro de um triângulo é 23 cm. Dois lados medem, respectivamente, 6 cm e 8 cm. Calcule a medida do terceiro lado.

R.

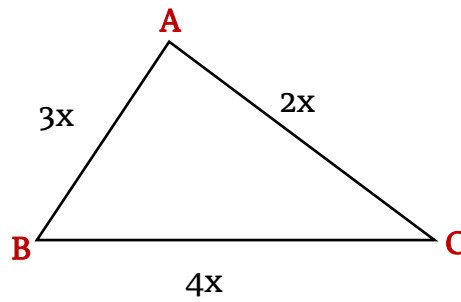
$$6 + 8 + x = 23$$

$$14 + x = 23$$

$$x = 23 - 14$$

$$x = 9 \text{ cm.}$$

6. Qual é o valor de x quando o perímetro é 45 cm?



R.

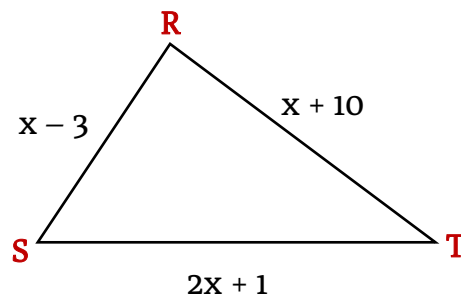
$$3x + 4x + 2x = 45$$

$$9x = 45$$

$$x = \frac{45}{9}$$

$$x = 5$$

7. O perímetro do triângulo é 56 cm. Determine o comprimento do menor lado.



R.

$$x - 3 + x + 10 + 2x + 1 = 56$$

$$4x + 8 = 56$$

$$4x = 56 - 8$$

$$x = \frac{48}{4}$$

$$x = 12$$

O menor lado mede $\overline{RS} = x - 3 = 12 - 3 = 9 \text{ cm}$

8. O perímetro de um triângulo é 63 cm. As medidas dos lados são dadas por três números ímpares e consecutivos. Quanto mede o maior lado desse triângulo?

R. Se x é um número ímpar, o ímpar consecutivo a ele seria dado por $x + 2$, e o próximo por $x + 4$. Observe o exemplo:

Considere o número ímpar 5.

O próximo ímpar é 7, que pode ser escrito como $5 + 2$.

O próximo seria 9, que pode ser escrito como $5 + 4$.

Assim, se o ímpar considerado é x , o próximo ímpar será $x + 2$, e o próximo $x + 4$.

Se o perímetro é 63 cm, significa que a soma dos três números ímpares precisa ser 63. Portanto, temos:

$$x + (x + 2) + (x + 4) = 63$$

$$3x + 6 = 63$$

$$3x = 63 - 6$$

$$x = \frac{57}{3}$$

$$x = 19$$

Descobrimos o valor de x . Resta agora descobrir os outros dois lados:

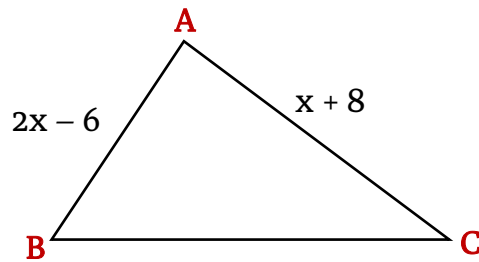
$$x = 19$$

$$x + 2 = 19 + 2 = 21$$

$$x + 4 = 19 + 4 = 23.$$

Portanto, o maior lado mede 23 cm.

9. Na figura a seguir o triângulo ABC é isósceles e o lado com medida diferente é $\overline{BC}$. Calcule x.



R. Como o triângulo é isósceles, dois de seus lados são congruentes. Como o enunciado já nos diz que o lado diferente é $\overline{BC}$, portanto $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$. Logo,

$$2x - 6 = x + 8$$

$$2x - x = 8 - 6$$

$$x = 2$$

10. Os lados de um triângulo medem 10 cm, 13 cm e 13 cm. Como se chama esse triângulo?

R. Triângulo isósceles, pois dois de seus lados são congruentes.

11. Existe ou não um triângulo com lados medindo:

a) 3 cm, 4 cm e 5 cm?

R. Sim, pois a soma de dois lados é sempre maior que o terceiro lado.

$$3 + 4 > 5$$

$$7 > 5$$

$$4 + 5 > 3$$

$$9 > 3$$

$$3 + 5 > 4$$

$$8 > 4$$

b) 6 cm, 9 cm e 18 cm?

R. Não, pois nem sempre a soma de dois lados é maior que o terceiro lado.

$$6 + 9 < 18$$

$$15 < 18$$

c) 2 cm, 4 cm e 6 cm?

R. Não, pois nem sempre a soma de dois lados é maior que o terceiro lado.

$$2 + 4 = 6$$

$$6 = 6$$

d) 4 cm, 6 cm e 8 cm?

R. Sim, pois a soma de dois lados é sempre maior que o terceiro lado.

$$4 + 6 > 8$$

$$10 > 8$$

$$4 + 8 > 6$$

$$12 > 6$$

$$6 + 8 > 4$$

$$14 > 4$$

12. Podemos construir um triângulo com segmentos de 4 cm, 5 cm e 9 cm? Por quê?

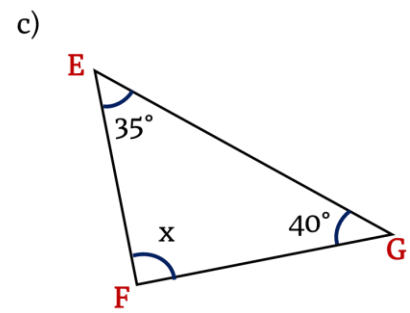
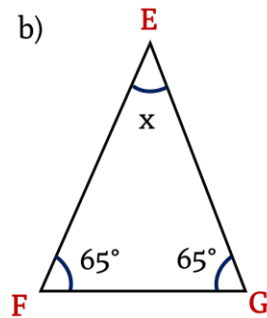
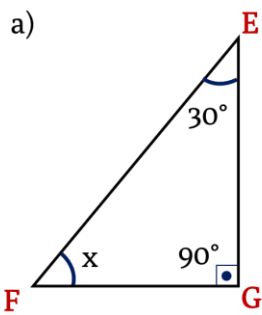
R. Não, pois a soma de 4 e 5 não é maior que 9, e para construir um triângulo a soma de dois lados sempre precisa ser maior que o terceiro lado.

13. Dois lados de um triângulo isósceles medem 25 cm e 10 cm. Qual poderá ser a medida do terceiro lado?

R. Como o triângulo é isósceles, temos que o terceiro lado medirá ou 25 cm ou 10 cm, pois dois lados precisam ter o mesmo tamanho. No entanto, se fosse 10 cm, a soma dos dois lados iguais seria menor que o lado maior, uma vez que $10 + 10 < 25$. Sendo assim, o terceiro lado precisa medir 25 cm, satisfazendo as duas condições: é isósceles, pois tem dois lados com a mesma medida, isto é 25 cm; é um triângulo possível, pois a soma de dois lados é sempre maior que o terceiro lado.

Lição 74 – Soma dos ângulos internos

1. Determine x em cada um dos triângulos:



R. Como a soma dos três ângulos de um triângulo é sempre 180° , basta subtrair de 180° os ângulos já conhecidos.

a) $x + 90 + 30 = 180$

$x = 180 - 90 - 30$

$x = 60^\circ$.

b) $x + 65 + 65 = 180$

$x = 180 - 65 - 65$

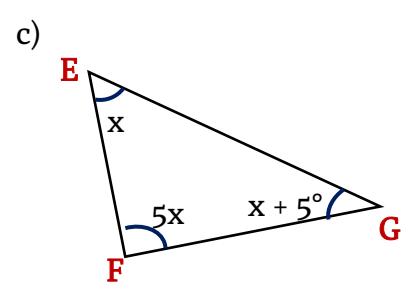
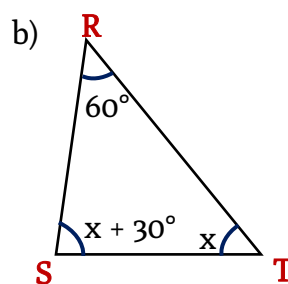
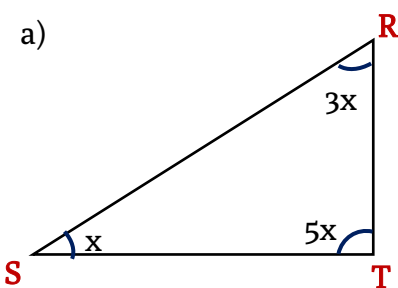
$x = 50^\circ$.

c) $x + 35 + 40 = 180$

$x = 180 - 40 - 35$

$x = 105^\circ$

2. Determine x em cada um dos triângulos:



R.

a) $x + 3x + 5x = 180$

$$9x = 180$$

$$x = \frac{180}{9}$$

$$x = 20$$

$$b) x + 30 + 60 + x = 180$$

$$2x + 90 = 180$$

$$2x = 180 - 90$$

$$x = \frac{90}{2}$$

$$x = 45$$

$$c) x + 5x + x + 5 = 180$$

$$7x + 5 = 180$$

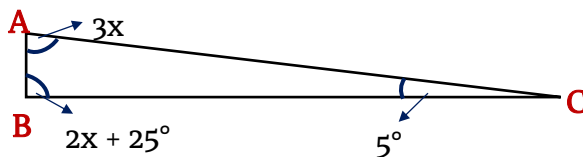
$$7x = 180 - 5$$

$$x = \frac{175}{7}$$

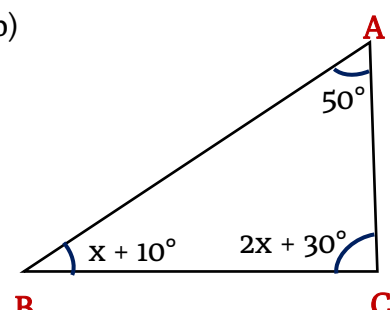
$$x = 25$$

3. Determine x em cada um dos triângulos:

a)



b)



R.

$$a) 3x + 2x + 25 + 5 = 180$$

$$5x + 30 = 180$$

$$5x = 180 - 30$$

$$x = \frac{150}{5}$$

$$x = 30$$

$$b) x + 10 + 2x + 30 + 50 = 180$$

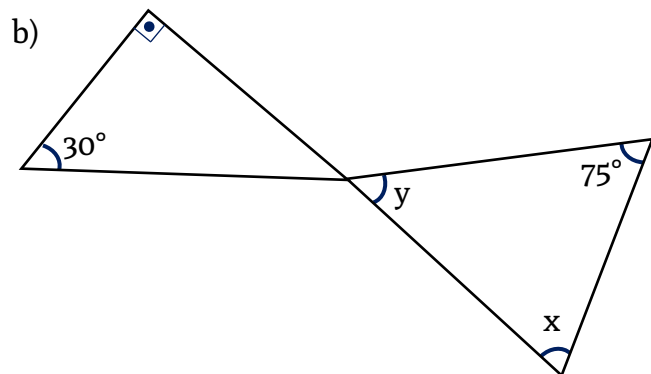
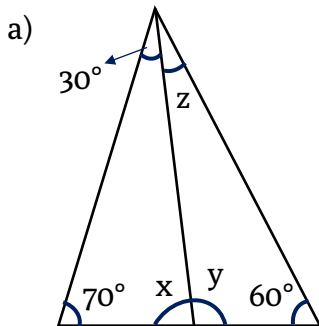
$$3x + 60 = 180$$

$$3x = 180 - 60$$

$$x = \frac{120}{3}$$

$$x = 60$$

4. Calcule os ângulos indicados pelas letras:



R.

a)

$$70 + x + 30 = 180$$

$$x + 100 = 180$$

$$x = 180 - 100$$

$$x = 80^\circ$$

x e y são suplementares. Portanto,

$$x + y = 180$$

$$80 + y = 180$$

$$y = 180 - 80$$

$$y = 100$$

Agora, sabemos que $y + z + 60 = 180$. Assim, temos:

$$y + z + 60 = 180$$

$$100 + z + 60 = 180$$

$$z + 160 = 180$$

$$z = 180 - 160$$

$$z = 20$$

b) Temos a medida de três ângulos:

- No triângulo mais à esquerda sabemos duas medidas: 30° e 90° . Portanto, sabemos que a medida do terceiro ângulo desse triângulo é 60° , pois $180 - 30 - 90 = 60^\circ$.

É possível perceber que o ângulo de 60° é O.P.V de y . Portanto, $y = 60^\circ$.

- No triângulo mais à direita, temos:

$$x + y + 75 = 180$$

$$x + 60 + 75 = 180$$

$$x = 180 - 60 - 75$$

$$x = 45^\circ$$

1. Explique a classificação dos triângulos de acordo com os seus ângulos dando um exemplo para cada.

R. Um triângulo será:

- Retângulo, se tiver um ângulo reto (isto é, um ângulo de 90°).
- Acutângulo, se os três ângulos forem agudos, isto é, menores que 90° .
- Obtusângulo, se tem um ângulo obtuso, isto é, um ângulo maior que 90° .

2. Construa um triângulo retângulo tendo a medida de dois lados.

R. Sugestão: construa os dois catetos e o ângulo reto entre eles.

3. Desenhe o transporte de ângulos.

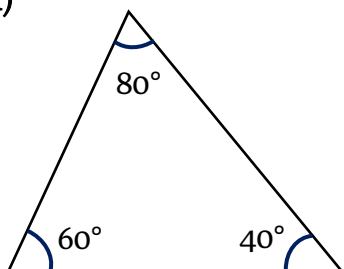
R. Ver exemplo na apostila.

4. Construa um triângulo tendo um lado e os dois ângulos.

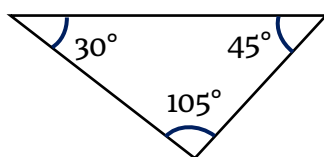
R. Ver exemplo na apostila.

5. Classifique os triângulos em acutângulo, retângulo e obtusângulo.

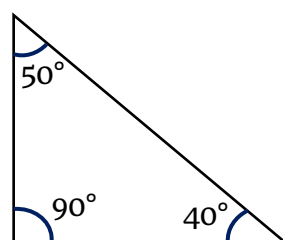
a)



b)



c)



R.

a) acutângulo.

b) obtusângulo.

c) retângulo.

1. O que significa dizer que dois segmentos são congruentes? E o que significa dizer que dois ângulos são congruentes?

R. Dizer que dois segmentos são congruentes significa dizer que ambos possuem a mesma medida, de tal forma que é possível sobrepor um ao outro.

Dois ângulos são congruentes se possuem a mesma medida.

2. Quais são as condições para que dois triângulos sejam congruentes?

R. Dois triângulos são congruentes se, ao sobrepor os vértices correspondentes, tivermos lado por lado congruente, e ângulo por ângulo congruente.

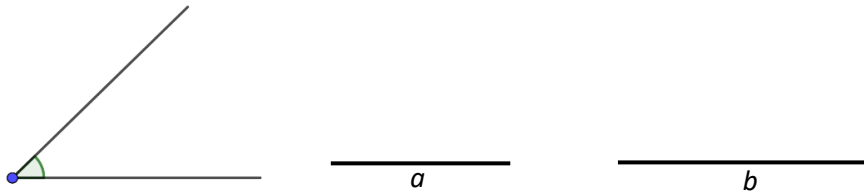
3. Qual é a relação entre os vértices e lados homólogos?

R. A relação é que, se dois vértices se correspondem, os lados opostos a eles são homólogos.

4. O que são os casos de congruências?

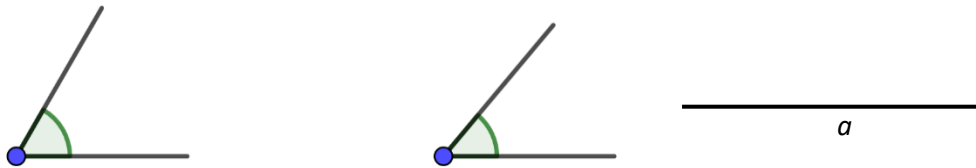
R. Os casos de congruência são condições mínimas que podemos considerar para afirmar que dois triângulos são congruentes, sem precisar verificar todos os elementos de congruência entre os dois triângulos.

1. Construa em pelo menos três posições diferentes um triângulo, dados dois de seus lados e um ângulo. Qual é o caso de congruência que eles apresentam entre si?



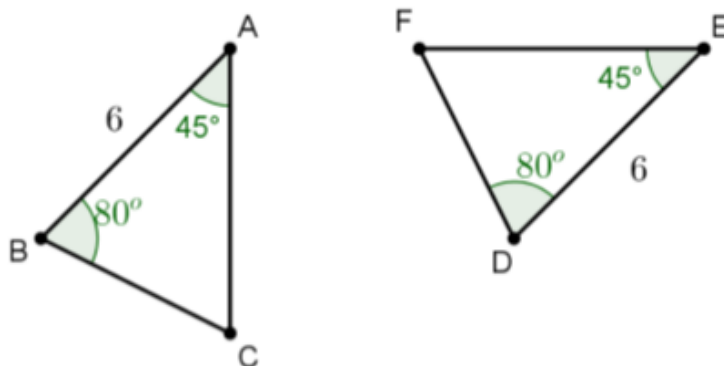
R. Caso L.A.L.

2. Construa em pelo menos três posições diferentes um triângulo, dados dois de seus ângulos e o lado entre eles. Qual é o caso de congruência que eles apresentam entre si?



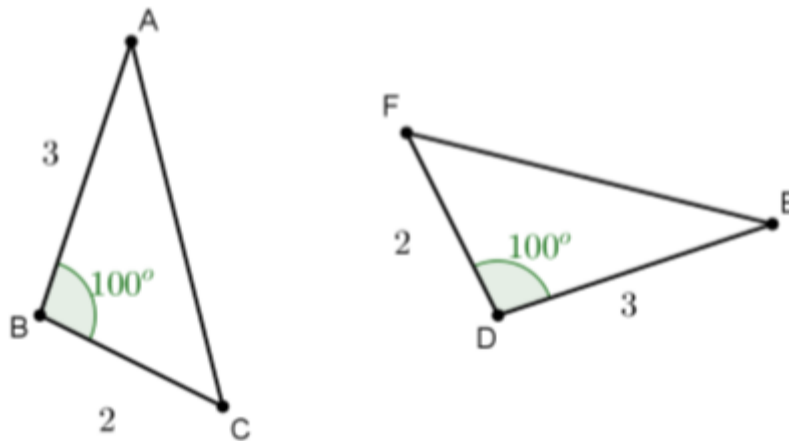
R. Caso A.L.A.

3. Os triângulos abaixo são congruentes pelo caso L.A.L. Determine os lados homólogos e os vértices correspondentes desta congruência.



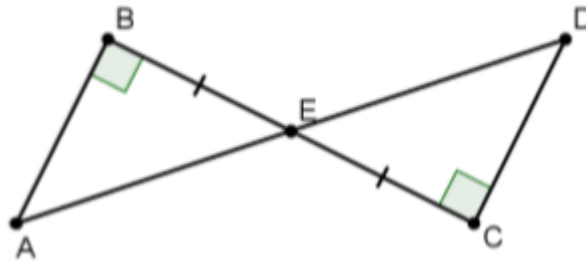
R. O vértice A corresponde ao vértice E, o vértice B ao vértice D e o vértice C corresponde ao vértice F. Consequentemente, os lados homólogos são: $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$, $\overline{AC}$ e $\overline{EF}$, $\overline{BC}$ e $\overline{DF}$.

4. Os triângulos ABC e DEF são congruentes?



R. Sim, pelo caso L.A.L. Basta corresponder os vértices B e D, A e E, C e F. Assim, os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ se mostram congruentes, bem como os lados $\overline{AB}$ e $\overline{ED}$ e os lados $\overline{BC}$ e $\overline{DF}$.

5. Na figura, temos $\overline{AB} = 30$, $\overline{DE} = 50$, $\overline{AE} = 3x - 1$ e $\overline{CD} = 2y + 8$. Determine os valores de x e y.



R. Os triângulos ABE e DCE são congruentes pelo caso A.L.A. Veja:

- Os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são congruentes. $\hat{B} \equiv \hat{D}$.
- Os lados $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$ são congruentes, pelo que indica o traço vertical.
- Os ângulos $\hat{BEA}$ e $\hat{DEC}$ são O.P.V, e portanto, congruentes.

Sendo assim, ao corresponder vértice por vértice, teremos as seguintes relações:

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD}$$

$$30 = 2y + 8$$

$$2y = 30 - 8$$

$$y = \frac{22}{2}$$

$$y = 11$$

$$\overline{AE} \equiv \overline{DE}$$

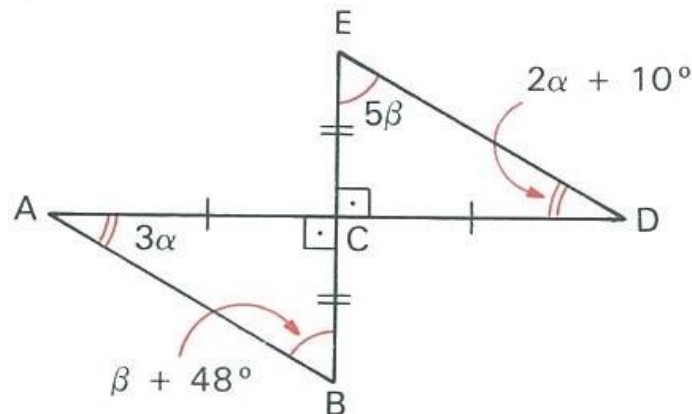
$$3x - 1 = 50$$

$$3x = 50 + 1$$

$$x = \frac{51}{3}$$

$$x = 17$$

6. Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEC. Determine o valor de α e β .



R. Sabemos que os triângulos são congruentes. Os vértices correspondentes são A e D, B e E, e o vértice comum C e C. Assim, temos:

$$\hat{E} \equiv \hat{B}$$

$$5\beta = \beta + 48$$

$$5\beta - \beta = 48$$

$$4\beta = 48$$

$$\beta = \frac{48}{4}$$

$$\beta = 12.$$

$$\hat{A} \equiv \hat{D}$$

$$3\alpha = 2\alpha + 10$$

$$3\alpha - 2\alpha = 10$$

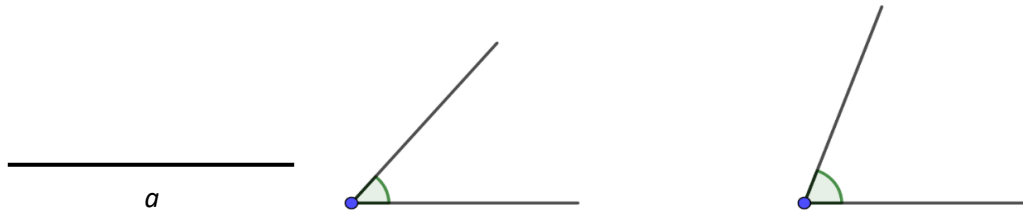
$$\alpha = 10$$

Lição 78 - Casos de congruência - Parte II

1. Construa em pelo menos três posições diferentes um triângulo, dados seus três lados. Qual é o caso de congruência que eles apresentam entre si?



2. Construa em pelo menos três posições diferentes um triângulo, dados um lado, um ângulo adjacente a este lado e o ângulo oposto a este lado. Qual é o caso de congruência que eles apresentam entre si?



3. Construa um triângulo, utilizando régua, compasso e transferidor, com as seguintes medidas e depois responda ao que se pede:

a) Ângulos: 30° e 60° ; Lado entre os dois ângulos: 5 cm. Quanto mede o outro ângulo?

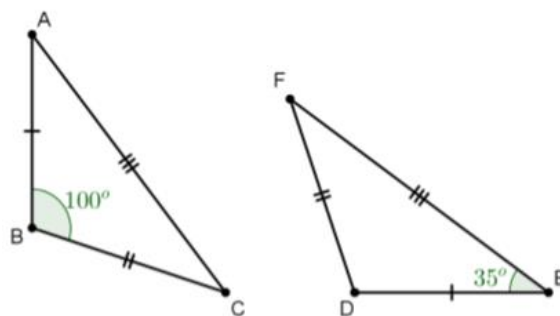
R. 90° .

b) Lados: 3 cm, 4 cm e 5 cm.

c) Lados: 2,5 cm e 3,5 cm; Ângulo entre eles: 45° . Quanto medem os outros dois ângulos?

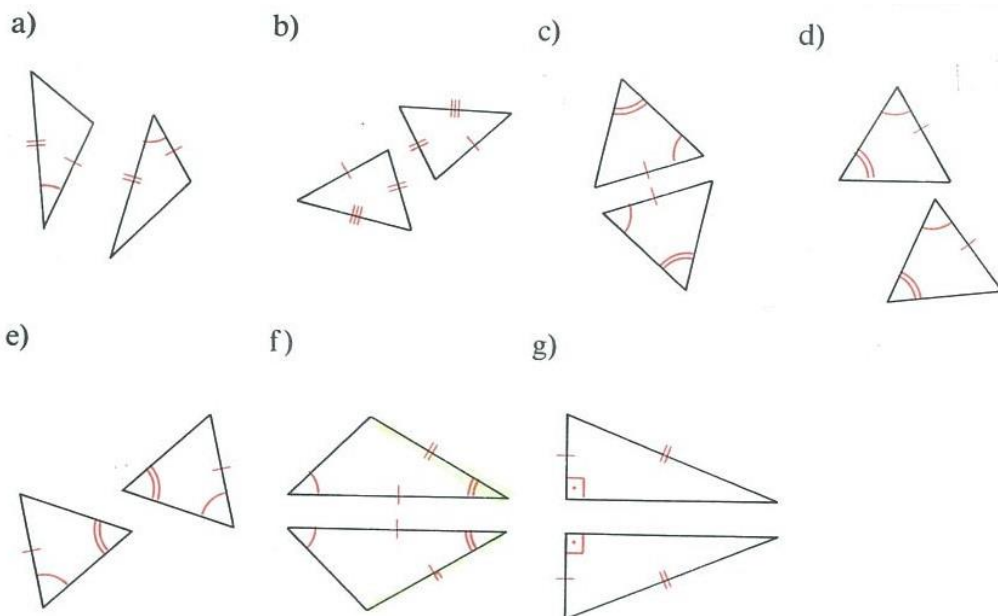
R. 45° e 90° .

4. Calcule os ângulos internos dos triângulos abaixo.



R. Pelo caso L.L.L, podemos concluir que os triângulos são congruentes. Portanto, sabemos que um dos ângulos mede 100° e o outro mede 35° (aqui, pouco importa saber a correspondência entre os vértices, uma vez que queremos apenas saber a medida dos ângulos do triângulo). Assim, temos o terceiro ângulo mede: $180 - 100 - 35 = 45^\circ$.

5. Os pares de triângulos abaixo são congruentes. Indique o caso de congruência.



R. a) L.A.L

b) L.L.L

c) A.A.L

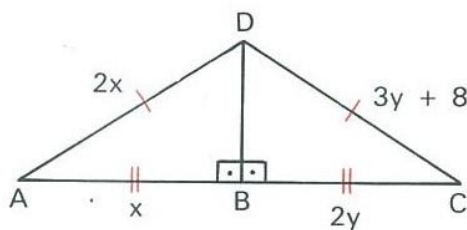
d) A.A.L

e) A.A.L

f) A.L.A ou L.A.L ou A.A.L

g) A.A.L

6. Na figura abaixo, o triângulo ABD é congruente ao triângulo CBD. Calcule x e y e os lados do triângulo ACD.



R. Pela congruência, temos que $\overline{DA} \equiv \overline{DC}$ e que $\overline{BA} \equiv \overline{BC}$. Portanto, temos:

$$\overline{DA} \equiv \overline{DC}$$

$$2x = 3y + 8$$

$$x = \frac{3y + 8}{2}$$

$$\overline{BA} \equiv \overline{BC}$$

$$x = 2y$$

Se $x = \frac{3y+8}{2}$ e $x = 2y$, temos que:

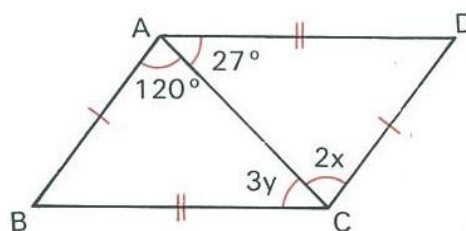
$$\begin{aligned} x &= x \\ \frac{3y+8}{2} &= 2y \end{aligned}$$

$$3y + 8 = 2y \cdot 2$$

$$8 = 4y - 3y$$

$$y = 8$$

7. Na figura abaixo, os triângulos ABC e CDA são congruentes. Calcule x e y .



R.

$$2x = 120$$

$$x = \frac{120}{2}$$

$$x = 60$$

$$3y = 27$$

$$y = \frac{27}{3}$$

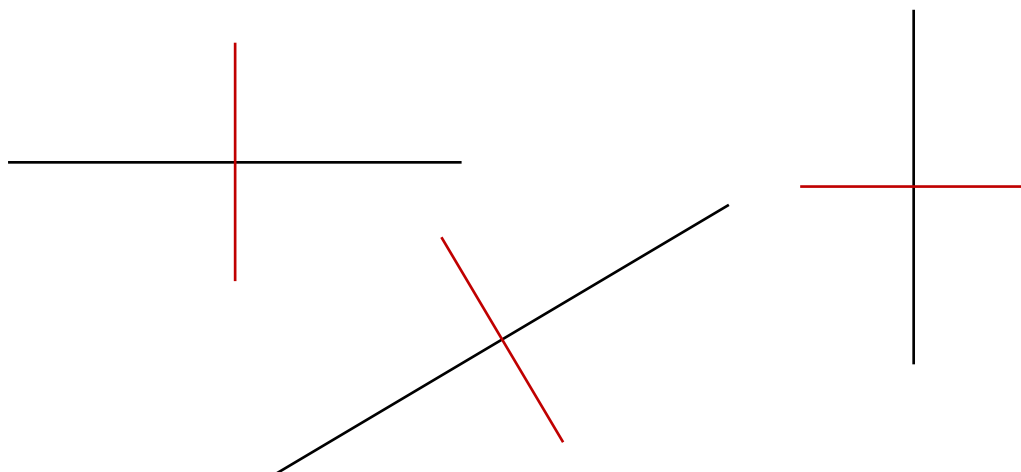
$$y = 9$$

Lição 79 – Mediatriz de um segmento

1. O que é a mediatriz de um segmento?

R. Mediatriz é a reta perpendicular ao segmento e que passa pelo ponto médio do segmento.

2. Encontre a mediatriz dos segmentos abaixo:



3. Responda corretamente:

- a) Em um segmento de 15 cm, a mediatriz passará pelo ponto que se localiza em 7,5 cm.
- b) Em um segmento de 10 cm, a mediatriz passará pelo ponto que se localiza em 5 cm.
- c) Construa um segmento de 15 cm e outro de 10 cm e, utilizando o compasso, trace a mediatriz. Depois, utilizando a régua, verifique se a mediatriz passou pelos pontos que foram indicados em a) e b).

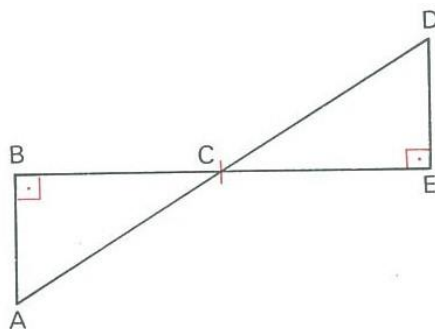
4. Demonstre o teorema “Se P é um ponto da mediatriz, então $PA \equiv PB$ ”.

R. Compare sua demonstração com a demonstração da apostila.

5. Construa um triângulo qualquer. Trace a mediatriz de cada lado. O que é possível observar?

Lição 80 – Congruência em um triângulo isósceles e retângulo

1. Na figura abaixo, sabendo que C é o ponto médio de BE, mostre que os triângulos ABC e DEC são congruentes.



R. Uma vez que C é ponto médio de $\overline{BE}$, temos que $\overline{BC} \equiv \overline{EC}$. Além disso, é possível notar que $\widehat{ACB}$ e $\widehat{DCE}$ são O.P.V, sendo assim, iguais. Portanto, temos:

- $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$.
- $\overline{BC} \equiv \overline{EC}$.
- $\widehat{ACB} \equiv \widehat{DCE}$.

Pelo caso A.L.A, $ABC \equiv DEC$.

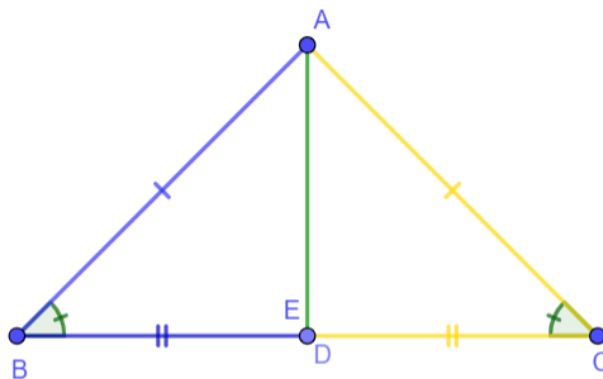
2. Demonstre, da maneira que preferir, o teorema “Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes” (sem consulta).

R. Compare sua demonstração com a demonstração da apostila.

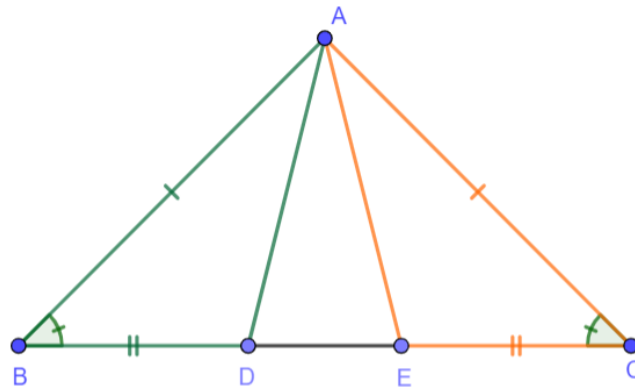
3. No triângulo isósceles ABC, de base BC, marcamos sobre o lado BC os pontos D e E, de maneira que $BD \equiv EC$. Mostre que os triângulos ADB e AEC são congruentes.

R. Nesse problema, temos que considerar três possibilidades.

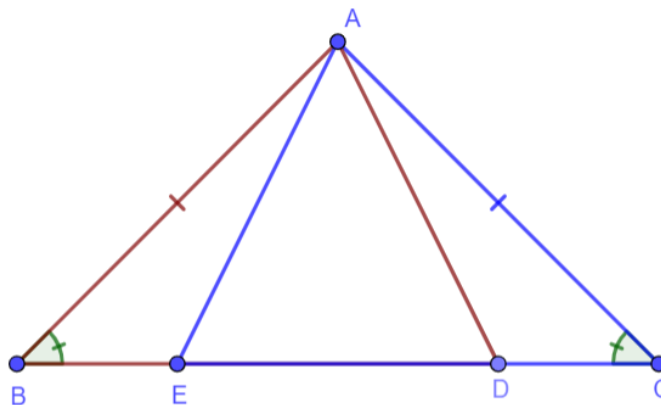
1ª possibilidade: D e E coincidem. Como o triângulo é isósceles, sabemos que $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$ e que $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$. Pelo enunciado, temos que $\overline{BD} \equiv \overline{EC}$. Assim, pelo caso L.A.L, sabemos que ADB é congruente a AEC.



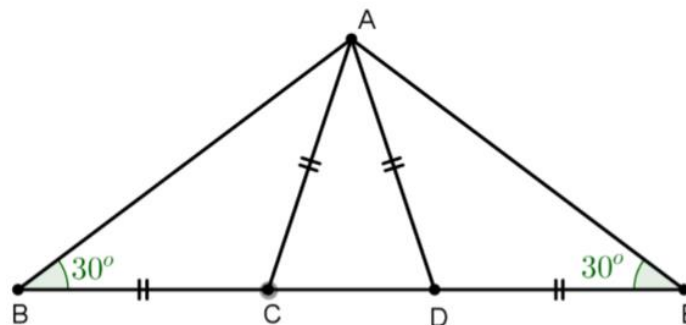
2ª possibilidade: D e E não coincidem . Como o triângulo é isósceles, sabemos que $\hat{B} \equiv \hat{C}$ e que- $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$. Pelo enunciado, temos que $\overline{BD} \equiv \overline{EC}$. Assim, pelo calo L.A.L, sabemos que ADB é congruente a AEC.



3ª possibilidade: D e E não coincidem . Como o triângulo é isósceles, sabemos que $\hat{B} \equiv \hat{C}$ e que- $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$. Pelo enunciado, temos que $\overline{BD} \equiv \overline{EC}$. Assim, pelo calo L.A.L, sabemos que ADB é congruente a AEC.



4. Na figura, ABC é um triângulo e $BC = CA = AD = DE$. Determine a medida de $\hat{DAC}$.



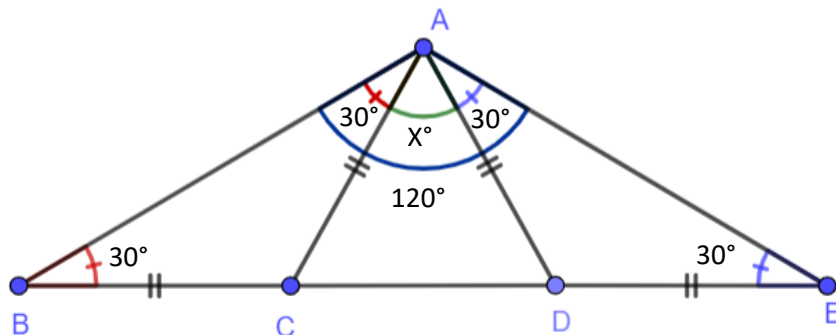
R. Considerando o triângulo ABE, temos que o ângulo $\hat{BAE}$ mede: $180 - 30 - 30 = 120^\circ$.
Considerando o triângulo ABC, notamos que ele é isósceles e que, portanto, $\hat{A} \equiv \hat{B}$.
Assim, $\hat{BAC} = 30^\circ$

De maneira semelhante, considerando o triângulo AED, notamos que ele é isósceles e que, portanto, $\hat{A} \equiv \hat{E}$. Assim, $\widehat{EAD} = 30^\circ$

Por fim, sabemos a medida total do ângulo A, e também duas partes separadas. A terceira parte pode ser encontrada da seguinte maneira:

$$\widehat{DAC} = 120 - 30 - 30$$

$$\widehat{DAC} = 60^\circ$$



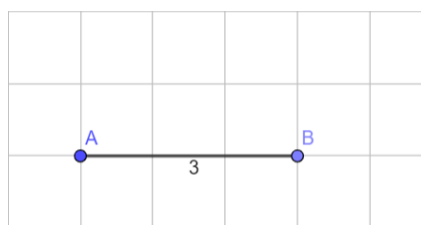
5. Em que tipo de triângulo se aplica o caso de congruência C.H.? Demonstre este caso de congruência.

R. No triângulo retângulo. Comparar sua demonstração com a demonstração da apostila.

6. Construa um triângulo retângulo em que são dadas as medidas da hipotenusa e de um cateto. (*Dica: utilize a medida do cateto como base.*)

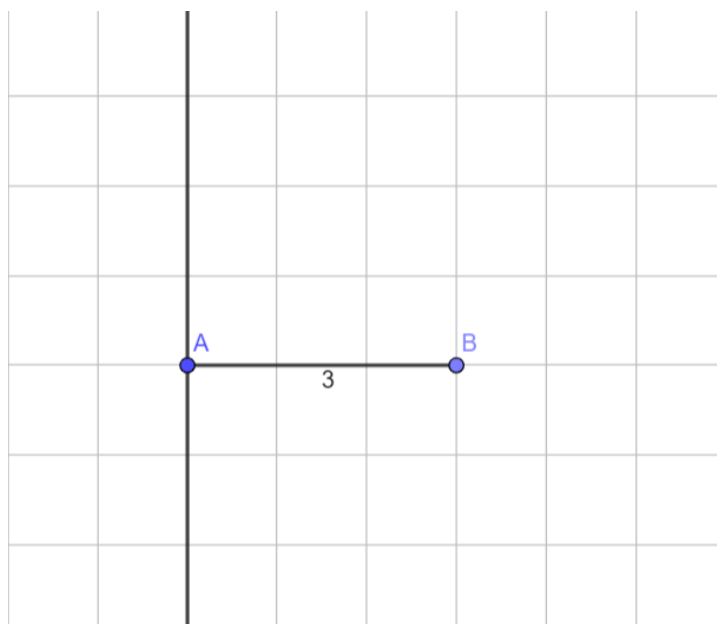
a) Ca = 3 cm, Hip = 5 cm

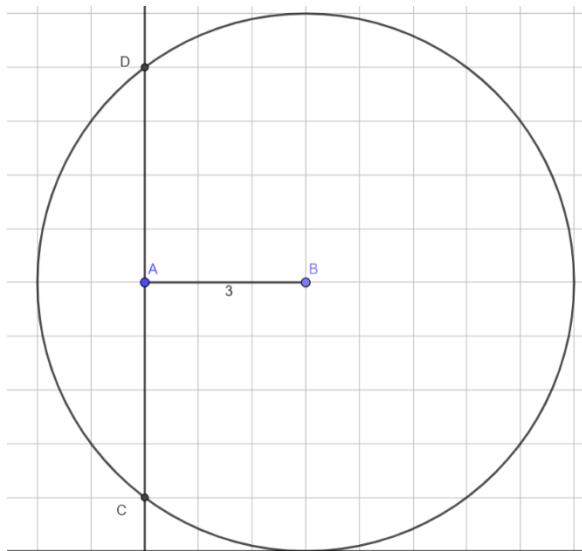
b) Ca = 4 cm, Hip = 8 cm.



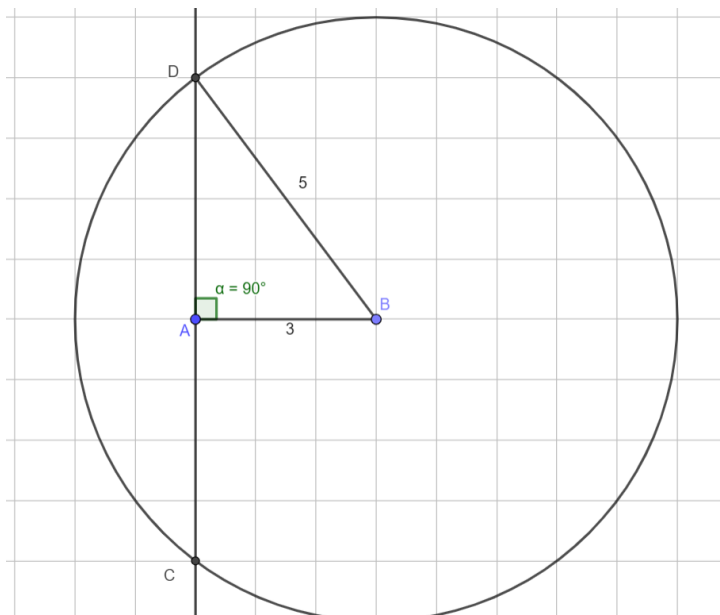
Trace o Cateto de 3 cm, utilizando uma régua.

Trace uma perpendicular ao Cateto, passando pelo ponto A.

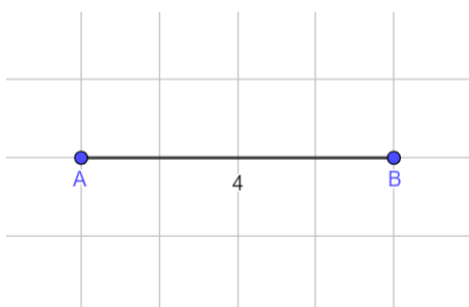




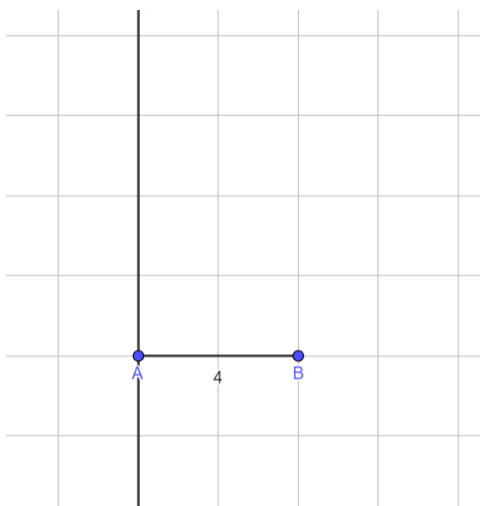
Abra o compasso numa abertura de 5 cm, e com a ponta seca em B, trace a circunferência. Essa circunferência intersecta a perpendicular em dois pontos, D e C.



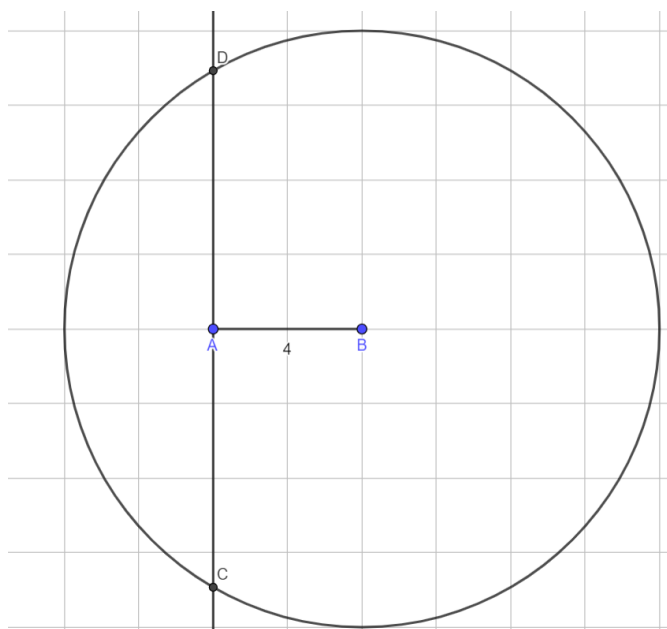
Una o vértice B a qualquer um dos pontos (D ou C). O triângulo retângulo de cateto 3 e hipotenusa 5 está pronto!



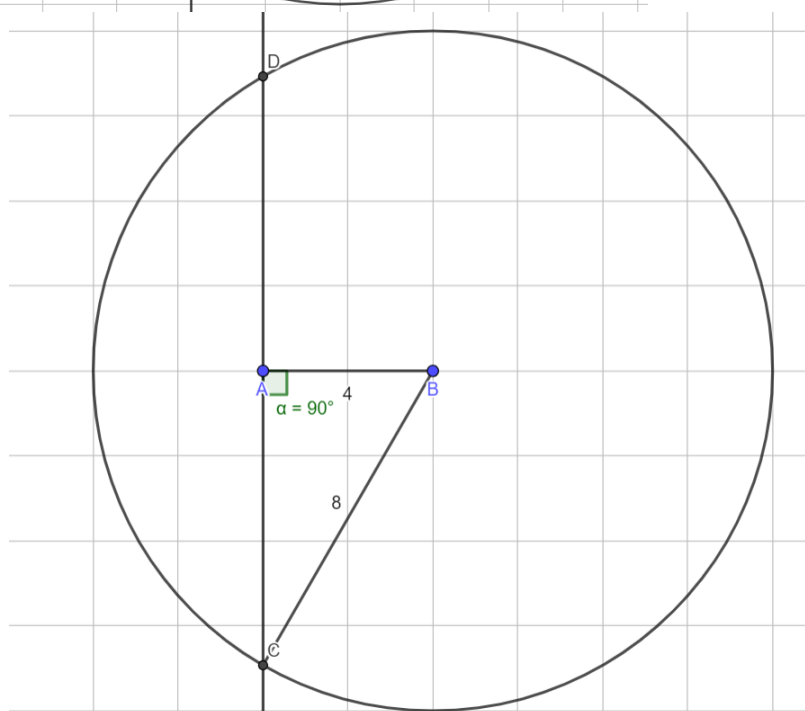
Trace o Cateto de 4 cm, utilizando uma régua.



Trace uma perpendicular ao Cateto, passando pelo ponto A.



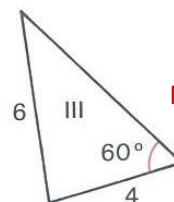
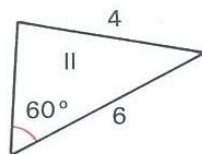
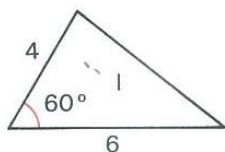
Abra o compasso numa abertura de 8 cm, e com a ponta seca em B, trace a circunferência. Essa circunferência intersecta a perpendicular em dois pontos, D e C.



Una o vértice B a qualquer um dos pontos (D ou C). O triângulo retângulo de cateto 4 e hipotenusa 8 está pronto!

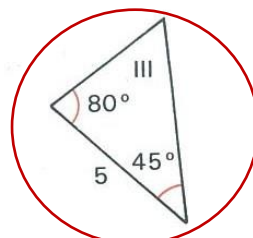
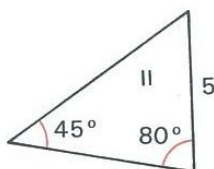
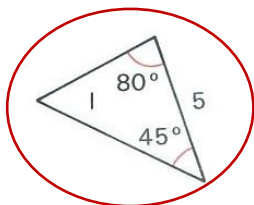
7. Nos casos a), b) e c) abaixo, selecione os triângulos congruentes e indique o caso de congruência.

a)



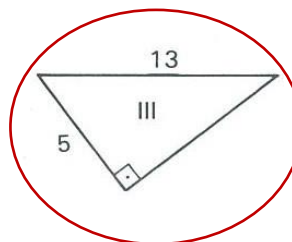
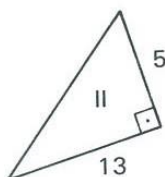
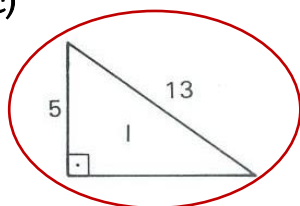
Não há caso de congruência.

b)



Caso A.L.A

c)



Caso C.H.

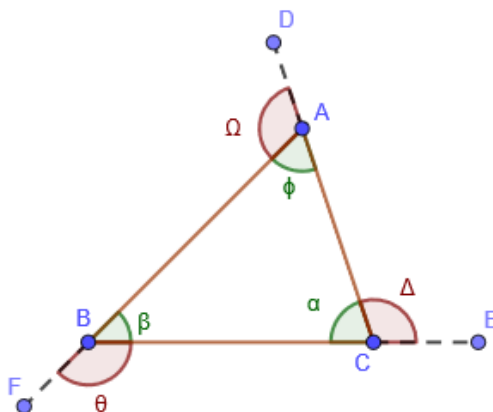
Gabarito de Matemática

8º ano, Volume 6

Lição 81 – Desigualdade triangular – Parte I

1. Demonstre o teorema do ângulo externo: “Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer dos ângulos internos não adjacentes”.

R. Considere um triângulo ABC de ângulos ϕ , β e α e ângulos externos Ω , θ e Δ .



Ora, sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre resulta em 180° . Logo,

$$\phi + \beta + \alpha = 180$$

Analisando o ângulo α , por exemplo, temos que seu suplemento é Δ , o que significa que:

$$\alpha + \Delta = 180$$

Agora, como enuncia Euclides: “duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si”. Logo, como $\phi + \beta + \alpha = 180$ e $\alpha + \Delta = 180$, então:

$$\phi + \beta + \alpha = \alpha + \Delta$$

Ora, cancelando α , temos:

$$\phi + \beta = \Delta$$

Como enuncia Aristóteles, “o todo é maior que as partes”. Então, fica evidente que, em uma adição, cada parcela é menor que a soma, isto é, que o resultado. Analisando, portanto, esta última igualdade, chegamos às seguintes conclusões:

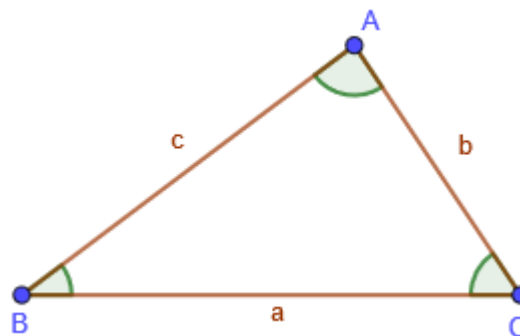
$$\Delta > \phi$$

$$\Delta > \beta$$

Dessa forma, fica demonstrado que o ângulo externo é maior que qualquer dos ângulos internos de um triângulo.

2. Demonstre que “O maior lado se opõe ao maior ângulo”.

R. Tome o triângulo ABC abaixo:



Matematicamente escrevemos este enunciado da seguinte maneira:

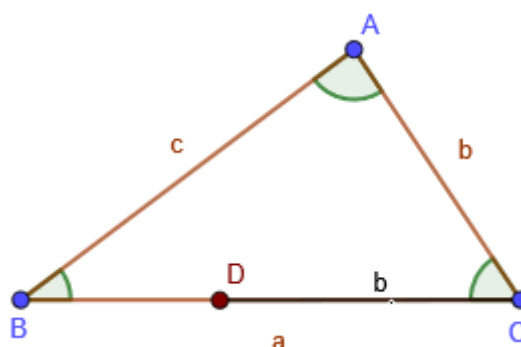
Hipótese	Tese
$a > b$	$\hat{A} > \hat{B}$

$\Rightarrow$

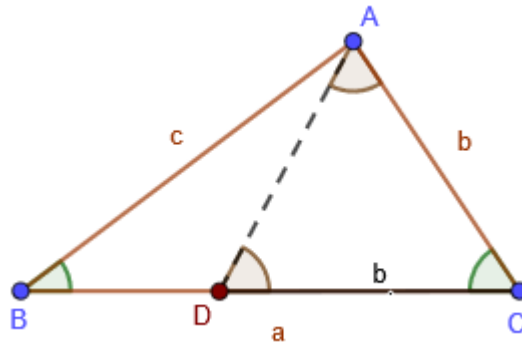
Lê-se: “Se o lado a é maior que o lado b , então o ângulo $\hat{A}$, oposto a a , é maior que o ângulo $\hat{B}$, oposto a b ”.

É evidente, que uma vez demonstrado para os lados a e b , fica demonstrado para todas as outras relações entre os lados e os ângulos.

Considere um ponto D em $\overline{BC}$, tal que $\overline{CD} \equiv \overline{CA}$. Como $a > b$, fica evidente que este ponto D está em $\overline{BC}$ internamente ao triângulo.



Traçando o segmento $\overline{AD}$, temos um triângulo isósceles CAD de base $\overline{AD}$, uma vez que $\overline{CD} \equiv \overline{CA}$.



Ora, analisando o triângulo, fica evidente que o ângulo $\hat{A}$ ($B\hat{A}C$) do triângulo ABC é maior que o ângulo $\hat{A}$ ($C\hat{A}D$) do triângulo ADC, uma vez que este segundo ângulo $\hat{A}$ é apenas uma parte do primeiro ângulo $\hat{A}$.

$$B\hat{A}C > C\hat{A}D$$

Sabemos ainda que, como o triângulo ADC é isósceles de base AD, os ângulos $C\hat{A}D$ e $C\hat{D}A$ são congruentes.

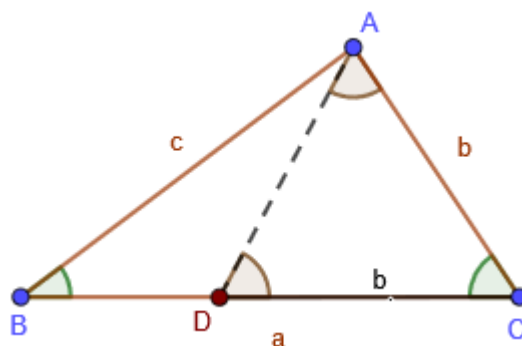
$$C\hat{A}D \equiv C\hat{D}A$$

Ora, da desigualdade ($B\hat{A}C > C\hat{A}D$) e da congruência ($C\hat{A}D \equiv C\hat{D}A$) decorre que :

$$B\hat{A}C > C\hat{D}A$$

Analisando agora o triângulo ADB, temos que o ângulo $C\hat{D}A$ é suplemento do ângulo $A\hat{D}B$, o que significa que $C\hat{D}A$ é um ângulo externo ao triângulo ADB. Logo, pelo teorema que demonstramos no início desta lição, sabemos que o ângulo $C\hat{D}A$ é maior que o ângulo $A\hat{B}D$.

Agora, $C\hat{D}A > A\hat{B}D$



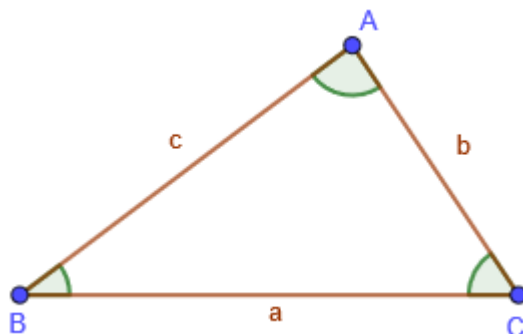
Ora, como $\hat{B}AC > \hat{C}DA$ e $\hat{C}DA > \hat{A}BD$, é evidente que:

$$\hat{B}AC > \hat{A}BD$$

Dessa forma, demonstramos que, dados dois lados diferentes de um triângulo, $a > b$, o ângulo maior é oposto ao lado maior.

3. Demonstre que “O maior ângulo se opõe ao maior lado”.

R. Tome o triângulo ABC abaixo:



Matematicamente escrevemos o enunciado da seguinte maneira:

Hipótese	Tese
$\hat{A} > \hat{B}$	$a > b$

$$\hat{A} > \hat{B} \Rightarrow a > b$$

Lê-se: “Se o ângulo $\hat{A}$ que o ângulo B, oposto a b ”.

é maior que o $\hat{B}$, então é maior

Pela hipótese, temos que o ângulo $\hat{A}$ é maior que o ângulo $\hat{B}$. Em relação aos lados, poderíamos ter três diferentes casos:

- 1) $a < b$
- 2) $a \equiv b$
- 3) $a > b$

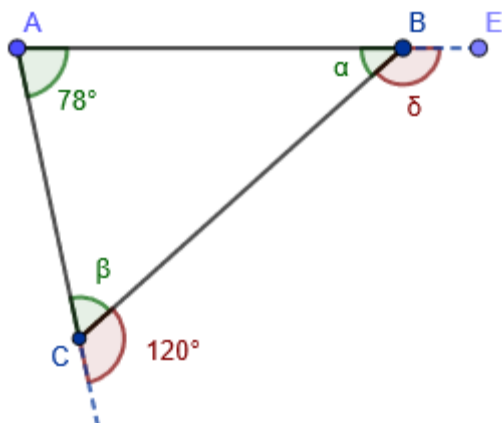
O primeiro caso contraria a hipótese, pois, pelo teorema anterior, se $a < b$, então $\hat{A} < \hat{B}$. Note que a hipótese é nosso ponto de partida e que, portanto, não pode ser contrariada. Logo, esta possibilidade é falsa.

O segundo caso diz que os lados são congruentes. Ora, se os lados forem congruentes, nosso triângulo será isósceles, o que implica que $\hat{A} \equiv \hat{B}$. Mas isso contraria novamente nossa hipótese, em que $\hat{A} > \hat{B}$. Logo, esta possibilidade é falsa.

Portanto, por exclusão dos dois primeiros casos, temos que $a > b$.

4. Indique o valor dos ângulos, identificados por letras gregas, nos triângulos abaixo:

a)



R. Sabemos que a soma de um ângulo externo com os ângulos não adjacentes é igual a 180° . Portanto, temos:

$$120^\circ = 78^\circ + \alpha$$

$$\alpha = 120^\circ - 78^\circ$$

$$\alpha = 42^\circ.$$

Se $\alpha = 42^\circ$, temos que δ vale:

$$\alpha + \delta = 180^\circ$$

$$42^\circ + \delta = 180^\circ$$

$$\delta = 180^\circ - 42^\circ$$

$$\delta = 138^\circ$$

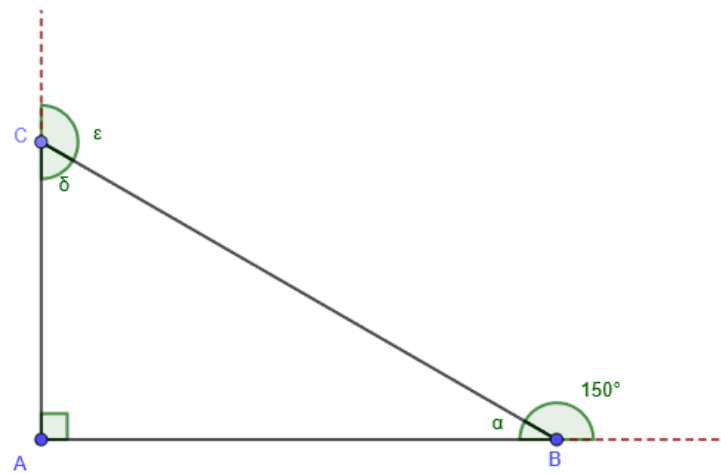
Temos ainda que o valor de β pode ser encontrado:

$$\beta + 120^\circ = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 120^\circ$$

$$\beta = 60^\circ.$$

b)



R. O valor de α somado ao 150° deve ser igual a 180° . Portanto, temos:

$$\alpha + 150^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 150^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Se um dos ângulos do triângulo mede 30° , e o outro mede 90° , o ângulo δ mede:

$$\delta + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$

$$\delta + 120^\circ = 180^\circ$$

$$\delta = 180^\circ - 120^\circ$$

$$\delta = 60^\circ$$

Se $\delta = 60^\circ$, então ε mede:

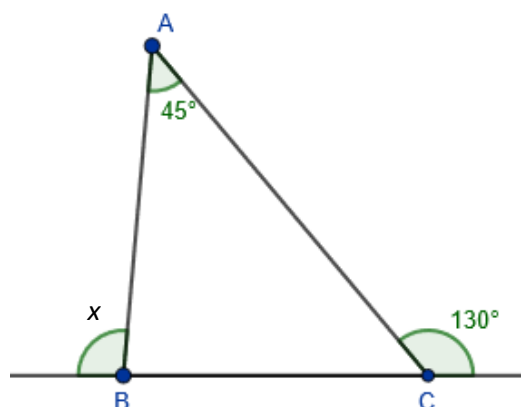
$$\delta + \varepsilon = 180^\circ$$

$$60^\circ + \varepsilon = 180^\circ$$

$$\varepsilon = 180^\circ - 60^\circ$$

$$\varepsilon = 120^\circ$$

5. Determine o valor de x no triângulo abaixo:



R. Identifiquemos os ângulos internos do triângulo por $\hat{B}$ e $\hat{C}$, em correspondência aos vértices. A soma de $\hat{C}$ com 130° deve ser igual a 180° . Portanto, temos:

$$\hat{C} + 130^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{C} = 180^\circ - 130^\circ$$

$$\hat{C} = 50^\circ$$

Uma vez que temos os valores de $\hat{A}$ e $\hat{C}$, é possível identificar o valor de x , pois $\hat{A} + \hat{C} = x$. Temos:

$$\hat{A} + \hat{C} = x.$$

$$45^\circ + 50^\circ = x$$

$$x = 95^\circ$$

6. Responda:

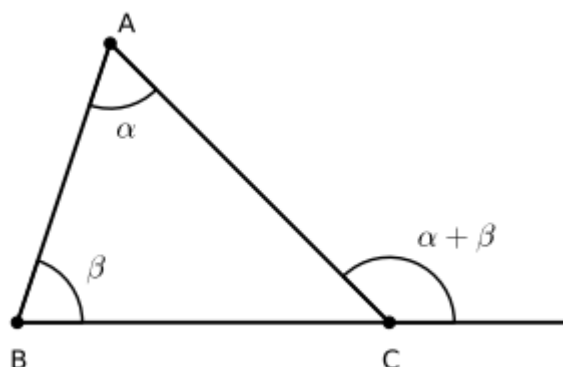
a) Em um triângulo com medidas 3 cm, 4 cm e 5 cm, o maior ângulo se opõe ao lado de medida ...?

R. Ao lado de medida de 5 cm, pois o maior ângulo sempre se opõe ao maior lado.

b) Em um triângulo com medidas $\frac{7}{4}$ cm, 1,76 cm e 0,0173 m, o maior ângulo se opõe ao lado de medida ...?

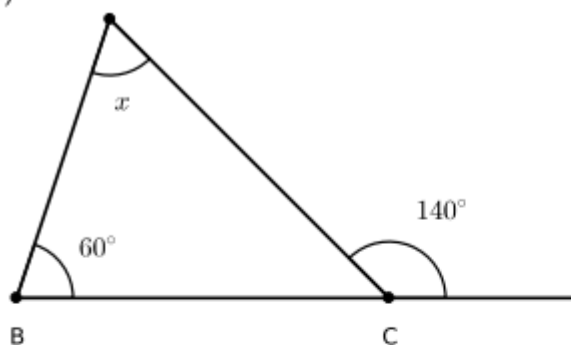
R. $\frac{7}{4}$ cm = 1,75 cm, 1,76 cm e 0,0173 m = 1,73 cm. Portanto, o maior ângulo se opõe ao lado de 1,76 cm.

7. Na demonstração do teorema do ângulo externo, chegamos à seguinte igualdade: dado um ângulo externo ao triângulo, seu valor é equivalente à soma dos dois ângulos não adjacentes a ele. Veja:

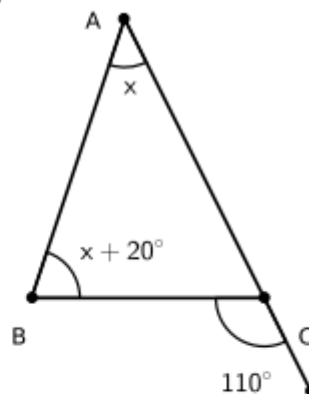


Sabendo disso, encontre o valor de x nas figuras abaixo:

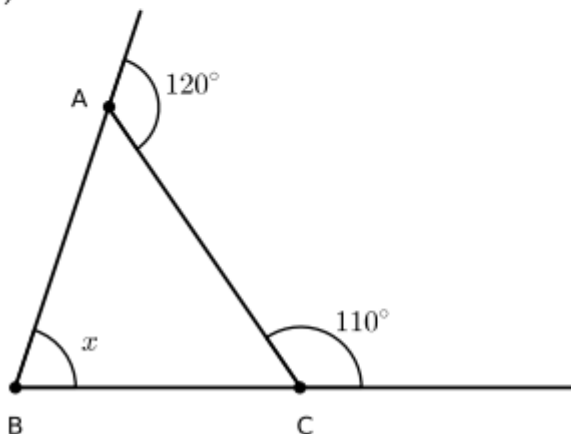
a)



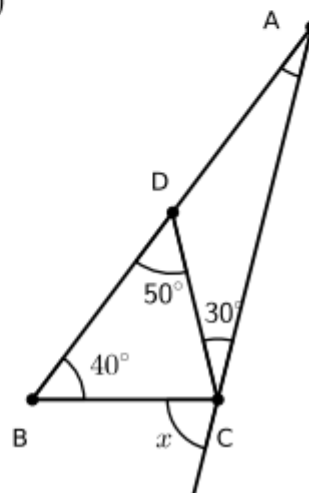
b)



c)



d)



R.

$$\begin{aligned} \text{a) } 60^\circ + x &= 140^\circ \\ x &= 140^\circ - 60^\circ \\ x &= 80^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x + 20^\circ + x &= 110^\circ \\ 2x &= 110^\circ - 20^\circ \\ x &= \frac{90^\circ}{2} \\ x &= 45^\circ \end{aligned}$$

c) Como em A o ângulo externo mede 120° , então o ângulo interno mede 60° . Portanto, temos:

$$\begin{aligned} x + 60^\circ &= 110^\circ \\ x &= 110^\circ - 60^\circ \\ x &= 50^\circ \end{aligned}$$

d) O terceiro ângulo do triângulo DBC mede 90° , pois $180^\circ - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ$. Pelo desenho, temos que a soma de x , 90° e 30° deve ser igual a 180° . Portanto,

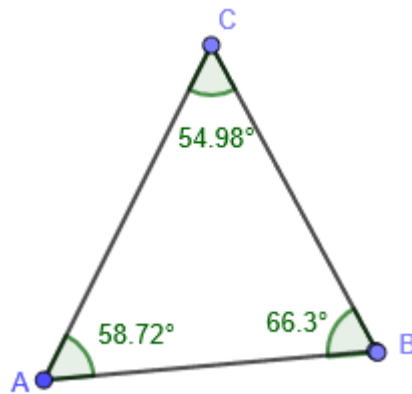
$$x + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ$$

$$x = 60^\circ$$

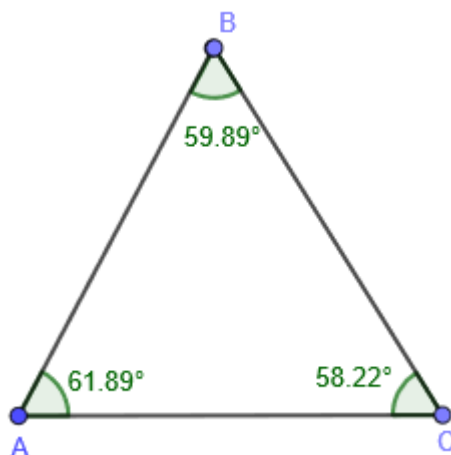
8. Analisando os ângulos abaixo, indique qual dos lados dos triângulos é maior. Depois de analisar, meça com uma régua e verifique sua resposta.

a)



R. O maior lado é o lado $\overline{AC}$.

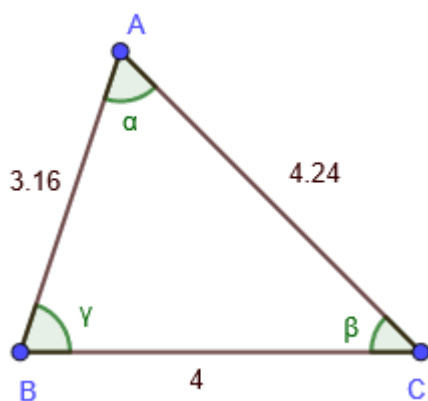
b)



R. O maior lado é o lado $\overline{BC}$.

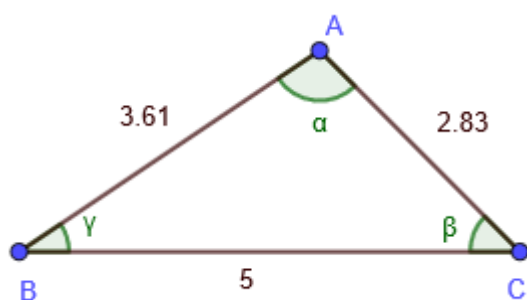
9. Analisando os lados dos triângulos abaixo, indique qual é o maior ângulo:

a)



R. O maior ângulo é o ângulo γ .

b)



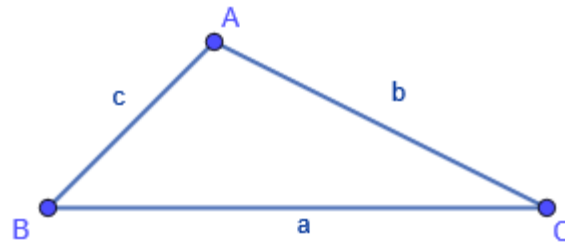
R. O maior ângulo é o ângulo α .

Lição 82 – Desigualdade triangular – Parte II

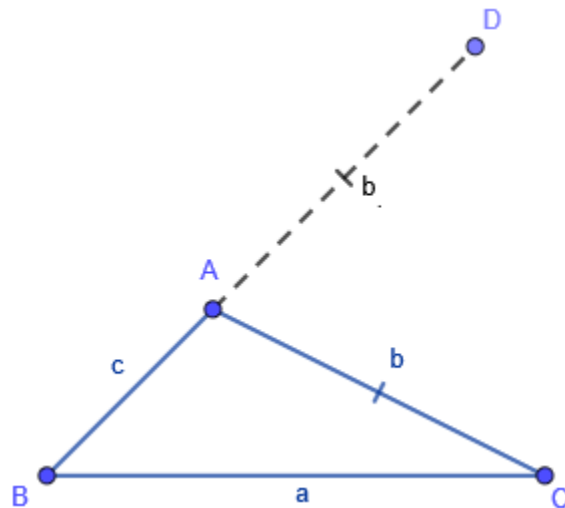
1. Demonstre que “a soma de quaisquer dois lados de um triângulo é sempre maior que o terceiro lado”.

R. A hipótese e a tese desta relação podem ser escritas matematicamente da seguinte maneira:

Considere três pontos A , B e C não colineares, de forma a determinar um triângulo de lados a , b e c .



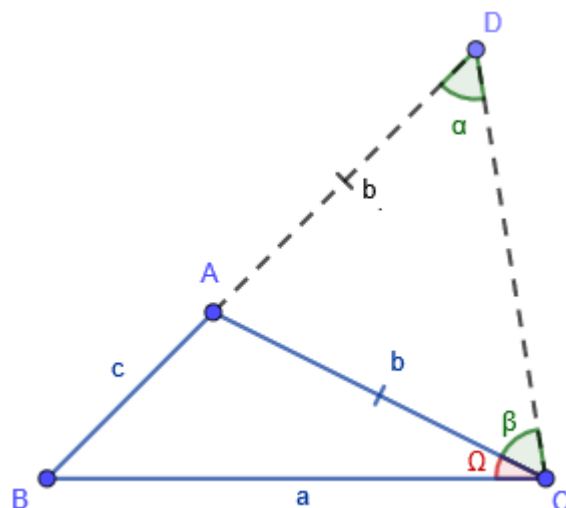
Considere um ponto D na semirreta oposta a $\overrightarrow{AB}$, tal que $\overline{AD} \equiv \overline{AC}$.



Note que a medida do segmento $\overline{BD}$ é equivalente à soma das medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$. No entanto, como $\overline{AD} \equiv \overline{AC}$, podemos afirmar que a medida do segmento $\overline{BD}$ é equivalente à soma das medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

$$\overline{BD} = \overline{AB} + \overline{AC}$$

Agora, como A, C e D são não colineares, determinam um triângulo. Consideremos os triângulos ABC, DAC e DBC e alguns de seus ângulos.



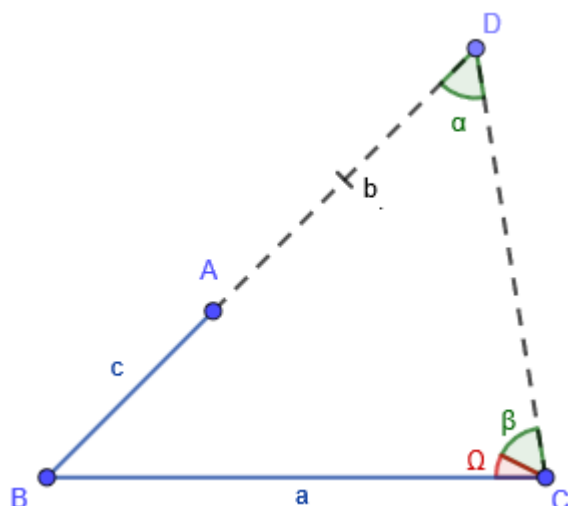
Veja: o triângulo DAC é isósceles de base $\overline{DC}$, uma vez que $\overline{AD} \equiv \overline{AC}$. Isso significa que os ângulos α e β são congruentes. Note que a soma de Ω e β será maior do que β , pelo mesmo princípio de que “o todo é maior que as partes”. Ora, sabemos que essa soma corresponde ao ângulo $\hat{C}$ do triângulo DBC. Logo,

$$\hat{C} > \beta$$

No entanto, como $\beta \equiv \alpha$, podemos afirmar que:

$$\hat{C} > \alpha$$

Ora, pelo que acabamos de demonstrar nas duas propriedades anteriores, sabemos que o ângulo maior se opõe ao maior lado. Portanto, no triângulo DBC podemos afirmar que o lado $\overline{BD}$ é maior que o lado $\overline{BC}$. Ora, $\overline{BD} = b + c$ e $\overline{BC} = a$. Portanto, como $\overline{BD} > \overline{BC}$, temos que $b + c > a$. Desta forma, como o mesmo raciocínio poderia se aplicar a qualquer ponto nas semirretas opostas aos lados, fica demonstrado que em qualquer triângulo a medida de um lado é menor que a soma das medidas dos outros dois lados.



$$\overline{BD} > \overline{BC}$$

$$b + c > a$$

Lição 83 – Baricentro

1. O que é uma ceviana?

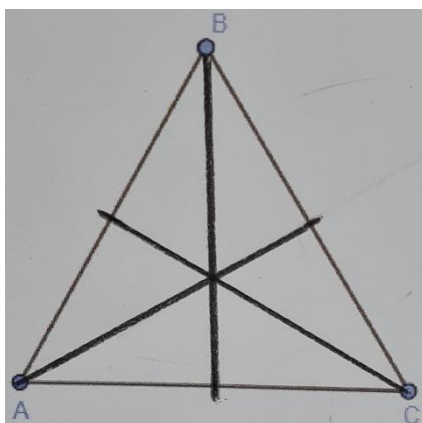
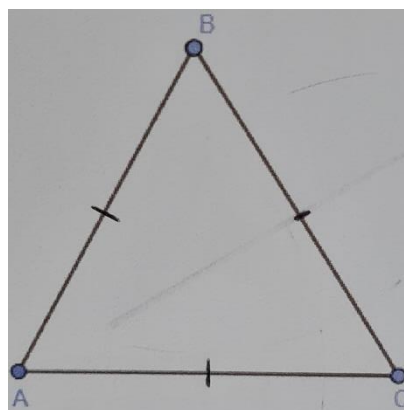
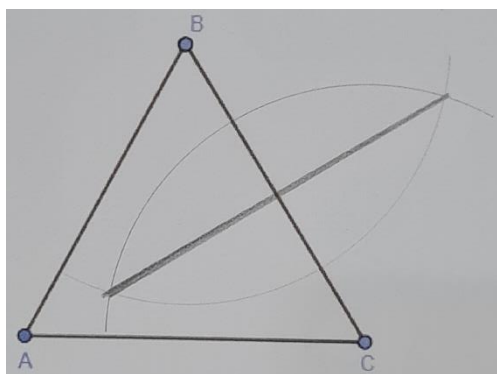
R. Ceviana é qualquer reta que passa por um vértice e não é paralela aos lados do triângulo.

2. O que é a mediana? Como se denomina o encontro entre as três medianas de um triângulo?

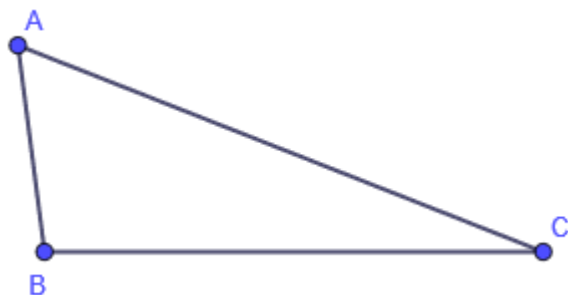
R. Mediana é a ceviana cujas extremidades são o vértice e o ponto médio do lado oposto a este vértice. O encontro entre as três medianas se denomina baricentro.

3. No volume anterior aprendemos a traçar a mediatriz de um segmento, que é a reta perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio. Portanto, traçada a mediatriz, encontramos o ponto médio de um segmento. Sabendo isso, encontre o baricentro dos triângulos abaixo:

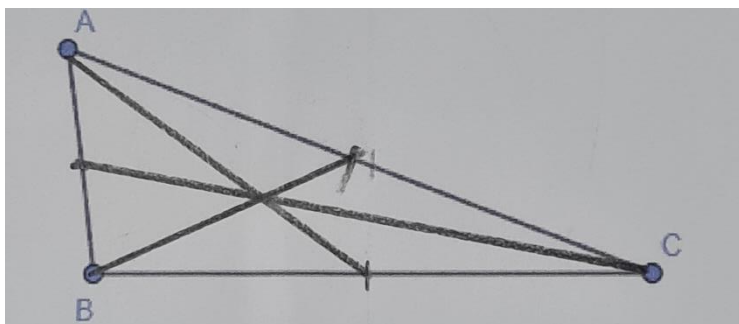
a)



b)

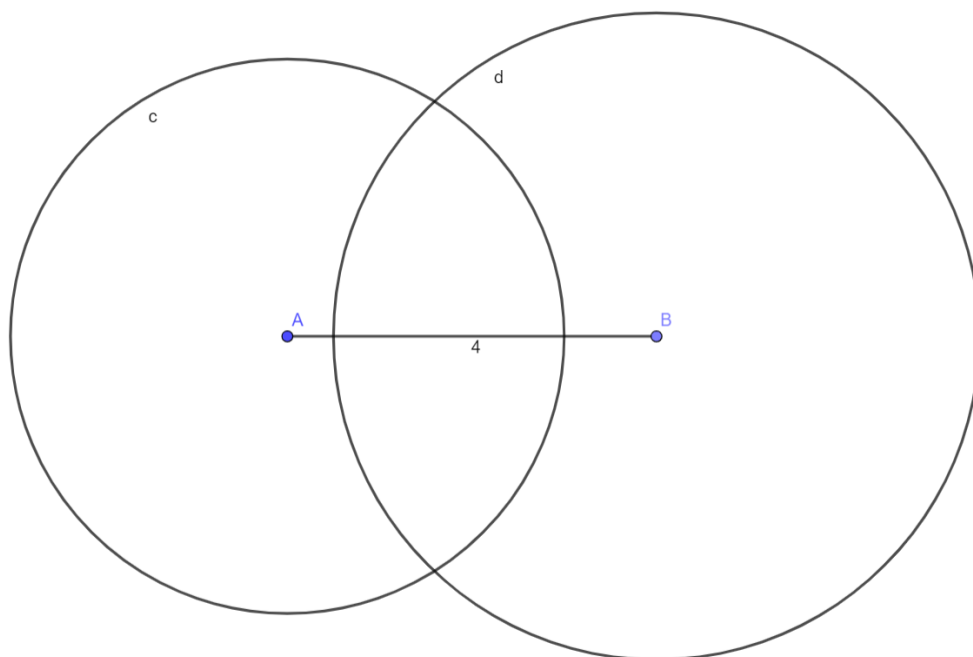


R.

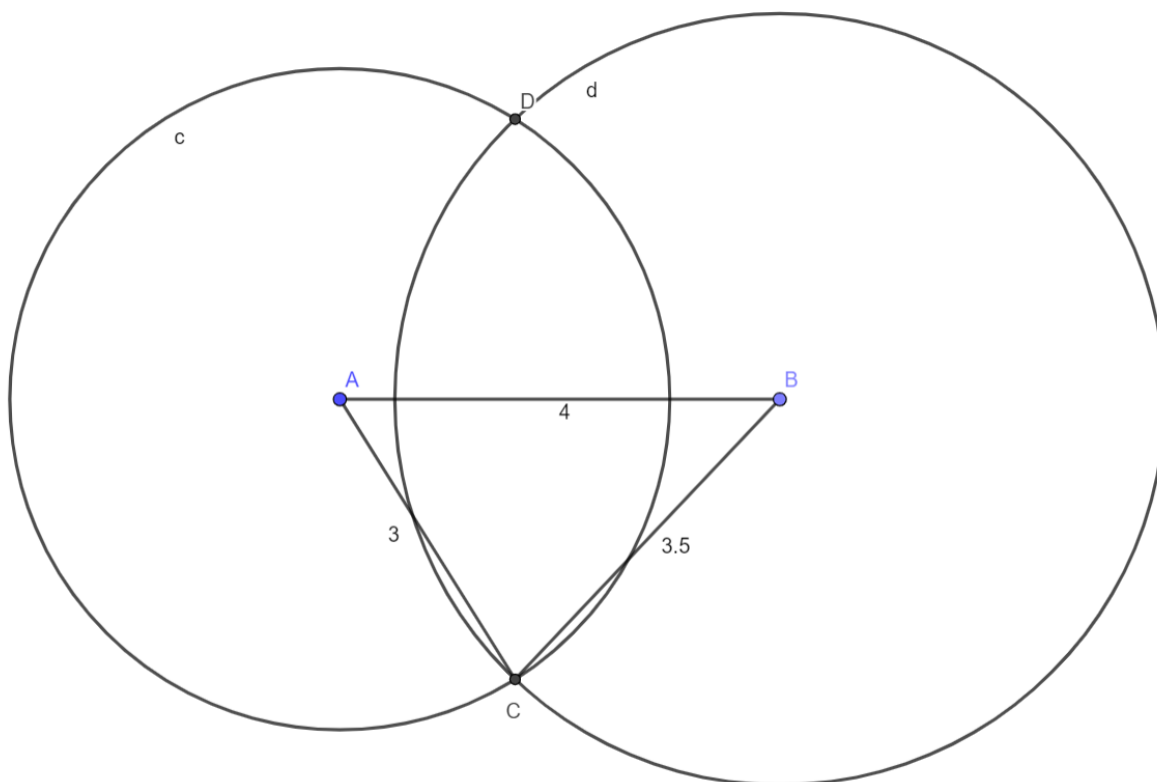


4. Construa um triângulo com lados 3 cm, 3,5 cm e 4 cm. Trace as três medianas e indique o baricentro.

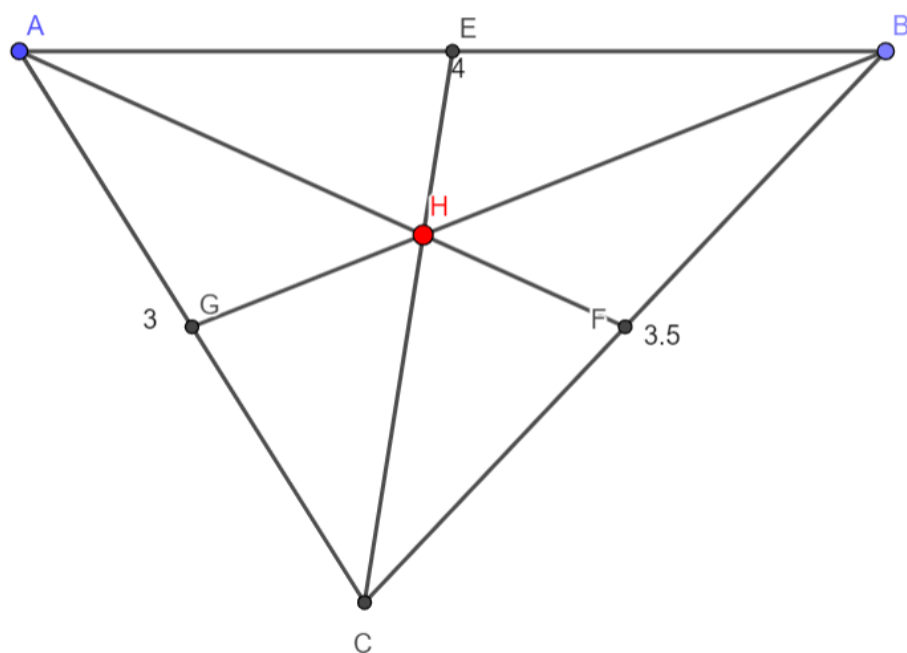
R. Traçamos o segmento AB de 4 cm. Com uma abertura de 3 cm fixamos a ponta seca do compasso em A e traçamos a circunferência c, cujo raio será de 3 cm. Com uma abertura de 3,5 cm fixamos a ponta seca em B e traçamos a circunferência em D, cujo raio será de 3,5 cm.



Essas duas circunferências se intersectam em dois pontos, C e D. Ao traçar os segmentos AC e BC (ou AD e BD), temos um triângulo cujos lados medem 3 cm, 3,5 cm e 4 cm.

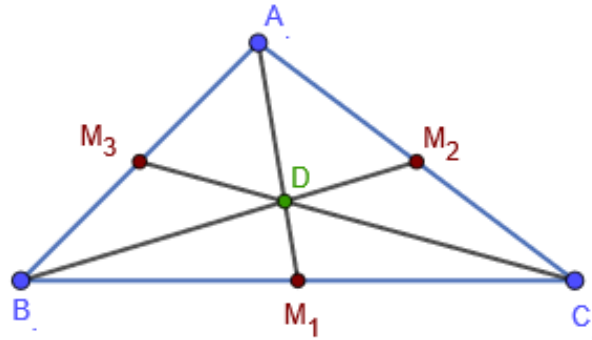


Com auxílio de um compasso¹, encontramos os pontos médios de cada um dos lados. Logo em seguida, traçamos os segmentos que unem cada um dos vértices com o ponto médio que lhe é oposto.



¹ É preciso encontrar a mediatriz de cada um dos lados, o que já aprendemos a fazer.

5. Indique a medida total de cada uma das medianas do triângulo abaixo, sabendo que: $\overline{M_1D} = 5 \text{ cm}$, $\overline{BD} = 6 \text{ cm}$ e $\overline{M_3D} = 6,5 \text{ cm}$

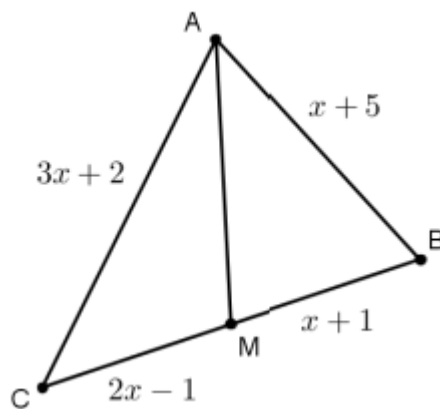


R. Se $\overline{M_1D} = 5 \text{ cm}$, então $\overline{AD} = 2 \cdot 5 = 10 \text{ cm}$. Então, $\overline{AM_1} = 10 + 5 = 15 \text{ cm}$.

Se $\overline{BD} = 6 \text{ cm}$, então $\overline{M_2D} = 6 : 2 = 3 \text{ cm}$. Então, $\overline{BM_2} = 6 + 3 = 9 \text{ cm}$.

Se $\overline{M_3D} = 6,5 \text{ cm}$, então $\overline{CD} = 2 \cdot 6,5 = 13 \text{ cm}$. Então, $\overline{CM_3} = 6,5 + 13 = 19,5 \text{ cm}$.

6. Na figura abaixo, AM é mediana do triângulo ABC. Determine o perímetro de ABC.



R. Se AM é mediana, então M é ponto médio. Uma vez que M é ponto médio, temos que $\overline{CM} \equiv \overline{BM}$. Logo,

$$2x - 1 = x + 1$$

$$2x - x = 1 + 1$$

$$x = 2.$$

Portanto, o perímetro desse triângulo mede:

$$(3x + 2) + (2x - 1) + (x + 1) + (x + 5)$$

$$3 \cdot 2 + 2 + 2 \cdot 2 - 1 + 2 + 1 + 2 + 5$$

$$6 + 2 + 4 - 1 + 2 + 1 + 2 + 5$$

$$8 + 6 + 7 = 21$$

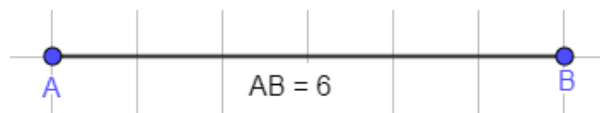
Lição 84 – Incentro

1. O que é a bissetriz? Como se denomina o encontro entre as três bissetrizes de um triângulo?

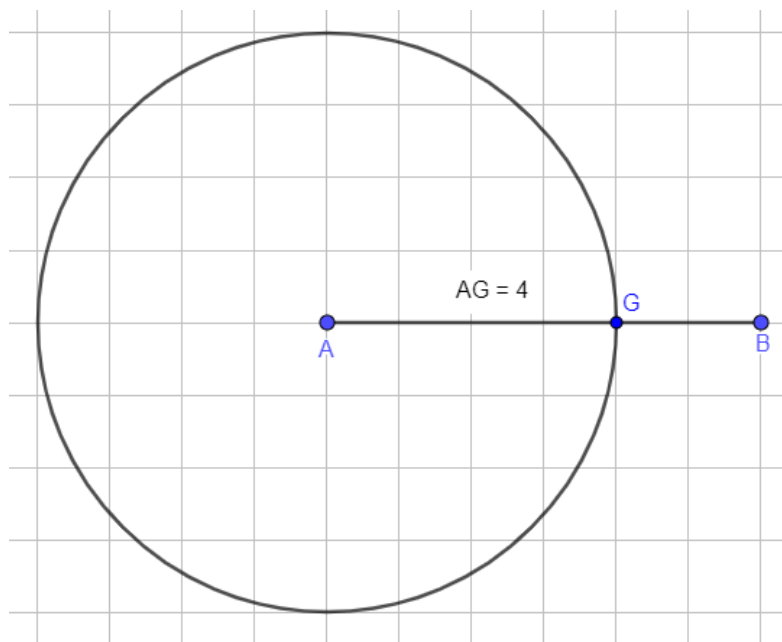
R. A bissetriz é a ceviana do triângulo cujas extremidades são um vértice e um ponto do lado oposto a este vértice, tal que ela divide o ângulo em dois ângulos congruentes.

2. Construa um triângulo com lados 4 cm, 5 cm e 6 cm. Trace as três bissetrizes, indique o incentro e trace a circunferência inscrita ao triângulo.

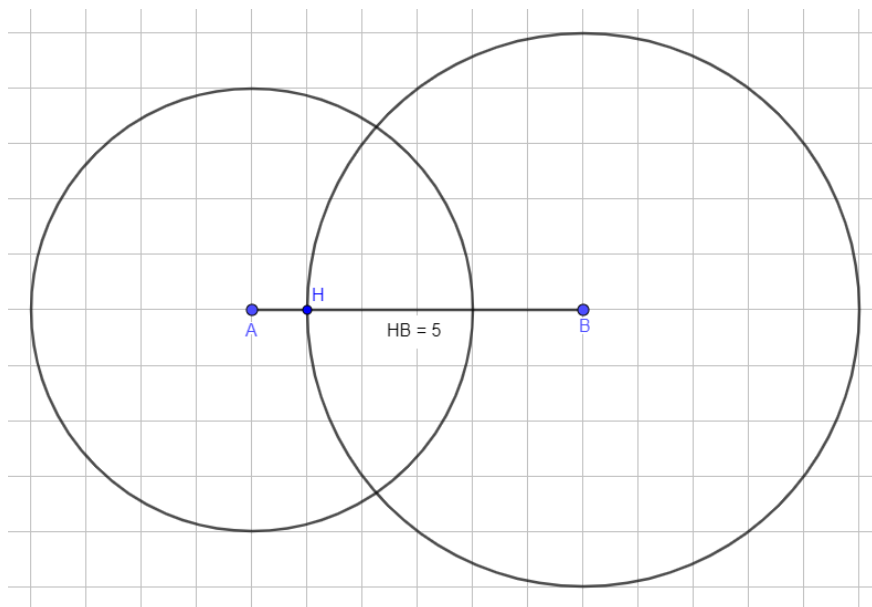
R. Vamos construir um triângulo com lados 4 cm, 5 cm e 6 cm. Primeiro marcaremos a base com o lado de 6 cm.



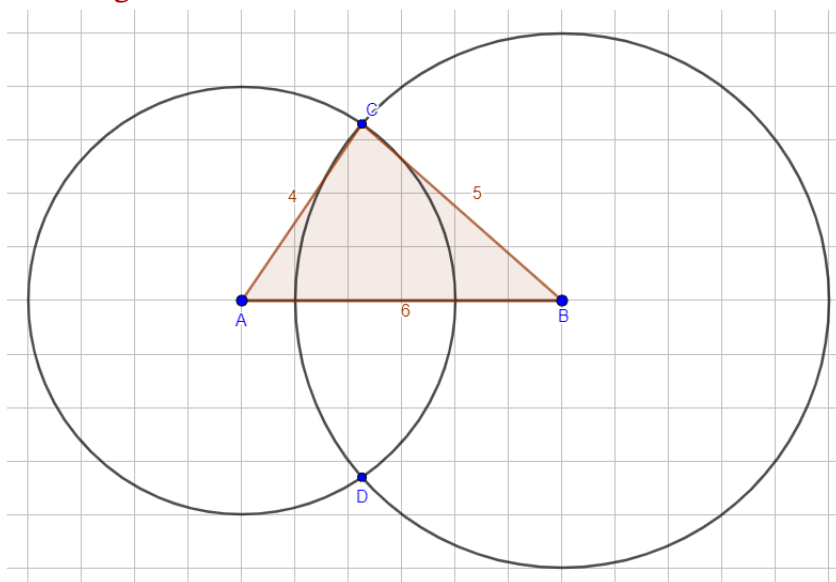
Agora, trace uma circunferência de centro A e raio 4 cm.



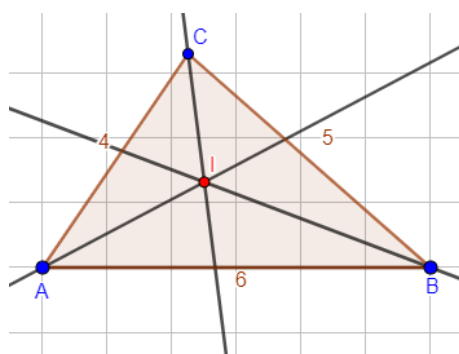
Agora, trace uma circunferência de centro B e raio 5 cm.



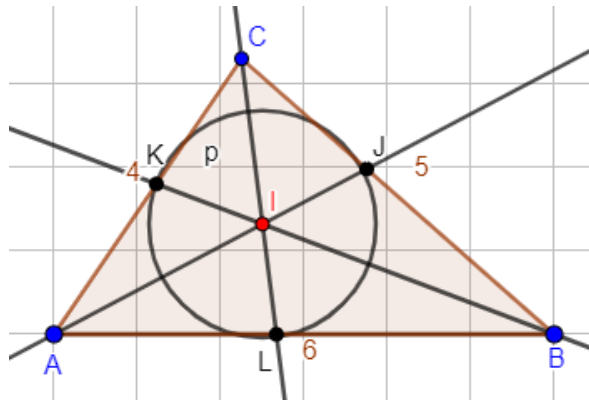
Após traçarmos as duas circunferências vamos encontrar a intersecção entre elas, e construir o triângulo de lados 4 cm, 5 cm e 6 cm.



Após construir o triângulo de lados 4 cm, 5 cm e 6 cm vamos encontrar o incentro do triângulo, traçando a bissetriz dos ângulos internos do triângulo.

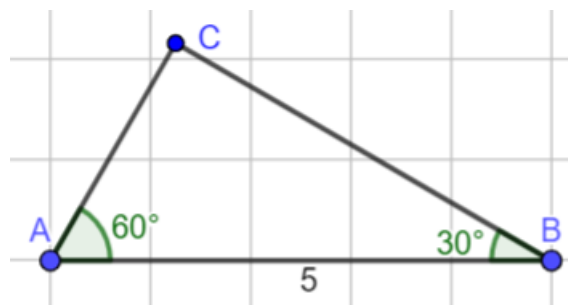


Após encontrarmos o Incentro vamos traçar uma circunferência inscrita ao triângulo de centro no ponto I e raio $\overline{IJ}$.

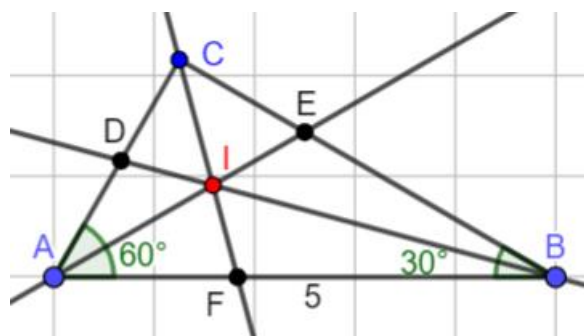


3. Obtenha o incentro de um triângulo que tem um ângulo de 60° , outro de 30° , e cujo lado comum a esses ângulos mede 5 cm. Qual será o raio da circunferência inscrita?

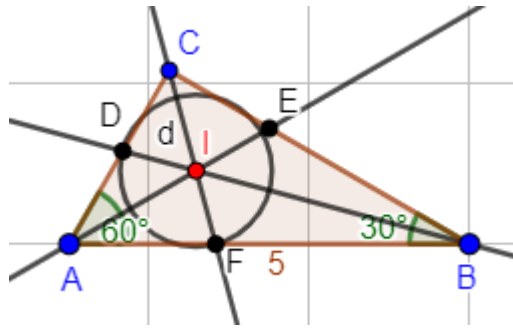
R. Vamos construir um triângulo que tem um ângulo de 60° , outro de 30° , e cujo lado comum a esses ângulos mede 5 cm.



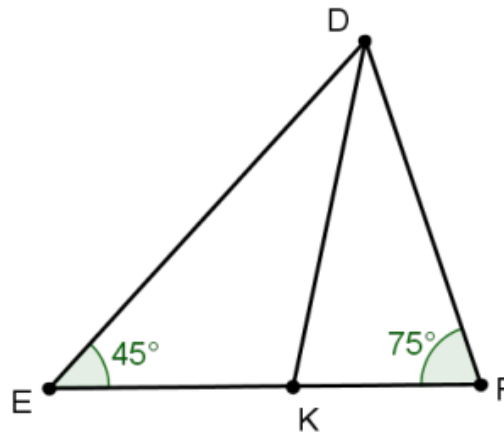
Após construir o triângulo que tem um ângulo de 60° , outro de 30° , e cujo lado comum a esses ângulos mede 5 cm vamos encontrar o incentro do triângulo, traçando a bissetriz dos ângulos internos do triângulo.



Após encontrarmos o incentro vamos traçar uma circunferência inscrita ao triângulo de centro no ponto I e raio $\overline{IE}$.



4. No triângulo abaixo, $\overline{DK}$ é bissetriz. Determine o ângulo $D\hat{K}F$.



R. Sabemos que a soma dos ângulos internos do triângulo DEF é 180° . Portanto, temos que o valor de $E\hat{D}F$ é:

$$45^\circ + 75^\circ + E\hat{D}F = 180^\circ$$

$$E\hat{D}F = 180^\circ - 120^\circ$$

$$E\hat{D}F = 60^\circ$$

Sendo DK bissetriz, ela divide o ângulo $E\hat{D}F$ ao meio. Portanto, o valor de $K\hat{D}F$ é igual a metade de $E\hat{D}F$:

$$K\hat{D}F = \frac{E\hat{D}F}{2} = \frac{60}{2} = 30^\circ$$

Sabendo a medida de dois ângulos de um triângulo, é simples encontrar a medida do terceiro. Portanto, o valor de $D\hat{K}F$ é:

$$30^\circ + 75^\circ + D\hat{K}F = 180^\circ$$

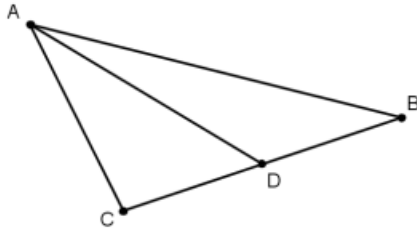
$$D\hat{K}F = 180^\circ - 105^\circ$$

$$D\hat{K}F = 75^\circ$$

Lição 85 – Ortocentro

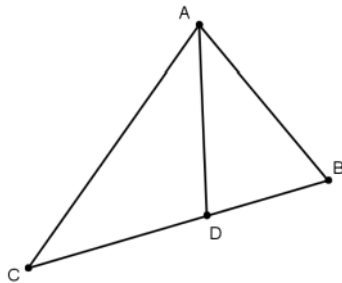
1. Nos triângulos abaixo, classifique as cevianas:

a) AD , sabendo que $BD = CD$



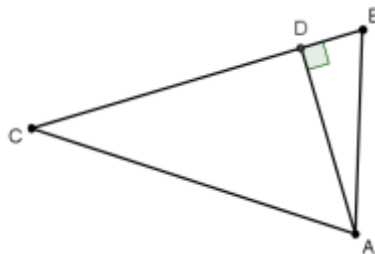
R. AD é a mediana, uma vez que D é o ponto médio de BC.

b) AD , sabendo que $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$



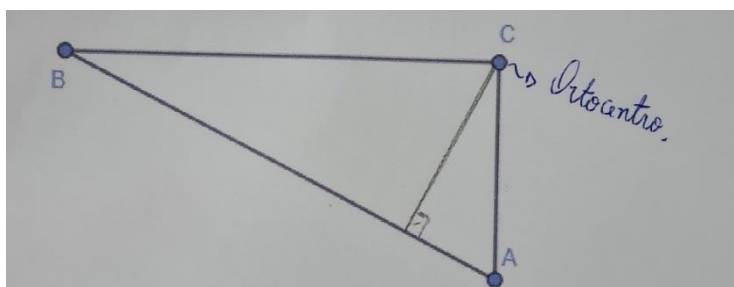
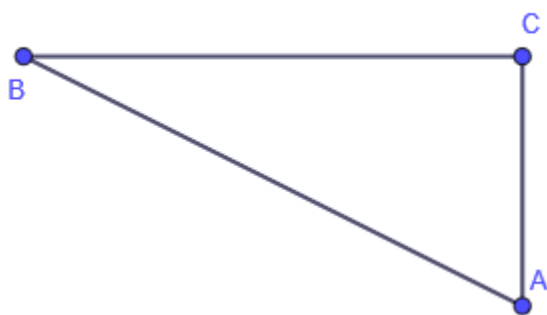
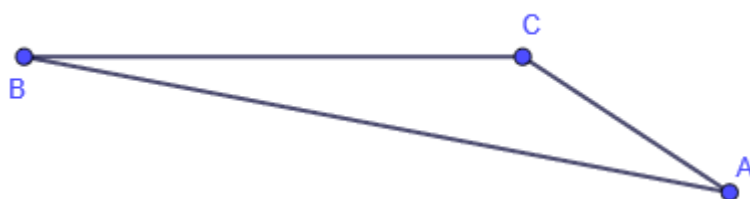
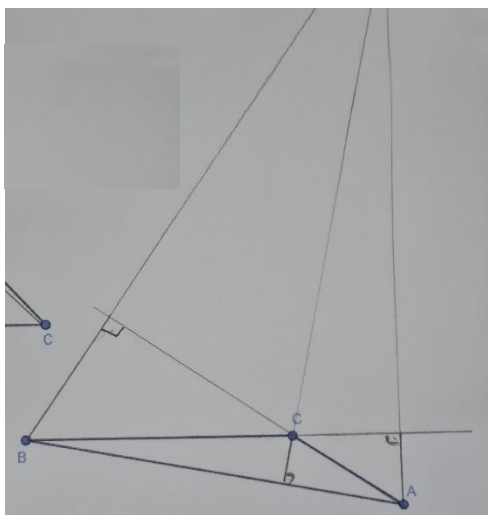
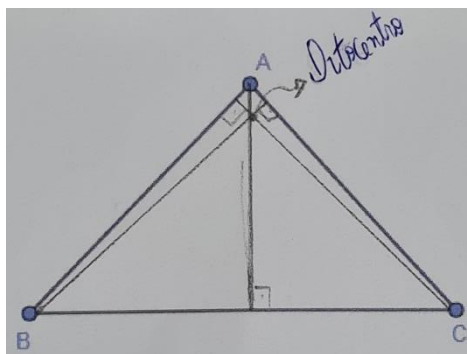
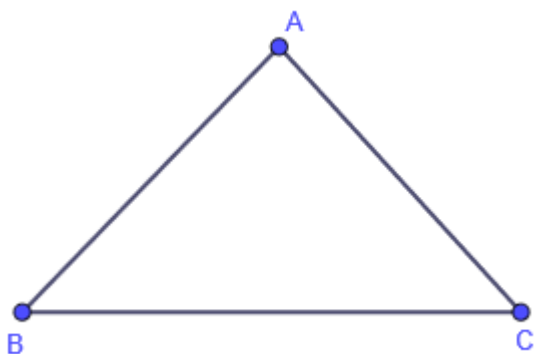
R. AD é bissetriz, uma vez que divide o ângulo $\widehat{A}$ em duas partes iguais.

c) AD



R. AD é altura, uma vez que determina um ângulo reto com o lado BC.

2. Encontre o ortocentro dos triângulos abaixo:



3. O que é a altura de um triângulo? Como se denomina o encontro entre as três alturas de um triângulo?

R. A altura é a ceviana cujas extremidades são o vértice e um ponto do lado oposto a este vértice de tal maneira que o segmento seja perpendicular a este lado. O encontro das três alturas denomina-se ortocentro.

4. Somente pela localização do ortocentro é possível classificá-lo quanto aos seus ângulos. Responda:

a) Se o ortocentro é interior ao triângulo, esse triângulo é _____?

R. Acutângulo.

b) Se o ortocentro é exterior ao triângulo, esse triângulo é _____?

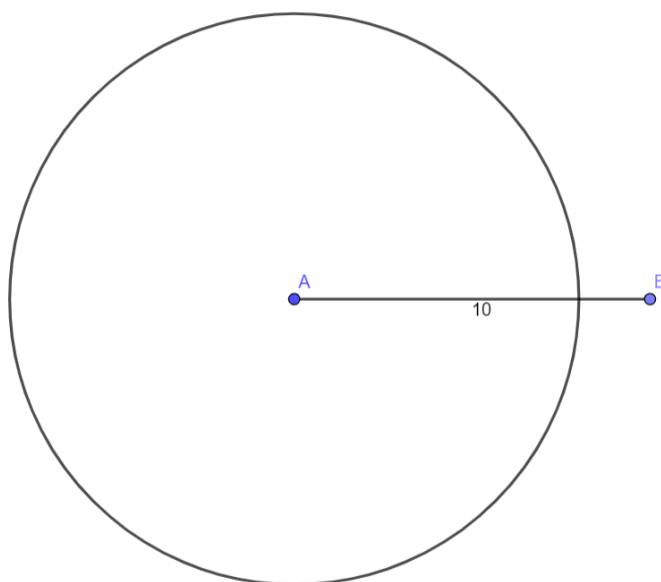
R. Obtusângulo.

c) Se o ortocentro é um dos vértices ao triângulo, esse triângulo é _____?

R. Reto.

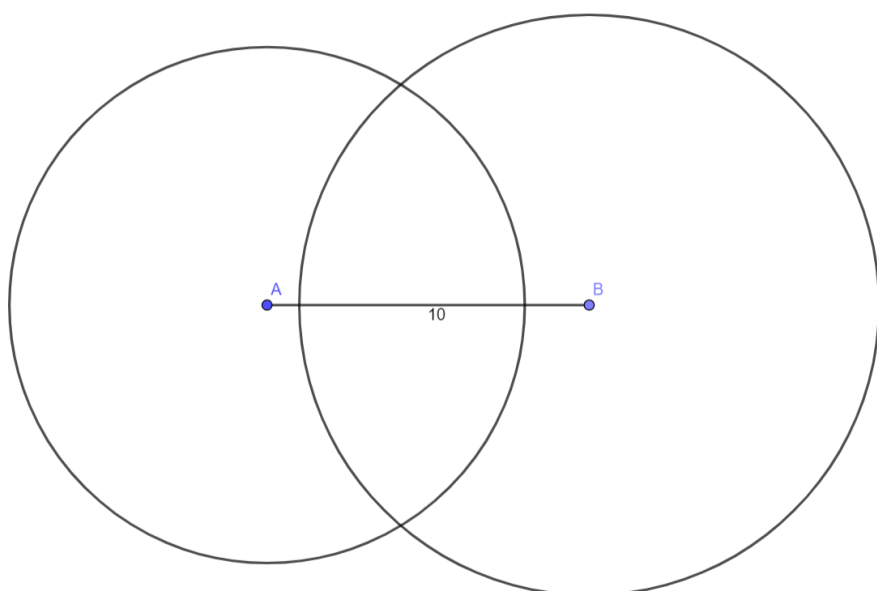
5. Construa um triângulo com lados 8 cm, 9 cm e 10 cm. Trace as três alturas e indique o ortocentro.

R.



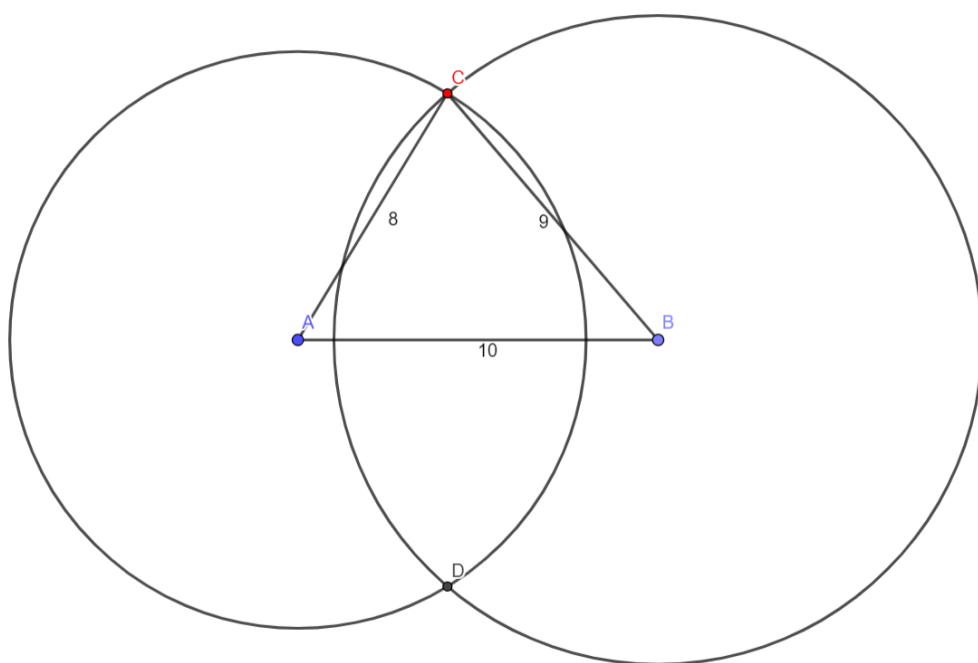
Trace o segmento de 10 cm, cujas extremidades são os pontos A e B.

Abra o compasso em 8 cm, e com a ponta seca em A, trace a circunferência.

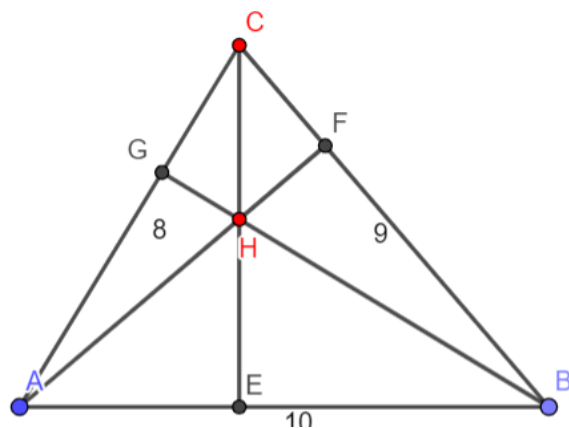


Abra o compasso em 9 cm, e com a ponta seca em B, trace a circunferência.

As duas circunferências se intersectam em dois pontos, o ponto C e D. Traçando os segmentos AC e BC (ou AD e BD), temos o triângulo de lados 8 cm, 9 cm e 10 cm.



Depois, com a utilização de um esquadro e uma régua, traçamos as três alturas, que se intersectam em um único ponto, o ortocentro.



Lição 86 – Circuncentro

1. Por que a mediatriz não é uma ceviana? Qual é a diferença entre a mediatriz e a mediana?

R. Porque a mediatriz não passa, necessariamente, por um vértice. Embora ambas passem pelo ponto médio, a mediana tem uma das extremidades em um dos vértices, ao passo que a mediatriz precisa apenas ser perpendicular ao segmento, não importando se passa ou não pelo vértice. Se todas as medianas e mediatrizes se equivalem, o triângulo em questão é um triângulo equilátero.

2. Ao traçar as três mediatrizes de um triângulo, elas se encontram em um único ponto. Como é denominado este ponto? Qual é a relação entre este ponto e os três vértices do triângulo?

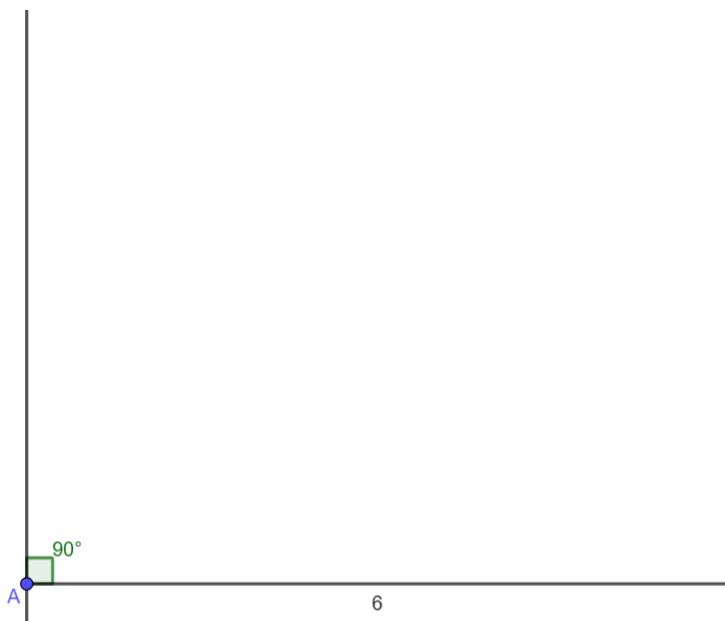
R. Circuncentro. O circuncentro é equidistante dos vértices do triângulo.

3. Construa um triângulo com lados 8 cm, 9 cm e 10 cm. Trace as três alturas e indique o ortocentro. Depois trace a circunferência circunscrita ao triângulo.

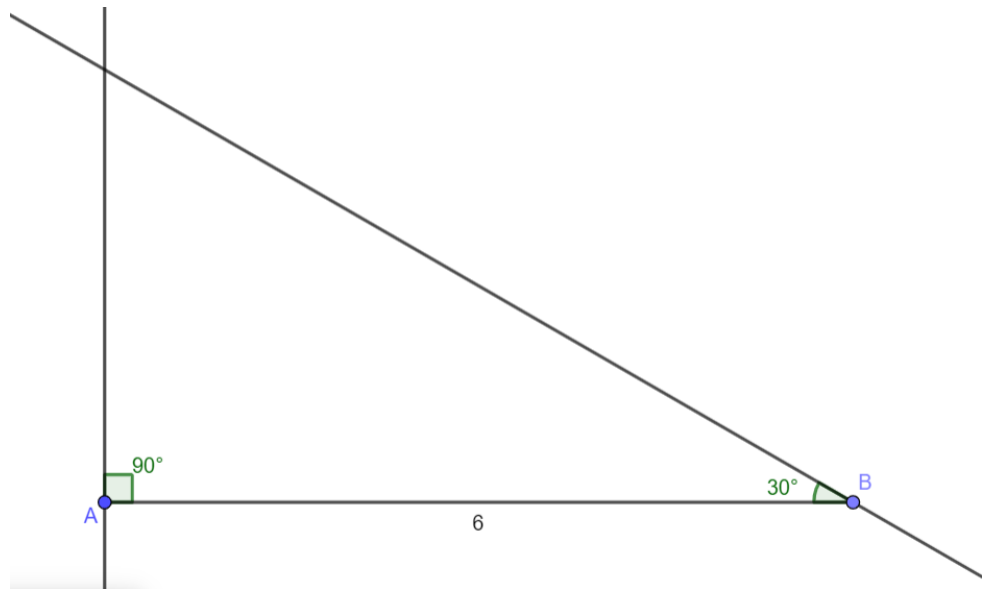
EXERCÍCIO CANCELADO

4. Encontre o ortocentro de um triângulo que tenha um lado de 6 cm, o ângulo oposto medindo 60° e um ângulo adjacente medindo 90° .

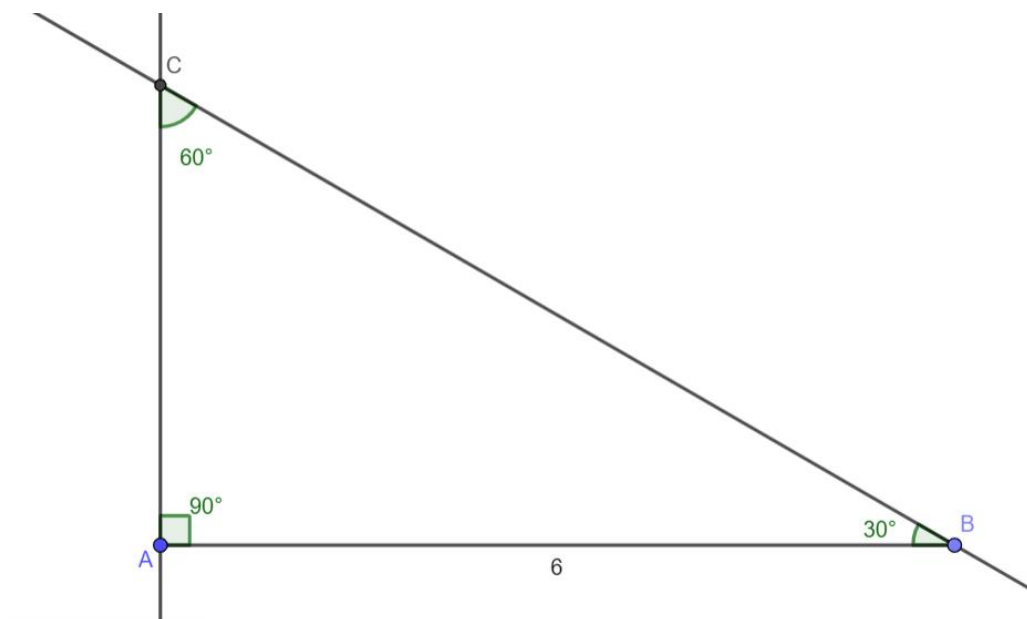
R. Trace o segmento AB de 6 cm. Sob o vértice A, trace uma perpendicular, com auxílio do esquadro, a fim de obter um ângulo de 90° .



Como sabemos que um ângulo mede 90° , e outro mede 60° , sabemos também que o terceiro ângulo medirá 30° , pois $90^\circ + 60^\circ + 30^\circ = 180^\circ$. Se o ângulo de 60° é oposto ao lado de 6 cm, significa que o ângulo de 30° lhe é adjacente. Portanto, com auxílio de um transferidor, traçamos o ângulo de 30° de vértice B.

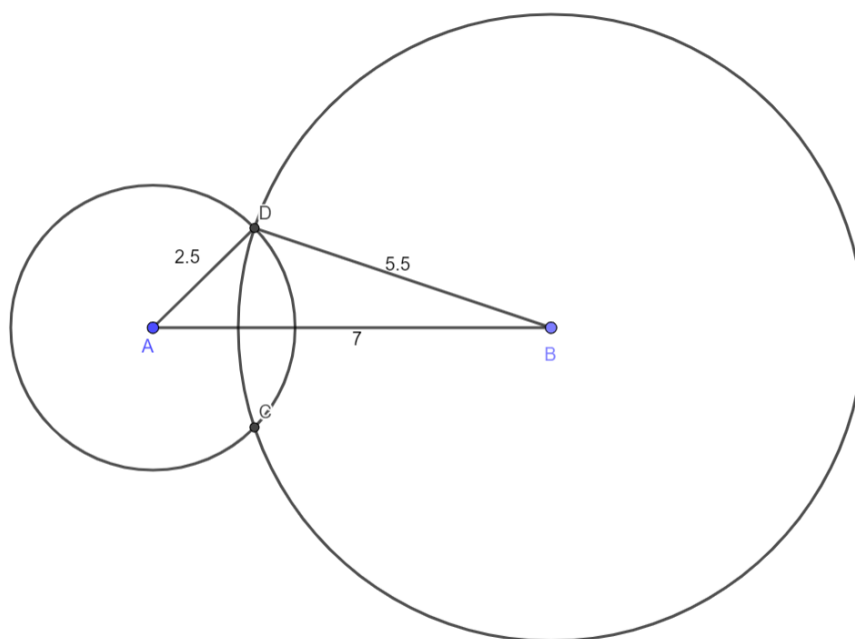


Assim, temos um triângulo com um dos lados medindo 6 cm e o ângulo oposto a esse lado medindo 60° .

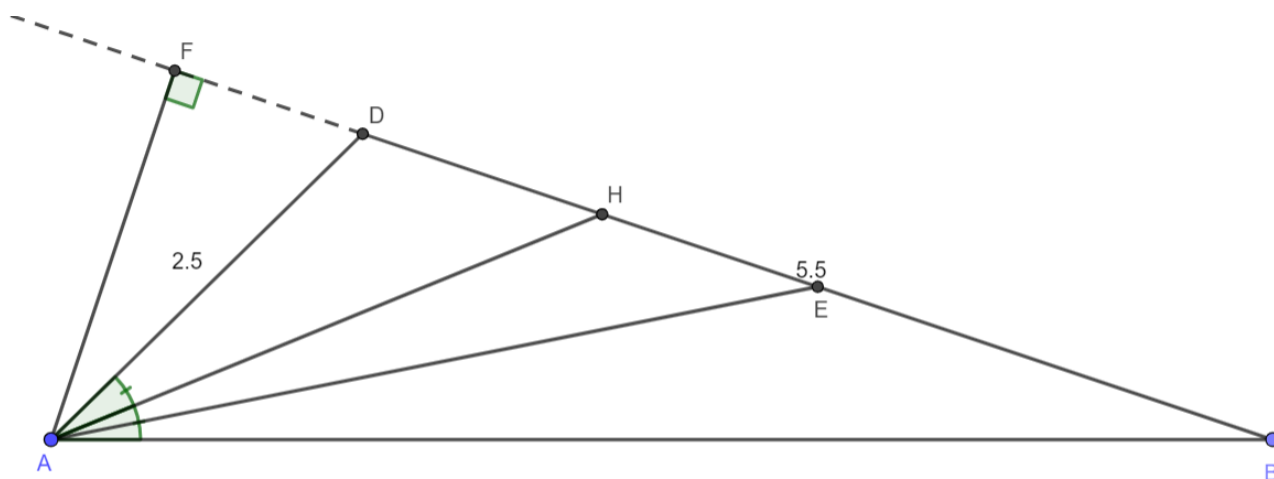


5. Os lados de um triângulo ABC medem $AB = 2,5$ cm, $AC = 7$ cm e $BC = 5,5$ cm. Construa o triângulo e, em seguida, obtenha as três cevianas relativas ao vértice A.

R. Construimos o triângulo da mesma maneira que fizemos em exercícios anteriores: traçamos o segmento de maior comprimento, que no caso é 7 cm. Com a ponta seca no ponto A, traçamos a circunferência de 2,5 cm de raio; com a ponta seca em B, traçamos a circunferência de 5,5 cm de raio. Essas duas circunferências se intersectam em dois pontos. Traçamos o segmento AD e BD (ou AC e BC) e geramos o triângulo de lados 2,5, 5,5 e 7 cm.



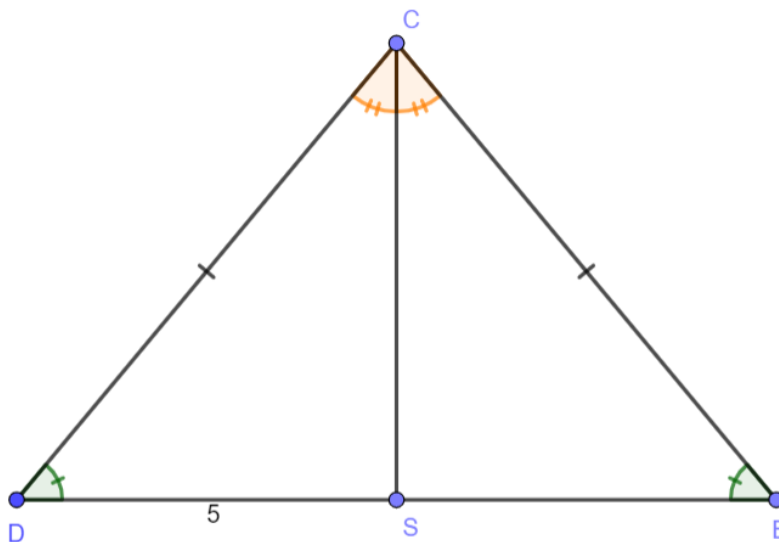
Com auxílio de um esquadro, traçamos a altura AF. Por se tratar de um triângulo obtusângulo, a altura fica fora do triângulo, no prolongamento do lado BD. Temos também a bissetriz, determinada por AH, e a mediana, determinada por AE.



Lição 87 - Triângulo Isósceles e triângulo equilátero

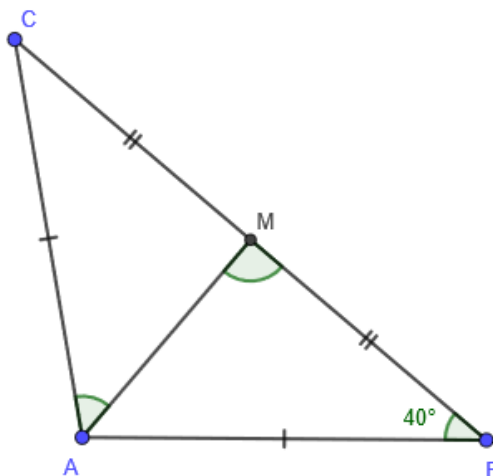
1. Em um triângulo isósceles de base $\overline{DE}$, $\overline{CS}$ é bissetriz. Sabendo que $\overline{DS}$ mede 5 cm, determine $ES = x$ e o ângulo $\widehat{CSD}$.

R. O triângulo do problema é representado da seguinte maneira:



Em um triângulo isósceles, sabemos que a bissetriz relativa à base é também a altura e a mediana. Portanto, se é mediana, significa que divide o segmento em dois segmentos de mesmo comprimento. Logo, $ES = 5$ cm. Como é altura, determina um ângulo de 90° com a base. Logo, $\widehat{CSD} = 90^\circ$.

2. Num triângulo isósceles ABC, com $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, $\overline{AM}$ é mediana. Se $\widehat{B} = 40^\circ$, determine os ângulos $\widehat{MAC} = x$ e $\widehat{AMB} = y$.



R. Como o triângulo ABC é isósceles, temos que $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$. Sendo assim, pelo caso L.A.L, os triângulos AMC e AMB são congruentes:

$$\overline{AC} \equiv \overline{AB}$$

$$\hat{B} \equiv \hat{C}$$

$$\overline{CM} \equiv \overline{BM}$$

Temos que $M\hat{A}B \equiv M\hat{A}C$. Portanto, uma vez que $M\hat{A}C = x$, o ângulo $\hat{A}$ mede $2x$. Considerando o triângulo ABC, temos:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$2x + 40^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$

$$2x + 80^\circ = 180^\circ$$

$$2x = 180 - 80$$

$$x = \frac{100}{2}$$

$$x = 50^\circ$$

Portanto, $M\hat{A}C = 50^\circ = M\hat{A}B$.

Uma vez que sabemos a medida de dois ângulos do triângulo AMB, encontrar a medida do terceiro é simples:

$$M\hat{A}B + A\hat{M}B + M\hat{B}A = 180^\circ$$

$$50^\circ + A\hat{M}B + 40^\circ = 180^\circ$$

$$A\hat{M}B = 180^\circ - 90^\circ$$

$$A\hat{M}B = 90^\circ$$

Lição 88 – Polígonos e seus elementos

1. Calcular o número de diagonais de um polígono de 25 lados.

R.

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$d = \frac{25 \cdot (25 - 3)}{2}$$

$$d = \frac{25 \cdot 22}{2}$$

$$d = 275$$

2. Qual é o polígono cujo número de diagonais é o quíntuplo do número de lados?

R. Queremos saber o número de lados desse polígono. Temos duas informações:

- O número de diagonais é 5 vezes maior que o número de lados: $d = 5n$.
- O número de diagonais pode ser determinado pela fórmula: $d = \frac{n(n-3)}{2}$.

Relacionando as duas fórmulas, temos:

$$d = d$$

$$5n = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$5n \cdot 2 = n(n-3)$$

$$10n = n^2 - 3n$$

$$n^2 - 3n - 10n = 0$$

$$n^2 - 13n = 0$$

$$n \cdot (n - 13) = 0$$

Assim,

$$n = 0 \quad \text{ou} \quad n - 13 = 0$$

$$n = 13$$

Portanto, o polígono em questão é o polígono que possui 13 lados.

Lição 89 – Ângulos de um polígono convexo e regular

1. Calcule a soma das medidas dos ângulos internos de um heptágono.

R. Como o prefixo “hept” é utilizado para indicar o número 7, temos um polígono de 7 lados. Assim, temos que a soma dos ângulos internos de um heptágono será:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_i = (7 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_i = 5 \cdot 180^\circ$$

$$S_i = 900^\circ$$

2. Calcule a soma das medidas dos ângulos internos de um eneágono.

R. Eneágono é o polígono de 9 lados. Portanto, temos que a soma dos ângulos internos de um eneágono será:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_i = (9 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_i = 7 \cdot 180^\circ$$

$$S_i = 1260^\circ$$

3. Que polígono possui a soma das medidas dos ângulos internos igual a 1.800° ?

R. Sabemos que $S_i = 1800^\circ$. Portanto, temos:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$1800 = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$\frac{1800}{180} = n - 2$$

$$10 = n - 2$$

$$n = 10 + 2$$

$$n = 12$$

4. Que polígono regular possui a medida dos ângulos externos igual a 60° ?

R. Nenhum, uma vez que o menor polígono possível, que é o triângulo, possui a soma interna de seus ângulos igual a 180° . Assim, não tem como existir um polígono cuja soma dos ângulos internos seja menor que 180° .

5. Qual é o polígono regular cuja medida do ângulo interno é o triplo da medida do ângulo externo?

R. Se a medida do ângulo interno a_i é o triplo da medida do ângulo externo a_e , temos que $a_i = 3 \cdot a_e$. Substituindo pelas fórmulas, temos:

$$a_i = 3 \cdot a_e$$

$$\frac{(n - 2) \cdot 180}{n} = 3 \cdot \frac{360}{n}$$

$$(n - 2) \cdot 180 = 3 \cdot 360$$

$$n - 2 = \frac{1080}{180}$$

$$n = 6 + 2$$

$$n = 8$$

Portanto, o polígono que satisfaz o enunciado é um octógono.

Lição 90 – Propriedades dos quadriláteros

1. Qual é o significado da palavra *quadrilátero*? Quais são os quadriláteros estudados neste volume?

R. Quadrilátero significa “quatro lados”. Estudamos os quadriláteros notáveis, isto é, o trapézio, o paralelogramo, o losango, o retângulo e o quadrado.

2. Qual é a diferença entre um quadrilátero côncavo e um quadrilátero convexo?

R. Em um quadrilátero côncavo os lados, quando prolongados, não interceptam nenhum dos outros lados, diferentemente do que acontece nos quadriláteros convexos, onde os lados prolongados interceptam um ou outro lado do quadrilátero.

3. A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é encontrada pela seguinte fórmula: $180n - 360$. Reproduza em seu caderno a explicação de como se chegou a esta fórmula. Depois responda:

a) Em um pentágono a soma dos ângulos internos é _____.

R.

$$180 \cdot 5 - 360$$

$$900 - 360$$

$$540$$

b) Em um octógono a soma dos ângulos internos é _____.

R.

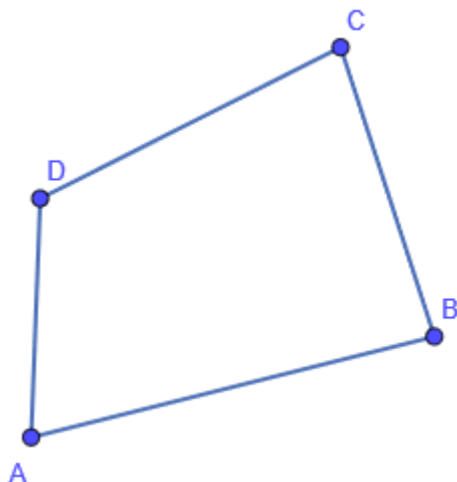
$$180 \cdot 8 - 360$$

$$1440 - 360$$

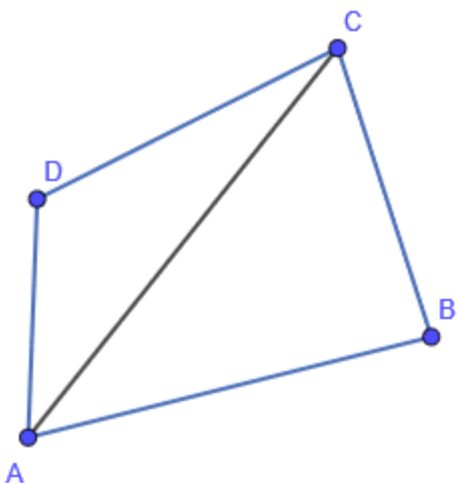
$$1080$$

4. A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre 360° . Demonstre este resultado.

R. Considere um quadrilátero qualquer ABCD.



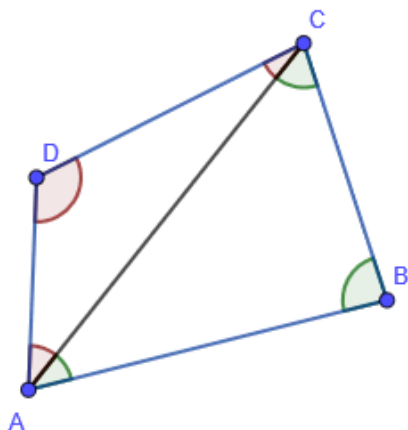
Traçando sua diagonal $\overline{AC}$, temos que o quadrilátero fica dividido em dois triângulos: ABC e CDA.



Ora, sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° , o que indica que:

$$\triangle ABC = \hat{CAB} + \hat{ABC} + \hat{BCA} = 180^\circ$$

$$\triangle CDA = \hat{DAC} + \hat{ACD} + \hat{CDA} = 180^\circ$$



No entanto, note que a soma dos ângulos $\hat{CAB}$ e $\hat{DAC}$ dos triângulos corresponde ao ângulo $\hat{A}$ do quadrilátero, e que a soma dos ângulos $\hat{BCA}$ e $\hat{ACD}$ dos triângulos corresponde ao ângulo $\hat{C}$ do quadrilátero. Portanto, como também os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ dos triângulos correspondem aos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ do quadrilátero, isso significa que a soma dos ângulos desses triângulos corresponde à soma dos ângulos internos do quadrilátero. Logo,

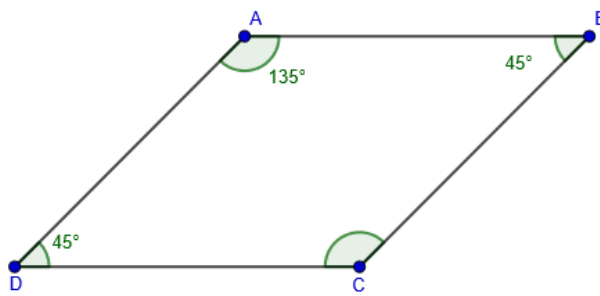
$$\hat{\text{Ângulos Quadrilátero}} = \hat{\text{Ângulos Triângulo ABC}} + \hat{\text{Ângulos Triângulo CDA}}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 180^\circ + 180^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ.$$

5. Encontre a medida do ângulo que resta:

a)



R.

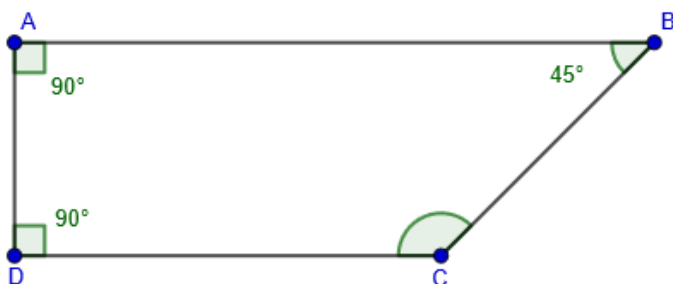
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360$$

$$135 + 45 + \hat{C} + 45 = 360$$

$$\hat{C} = 360 - 225$$

$$\hat{C} = 135^\circ$$

b)



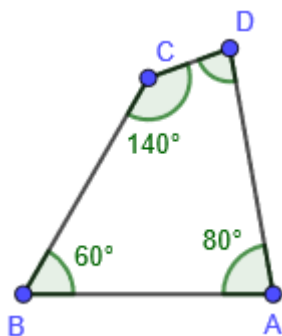
R. $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360$

$$90 + 45 + \hat{C} + 90 = 360$$

$$\hat{C} = 360 - 225$$

$$\hat{C} = 135^\circ$$

c)



R.

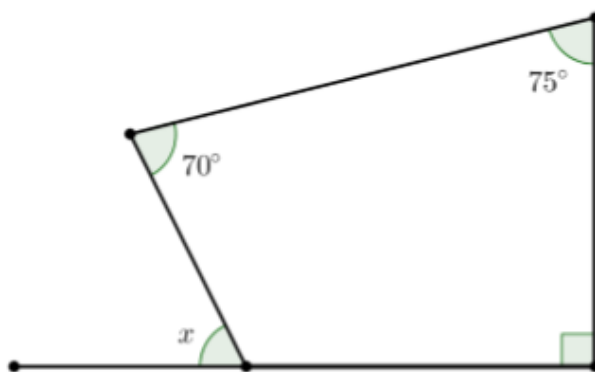
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360$$

$$80 + 60 + 140 + \hat{D} = 360$$

$$\hat{D} = 360 - 280$$

$$\hat{D} = 80^\circ$$

6. Determine o valor de x no quadrilátero abaixo:



R. Uma vez que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre igual a 360° , temos que o ângulo x' (suplementar de x), mede:

$$70 + 75 + 90 + x' = 360$$

$$x' = 360 - 235$$

$$x' = 125^\circ$$

Agora, uma vez que x e x' são suplementares, temos que x mede:

$$x + x' = 180$$

$$x + 125 = 180$$

$$x = 180 - 125$$

$$x = 55^\circ.$$

Lição 91 – Trapézio

1. Qual é a novidade que aparece nos quadriláteros em relação aos triângulos?

R. Nos quadriláteros existem lados opostos, o que não existe nos triângulos, pois todos os lados são consecutivos.

2. Dê a definição de trapézio.

R. Todo quadrilátero que possua no mínimo um par de lados paralelos é denominado trapézio. Os lados paralelos são denominados *bases* do trapézio, e, se não têm a mesma medida, o lado maior é denominado *base maior*, e o lado menor é denominado *base menor*.

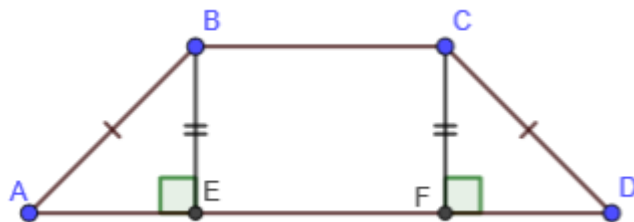
3. Demonstre o seguinte teorema: *Em um trapézio isósceles, os ângulos da base são congruentes.*

R. Considere o trapézio isósceles ABCD de bases $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. A tese é que, se o trapézio é isósceles, seus lados não paralelos são congruentes e os ângulos das bases são congruentes.

Hipótese		Tese
$\overline{AB} \equiv \overline{CD}$	$\Rightarrow$	$\hat{A} \equiv \hat{D} \text{ e } \hat{B} \equiv \hat{C}$

Lê-se: “Se os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes, então o ângulo $\hat{A}$ é congruente ao ângulo $\hat{D}$ e o ângulo $\hat{B}$ é congruente ao ângulo $\hat{C}$ ”.

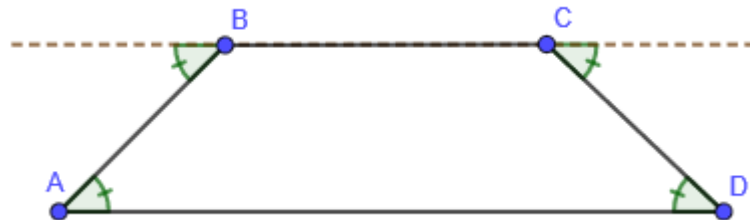
Traçando duas retas perpendiculares às bases pelos vértices B e C, temos que são congruentes, pois correspondem à distância de uma base à outra, e a distância entre retas paralelas é sempre a mesma.



Note que temos dois triângulos retângulos: ABE e DCF. Ora, pelo caso de congruência CH (cateto-hipotenusa) estes triângulos são congruentes, pois a hipotenusa $\overline{AB}$ é congruente à hipotenusa $\overline{CD}$, e o cateto $\overline{BE}$ é congruente ao cateto

$\overline{FC}$. Como eles são congruentes, seus ângulos correspondentes também o são, o que implica que $\hat{A} \equiv \hat{D}$.

Falta verificar se $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são congruentes. Como foi aprendido em conteúdos anteriores, duas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos congruentes². Veja:



O ângulo $\hat{A}$ interno do trapézio é congruente ao ângulo $\hat{B}$ externo ao trapézio; o ângulo $\hat{D}$ interno do trapézio é congruente ao ângulo $\hat{C}$ externo ao trapézio. Com isso, temos que:

$$\hat{A} \equiv \hat{D} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C}$$

Ora, o ângulo $\hat{B}$ interno ao trapézio é suplementar ao ângulo $\hat{B}$ externo ao trapézio; o ângulo $\hat{C}$ interno ao trapézio é suplementar ao ângulo $\hat{C}$ externo ao trapézio. No entanto, como os ângulos externos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são congruentes, então seus suplementos também são congruentes, o que implica que os ângulos internos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são congruentes. Dessa maneira, demonstramos que um trapézio isósceles possui os ângulos da base iguais.



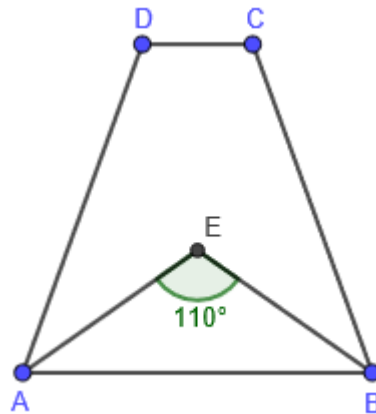
■ Q.E.D

4. Seja dado um trapézio isósceles que possui dois ângulos de medidas 30° e 150° . Quais são as medidas para os outros dois ângulos?

R. Se o trapézio é isósceles, os ângulos da base são iguais. Portanto, o ângulo que está na mesma base do ângulo de 30° , mede 30° , e o ângulo que está na mesma base do ângulo de 150° , mede 150° .

² Ver anexo para demonstração deste teorema.

5. Sabendo que $\overline{AE}$ e $\overline{BE}$ são as bissetrizes de $\hat{A}$ e $\hat{B}$ respectivamente, determine a soma de $\hat{C}$ e $\hat{D}$:



R. Uma vez que $\overline{AE}$ e $\overline{BE}$ são as bissetrizes de $\hat{A}$ e $\hat{B}$, sabemos que esses ângulos foram divididos em duas partes iguais. Assim, se $\hat{A} = x$ e $\hat{B} = y$, cada uma das partes do ângulo $\hat{A}$ medirá $\frac{x}{2}$, e cada uma das partes do ângulo $\hat{B}$ medirá $\frac{y}{2}$. Portanto, no triângulo AEB, temos três ângulos: $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$ e 110° . Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° , temos:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 110 = 180$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 180 - 110$$

$$\frac{x + y}{2} = 70$$

$$x + y = 70 \cdot 2$$

$$x + y = 140^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} = 140^\circ$$

Agora, a soma dos ângulos de todo quadrilátero é igual a 360° . Portanto, temos:

$$\underbrace{\hat{A} + \hat{B}} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

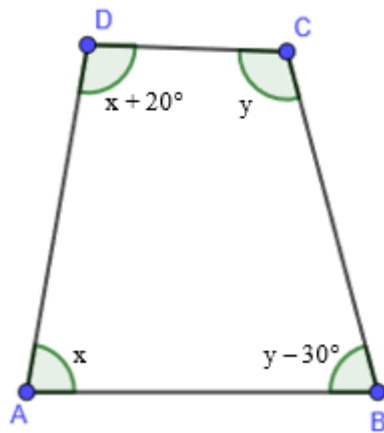
$$140^\circ + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

$$\hat{C} + \hat{D} = 360^\circ - 140^\circ$$

$$\hat{C} + \hat{D} = 220^\circ$$

6. Se ABCD é trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, determine x e y:

a)



R. Como é um trapézio, vimos que a soma de ângulos consecutivos que formam os lados não paralelos é sempre 180° . Logo,

$$x + (x + 20) = 180^\circ$$

$$2x + 20 = 180^\circ$$

$$2x = 180 - 20$$

$$x = \frac{160}{2}$$

$$x = 80$$

$$y + (y - 30) = 180^\circ$$

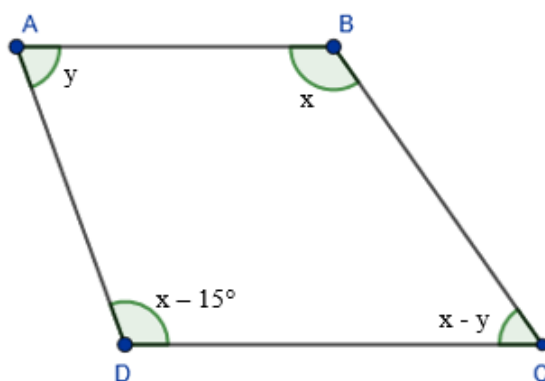
$$2y - 30 = 180$$

$$2y = 180 + 30$$

$$y = \frac{210}{2}$$

$$y = 105^\circ$$

b)



R. Como é um trapézio, vimos que a soma de ângulos consecutivos que formam os lados não paralelos é sempre 180° . Logo,

$$y + (x - 15^\circ) = 180^\circ$$

$$y + x - 15^\circ = 180^\circ$$

$$x + y = 180 + 15$$

$$x + y = 195^\circ$$

$$x + (x - y) = 180^\circ$$

$$x + x - y = 180^\circ$$

$$2x - y = 180^\circ$$

Temos um sistema de equações:

$$x + y = 195^\circ$$

$$2x - y = 180^\circ$$

Resolvendo esse sistema, temos:

$$x + y = 195^\circ$$

$$2x - y = 180^\circ \quad +$$

$$3x + 0y = 375$$

$$3x = 375$$

$$x = \frac{375}{3}$$

$$x = 125$$

Se $x = 125$, temos que y será:

$$x + y = 195^\circ$$

$$125 + y = 195$$

$$y = 195 - 125$$

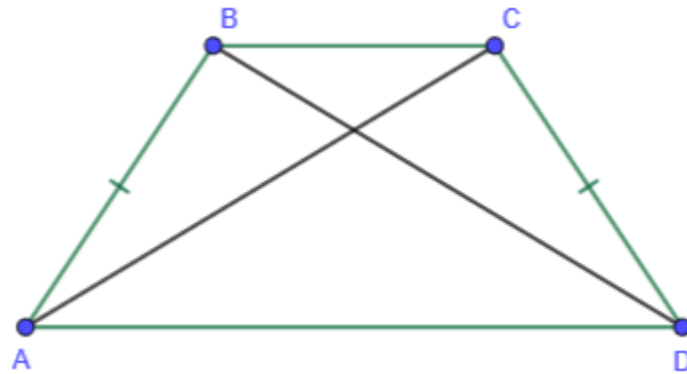
$$y = 70^\circ$$

7. Demonstre o seguinte teorema: as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

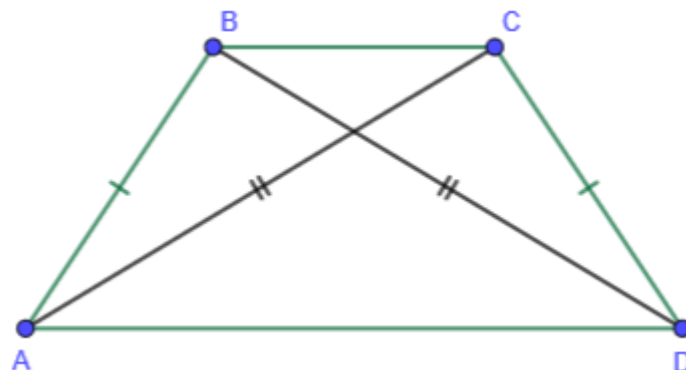
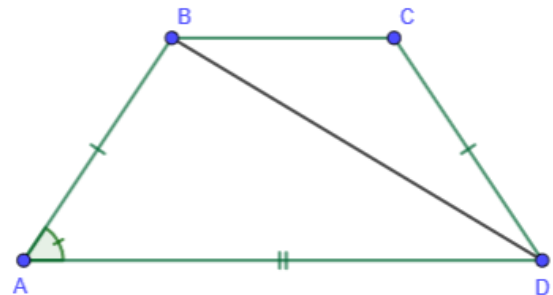
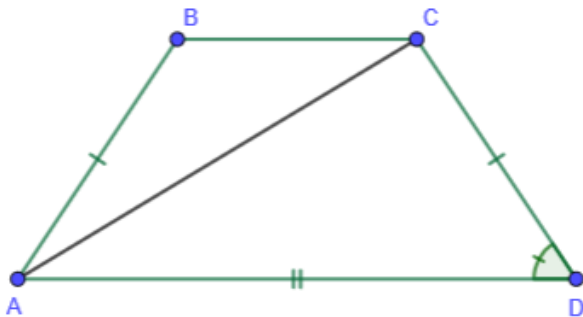
R. Considere o trapézio isósceles ABCD de bases $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, de diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. A tese é que, se o trapézio é isósceles, seus lados não paralelos são congruentes e as diagonais são congruentes.

Tese	Hipótese
$\overline{AD} \equiv \overline{BC}$	$\Rightarrow \overline{AC} \equiv \overline{BD}$

Lê-se: “Se os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes, então as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são congruentes”.



Traçadas as diagonais, considere os triângulos ABD e DCA. Ora, como o trapézio é isósceles, temos que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e que $\hat{A} \equiv \hat{D}$. Além disso, o lado $\overline{AD}$ é comum aos dois triângulos. Portanto, pelo caso de congruência L.A.L., os triângulos ABD e DCA são congruentes, o que implica que $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são congruentes.



■ Q.E.D

Lição 92 – Paralelogramos

1. Dê a definição de paralelogramo. Por que um paralelogramo é também um trapézio?

R. Paralelogramo é todo quadrilátero que possui os lados opostos paralelos. Uma vez que a definição de trapézio considera como sendo um trapézio todo quadrilátero que tem pelo menos dois lados paralelos, o paralelogramo também é um trapézio. Decorre que nem todo trapézio é um paralelogramo, mas todo paralelogramo é um trapézio.

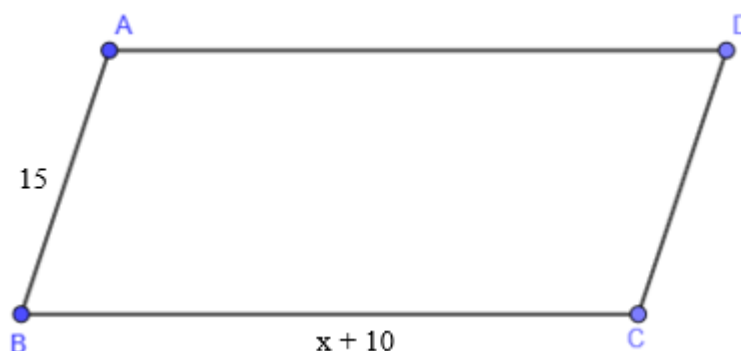
2. Demonstre que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

R. Considere um paralelogramo ABCD, com $\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{DA} // \overline{BC}$. A propriedade enuncia que os ângulos opostos são congruentes. Matematicamente, escrevemos da seguinte maneira.

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{Tese} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{Hipótese} \\ \hline \end{array} \quad \overline{AB} // \overline{CD} \text{ e } \overline{DA} // \overline{BC} \Rightarrow \hat{A} \equiv \hat{C} \text{ e } \hat{B} \equiv \hat{D}$$

Esta propriedade pode facilmente ser verificada utilizando os recursos da demonstração anterior. Ora, se ao traçar a diagonal $\overline{AC}$ temos dois triângulos congruentes, fica evidente que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são congruentes. Se a diagonal $\overline{BD}$ for traçada, teremos novamente dois triângulos congruentes, e, como consequência, $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são congruentes.

3. Encontre o valor de x , sabendo que o perímetro³ do paralelogramo é 100 cm.



³ Lembre-se de que o perímetro de um polígono é a soma da medida de todos os lados.

R. Temos que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, e que $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$. Portanto, o perímetro desse paralelogramo é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} &\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} \\ &15 + (x + 10) + 15 + (x + 10) \\ &2x + 50 \end{aligned}$$

Uma vez que sabemos que o perímetro é igual a 100 cm, temos:

$$\begin{aligned} 2x + 50 &= 100 \\ 2x &= 100 - 50 \\ x &= \frac{50}{2} \\ x &= 25 \text{ cm} \end{aligned}$$

4. Demonstre que os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.

R. Considere um paralelogramo ABCD, com $\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{DA} // \overline{BC}$. A propriedade enuncia que os ângulos opostos são congruentes. Matematicamente, escrevemos da seguinte maneira.

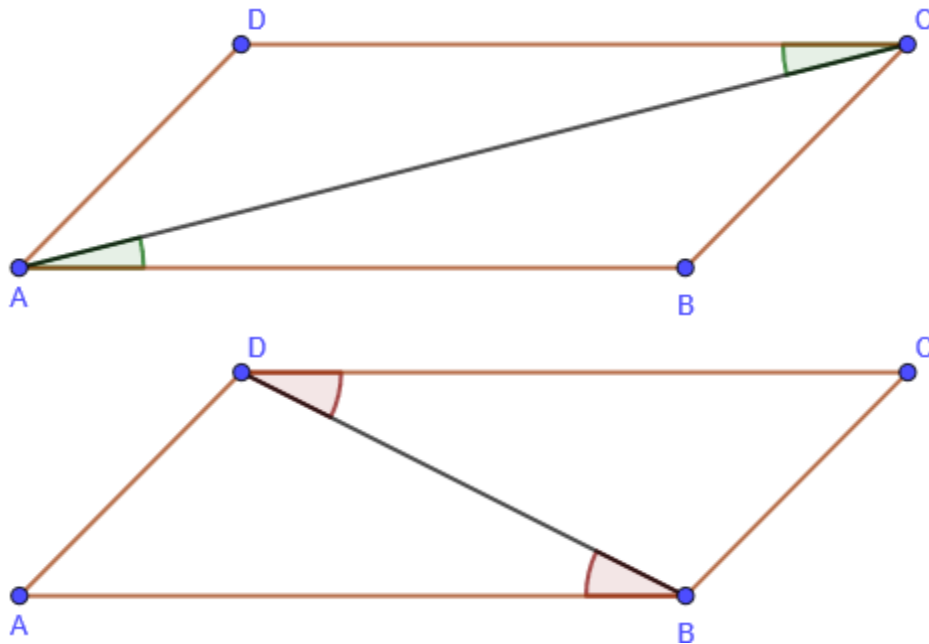
Tese		Hipótese
$\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{DA} // \overline{BC}$	$\Rightarrow$	$\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$

Esta propriedade pode facilmente ser verificada utilizando os recursos da demonstração anterior. Ora, se ao traçar a diagonal $\overline{AC}$ temos dois triângulos congruentes, fica evidente que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são congruentes. Se a diagonal $\overline{BD}$ for traçada, teremos novamente dois triângulos congruentes, e, como consequência, $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são congruentes.

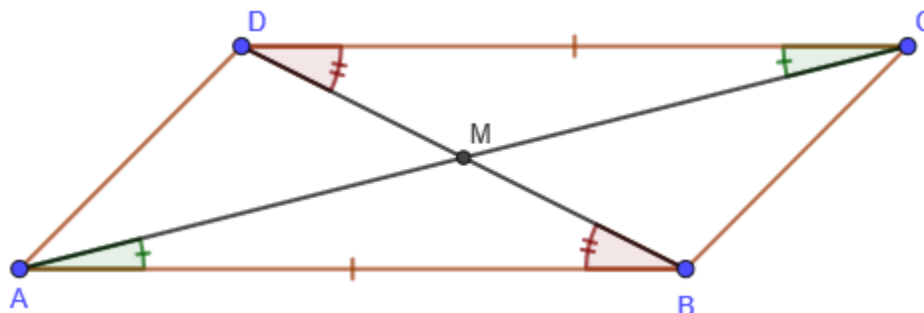
5. Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se cruzam em seus respectivos pontos médios.

R. Considere um paralelogramo ABCD, com $\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{DA} // \overline{BC}$. A propriedade enuncia que as diagonais se intersectam em seus respectivos pontos médios. Em outras palavras, elas cortam-se ao meio.

Ao traçar a diagonal $\overline{AC}$, temos, pelo teorema dos ângulos alternos internos, congruência entre os ângulos $\widehat{BAC}$ e $\widehat{DCA}$. Ao traçar a diagonal $\overline{BD}$, temos congruência entre os ângulos $\widehat{CDB}$ e $\widehat{ABD}$.



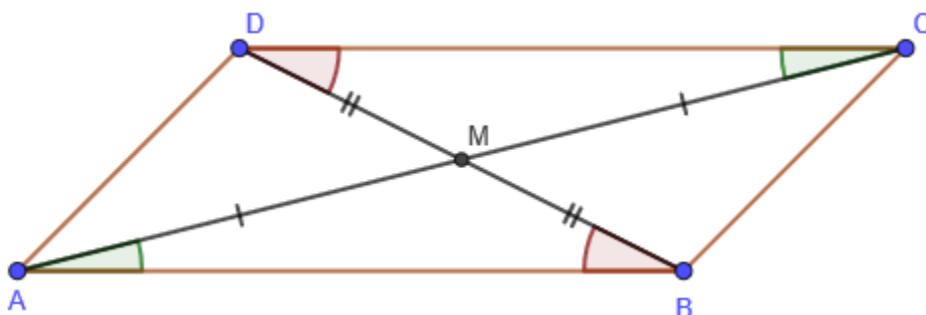
Tracemos as duas diagonais do paralelogramo e chamemos o ponto de intersecção de M. Como ABCD é um paralelogramo, temos ainda que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$. Ora, pelo caso A.L.A, os triângulos AMB e CMB são congruentes.



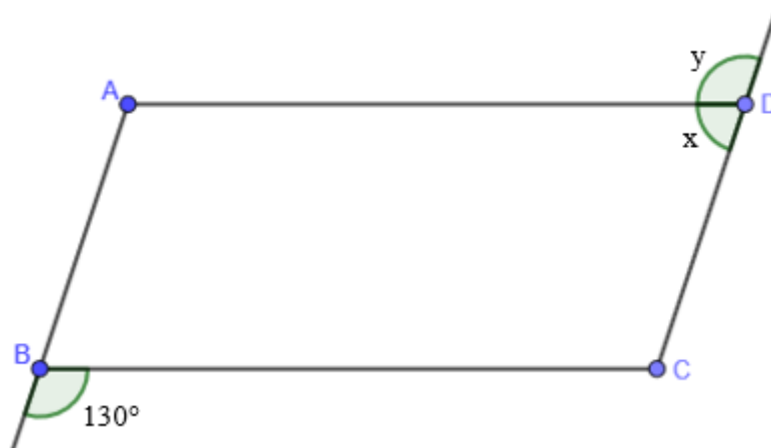
A congruência entre estes dois triângulos implica, ao fazer a correspondência entre os vértices, congruência entre seus lados correspondentes. Logo,

$$\overline{AM} \equiv \overline{CM}$$

$$\overline{BM} \equiv \overline{DM}$$

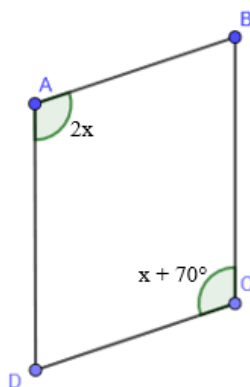


6. Sabendo que ABCD é um paralelogramo, encontre o valor de x e y .



R. O ângulo $\hat{B}$ interno do paralelogramo é suplemento do ângulo de 130° . Portanto, ele mede 50° . Como em um paralelogramo os ângulos opostos são congruentes, temos que $x = 50^\circ$. Como x e y são suplementares, então $y = 130^\circ$.

7. Determine o valor do ângulo $\hat{B}$ do paralelogramo abaixo:



R. Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são congruentes. Portanto, temos:

$$2x = x + 70^\circ$$

$$2x - x = 70^\circ$$

$$x = 70^\circ$$

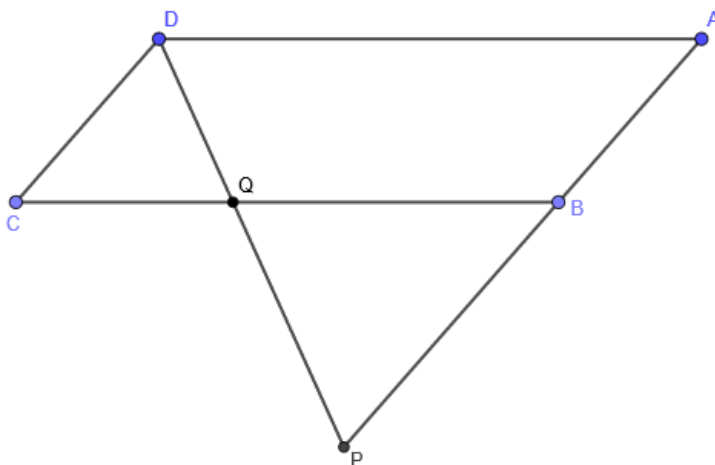
Portanto, $\hat{A}$ e $\hat{C}$ medem $2 \cdot 70 = 140^\circ$.

Os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ também são congruentes. Digamos que medem y° . Ao somar todos os ângulos internos desse paralelogramo, temos:

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} &= 360^\circ \\ 140 + x + 140 + x &= 360 \\ 2x &= 360^\circ - 280^\circ \\ x &= \frac{80}{2} \\ x &= 40^\circ\end{aligned}$$

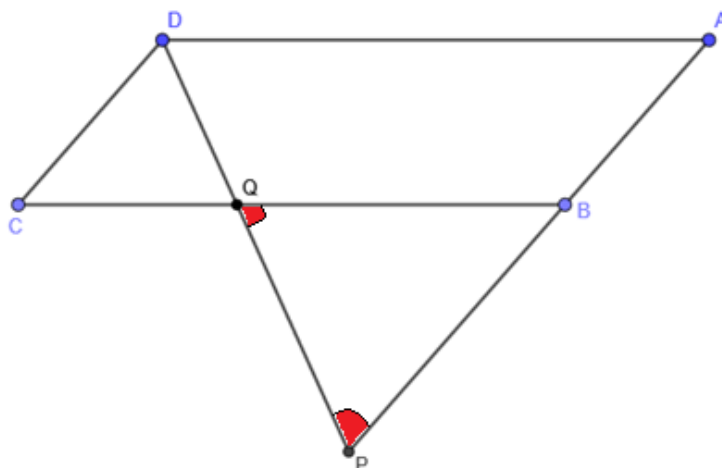
Portanto, $\hat{B} = x = 40^\circ$.

- 8.** Se ABCD é um paralelogramo, AD = 20 cm, BQ = 12 cm e BP = BQ, determine o perímetro desse paralelogramo.

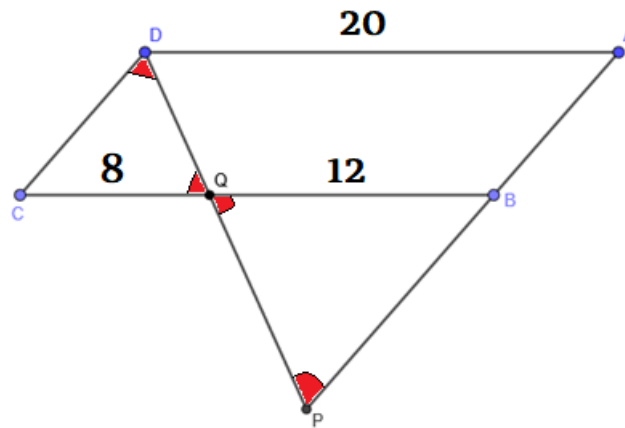


R. Uma vez que AD = 20 cm, temos que BC = 20 cm, pois os lados opostos de um paralelogramo são congruentes. Agora, se BQ = 12 cm, significa que QC = 8 cm, uma vez que BC = BQ + QC.

Como BP = BQ o triângulo BQP é isósceles de base QP. Logo, os ângulos BPQ e PQB são congruentes, pois são os ângulos da base de um triângulo isósceles.



Além disso, o ângulo DQC é O.P.V com o ângulo PQB e os ângulos BPQ e CDQ são alternos internos, assim, o triângulo DQC é isósceles de base DQ .



Se o triângulo DQC é isósceles de base DQ então $CQ = DC = 8$ cm.

Portanto, podemos concluir que o perímetro do paralelogramo é a soma de

$$AD + DC + CB + BA = 20 + 8 + 20 + 8 = 56 \text{ cm.}$$

9. Demonstre que os ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.

R. Considere um paralelogramo $ABCD$, com $\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{DA} // \overline{BC}$. A propriedade enuncia que ângulos consecutivos são suplementares, isto é, a soma de ângulos consecutivos é 180° . Ora, sabemos que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° . Além disso, sabemos também que em um paralelogramo os ângulos opostos são congruentes. Logo, se um ângulo mede X° , seu oposto também medirá X° , e, se o outro ângulo mede Y° , seu oposto também medirá Y° . Somando estes quatro ângulos, temos:

$$X^\circ + Y^\circ + X^\circ + Y^\circ = 360^\circ$$

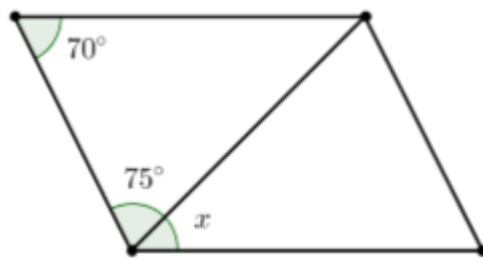
$$2X^\circ + 2Y^\circ = 360^\circ$$

$$X^\circ + Y^\circ = 180^\circ$$

Dividindo os dois membros da equação por 2

Como a soma dos dois ângulos é 180° , fica demonstrado que são suplementares

10. Calcule x no paralelogramo abaixo:



R.

$$70^\circ + (75^\circ + x) = 180^\circ$$

$$145^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 145^\circ$$

$$x = 35^\circ$$

11. Sobre paralelogramos, assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s).

a) Os lados opostos são congruentes.

R. Verdadeiro.

b) Os ângulos opostos são suplementares.

R. Falso.

c) Os lados opostos são paralelos.

R. Verdadeiro.

d) As diagonais interceptam-se nos pontos médios.

R. Verdadeiro.

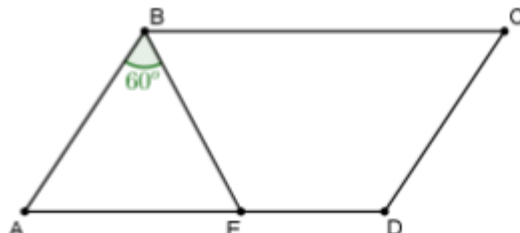
e) Os lados são congruentes.

R. Falso

f) Todo trapézio é um paralelogramo.

R. Falso.

12. No paralelogramo ABCD da figura, BE é bissetriz do ângulo $\hat{B}$. Determine a medida do ângulo $\hat{E}$.



R. Uma vez que BE é bissetriz, temos que o ângulo $\hat{B}$ foi dividido em duas partes iguais. Se uma das partes mede 60° , o ângulo todo mede $60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$. Como é um paralelogramo, temos que $\hat{B} \equiv \hat{D}$, e sabemos que a soma de todos os quatro ângulos deve ser 360° . Portanto, temos:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

$$\hat{A} + 120^\circ + \hat{C} + 120^\circ = 360^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{C} = 360^\circ - 240^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{C} = 120^\circ$$

Como os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são congruentes, temos que cada um mede 60° , pois a soma dos dois foi igual a 120° . Agora, se no triângulo ABE, sabemos que o valor do ângulo $\hat{B}$ é 60° , e que o ângulo $\hat{A}$ é 60° , temos que a medida do ângulo $\hat{AEB}$ será:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{AEB} = 180^\circ$$

$$60^\circ + 60^\circ + \hat{AEB} = 180^\circ$$

$$\hat{AEB} = 180^\circ - 120^\circ$$

$$\hat{AEB} = 60^\circ$$

Lição 93 – Retângulos, Losangos e Quadrados

1. Dê a definição de retângulo.

R. Todo paralelogramo que possui um ângulo reto é um *retângulo* ou ainda todo paralelogramo equiângulo é um *retângulo*.

2. Demonstre que as diagonais de um retângulo são congruentes. Demonstre também a recíproca desta afirmação.

R. Considere um paralelogramo equiângulo ABCD, com $\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{DA} // \overline{BC}$. A propriedade enuncia que em um paralelogramo equiângulo, ou seja, um retângulo, as diagonais são congruentes. Matematicamente, escrevemos da seguinte maneira:

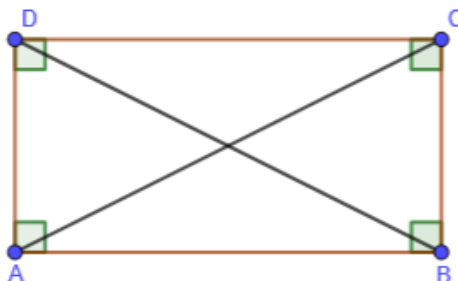
Tese	Hipótese
------	----------

$$\overline{AB} // \overline{CD} \text{ e } \overline{DA} // \overline{BC} \text{ e } \hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D} \Rightarrow \overline{AC} \equiv \overline{BD}$$

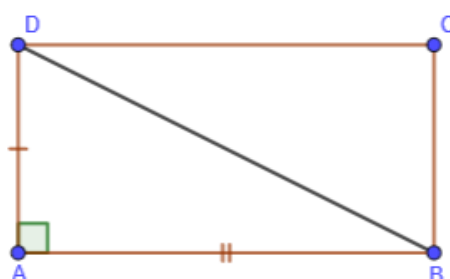
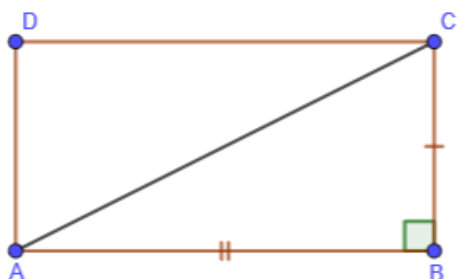
Lê-se: “Se temos um paralelogramo equiângulo (ou seja, um retângulo), então as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são congruentes”.



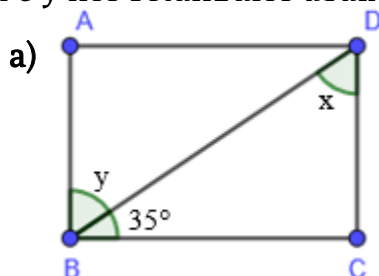
Traçando as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, temos:



Como o retângulo ABCD é um paralelogramo, sabemos que seus lados opostos são congruentes, ou seja, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$. Considere os seguintes triângulos: BCA e ADB. Pelo caso L.A.L, eles são congruentes, o que implica que os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, que são as diagonais do retângulo, são congruentes.



3. Calcule x e y nos retângulos abaixo:



R. Uma vez que os quatro ângulos de um retângulo são retos, temos:

$$y + 35^\circ = 90^\circ$$

$$y = 90^\circ - 35^\circ$$

$$y = 55^\circ$$

Agora, no triângulo BCD, sabemos o valor de dois ângulos, $\angle CBD = 35^\circ$ e $\angle C = 90^\circ$. Portanto, para encontrar o valor de x, basta somar os três ângulos, que deve ser igual a 180° :

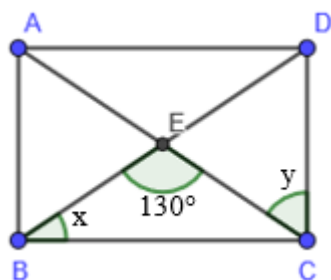
$$35^\circ + 90^\circ + x = 180^\circ$$

$$125^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 125^\circ$$

$$x = 55^\circ$$

b)



R. Em um retângulo, as diagonais são congruentes. Portanto, $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$. Além disso, todo retângulo é também um paralelogramo, o que significa que suas diagonais se cruzam em seu ponto médio. Sendo assim, temos que $\overline{AE} \equiv \overline{EC}$, e de $\overline{BE} \equiv \overline{ED}$. Oras,

como as diagonais são congruentes, então os quatro segmentos que são determinados pelo encontro das diagonais acabam sendo congruentes:

$$\overline{AE} \equiv \overline{EC} \equiv \overline{BE} \equiv \overline{ED}.$$

Então, o triângulo BEC é isósceles, pois $\overline{EC} \equiv \overline{BE}$, o que implica que os ângulos da base são iguais. Portanto, nesse triângulo temos dois ângulos de medida x° cada, e um ângulo de 130° . Somando esses três ângulos, temos:

$$x + x + 130 = 180$$

$$2x = 180 - 130$$

$$x = \frac{50}{2}$$

$$x = 25^\circ$$

Uma vez que sabemos a medida de x , é possível saber o valor de y , pois eles são complementares:

$$x + y = 90^\circ$$

$$25^\circ + y = 90^\circ$$

$$y = 90^\circ - 25^\circ$$

$$y = 65^\circ$$

4. Responda: falso ou verdadeiro?

a) Toda propriedade do paralelogramo vale para retângulo.

R. Verdadeiro.

b) Toda propriedade do retângulo vale para o paralelogramo.

R. Falso.

c) Se as diagonais de um quadrilátero são congruentes, então ele é um retângulo.

R. Falso.

d) Se as diagonais de um paralelogramo são congruentes, então ele é um retângulo.

R. Verdadeiro.

5. Dê a definição de losango. O que o difere de um retângulo?

R. Um losango é todo paralelogramo que possui os quatro lados iguais. Um retângulo não precisa ter os quatro lados iguais, apenas os quatro ângulos iguais.

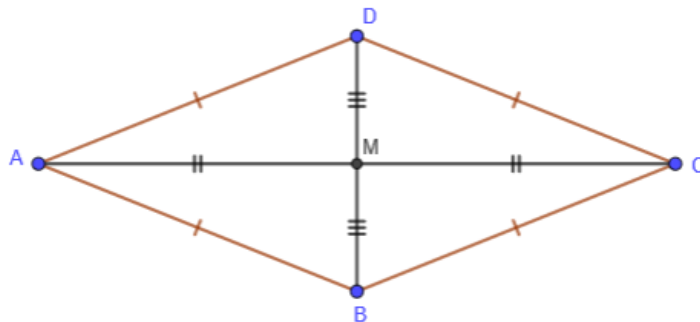
6. Demonstre que as diagonais de um losango são perpendiculares e bissetrizes dos ângulos dos vértices que as contêm.

R. Considere um losango ABCD, com $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$ e diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. A propriedade enuncia que as diagonais são perpendiculares e, além disso, que são as bissetrizes dos ângulos dos vértices que as contêm (isto significa que elas dividem o ângulo em dois ângulos congruentes). Matematicamente, escrevemos da seguinte maneira:

$$\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA} \Rightarrow \overline{AC} \perp \overline{BD}$$

Lê-se: “Se temos um losango, em que todos os lados são congruentes, então as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares”.

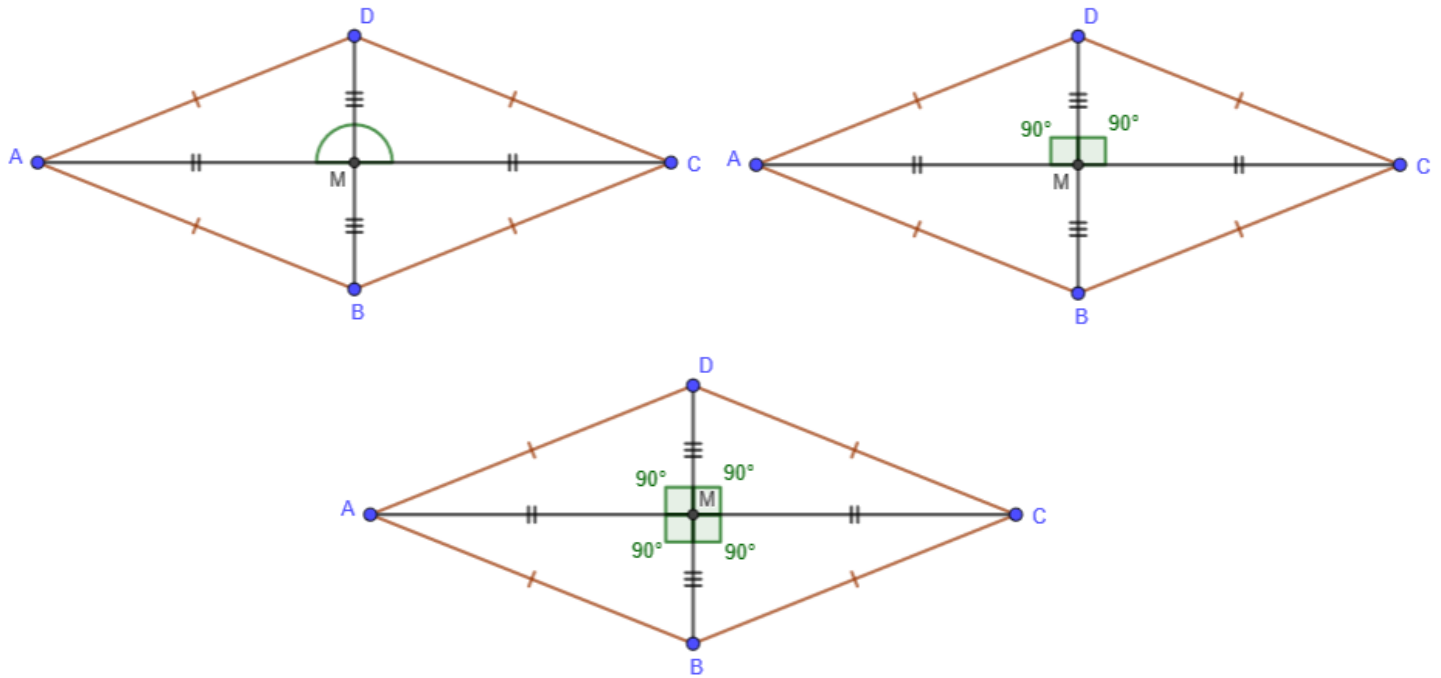
Traçadas as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, temos que elas se cruzam em seus respectivos pontos médios, uma vez que um losango é também um paralelogramo.



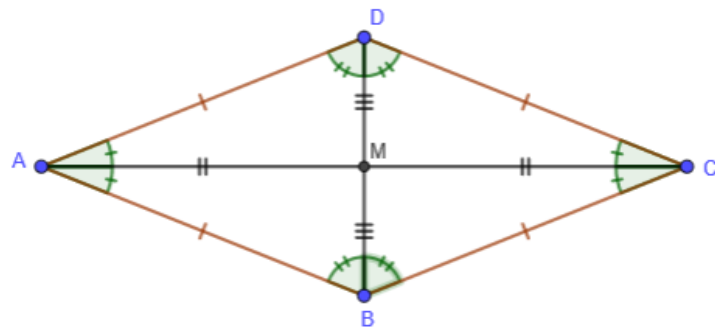
Ora, perceba que os quatro triângulos formados são congruentes pelo caso LLL:

- $\overline{AM} \equiv \overline{CM}$.
- $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$.
- $\overline{DM} \equiv \overline{BM}$.

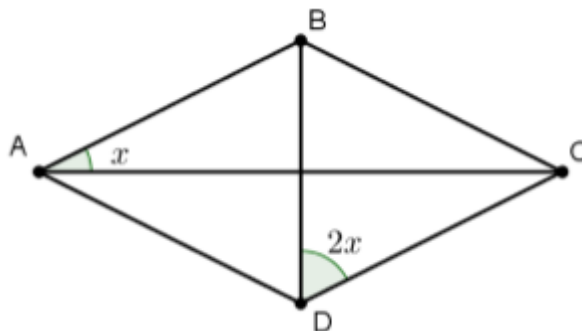
Portanto, seus ângulos são congruentes. Desta congruência entre os ângulos, sabemos que os ângulos $\widehat{AMD}$ e $\widehat{CMD}$ são congruentes. No entanto, eles são também suplementares, pois sua soma resulta 180° . Logo, a única possibilidade de dois ângulos serem congruentes e suplementares ao mesmo tempo é que cada um deles meça 90° . Ora, isso se verifica com os outros dois ângulos, isto é, $\widehat{AMB}$ e $\widehat{CMB}$, o que prova que as diagonais são perpendiculares, uma vez que o ângulo formado entre elas é um ângulo reto.



Utilizando a relação entre a congruência dos triângulos, é possível observar que estas diagonais são as bissetrizes dos ângulos dos vértices que as contêm, ou seja, $\overline{AC}$ é bissetriz dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ e a diagonal $\overline{BD}$ é bissetriz dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$. Observe: o ângulo $\hat{MAD}$ é congruente ao mesmo tempo aos ângulos $\hat{MCD}$, $\hat{MCB}$ e $\hat{MAB}$. Disto concluímos que a diagonal $\overline{AC}$ é bissetriz dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$, uma vez que os divide em dois ângulos congruentes. O mesmo se verifica para a diagonal $\overline{BD}$ e para os ângulos $\hat{D}$ e $\hat{B}$.



7. Calcule o valor de x no losango abaixo.



R. Uma vez que as diagonais de um losango são bissetrizes dos seus ângulos, sabemos que o ângulo $\hat{A}$ mede o dobro de x , e o ângulo $\hat{D}$ mede o dobro de $2x$. Além disso, os ângulos opostos são congruentes. Portanto, temos:

$$\hat{A} = 2x$$

$$\hat{B} = 4x$$

$$\hat{C} = 2x$$

$$\hat{D} = 4x$$

Sabendo que a soma dos quatro ângulos deve ser igual a 360° , temos:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

$$2x + 4x + 2x + 4x = 360^\circ$$

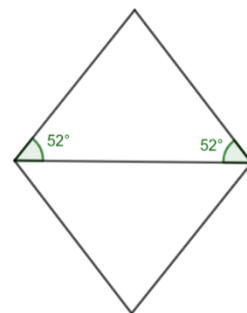
$$12x = 360^\circ$$

$$x = \frac{360}{12}$$

$$x = 30^\circ$$

8. Calcule as medidas dos ângulos de um losango, sabendo que uma diagonal forma com um dos lados um ângulo de 52° .

R. Se a diagonal formou um ângulo de 52° , significa que ela dividiu um ângulo em duas partes iguais. Se uma das partes mede 52° , a outra também mede, e o ângulo total mede 104° . Como os ângulos consecutivos são suplementares, temos que o outro ângulo mede $180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$.

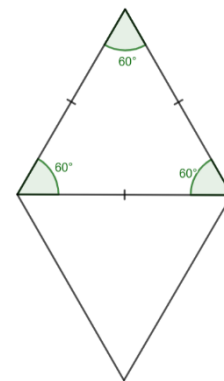


9. Uma formiga caminha sobre um losango ABCD, dando 10 voltas. Se a distância entre os vértices A e B, consecutivos, é 12 cm, qual é a distância percorrida pela formiga?

R. Como em um losango todos os lados são congruentes, temos que cada um mede 12 cm. Como são 4 lados, o perímetro desse losango é igual a $12 \cdot 4 = 48$ cm. Portanto, se a formiga percorreu 10 vezes esse perímetro, ela percorreu $48 \cdot 10 = 480$ cm.

10. Determine as medidas dos ângulos de um losango, sabendo que uma diagonal e dois lados consecutivos formam um triângulo equilátero.

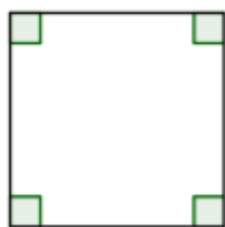
R. Em um triângulo equilátero, todos os lados e todos os ângulos possuem a mesma medida. Isso significa que cada um dos ângulos mede 60° , pois $180 : 3 = 60^\circ$. Como as diagonais de um losango são também a bissetrizes dos ângulos, temos que o ângulo cortado pela diagonal mede 120° , pois uma das partes mede 60° , e $60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.



11. Dê a definição de quadrados.

R. Todo paralelogramo que possua os quatro lados congruentes e um ângulo reto é um *quadrado*.

13. O que podemos afirmar, com certeza, sobre a figura abaixo?



a) É um quadrado.

R. Verdadeiro.

b) É um retângulo.

R. Verdadeiro

c) Não é um paralelogramo.

R. Falso.

d) É um losango.

R. Verdadeiro.

14. Assinale a alternativa correta.

a) Todo quadrado é losango.

R. Sim.

b) Todo losango é retângulo.

R. Não.

c) Todo paralelogramo é quadrado.

R. Não.

d) Todo retângulo é losango.

R. Não.

15. Classifique como verdadeira ou falso:

a) As diagonais de um losango são congruentes.

R. Falso.

b) As diagonais de um retângulo são perpendiculares.

R. Falso.

c) As diagonais de um retângulo são bissetrizes dos seus ângulos.

R. Falso.

d) As diagonais de um paralelogramo são bissetrizes dos seus ângulos.

R. Falso.

e) As diagonais de um quadrado são bissetrizes de seus ângulos e são perpendiculares.

R. Verdadeiro.

f) Se as diagonais de um quadrilátero são bissetrizes de seus ângulos, então ele é um losango.

R. Verdadeiro.

g) Se as diagonais de um quadrilátero são perpendiculares, então elas são bissetrizes de seus ângulos.

R. Falso.

h) Se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e perpendiculares, então ele é um quadrado.

R. Verdadeiro.

i) Se as diagonais de um quadrilátero são bissetrizes e congruentes, então ele é um quadrado.

R. Falso.

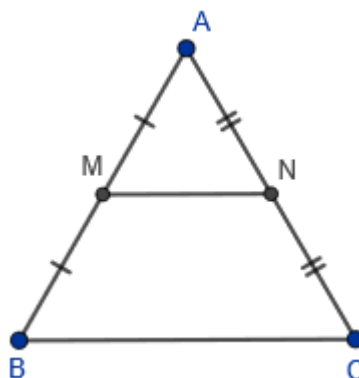
j) Se uma diagonal de um quadrilátero é bissetriz dos dois ângulos, então ela é perpendicular à outra diagonal.

R. Verdadeiro

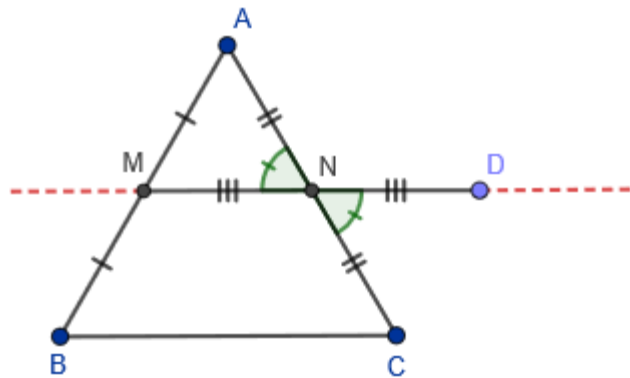
Lição 94 – Base média em triângulos e trapézios

1. Demonstre o teorema da base média dos triângulos.

R. Considere um triângulo qualquer ABC , e os pontos médios M e N dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Devemos demonstrar o teorema em duas partes: primeiro que $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{BC}$, e depois que $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

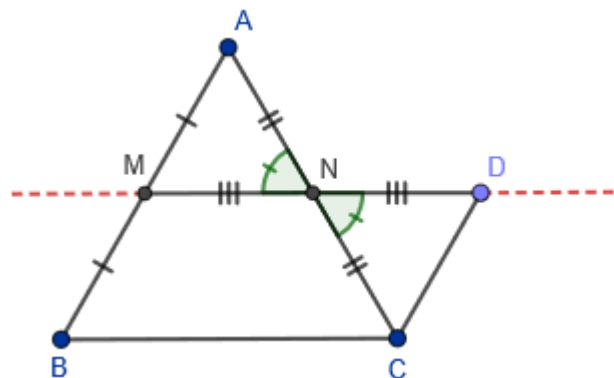


Considere um ponto D no prolongamento de $\overline{MN}$ tal que $\overline{MN} = \overline{ND}$. Deste prolongamento, temos que o ângulo $\widehat{ANM}$ é congruente ao ângulo $\widehat{CND}$, pois eles são opostos pelo vértice.

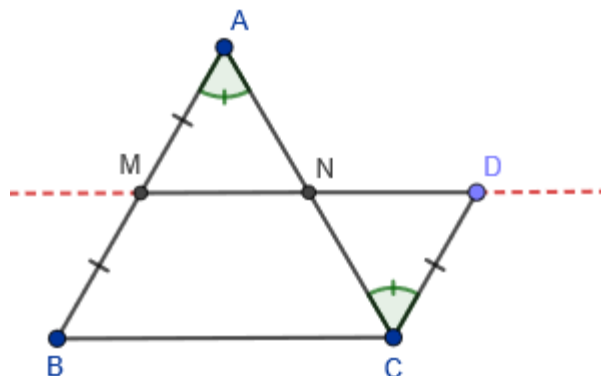


Temos, pelo caso LAL, que os triângulos AMN e DCN são congruentes, pois:

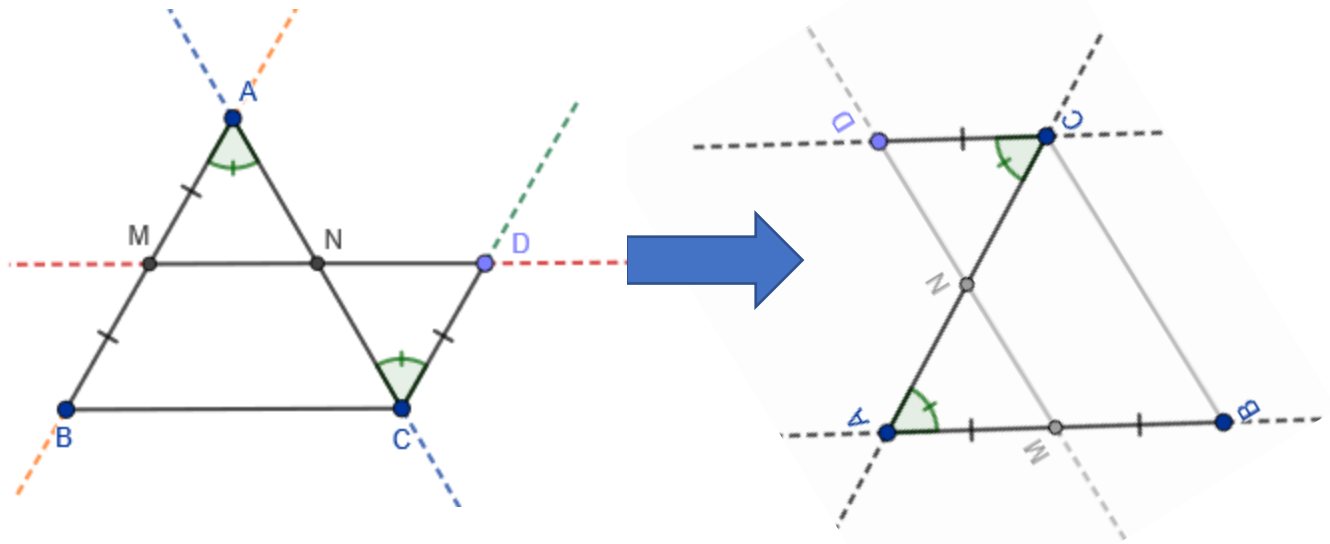
- $\overline{MN} \equiv \overline{ND}$
- $\widehat{ANM} \equiv \widehat{CND}$
- $\overline{MN} \equiv \overline{ND}$



Portanto, da correspondência entre os vértices, temos que $\overline{AM}$ é congruente ao segmento $\overline{DC}$, o que indica que $\overline{DC}$ e $\overline{MB}$ são congruentes. Além disso, da congruência entre os triângulos sabemos também que os ângulos $\widehat{MAN}$ e $\widehat{DCN}$ são congruentes.



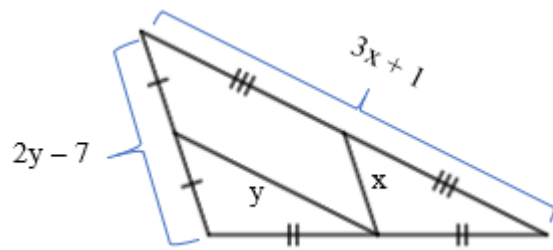
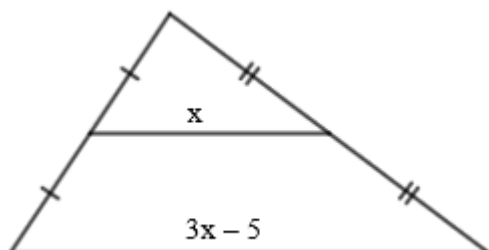
Agora, como os ângulos $\widehat{MAN}$ e $\widehat{DCN}$ são congruentes, podemos afirmar que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos. Por que podemos afirmar que são paralelos? Tendo em vista o Teorema dos Ângulos Alternos Internos, consideramos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ paralelos e $\overline{AC}$ transversal. A seguir viramos a imagem para uma melhor visualização:



Portanto, fica evidente que $\overline{MB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos. Pelas recíprocas das propriedades dos paralelogramos, sabemos que, se um quadrilátero tiver dois lados paralelos e congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo, o que significa que BCDM é um paralelogramo e, portanto, $\overline{MD}$ e $\overline{BC}$ são paralelos. Logo, $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{BC}$.

Resta agora demonstrar que $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. Ora, como o ponto D foi escolhido tal que $\overline{MN} \equiv \overline{ND}$, então o ponto N é o ponto médio do segmento $\overline{MD}$, que por sua vez é paralelo e congruente a $\overline{BC}$. Logo, fica evidente que $\overline{MN}$ mede metade de $\overline{BC}$ (Veja: $\overline{MN}$ é metade de $\overline{MD}$, e que $\overline{MD}$ é congruente a $\overline{BC}$). Logo, $\overline{MN}$ é metade de $\overline{BC}$.

2. Considerando congruentes os segmentos com ‘marcas iguais’, determine os valores das incógnitas abaixo:



R. O segmento cujas extremidades são os pontos médios de dois lados de um triângulo, é paralelo à base do triângulo e seu valor é metade da medida dessa base. Portanto, para o triângulo da esquerda, temos:

$$x = \frac{3x - 5}{2}$$

$$2x = 3x - 5$$

$$5 = 3x - 2x$$

$$x = 5$$

Para o triângulo da direita, temos:

$$x = \frac{2y - 7}{2}$$

$$2x = 2y - 7$$

$$2x - 2y = -7$$

$$y = \frac{3x + 1}{2}$$

$$2y = 3x + 1$$

$$2y - 3x = 1$$

$$-3x + 2y = 1$$

Dado o sistema de equações, temos:

$$2x - 2y = -7$$

$$-3x + 2y = 1$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{array}{rcl} 2x - 2y = -7 & .(3) & \rightarrow 6x - 6y = -21 \quad + \\ -3x + 2y = 1 & .(2) & \quad -6x + 4y = 2 \\ \hline & & -2y = -19 \end{array}$$

$$-2y = -19$$

$$2y = 19$$

$$y = \frac{19}{2}$$

Uma vez que sabemos o valor de y , temos:

$$2x - 2 \cdot \frac{19}{2} = -7$$

$$2x - 19 = -7$$

$$2x = -7 + 19$$

$$2x = 12$$

$$x = \frac{12}{2}$$

$$x = 6$$

3. Nos triângulos ABC de lados $AB = 9$ cm, $BC = 14$ cm e $AC = 11$ cm, os pontos D, E e F são pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Calcule o perímetro do triângulo DEF.

R. Os segmentos que determinam o triângulo DEF, possuem todos, extremidades nos pontos médios dos lados do triângulo ABC.

Portanto:

$$\overline{AB} \parallel \overline{EF}$$

$$\overline{AC} \parallel \overline{DF}$$

$$\overline{BC} \parallel \overline{DE}$$

No quadrilátero determinado por AEFD, $AE \parallel FD$ e $AE \equiv FD$. Logo, $FD = 4,5$ cm.

Do mesmo modo, $AD \parallel EF$ e $AD \equiv EF$. Logo, $EF = 5,5$ cm.

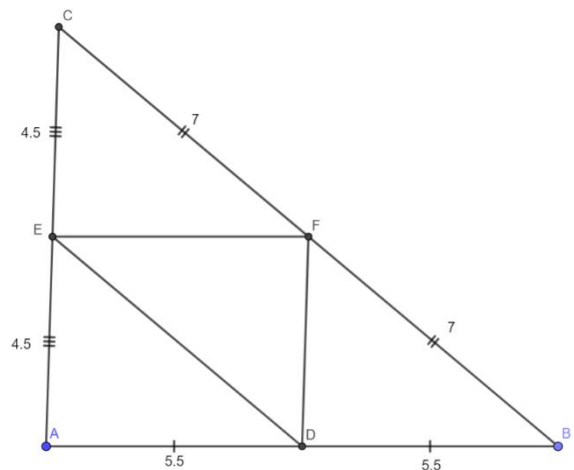
Por fim, como $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$, temos que $\overline{DE} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

Sendo assim, o perímetro do triângulo DEF, é:

$$\Delta DEF = FD + EF + DE$$

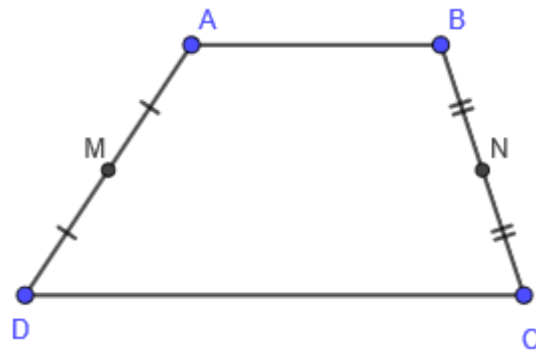
$$\Delta DEF = 4,5 + 5,5 + 7$$

$$\Delta DEF = 17 \text{ cm.}$$

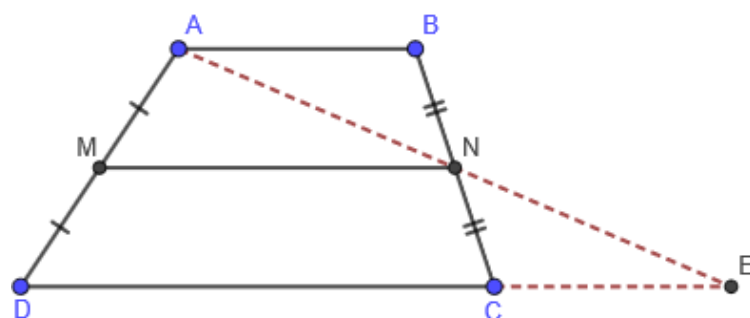


4. Demonstre o teorema da base média dos trapézios.

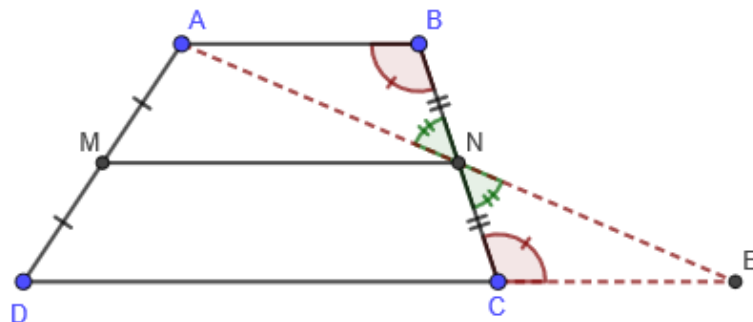
R. Considere um trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, e M e N pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Vamos demonstrar inicialmente seu paralelismo em relação às bases e depois que sua medida é equivalente à média aritmética das medidas das bases.



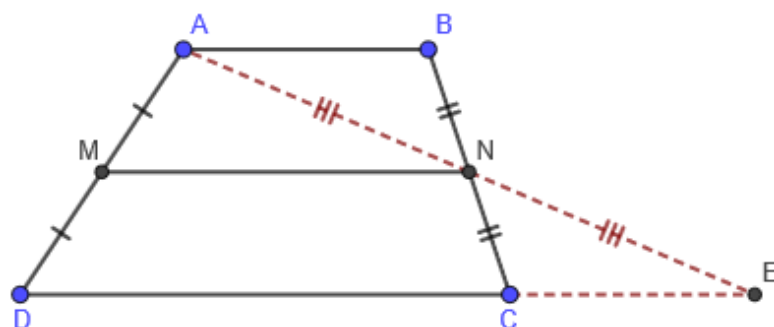
Traçado o $\overline{MN}$, considere um ponto E, exterior ao trapézio, que seja o ponto de intersecção entre $\overline{AN}$ e $\overline{DC}$.



Pelo Teorema dos Ângulos Alternos Internos, temos que os ângulos $\widehat{NBA}$ e $\widehat{NCE}$ são congruentes. Além disso, os ângulos $\widehat{CNE}$ e $\widehat{BNA}$ também são congruentes, pois são opostos pelo vértice. Portanto, pelo caso A.L.A os triângulos ABN e ECN são congruentes.

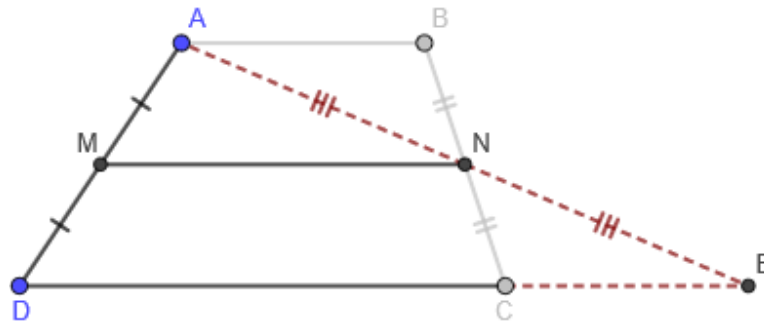


Desta congruência, concluímos que $\overline{AN}$ e $\overline{EN}$ são congruentes:



Ora, M é ponto médio do segmento $\overline{AD}$, e N é ponto médio do segmento $\overline{AE}$ (pois o dividiu em dois segmentos congruentes). Portanto, pelo teorema da base média dos triângulos, o segmento

$\overline{MN}$ é paralelo ao lado $\overline{DE}$ do triângulo ADE. Como $\overline{DC}$ está contido no lado $\overline{DE}$ do triângulo, podemos afirmar que $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{DC}$, como queríamos provar.



Triângulo ADE: M e N são pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$, respectivamente.
Logo, $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{DE}$, e conseqüentemente, de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

Resta ainda demonstrar que a medida deste segmento é igual à média aritmética entre as medidas das bases do trapézio. No entanto, note que o fato de os triângulos ABN e ECN serem congruentes faz com que os lados $\overline{EC}$ e $\overline{AB}$ sejam congruentes. Disto podemos concluir que o segmento $\overline{DE}$ nada mais é que a soma das bases do trapézio:

$$\overline{DE} = \overline{DC} + \overline{CE}$$

$$\overline{DE} = \overline{DC} + \overline{AB}$$

O teorema da base média dos triângulos diz ainda que o segmento com extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo, além de ser paralelo ao terceiro lado, mede metade deste terceiro lado. Portanto, o segmento $\overline{MN}$ mede metade do lado $\overline{DE}$, que nada mais é que a soma das bases do trapézio:

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{DE}$$

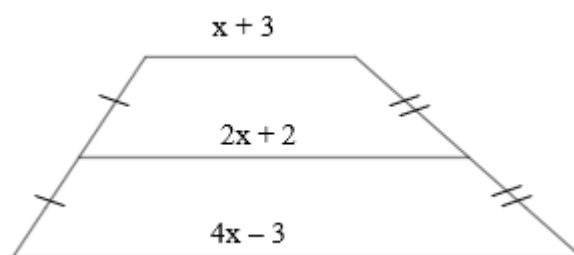
$$\overline{MN} = \frac{\overline{DE}}{2}$$

$$\overline{MN} = \frac{\overline{DC} + \overline{AB}}{2}$$

Por fim, demonstramos que a base média do trapézio tem medida igual à média aritmética entre as medidas das bases deste mesmo trapézio.

5. Sabendo que os quadriláteros abaixo são trapézios e que segmentos iguais são congruentes, determine os valores das incógnitas em cada item.

a)



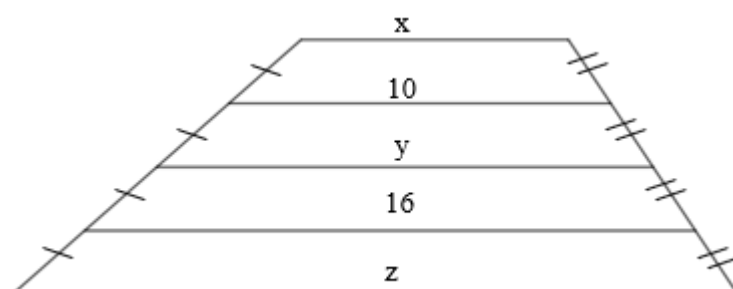
R.

$$2x + 2 = \frac{(4x - 3) + (x + 3)}{2}$$

$$4x + 4 = 4x - 3 + x + 3$$

$$4 = x$$

b)



R.

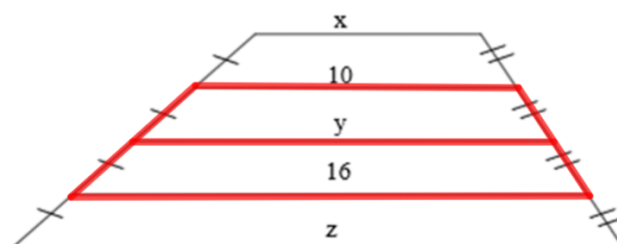
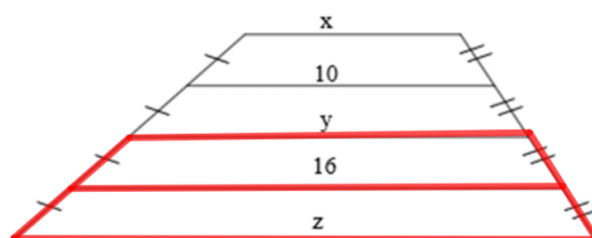
$$16 = \frac{y + z}{2}$$

$$32 = y + z$$

$$y = \frac{10 + 16}{2}$$

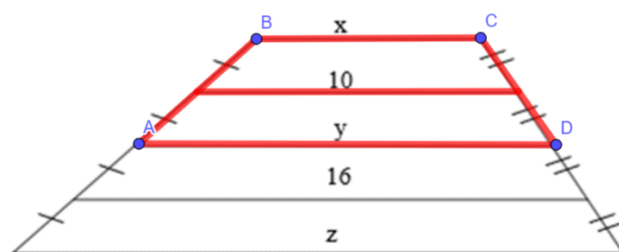
$$y = \frac{26}{2}$$

$$y = 13$$



$$10 = \frac{x + y}{2}$$

$$20 = x + y$$



Como $y = 13$, temos

$$32 = y + z$$

$$32 = 13 + z$$

$$32 - 13 = z$$

$$z = 19$$

$$20 = x + y$$

$$20 = x + 13$$

$$20 - 13 = x$$

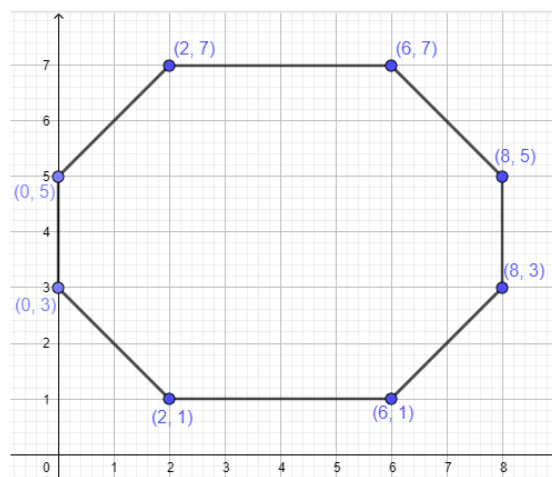
$$x = 7$$

Lição 95 – Transformações geométricas

1. Observe o polígono ao lado.

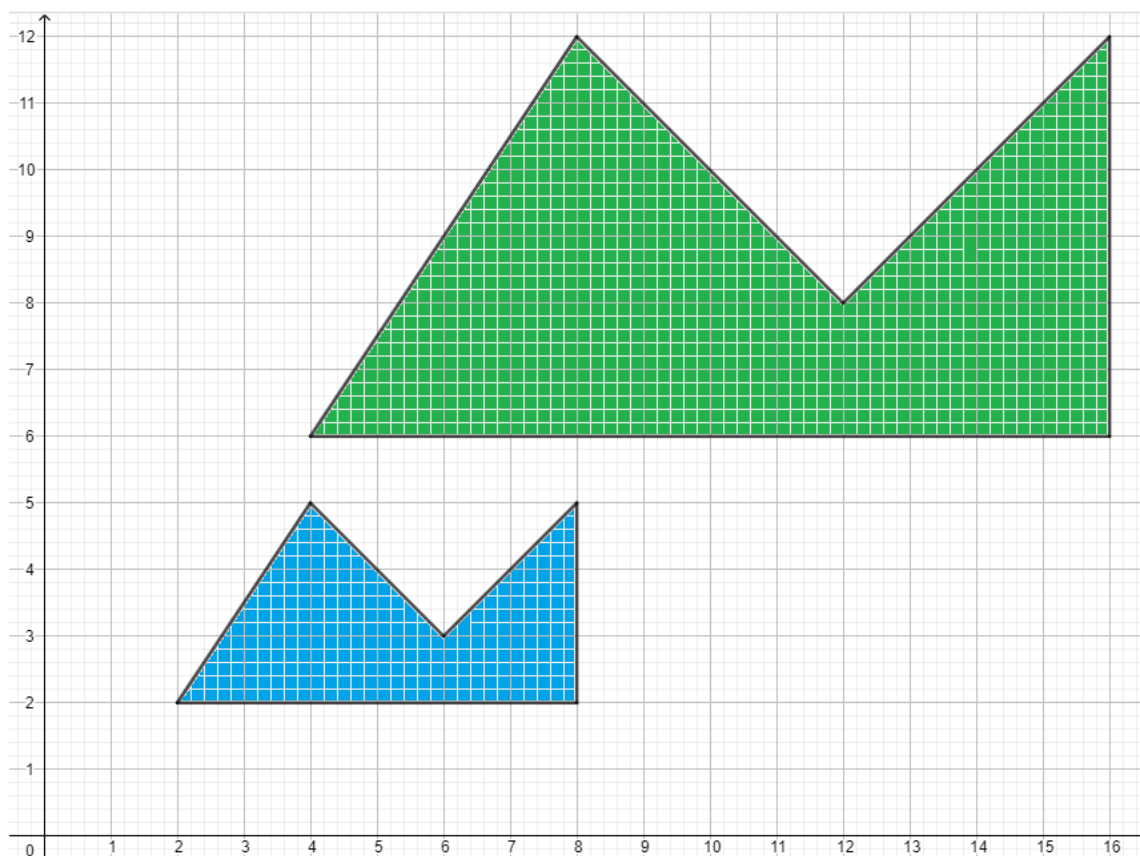
O que deve ser feito com as coordenadas dos pontos deste polígono para obter uma ampliação dele, de fator 2, no 4º quadrante? Quais serão as coordenadas dos vértices do polígono ampliado?

R. Precisamos multiplicar tanto as coordenadas de x , como as coordenadas de y , pelo fator 2 para termos uma ampliação de fator 2 e para fazermos uma mudança de coordenada para o quarto quadrante devemos multiplicar as coordenadas de y por -1 , pois no quarto quadrante x é positivo e y é negativo.



Assim, temos as seguintes coordenadas dos vértices do polígono: $(0, -6)$, $(0, -10)$, $(4, -14)$, $(12, -14)$, $(16, -10)$, $(16, -6)$, $(12, -2)$ e $(4, -2)$.

2. Considere os polígonos a seguir.



a) Quais são as coordenadas dos vértices do polígono representado em azul?

R. $(2, 2)$, $(4, 5)$, $(6, 3)$, $(8, 5)$, $(8, 2)$.

b) Qual foi o fator da ampliação do menor para o maior polígono?

R. O fator de ampliação foi 2.

3. O que significa ampliar um polígono no plano cartesiano?

R. Ampliar um polígono é realizar uma transformação geométrica que gera um novo polígono n vezes maior que o polígono original.

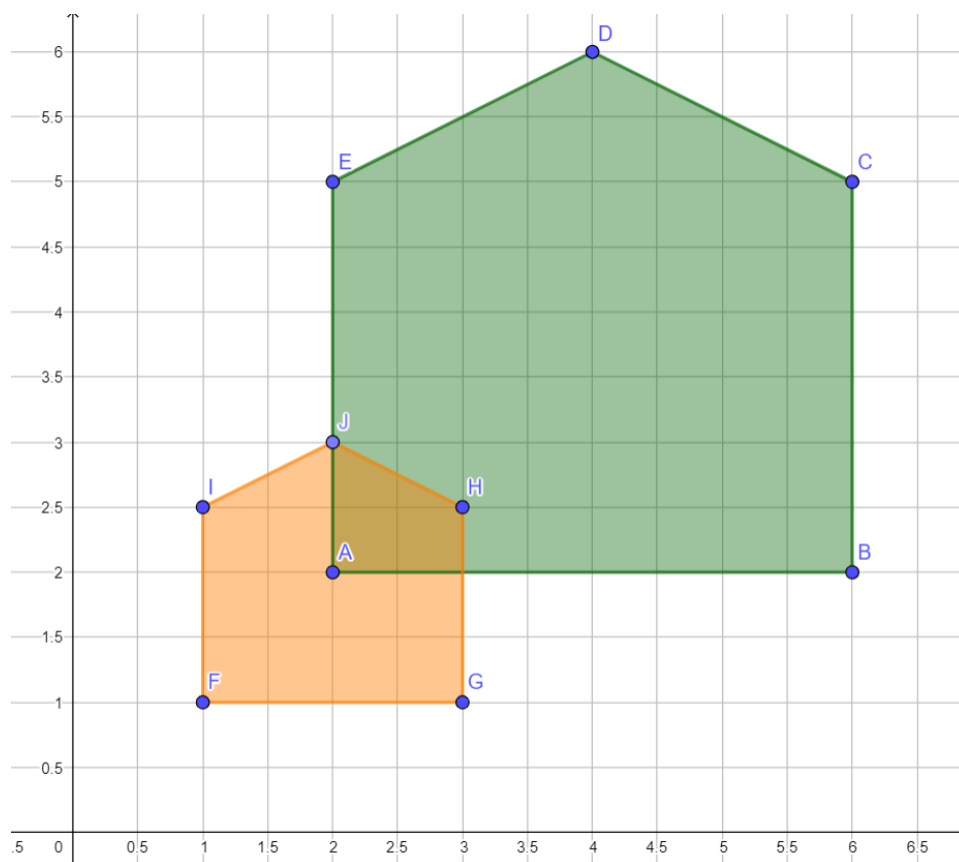
4. A partir de um polígono com os vértices nos pontos $(2, 2)$, $(6, 2)$, $(6, 5)$, $(4, 6)$ e $(2, 5)$, faça a transformação de reduzir o polígono original à metade.

a) Quais são as coordenadas dos vértices do polígono obtido?

R. $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 2,5)$, $(2, 3)$, $(1, 2,5)$.

b) Desenhe no mesmo plano cartesiano o polígono reduzido e o original.

R.



5. O que significa reduzir um polígono no plano cartesiano?

R. Reduzir um polígono é realizar uma transformação geométrica que gera um novo polígono n vezes menor que o polígono original.

6. Descreva a transformação que você deve fazer para refletir um polígono do 4º quadrante para o 3º quadrante sem alterar seu tamanho.

R. Basta multiplicar todas as coordenadas por -1 em relação ao eixo x.

7. O que significa refletir um polígono no plano cartesiano?

R. Refletir um polígono no plano cartesiano significa desenhar o mesmo polígono espelhado em relação a um ponto ou a um eixo do plano cartesiano. Esse ponto ou eixo são como um espelho que reflete o polígono.

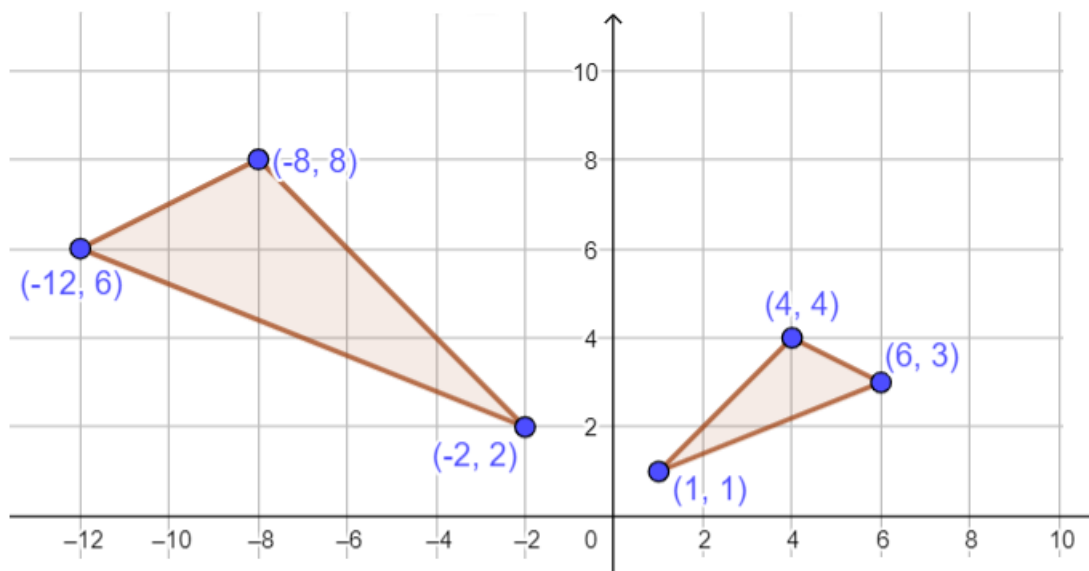
8. Desenhe um triângulo, num plano cartesiano, com vértices nos pontos $(1, 1)$, $(6, 3)$ e $(4, 4)$. Multiplique por -1 apenas a coordenada do eixo horizontal (x) de cada vértice e, depois, por 2 todos os valores das coordenadas obtidas.

a) Quais são as coordenadas dos novos pontos obtidos ao final desse processo?

R. $(-2, 2)$, $(-12, 6)$, $(-8, 8)$

b) Desenhe no mesmo plano o triângulo obtido com vértices, nessas coordenadas?

R.



c) O que aconteceu com o triângulo gerado nesse processo em relação ao original?

R. Ele ficou refletido no 2º quadrante, ampliado em 2 vezes.

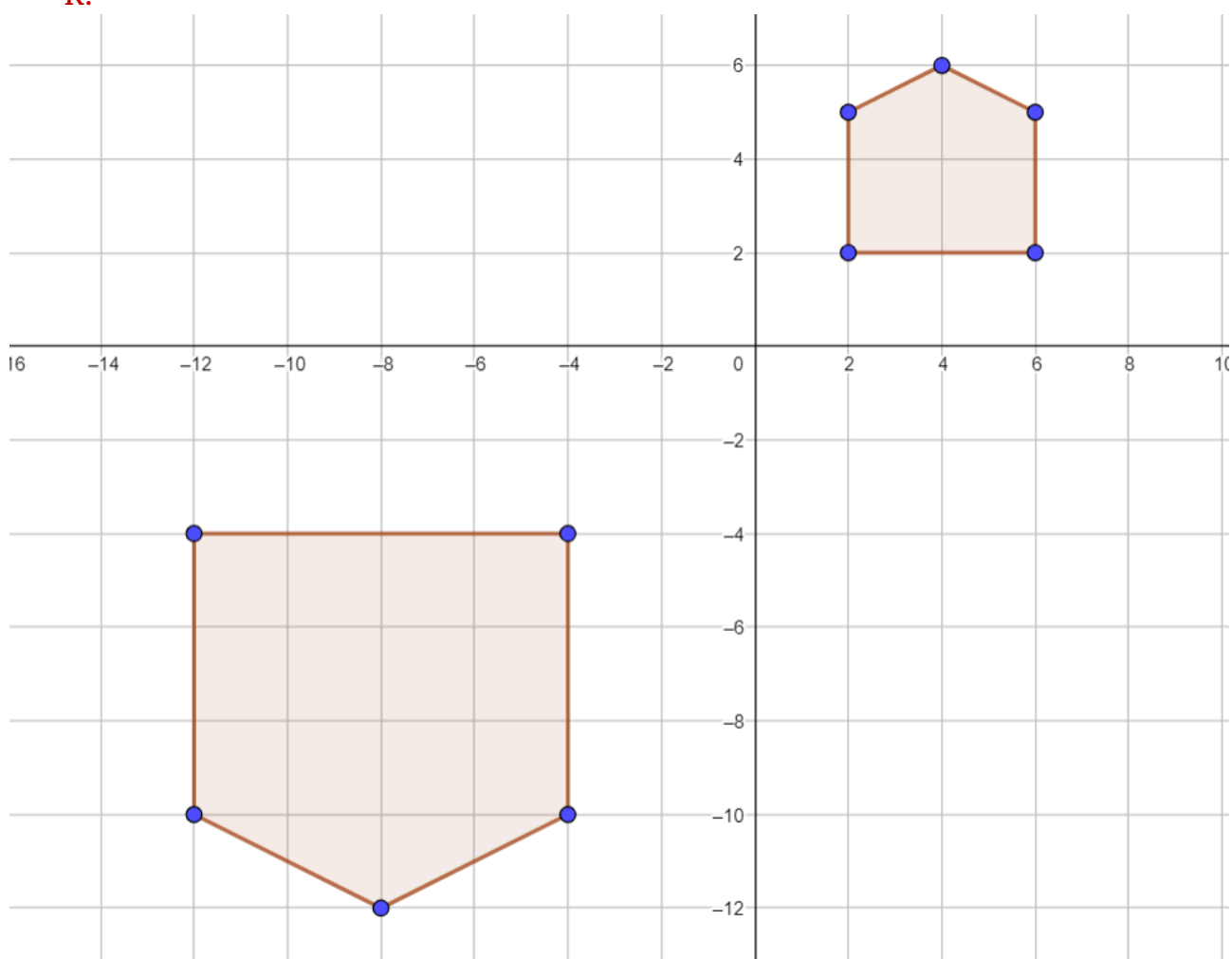
9. A partir de um polígono com os vértices nos pontos $(2, 2)$, $(6, 2)$, $(6, 5)$, $(4, 6)$ e $(2, 5)$, faça duas transformações: uma ampliação de fator 2 do polígono original, e em seguida uma reflexão dessa imagem em relação à origem.

a) Quais são as coordenadas dos vértices do polígono obtido?

R. $(-4, -4)$, $(-12, -4)$, $(-12, -10)$, $(-8, -12)$, $(-4, -10)$

b) Desenhe no mesmo plano cartesiano o polígono final e o original.

R.



Lição 96 – Avaliação

1. Defina:

a) Segmento de reta

R. O segmento de Reta é uma linha que possui um ponto de origem e um ponto de fim.

b) Semirreta

R. A semirreta é uma linha com um ponto de origem e não tem fim.

c) Reta

R. A reta é uma linha sem um ponto de origem e sem fim.

d) Ponto médio

R. Um ponto M interno a um segmento AB é denominado ponto médio do segmento AB se M divide AB em dois segmentos congruentes.

e) Ângulos

R. Ângulo é a reunião de duas semirretas de mesma origem.

f) Ângulos adjacentes

R. Dois ângulos são adjacentes quando são consecutivos e não possuem pontos internos.

g) Ângulos complementares

R. Dois ângulos são ditos complementares se a soma deles resulta em 90° .

h) Ângulos suplementares

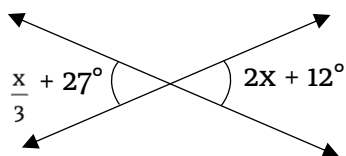
R. Dois ângulos são ditos suplementares se a soma deles resulta em 180° .

2. Defina bissetriz e faça a construção de uma bissetriz em um ângulo dado.

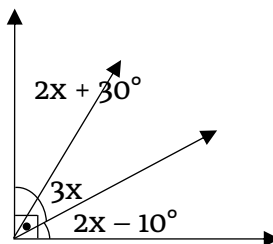
R. A bissetriz é a semirreta que divide um ângulo em dois ângulos congruentes.

3. Calcule x:

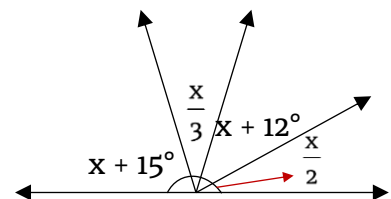
a)



b)



c)



R.

a)

$$\frac{x}{3} + 27 = 2x + 12$$

$$27 - 12 = 2x - \frac{x}{3}$$

$$\frac{5x}{3} = 15$$

$$5x = 15 \cdot 3$$

$$x = \frac{45}{5}$$

$$x = 9$$

b)

$$2x + 30 + 3x + 2x - 10 = 90$$

$$7x + 20 = 90$$

$$7x = 90 - 20$$

$$x = \frac{70}{7}$$

$$x = 10$$

c)

$$x + 15 + \frac{x}{3} + x + 12 + \frac{x}{2} = 180$$

$$6x + 90 + 2x + 6x + 72 + 3x = 1080$$

$$17x + 162 = 1080$$

$$17x = 1080 - 162$$

$$17x = 918$$

$$x = \frac{918}{17}$$

$$x = 54$$

4. Defina e construa com compasso os triângulos equilátero, isósceles e escaleno.

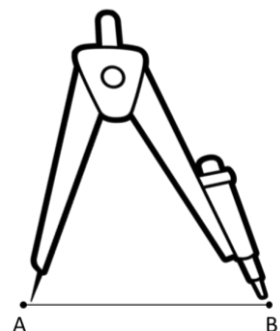
R. Um triângulo é dito equilátero se seus três lados forem congruentes; isósceles, se possuir dois lados congruentes; escaleno se não possuir nenhum lado congruente.

Triângulo Equilátero

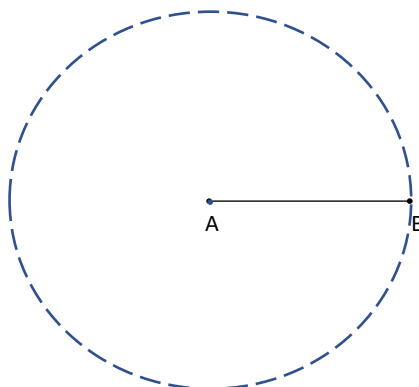
1º Com o auxílio de uma régua trace o segmento de reta $\overline{AB}$. O tamanho traçado será o tamanho dos lados do triângulo. Por isso, não deve ser muito grande.



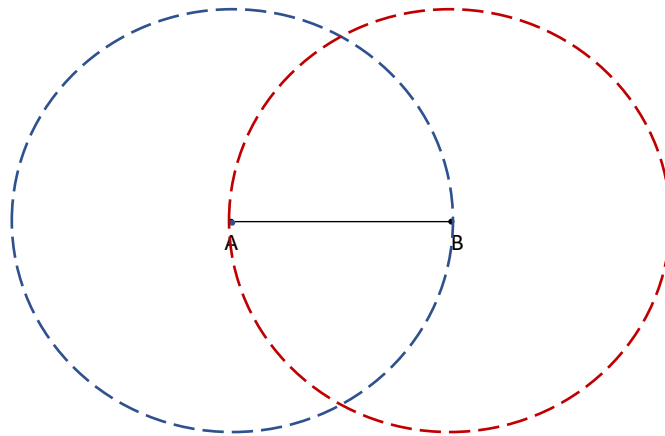
2º Fixe a ponta seca em uma das extremidades do segmento e abra o compasso até que o grafite chegue à outra extremidade do segmento. Este é o ato de **medir** um segmento utilizando um compasso.



3º Trace a circunferência.



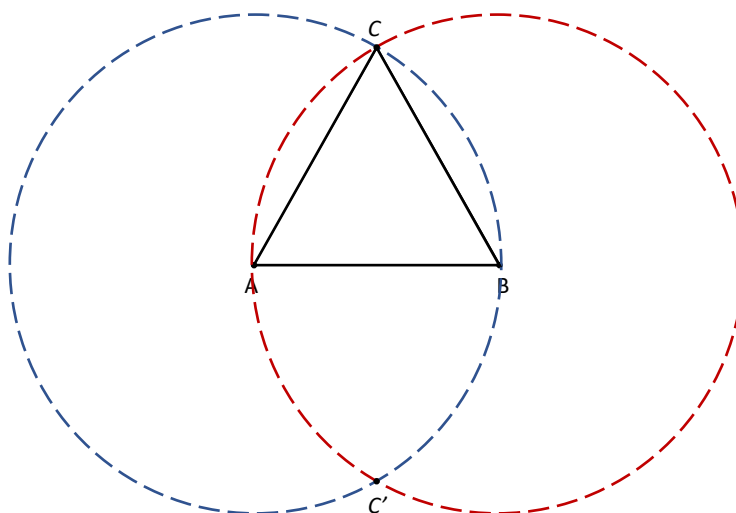
4º Faça o mesmo processo com a ponta seca fixa em B e trace a nova circunferência.

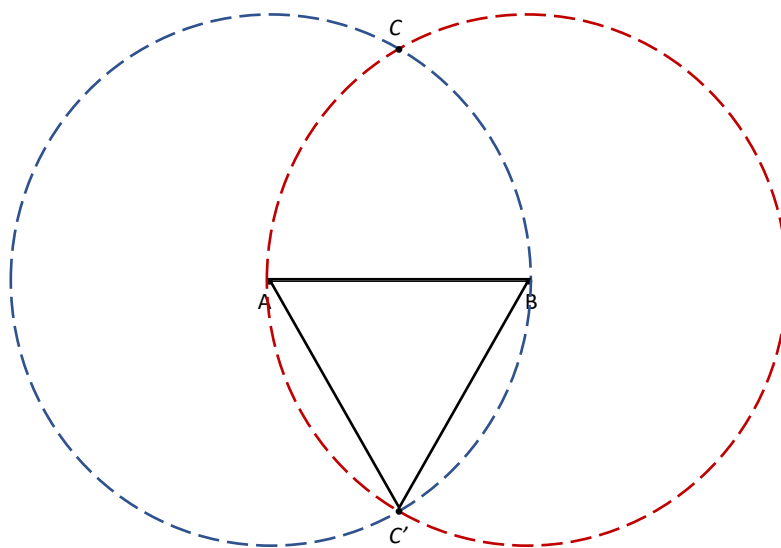


5º As circunferências se interceptam em dois pontos: um acima do segmento e outro abaixo dele. Identifique um dos pontos por C e o outro por C'.

6º Perceba que o raio das duas circunferências é segmento $\overline{AB}$. Ora, perceba ainda que o centro da circunferência azul é o ponto A e o centro da circunferência vermelha é o ponto B. Por se tratar de uma circunferência, todos os pontos do perímetro da forma geométrica estão exatamente à mesma distância do centro. Portanto, B, C e C' estão todos à mesma distância de A; da mesma forma, A, C e C' estão todos à mesma distância de B. Traçando os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, portanto, tem-se o triângulo equilátero $\triangle ABC$; traçando os segmentos $\overline{AC'}$ e $\overline{BC'}$, tem-se o triângulo equilátero $\triangle ABC'$.

Portanto, $\overline{AB} \equiv \overline{AC} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{AC'} \equiv \overline{BC'}$.





Triângulo Isósceles

1º Com o auxílio de uma régua trace o segmento de reta $\overline{AB}$. O tamanho traçado será o tamanho da base do triângulo.

2º Fixe a ponta seca em uma das extremidades do segmento e deixe o compasso com uma abertura um pouco maior que o segmento $\overline{AB}$.

3º Trace a circunferência.

4º Faça o mesmo processo com a ponta seca fixa no outro extremo, e mantendo a mesma abertura trace uma nova circunferência.

5º As circunferências se interceptam em dois pontos: um acima do segmento e outro abaixo do segmento. Identifique um dos pontos por C e o outro por C'.

6º Perceba que o raio das duas circunferências é igual, uma vez que a abertura do compasso foi mantida. Perceba ainda que o centro de uma das circunferências é o ponto A e o centro da outra circunferência é o ponto B. Por se tratar de uma circunferência, todos os pontos do seu perímetro estão exatamente à mesma distância do centro. Portanto, C e C' estão todos à mesma distância de A; da mesma forma, C e C' estão todos à mesma distância de B. Como os raios das circunferências são iguais, os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, que medem o mesmo que o raio, são também

iguais. Como a base $\overline{AB}$ é menor que o raio, tem-se que o triângulo formado pelos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, possui duas medidas iguais e uma diferente. Logo, o triângulo $\triangle ABC$ é um triângulo isósceles. A mesma análise se dá para o triângulo $\triangle ABC'$.

Portanto, $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{AC'} \equiv \overline{BC'}$.

Triângulo Escaleno

1º Com o auxílio de uma régua trace o segmento de reta $\overline{AB}$. O tamanho traçado será o tamanho da base do triângulo.

2º Fixe a ponta seca em uma das extremidades do segmento e deixe o compasso com uma abertura maior ou menor que o segmento $\overline{AB}$.

3º Trace a circunferência.

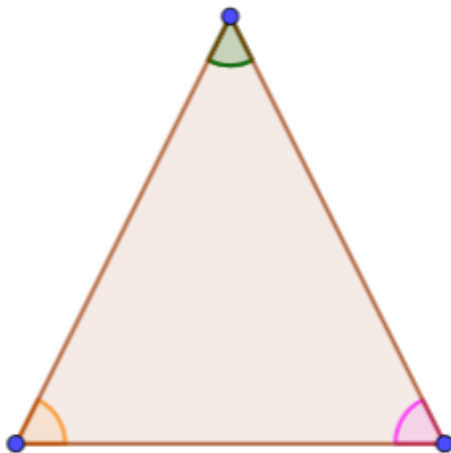
4º Fixe agora a ponta seca na outra extremidade, e abra o compasso com uma abertura maior ou menor que o segmento, e que seja diferente da abertura do passo 2.

5º As circunferências se interceptam em dois pontos: um acima do segmento e outro abaixo do segmento. Identifique um dos pontos por C e o outro por C'.

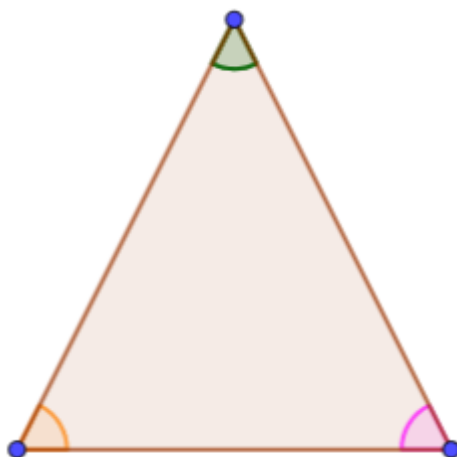
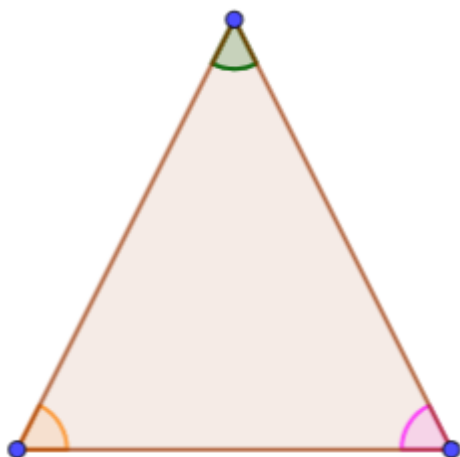
6º Perceba que o raio das duas circunferências será diferente. Perceba ainda que o centro de uma das circunferências é o ponto A e o centro da outra circunferência é o ponto B. Por se tratar de circunferências de raios diferentes, os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ terão tamanhos diferentes. Portanto, o triângulo determinado pelos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ possui três lados de tamanhos diferentes. Logo, triângulo $\triangle ABC$ é um triângulo escaleno. A mesma análise se dá para o triângulo $\triangle ABC'$.

5. Demonstre que a soma dos ângulos internos de um triângulo resulta em 180° .

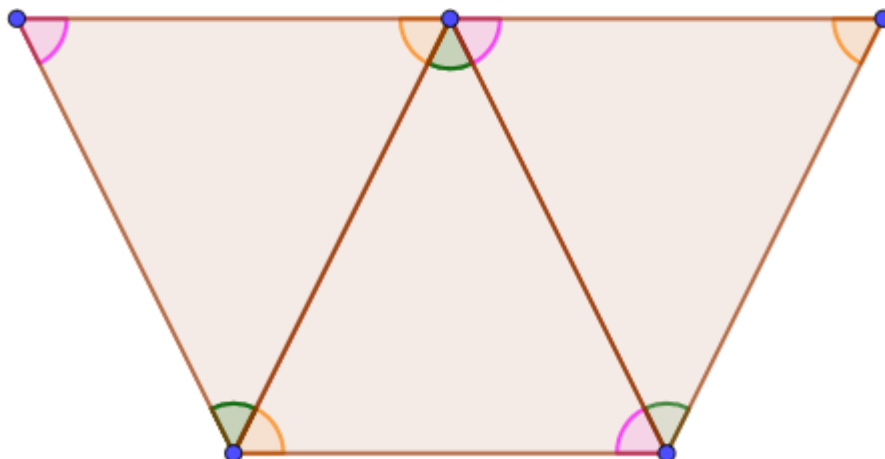
R. Todo triângulo é composto por três ângulos. Veja uma análise do triângulo a seguir:



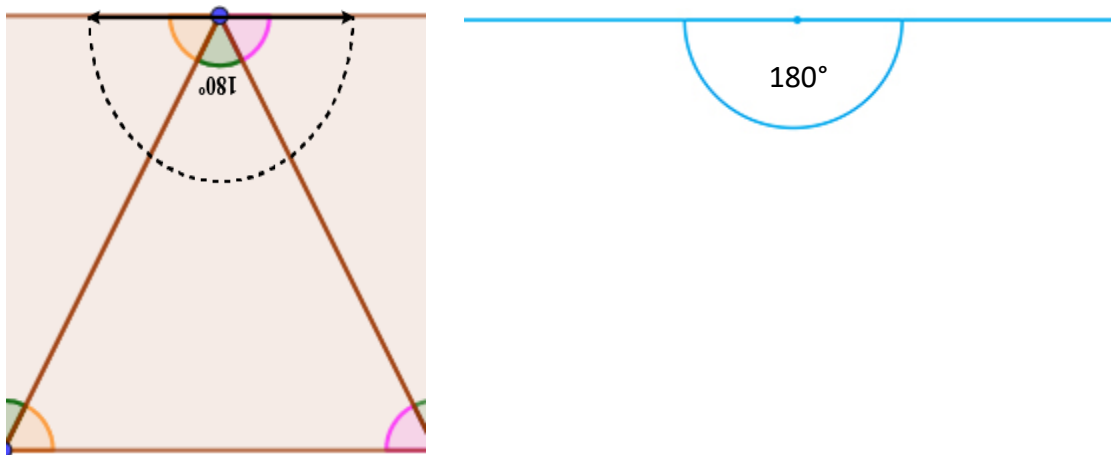
Imagine agora que outros dois triângulos iguais a este sejam criados.



Imagine agora que estes triângulos sejam arrumados de forma a colocar os ângulos $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ um ao lado do outro:



Perceba que quando os três triângulos foram rearranjados no espaço para que os ângulos ficassem um ao lado do outro – o que aconteceu somente na parte central superior da imagem – algo de muito interessante aconteceu: a imagem de um ângulo raso, isto é, de um ângulo de 180° , apareceu. Veja o recorte da imagem abaixo:



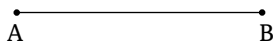
Isso mostra que a soma interna dos ângulos deste triângulo é 180° .

6. Defina mediatriz e faça a construção com o compasso da mediatriz em um segmento de reta dado.

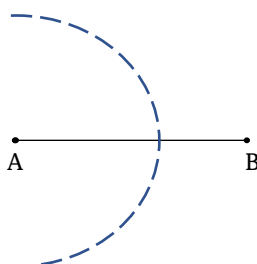
R. Mediatriz é a reta que passa perpendicularmente pelo ponto médio de um segmento.

Desenho: Construção da Mediatriz

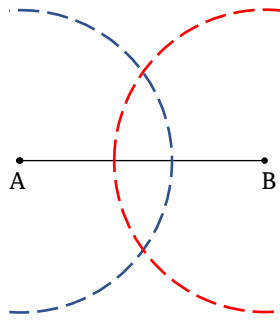
Seja dado o segmento $\overline{AB}$



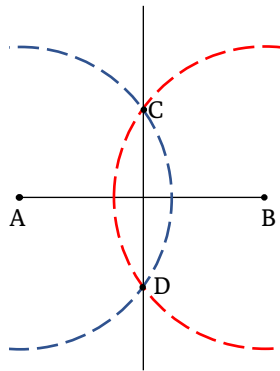
1º Fixe a ponte seca do compasso no ponto A e abra o compasso com uma abertura pouco maior que a metade do segmento. Trace o semicírculo.



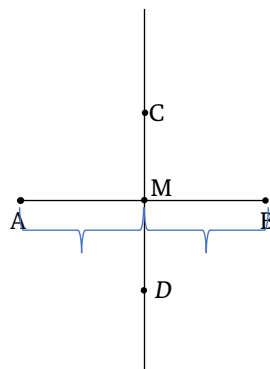
2º Mantendo a abertura do compasso, fixe a ponta seca no ponto B e repita o processo.



3º Os semicírculos interceptam-se em dois pontos. Trace a reta que passa por esses dois pontos.

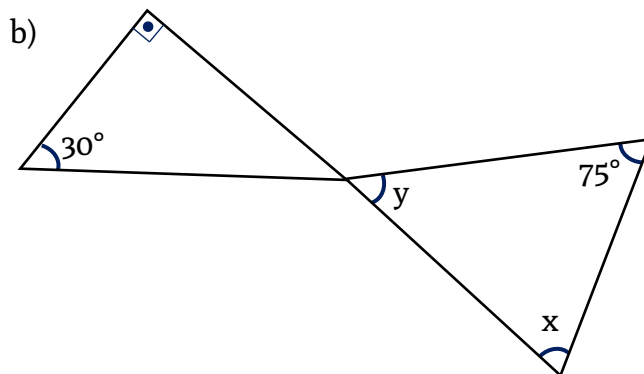
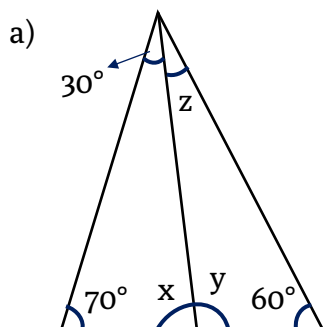


O ponto M , por onde a reta determinada por C e D passa, é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.



A reta $\overleftrightarrow{CD}$ é chamada de mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

7. Calcule os ângulos indicados pelas letras:



R.

a)

$$30^\circ + 70^\circ + x = 180^\circ$$

$$100^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 100^\circ$$

$$x = 80^\circ$$

Agora, uma vez que x e y são suplementares, e $x = 80^\circ$, temos que $y = 100^\circ$. Para calcular z , temos:

$$y + z + 60^\circ = 180^\circ$$

$$100^\circ + z + 60^\circ = 180^\circ$$

$$z + 160^\circ = 180^\circ$$

$$z = 180^\circ - 160^\circ$$

$$z = 20^\circ$$

b) No triângulo superior foram dados dois ângulos: 30° e 90° . Portanto, o terceiro mede 60° . Como ele é O.P.V de y , temos que $y = 60^\circ$. Sendo assim, para encontrar o valor de x , temos:

$$x + y + 75 = 180$$

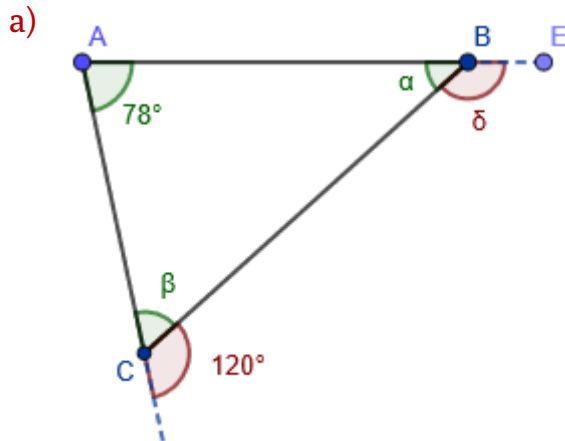
$$x + 60 + 75 = 180$$

$$x + 135 = 180$$

$$x = 180 - 135$$

$$x = 45^\circ$$

8. Indique o valor dos ângulos, identificados por letras gregas, nos triângulos abaixo:



R. R. Sabemos que a soma de um ângulo externo com os ângulos não adjacentes é igual a 180° . Portanto, temos:

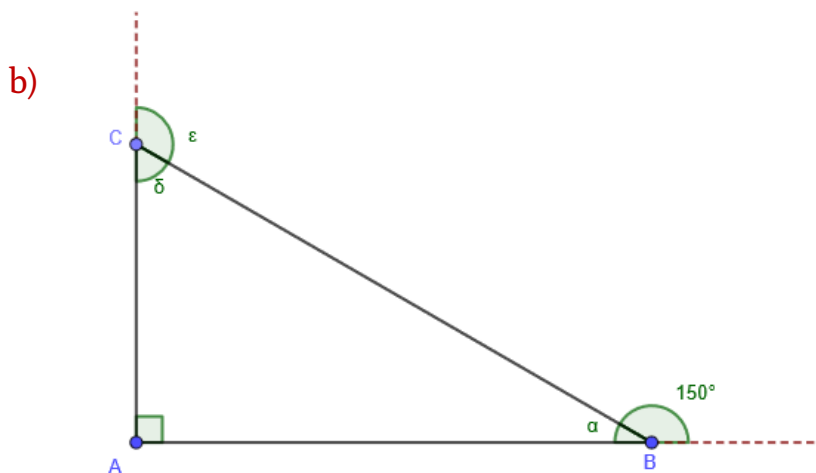
$$\begin{aligned} 120^\circ &= 78^\circ + \alpha \\ \alpha &= 120^\circ - 78^\circ \\ \alpha &= 42^\circ. \end{aligned}$$

Se $\alpha = 42^\circ$, temos que δ vale:

$$\begin{aligned} \alpha + \delta &= 180^\circ \\ 42^\circ + \delta &= 180^\circ \\ \delta &= 180^\circ - 42^\circ \\ \delta &= 138^\circ \end{aligned}$$

Temos ainda que o valor de β pode ser encontrado:

$$\begin{aligned} \beta + 120^\circ &= 180^\circ \\ \beta &= 180^\circ - 120^\circ \\ \beta &= 60^\circ. \end{aligned}$$



R. O valor de α somado ao 150° deve ser igual a 180° . Portanto, temos:

$$\alpha + 150^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 150^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Se um dos ângulos do triângulo mede 30° , e o outro mede 90° , o ângulo δ mede:

$$\delta + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$

$$\delta + 120^\circ = 180^\circ$$

$$\delta = 180^\circ - 120^\circ$$

$$\delta = 60^\circ$$

Se $\delta = 60^\circ$, então ε mede:

$$\delta + \varepsilon = 180^\circ$$

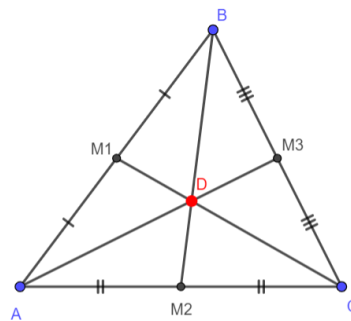
$$60^\circ + \varepsilon = 180^\circ$$

$$\varepsilon = 180^\circ - 60^\circ$$

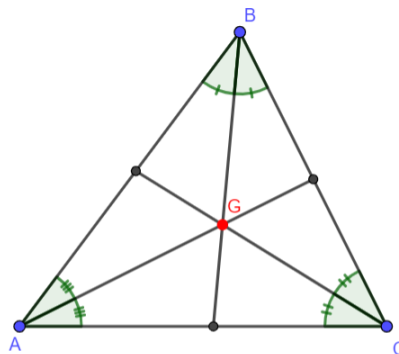
$$\varepsilon = 120^\circ$$

9. Defina com palavras e desenhos o baricentro, o incentro e o ortocentro.

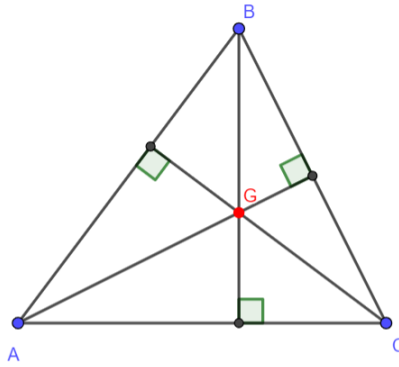
R. Baricentro é o ponto de intersecção das três medianas de um triângulo.



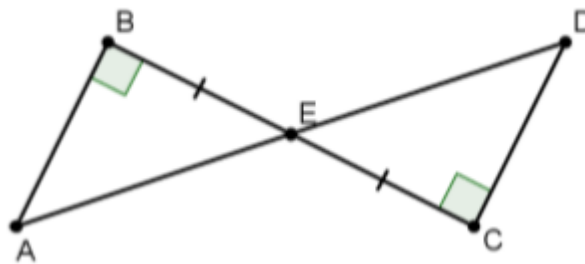
Incentro é o ponto de intersecção das três bissetrizes de um triângulo.



Ortocentro é o ponto de intersecção das três alturas de um triângulo.



10. Na figura, temos $\overline{AB} = 30$, $\overline{DE} = 50$, $\overline{AE} = 3x - 1$ e $\overline{CD} = 2y + 8$. Determine os valores de x e y .



R. Como os dois ângulos de vértice E são O.P.V, eles são congruentes. Pelo caso A.L.A, os triângulos ABE e DCE são congruentes. Assim, temos:

$$\overline{DC} \equiv \overline{AB}$$

$$2y + 8 = 30$$

$$2y = 30 - 8$$

$$y = \frac{22}{2}$$

$$y = 11$$

$$\overline{AE} \equiv \overline{DE}$$

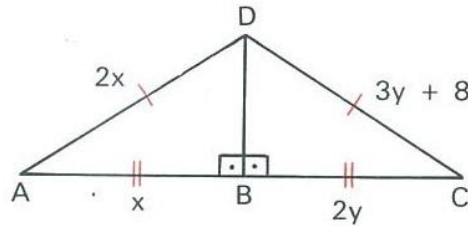
$$3x - 1 = 50$$

$$3x = 50 + 1$$

$$y = \frac{51}{3}$$

$$y = 17$$

11. Na figura abaixo, o triângulo ABD é congruente ao triângulo CBD. Calcule x e y e os lados do triângulo ACD.



R. Temos que:

$$2x = 3y + 8$$

$$2x - 3y = 8$$

Além disso, temos:

$$x = 2y$$

Agora, substituindo o valor de x , encontrado na segunda equação, na primeira equação, temos:

$$2 \cdot 2y - 3y = 8$$

$$4y - 3y = 8$$

$$y = 8$$

Uma vez que $y = 8$, temos:

$$x = 2y$$

$$x = 2 \cdot 8$$

$$x = 16$$

12. Demonstre que as diagonais de um retângulo são congruentes.

R. Considere um paralelogramo equiângulo ABCD, com $\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{DA} // \overline{BC}$. A propriedade enuncia que em um paralelogramo equiângulo, ou seja, um retângulo, as diagonais são congruentes. Matematicamente, escrevemos da seguinte maneira:

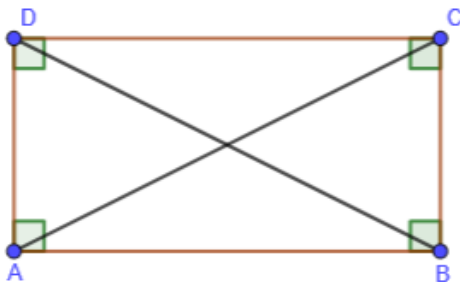
Tese	Hipótese
------	----------

$$\overline{AB} // \overline{CD} \text{ e } \overline{DA} // \overline{BC} \text{ e } \hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D} \Rightarrow \overline{AC} \equiv \overline{BD}$$

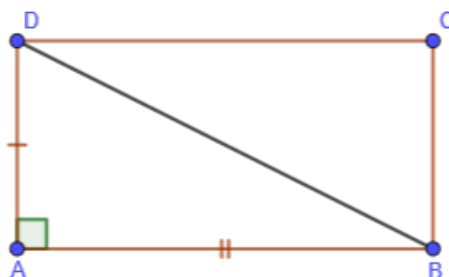
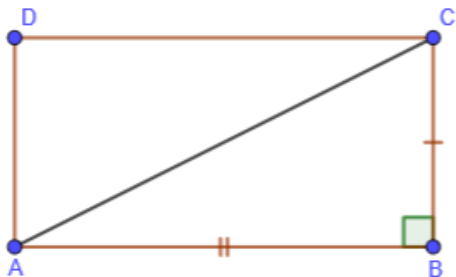
Lê-se: “Se temos um paralelogramo equiângulo (ou seja, um retângulo), então as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são congruentes”.



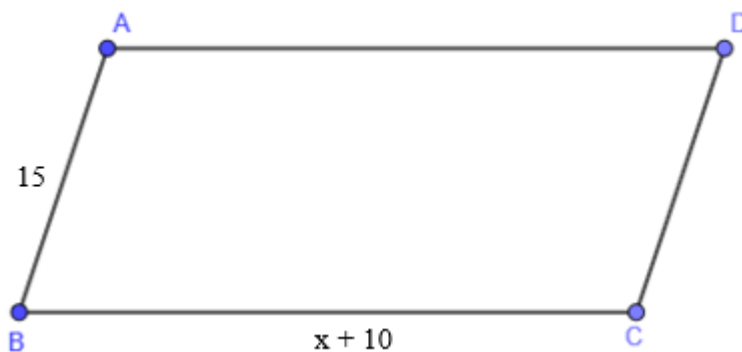
Traçando as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, temos:



Como o retângulo ABCD é um paralelogramo, sabemos que seus lados opostos são congruentes, ou seja, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$. Considere os seguintes triângulos: BCA e ADB. Pelo caso L.A.L., eles são congruentes, o que implica que os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, que são as diagonais do retângulo, são congruentes.



13. Encontre o valor de x , sabendo que o perímetro do paralelogramo é 100 cm.



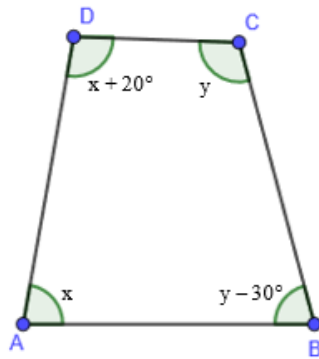
R. Temos que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, e que $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$. Portanto, o perímetro desse paralelogramo é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} &\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} \\ &15 + (x + 10) + 15 + (x + 10) \\ &2x + 50 \end{aligned}$$

Uma vez que sabemos que o perímetro é igual a 100 cm, temos:

$$\begin{aligned} 2x + 50 &= 100 \\ 2x &= 100 - 50 \\ x &= \frac{50}{2} \\ x &= 25 \text{ cm} \end{aligned}$$

14. Se ABCD é trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, determine x e y :



R. Como é um trapézio, vimos que a soma de ângulos consecutivos que formam os lados não paralelos é sempre 180° . Logo,

$$\begin{aligned} x + (x + 20) &= 180^\circ \\ 2x + 20 &= 180^\circ \\ 2x &= 180 - 20 \\ x &= \frac{160}{2} \\ x &= 80 \end{aligned}$$

$$y + (y - 30) = 180^\circ$$

$$2y - 30 = 180$$

$$2y = 180 + 30$$

$$y = \frac{210}{2}$$

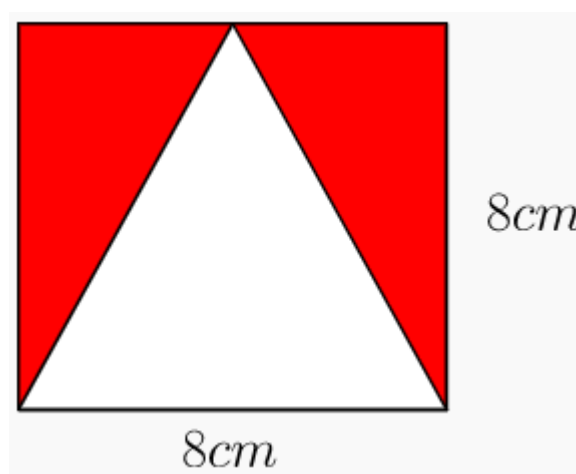
$$y = 105^\circ$$

Gabarito de Matemática

8º ano, Volume 7

Lição 97 – Áreas de figuras planas

1. Encontre a área da parte colorida em vermelho, sendo que o quadrado tem lado igual a 8 cm.



R: Sendo a área do quadrado igual a $\text{lado} \cdot \text{lado}$, calculamos esta, e subtraímos a área do triângulo branco. Assim: $8 \cdot 8 = 64 \text{ cm}^2$, e a área do triângulo:

$$\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{8 \cdot 8}{2} = \frac{64}{2} = 32 \text{ cm}^2.$$

Portanto, a área colorida é: $64 - 32 = 32 \text{ cm}^2$.

2. Qual é a área de um triângulo que tem a base igual a 7 m e a altura igual a 6 m?

R: $\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = \frac{42}{2} = 21 \text{ m}^2$.

3. Encontre a área de um quadrado com os lados medindo 12 m.

R: $12 \cdot 12 = 144 \text{ m}^2$.

4. Encontre o perímetro de um quadrado que tem a área igual a 64 m^2 .

R: Sendo 64 a área do quadrado, temos que a medida do seu lado é: $\sqrt{64} = 8$ Assim, como o quadrado tem 4 lados, o perímetro é: $8 \cdot 4 = 32 \text{ m}$.

5. Um quadrado e um retângulo têm a mesma área. Sabe-se que o retângulo tem 8 m de comprimento e 32 m de altura. Encontre:

a) a medida dos lados do quadrado.

R: Área do retângulo: $8 \cdot 32 = 256 \text{ m}^2$. Assim, o lado do quadrado vale $\sqrt{256} = 16 \text{ m}$.

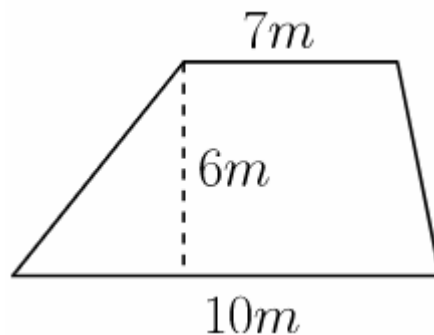
b) o perímetro do quadrado.

R: O perímetro do quadrado é 4 vezes o valor do seu lado, assim, o perímetro é: $4 \cdot 16 = 64 \text{ m}$.

6. Em um losango cujos lados medem 1 cm, a menor de suas diagonais mede 1,2 cm e a maior mede 1,6 cm. Determine a área desse losango.

R: $A_{\text{Losango}} = \frac{D_1 \cdot D_2}{2} \Rightarrow A = \frac{1,2 \cdot 1,6}{2} \Rightarrow A = \frac{1,92}{2} \Rightarrow A = 0,96 \text{ cm}^2$.

7. Qual a área do trapézio abaixo?



R: $A_{\text{Trapézio}} = \frac{(B_{\text{Maior}} + B_{\text{Menor}}) \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{(10 + 7) \cdot 6}{2} \Rightarrow A = \frac{17 \cdot 6}{2} \Rightarrow A = \frac{102}{2} \Rightarrow A = 51 \text{ m}^2$

Lição 98 – Circunferência

1. Defina:

a) Circunferência.

R: Circunferência é a figura geométrica formada por todos os pontos de um plano que distam igualmente de um ponto fixo desse plano.

b) Raio.

R: Qualquer segmento que une o centro a um ponto da circunferência se chama raio.

c) Diâmetro.

R: A corda que passa pelo centro da circunferência chama-se diâmetro, onde a corda é um segmento que une dois pontos distintos da circunferência. O diâmetro é a maior corda da circunferência.

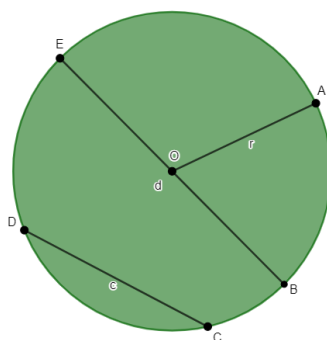
Lição 99 – Círculo

1. Defina um círculo.

R: Círculo é a região interna da circunferência.

2. Quais são os elementos do círculo? Represente-os com um desenho.

R: Como o círculo é uma região do plano determinada por uma circunferência, os elementos do círculo coincidem com os elementos da circunferência, isto é, ele também apresenta raio, diâmetro e corda.



3. Defina o número pi e diga qual é a sua aproximação mais utilizada.

R: O número pi é uma constante que aparece quando dividimos o comprimento de uma circunferência pelo diâmetro. A aproximação mais utilizada para o número pi é $\pi = 3,14$.

4. Quando o número pi aparece? Dê um exemplo do seu cotidiano, medindo e encontrando o pi.

R: O número pi aparece quando dividimos o comprimento de uma circunferência pelo diâmetro. Por exemplo, na roda do carro.

5. Qual é a área de um círculo de raio igual a 10 m?

R: $A = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A = 3,14 \cdot 10^2 \Rightarrow A = 3,14 \cdot 100 \Rightarrow A = 314 \text{ m}^2$.

6. Calcule a área de um círculo cujo raio mede 3 m.

R: $A = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A = 3,14 \cdot 3^2 \Rightarrow A = 3,14 \cdot 9 \Rightarrow A = 28,26 \text{ m}^2$.

7. Sabendo que o raio de um círculo mede 6 cm, calcule a área desse círculo.

R: $A = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A = 3,14 \cdot 6^2 \Rightarrow A = 3,14 \cdot 36 \Rightarrow A = 113,04 \text{ cm}^2$.

8. Utilize a fórmula da área do círculo para calcular a área de um círculo de raio 4 cm.

R: $A = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A = 3,14 \cdot 4^2 \Rightarrow A = 3,14 \cdot 16 \Rightarrow A = 50,24 \text{ cm}^2$.

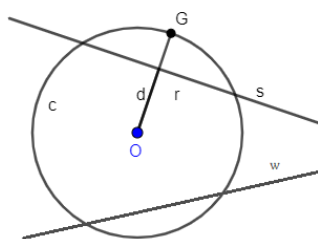
9. Se o raio de um círculo mede 20 cm, então sua área mede quantos cm^2 ?

R: $A = \pi \cdot r^2 \Rightarrow A = 3,14 \cdot 20^2 \Rightarrow A = 3,14 \cdot 400 \Rightarrow A = 1256 \text{ cm}^2$.

Lição 100 – Posição relativa de uma reta a uma circunferência

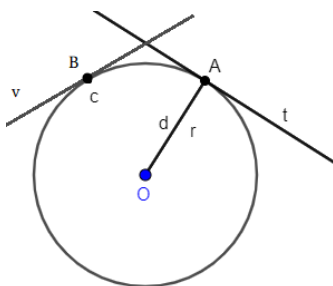
1. Defina reta secante na circunferência e dê dois exemplos.

R: Quando uma reta corta a circunferência em dois pontos distintos, a reta é chamada reta secante à circunferência. Exemplo: as retas s e w são secantes.



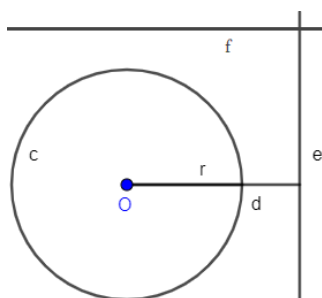
2. Defina reta tangente na circunferência e dê dois exemplos.

R: Quando uma reta passa por apenas um ponto em comum com a circunferência, a reta é chamada reta tangente à circunferência. Exemplo: as retas t e v são retas tangentes.

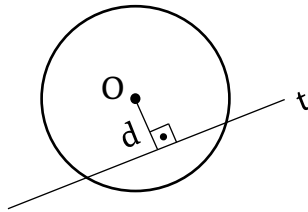


3. Defina reta externa na circunferência e dê dois exemplos.

R: Quando a reta não passa por nenhum ponto em comum com a circunferência, é chamada reta externa à circunferência. Exemplo: as retas e e f são externas à circunferência.



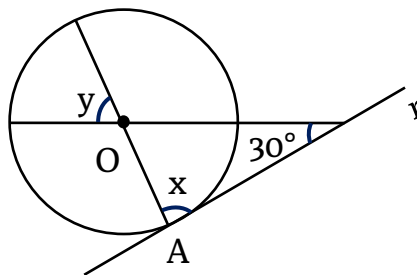
4. Uma reta t é secante a uma circunferência de centro O e 10 cm de raio. Indicando por d a distância do ponto O à reta t , qual é o maior valor inteiro que d pode assumir?



R: Sendo a reta secante à circunferência, d não pode ser 10 cm, pois, caso d seja igual a 10 cm, a reta passa a ser tangente. Assim, o maior valor inteiro possível para d é de $d=9$ cm.

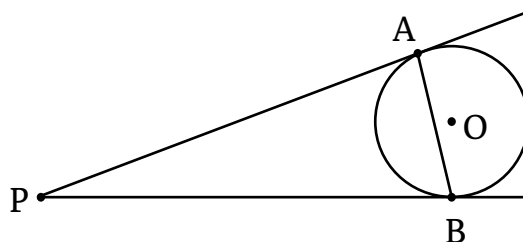
Lição 101 – Propriedade da reta tangente

1. Na figura, a reta r é tangente à circunferência. Determine as medidas x e y .



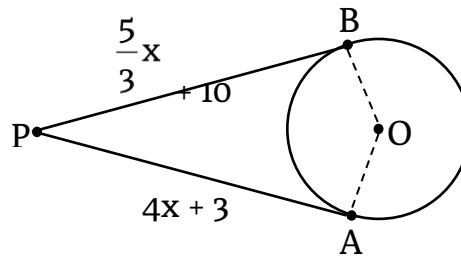
R: Sendo r tangente à circunferência, o ângulo x é: $x = 90^\circ$. Assim, pelo teorema dos ângulos O.P.V., y vale: $y + 90 + 30 = 180 \Rightarrow y = 180 - 120 \Rightarrow y = 60^\circ$.

2. Na figura, a medida do segmento PA é expressa por x , e a medida do segmento AB é expressa por y . Qual é o polinômio que expressa o perímetro do triângulo PAB ?



R: Sendo $PA=PB$, o perímetro é: $p=2x+y$.

3. Observe a figura.



Determine:

a) a medida x ;

R:

$$4x + 3 = \frac{5}{3}x + 10 \Rightarrow 4x - \frac{5}{3}x = 10 - 3 \Rightarrow \frac{12x - 5x}{3} = 7 \Rightarrow \frac{7x}{3} = 7 \Rightarrow 7x = 7 \cdot 3 \Rightarrow x = \frac{21}{7} \Rightarrow x = 3.$$

b) a medida do segmento PA;

$$R: PA = 4x + 3 \Rightarrow PA = 4 \cdot 3 + 3 \Rightarrow PA = 12 + 3 \Rightarrow PA = 15.$$

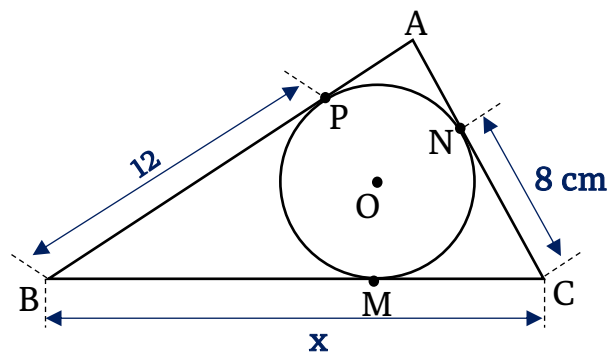
c) a medida do segmento PB;

$$R: PB = \frac{5}{3}x + 10 \Rightarrow PB = \frac{5}{3} \cdot 3 + 10 \Rightarrow PB = 5 + 10 \Rightarrow PB = 15.$$

d) o perímetro do quadrilátero PAOB, se o comprimento do raio é 7 cm.

$$R: \text{Perímetro} = PA + PB + BO + AO \Rightarrow p = 15 + 15 + 7 + 7 \Rightarrow p = 44 \text{ cm}.$$

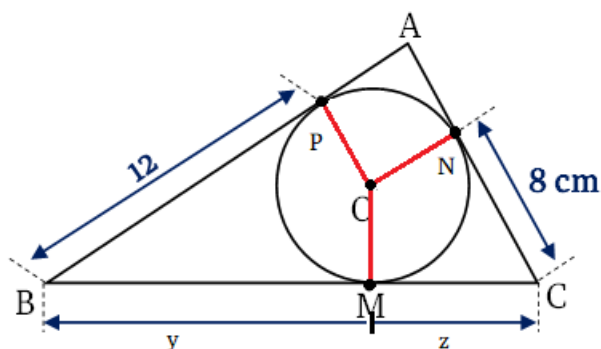
4. Observe a figura.



Determine a medida:

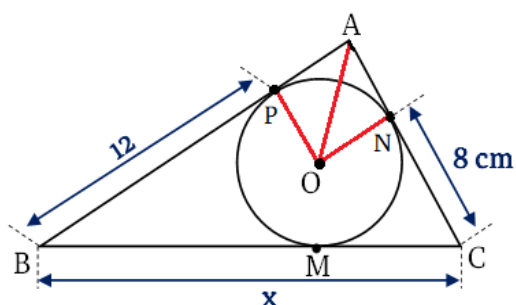
a) x do lado BC do triângulo ABC.

R: Pela figura abaixo, vemos que o segmento x equivale à soma dos segmentos y e z , onde estes equivalem a BP (12 cm) e CN (8 cm), respectivamente. Assim, x vale $12 + 8 = 20$ cm.

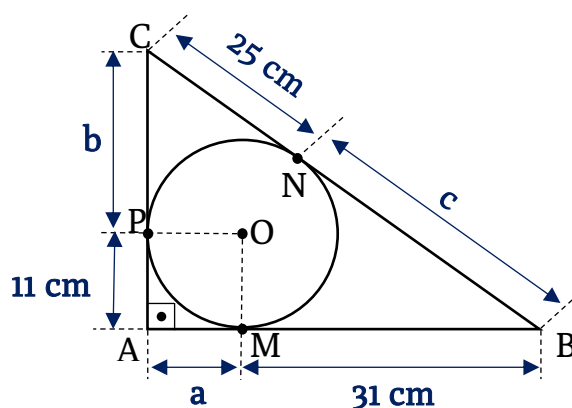


b) do segmento AN , caso o perímetro do triângulo ABC seja 46 cm.

R: Na figura abaixo podemos perceber a semelhança de triângulos entre os triângulos $\triangle OAP$ e $\triangle OAN$, onde, portanto, $AP = NA = k$. Dessa forma, temos que o perímetro é: $12 + 8 + 20 + 2k = 46 \Rightarrow 40 + 2k = 46 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = 3$ cm. Dessa maneira, $AN = 3$ cm.



5. Observe a figura a seguir.



Determine:

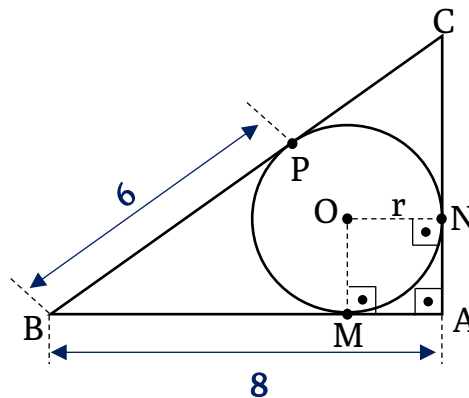
a) as medidas a , b e c indicadas na figura;

R: Pela 2ª propriedade da reta tangente, temos que $a = 11$ cm, $b = 25$ cm e $c = 31$ cm.

b) o perímetro do triângulo ABC.

R: $p = a + b + c + 31 + 11 + 25 \Rightarrow p = 11 + 25 + 31 + 31 + 11 + 25 \Rightarrow p = 134$ cm.

6. Considerando a figura, determine:



a) o comprimento r do raio da circunferência;

R: Pela 2ª propriedade da reta tangente, temos que o segmento $BP = BM$, assim, o segmento MA vale $8 - 6 = 2$. Dessa maneira, sendo $MA = ON = r$, $r = 2$.

b) o perímetro do quadrado ANOM;

R: O perímetro de um quadrado é quatro vezes o lado, assim, $p = 4 \cdot 2 \Rightarrow p = 8$.

c) a expressão algébrica que representa o perímetro do triângulo ABC, se a medida do segmento PC é a .

R: Sendo $PC = a$ e $CN = PC$, $CN = a$. Vale também o quadrado ANOM, onde $NA = MA = 2$. Assim, o perímetro do triângulo ABC é:

$$p = 6 + 8 + 2 + 2a \Rightarrow p = 2a + 18.$$

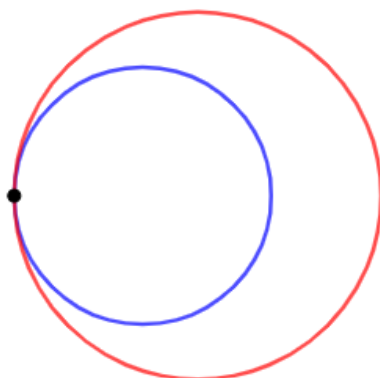
d) o perímetro do quadrilátero BMOP.

R: $p = BP + BM + 2r \Rightarrow p = 6 + 6 + 2 \cdot 2 \Rightarrow p = 16$.

Lição 102 – Posição relativa de duas circunferências

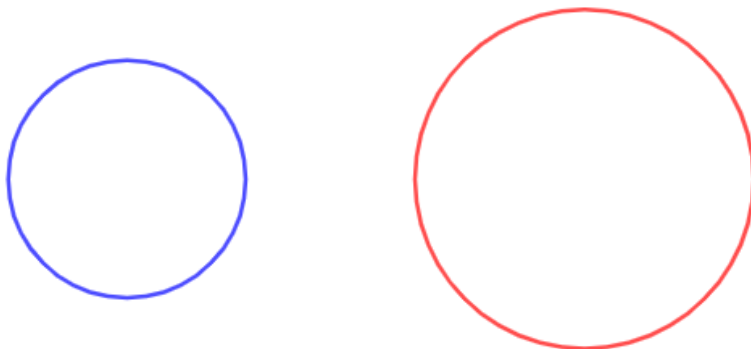
1. Dê o nome das posições ocupadas pelos pares de circunferências:

a)



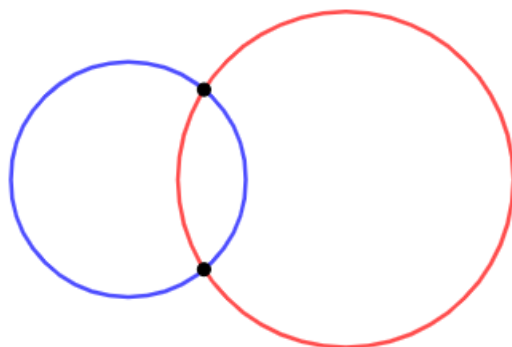
R: Tangentes internamente.

b)



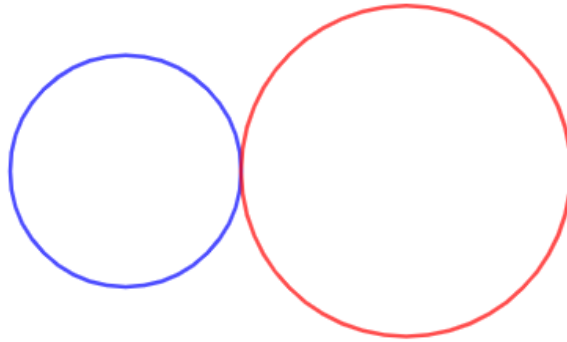
R: Externas.

c)



R: Secantes.

d)



R: Tangentes externamente.

2. Observe a figura e dê a posição relativa das circunferências:

a) C_1 e C_2

R: Concêntricas.

b) C_2 e C_3

R: Tangentes externamente.

c) C_3 e C_4

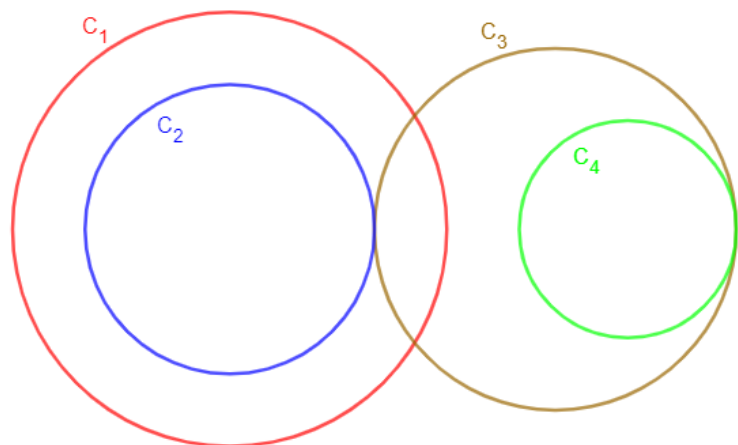
R: Tangentes internamente.

d) C_1 e C_3

R: Secantes.

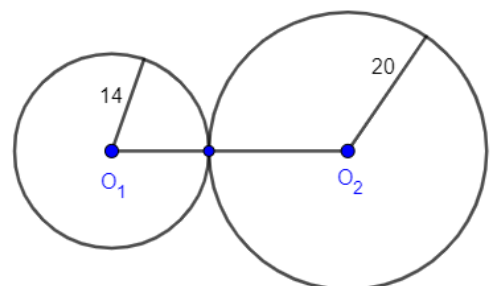
e) C_2 e C_4

R: Externas.

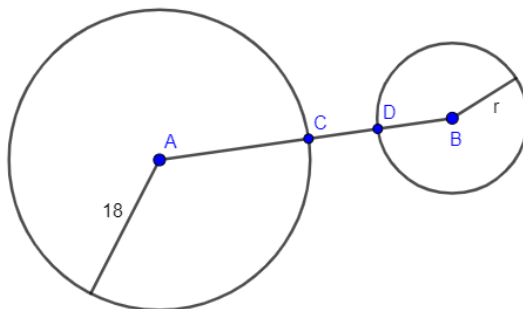


3. Na figura ao lado, os raios estão em centímetros, e seja x a distância entre os centros O_1 e O_2 . De acordo com a figura, determine x .

R: $x = r_1 + r_2 \Rightarrow x = 14 + 20 \Rightarrow x = 34 \text{ cm}$.

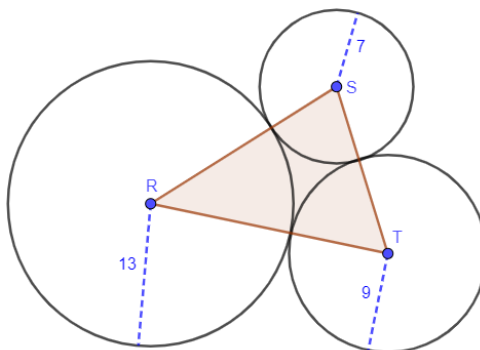


4. Na figura abaixo, a medida do segmento $\overline{CD}$ é 37 cm, e a distância entre os centros A e B é de 65 cm. Nessas condições determine o comprimento r do raio da circunferência de centro B.



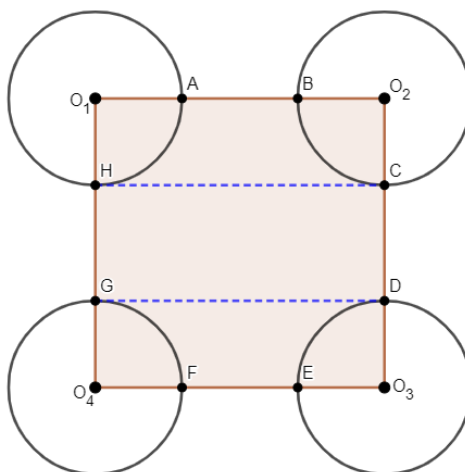
R: $AB = AC + CD + DB \Rightarrow 65 = 18 + 37 + r \Rightarrow r = 65 - 18 - 37 \Rightarrow r = 10 \text{ cm}.$

5. Na figura seguinte, as circunferências de centro R, S e T são tangentes externamente, e suas medidas estão em centímetros. Nessas condições, qual é o perímetro do triângulo RST?



R: $p = RT + RS + TS \Rightarrow p = (13 + 9) + (13 + 7) + (9 + 7) \Rightarrow p = 22 + 20 + 16 \Rightarrow p = 58 \text{ cm}.$

6. Na figura seguinte $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{EF} \equiv \overline{GH}$, e as circunferências de centros O_1 , O_2 , O_3 e O_4 têm o mesmo raio. Sabendo que a medida do segmento $\overline{AB}$ é 7 cm e que o comprimento de cada raio é 4 cm, determine:



a) O perímetro do quadrado $O_1O_2O_3O_4$.

R: Como $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{EF} \equiv \overline{GH}$ e os raios das circunferências são iguais, o perímetro é: $p = 4 \cdot AB + 8r \Rightarrow p = 4 \cdot 7 + 8 \cdot 4 \Rightarrow p = 28 + 32 \Rightarrow p = 60 \text{ cm}$.

b) A área do mesmo quadrado.

R: O lado do quadrado vale $l = AB + 2r \Rightarrow l = 7 + 2 \cdot 4 \Rightarrow l = 15 \text{ cm}$. Assim, a área, dada por $l \cdot l$ é: $A = l \cdot l = 15 \cdot 15 \Rightarrow A = 225 \text{ cm}^2$.

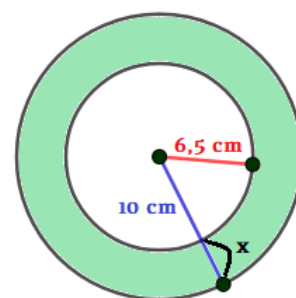
c) O perímetro do retângulo CDGH.

R: $HC = GD = l = 15 \text{ cm}$, $HG = CD = AB = 7 \text{ cm}$. Portanto,

$$p = HG + HC + CD + DG \Rightarrow p = 7 + 15 + 7 + 15 \Rightarrow p = 44 \text{ cm}.$$

7. Observe que as circunferências da figura ao lado são concêntricas e que a medida x indica o comprimento do raio da coroa circular. Nessas condições, dê a medida x .

R: $x = 10 - 6,5 \Rightarrow x = 3,5 \text{ cm}$.



8. Temos uma circunferência de centro A e raio x e outra de centro B e raio y . Qual é a posição relativa das duas, quando a distância entre os centros A e B é:

a) maior que $(x + y)$

R: Externas.

c) igual a $(x + y)$

R: Tangentes externamente.

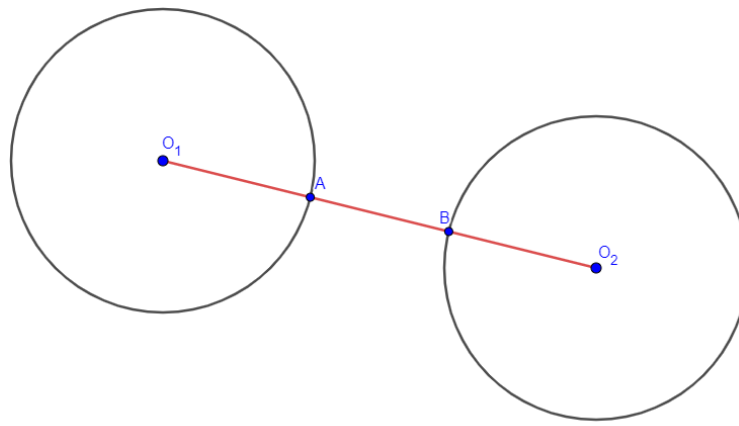
d) igual a $(x - y)$

R: Tangentes internamente.

e) menor que $(x - y)$

R: Nenhum ponto em comum ou concêntricas.

9. A figura abaixo nos mostra duas circunferências externas. As duas têm o mesmo raio de comprimento x , e a medida do segmento $\overline{AB}$ é y . Escreva o polinômio que indica a distância entre os centros das circunferências.



R: $d = r_1 + AB + r_2 \Rightarrow d = y + 2x$.

10. Consideremos duas circunferências, uma de centro A e raio 16 cm e outra de centro B e raio 10 cm. Dê a posição ocupada pelas duas circunferências quando a distância entre os seus centros é igual a:

a) 26 cm

R: **Tangentes externamente.**

b) 20 cm

R: **Secantes.**

c) 30 cm

R: **Externas.**

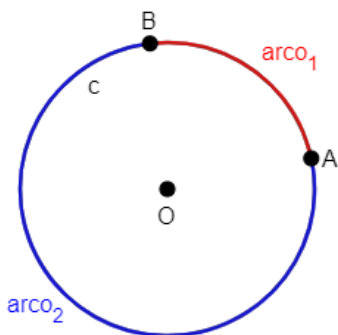
d) 8 cm

R: **Secantes.**

Lição 103 – Arco de circunferência

1. Defina arco em uma circunferência e dê dois exemplos.

R: Seja uma circunferência c representada abaixo com dois pontos distintos, A e B. Os pontos A e B dividem a circunferência em duas partes, e cada uma dessas partes é chamada arco de circunferência.



2. O que é o arco maior e o arco menor em uma circunferência?

R: Arco maior é o arco da circunferência que ocupa a maior parte dela, enquanto o menor ocupa a menor parte dela.

3. Defina:

a) Diâmetro

R: Diâmetro é um segmento de reta que corta a circunferência e passa por seu centro. O diâmetro vale duas vezes o raio.

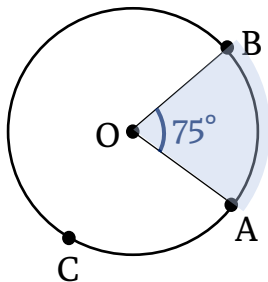
b) semicircunferência.

R: Quando as extremidades do arco são extremidades de um mesmo diâmetro, cada um dos arcos se denomina semicircunferência.

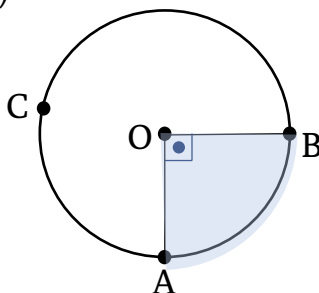
Lição 104 – Ângulo central

1. Em cada uma das figuras, dê a medida do arco AB e a do arco ACB:

a)



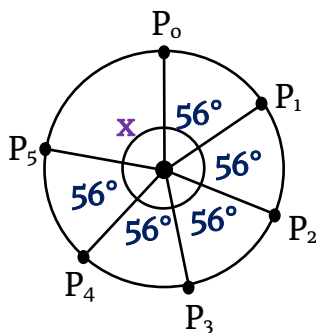
b)



R: a) AB vale 75° , e ACB vale $360^\circ - 75^\circ = 285^\circ$.

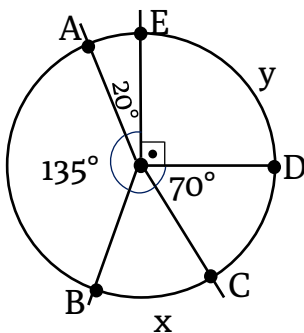
b) AB vale 90° , e ACB vale $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.

2. Observando a figura, dê o valor da medida x .



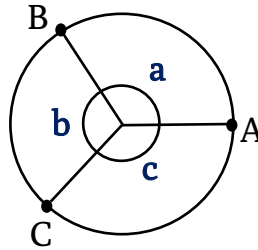
R: $x + 5 \cdot 56^\circ = 360^\circ \Rightarrow x + 280^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 360^\circ - 280^\circ \Rightarrow x = 80^\circ$.

3. Na figura a seguir, calcule o valor de x (medida do arco BC) e o valor de y (medida do arco DE).



R: $y = 90^\circ$. Assim, $x + 135^\circ + 20^\circ + 90^\circ + 70^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 360^\circ - 135^\circ - 20^\circ - 90^\circ - 70^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$.

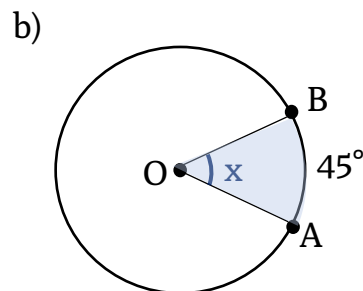
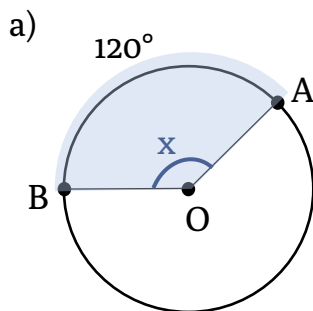
4. Na figura, temos que $a = b = c$, em que a , b e c são as medidas dos ângulos centrais associados a cada arco. Determine a medida dos arcos AB, BC e CA.



R: Sendo os ângulos iguais, o valor de cada um é a circunferência dividida por 3.

Assim, $AB = BC = CA = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.

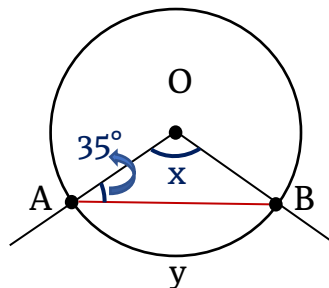
5. Em cada uma das figuras a seguir, calcule a medida x do ângulo central associado ao arco menor AB.



R: a) $x = 120^\circ$.

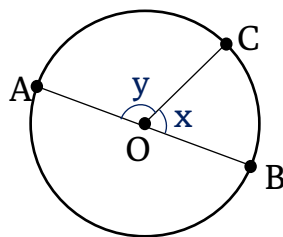
b) $x = 45^\circ$.

6. Sabendo que o triângulo OAB da figura é isósceles, determine a medida x do ângulo central AÔB e a medida y do arco AB associado a esse ângulo central.



R: Sendo OAB um triângulo isósceles, o ângulo OBA vale 35° . Dessa maneira, pela propriedade dos triângulos, $x + 35^\circ + 35^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 70^\circ \Rightarrow x = 110^\circ$ e $y = 110^\circ$.

7. Sabendo que o arco BC mede 80° , calcule o valor da expressão $y - x$.



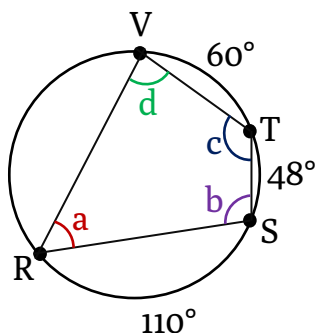
R: Como $BC = 80^\circ$, $x = 80^\circ$. Assim, sendo x e y suplementares,

$$x + y = 180^\circ \Rightarrow y = 180^\circ - x \Rightarrow y = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$

Dessa forma, $y - x = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ$.

Lição 105 - Ângulo inscrito

1. Determine as medidas a , b , c e d , indicadas na figura.



R: Arco $RV = 360^\circ - 110^\circ - 60^\circ - 48^\circ = 142^\circ$;

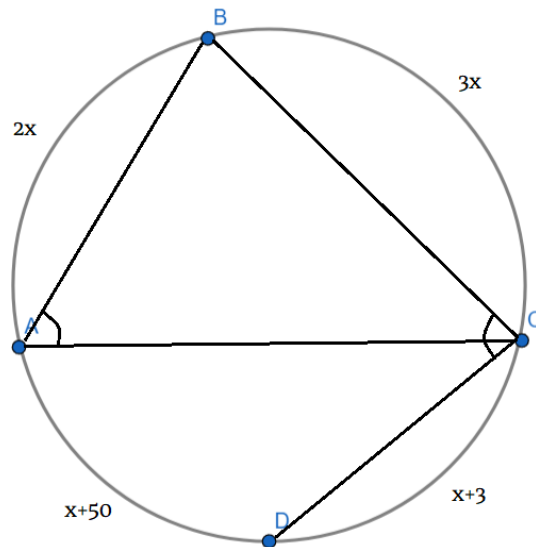
$$a = \frac{VT + TS}{2} = \frac{60 + 48}{2} = \frac{108}{2} = 54^\circ;$$

$$b = \frac{VT + RV}{2} = \frac{60 + 142}{2} = \frac{202}{2} = 101^\circ;$$

$$c = \frac{RV + SR}{2} = \frac{142 + 110}{2} = \frac{252}{2} = 126^\circ;$$

$$d = \frac{SR + TS}{2} = \frac{110 + 48}{2} = \frac{158}{2} = 79^\circ.$$

2. Em uma circunferência a medida do arco AB é $\text{med}(\widehat{AB}) = 2x$; a medida do arco BC é $\text{med}(\widehat{BC}) = 3x$; a medida do arco CD é $\text{med}(\widehat{CD}) = x + 30^\circ$; e a medida do arco DA é $\text{med}(\widehat{DA}) = x + 50^\circ$. Determine a medida do ângulo inscrito:



a) $\widehat{BAC}$;

$$\text{R: } 2x + 3x + x + 30^\circ + x + 50^\circ = 360^\circ \Rightarrow 7x = 360^\circ - 80^\circ \Rightarrow x = \frac{280^\circ}{7} = 40^\circ.$$

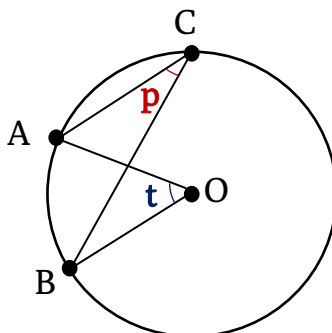
$$\text{Assim, sendo } \widehat{BAC} = \frac{3x}{2} = \frac{3 \cdot 40}{2} = \frac{120}{2} = 60^\circ.$$

b) $\widehat{BCD}$.

$$\text{R: Sendo } x = 40^\circ, \text{ temos } \widehat{BCD} = \frac{2x + x + 50}{2} = \frac{3 \cdot 40 + 50}{2} = \frac{120 + 50}{2} = \frac{170}{2} = 85^\circ.$$

Lição 106 – Relação entre ângulos inscritos e medida do ângulo central

1. Qual é a relação de igualdade entre as medidas dos ângulos p e t indicados na figura?

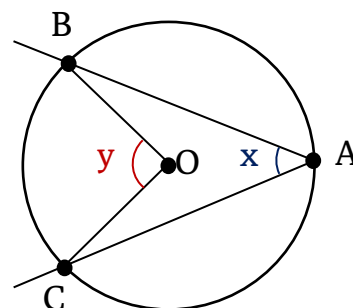


R: p é metade do ângulo central correspondente t : $p = \frac{t}{2}$.

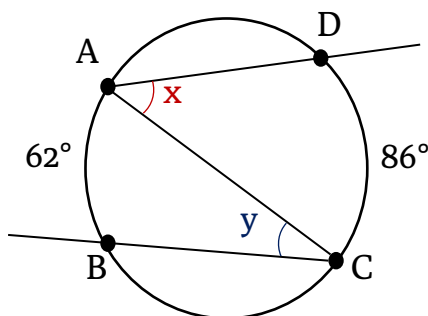
2. A medida do arco BC é 92° . Determine as medidas x e y indicadas na figura.

R: Sendo y o ângulo central do arco BC, $y = 92^\circ$ e, como x é o ângulo inscrito correspondente ao arco BC,

$$x = \frac{y}{2} = \frac{92}{2} = 46^\circ.$$

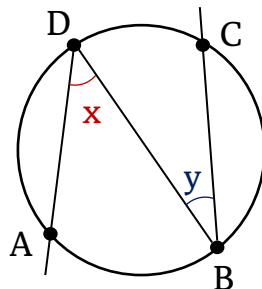


3. Considerando a figura abaixo, calcule o valor da expressão $x - y$.



R: Pela regra dos ângulos inscritos, onde estes valem metade do valor dos arcos correspondentes: $x = \frac{86}{2} = 43^\circ$ e $y = \frac{62}{2} = 31^\circ$, assim, $x - y = 43 - 31 = 12^\circ$.

4. A medida do arco AB corresponde a $\frac{1}{5}$ da medida da circunferência (em graus), enquanto a medida do arco CD corresponde a $\frac{1}{6}$ da medida da circunferência (em graus). Determine as medidas x e y indicadas na figura.

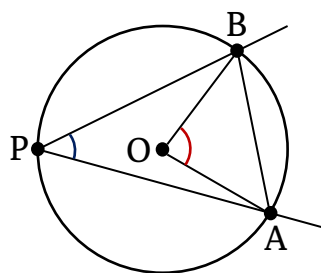


R: $AB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, portanto, $x = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$.

$DC = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, portanto, $y = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

5. Na circunferência da figura abaixo, a corda AB determina na circunferência um arco que mede 82° .

Sabendo que O é o centro e P um ponto qualquer da circunferência, determine a medida do ângulo:



a) AOB

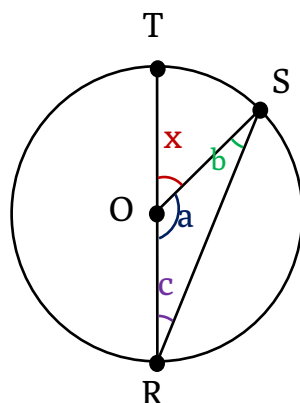
R: AOB equivale à medida do arco por ele determinado, assim, $AOB = 82^\circ$.

b) APB

R: APB equivale à metade do ângulo central que determina um mesmo arco.

Assim, $APB = \frac{82^\circ}{2} = 41^\circ$.

6. Sabendo que RS mede 140° , calcule o valor de x , a , b e c .

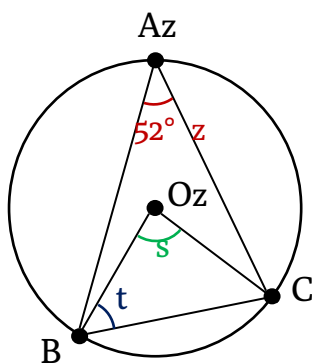


R: Como a é o ângulo que determina o arco RS, $a = 140^\circ$. Assim, sendo a e x suplementares, $x = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$. Pelo triângulo ORS, onde $OS = OR$, fazendo do triângulo um triângulo isósceles, onde b e c são iguais. Assim, chamando b e c de v , pela propriedade dos triângulos,

$$a + b + c = 180^\circ \Rightarrow 140^\circ + 2v = 180^\circ \Rightarrow 2v = 180^\circ - 140^\circ \Rightarrow v = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ.$$

Portanto, $b = 20^\circ$ e $c = 20^\circ$.

7. Observando a circunferência da figura, determine as medidas s e t indicadas.

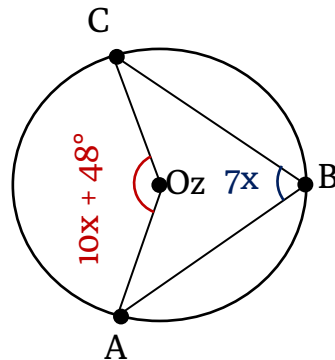


R: Como o ângulo $B\hat{A}C$ é inscrito do ângulo $B\hat{O}C$, $s = 2 \cdot B\hat{A}C = 2 \cdot 52^\circ \Rightarrow s = 104^\circ$.

Dessa forma, sendo o triângulo BOC isósceles,

$$s + 2t = 180^\circ \Rightarrow 104^\circ + 2t = 180^\circ \Rightarrow 2t = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ \Rightarrow t = \frac{76^\circ}{2} = 38^\circ.$$

8. Dada a circunferência a seguir, determine as medidas dos ângulos AOC e ABC.

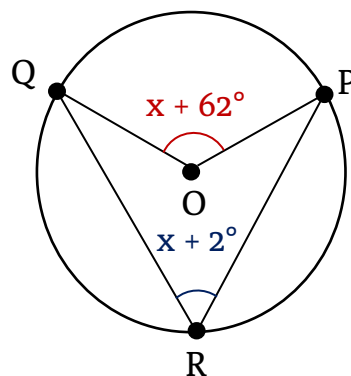


R: Sendo o ângulo ABC metade do ângulo AOC, temos a igualdade:

$$7x = \frac{10x + 48^\circ}{2} \Rightarrow 7x = 5x + 24^\circ \Rightarrow 7x - 5x = 24^\circ \Rightarrow 2x = 24^\circ \Rightarrow x = 12^\circ.$$

Assim, o ângulo $ABC = 7 \cdot 12 = 84^\circ$ e o ângulo $AOC = 10 \cdot 12^\circ + 48^\circ = 168^\circ$.

9. Qual é a medida do ângulo inscrito na figura a seguir?

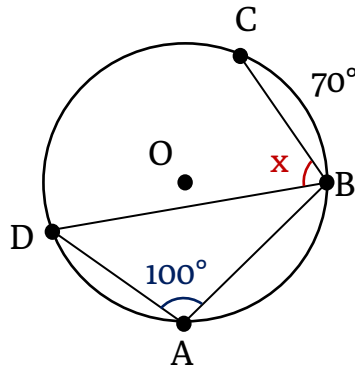


R: Sendo o ângulo QRP metade do ângulo QOP, temos a igualdade:

$$x + 2^\circ = \frac{x + 62^\circ}{2} \Rightarrow x - \frac{x}{2} = 31^\circ - 2^\circ \Rightarrow \frac{2x - x}{2} = 29^\circ \Rightarrow x = 29^\circ \cdot 2 \Rightarrow x = 58^\circ.$$

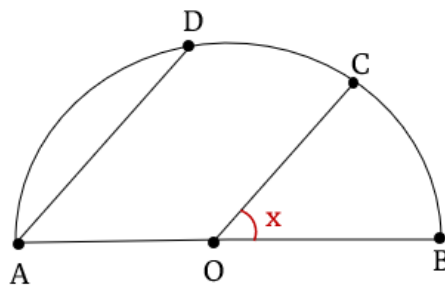
Assim, o ângulo inscrito $QRP = 58^\circ + 2^\circ = 60^\circ$.

10. Observando esta figura, determine a medida do arco CD e a medida x do ângulo DBC.



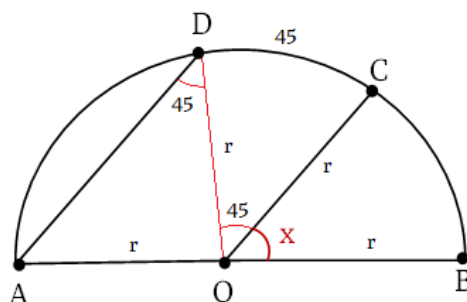
R: O ângulo DAB é metade da soma dos arcos DC e CB , portanto, $DC + CB = 200^\circ$, e $CB = 70^\circ$, então $DC + 70^\circ = 200^\circ \Rightarrow DC = 200^\circ - 70^\circ = 130^\circ$. Dessa forma, o ângulo x é metade do arco DC , portanto $x = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$.

11. Uma semicircunferência tem centro O e diâmetro $\overline{AB}$, com $\overline{OC} \parallel \overline{AD}$. A medida do arco CD é 45° . Determine a medida x indicada na figura a seguir:



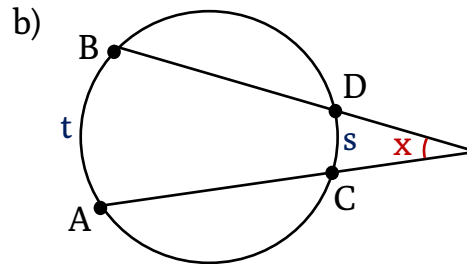
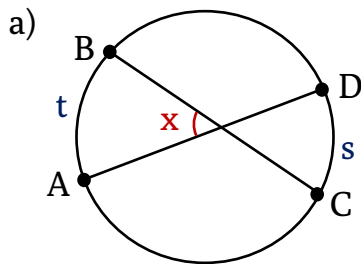
R: Pela figura abaixo, vemos que ao traçar o segmento $\overline{OD}$, temos um triângulo isósceles, como um dos ângulos de 45° , devido à propriedade dos ângulos alternos internos. Dessa maneira, o ângulo DAO é 45° também, e o ângulo faltante no triângulo, AOD é 90° , pois $180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$. Sendo assim, os ângulos AOD , DOC e x são suplementares. Portanto,

$$x + 45^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$$



Lição 107 – Ângulos cujos vértices não pertencem à circunferência

1. Em cada uma das figuras, vamos indicar por t a medida do arco AB e por s a medida do arco CD. Determine a medida x em função de t e s .

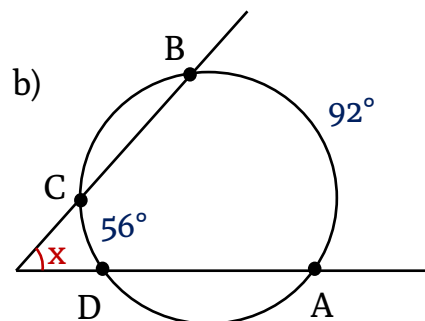
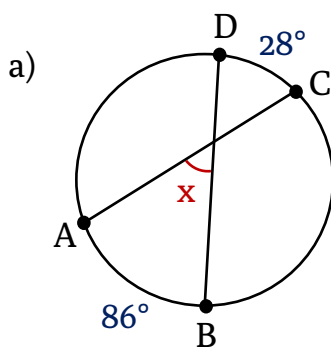


R:

a) $x = \frac{t}{2} + \frac{s}{2}.$

b) $x = \frac{t}{2} - \frac{s}{2}.$

2. Determine a medida x em cada uma das figuras (a medida dos arcos está indicada na cor azul):

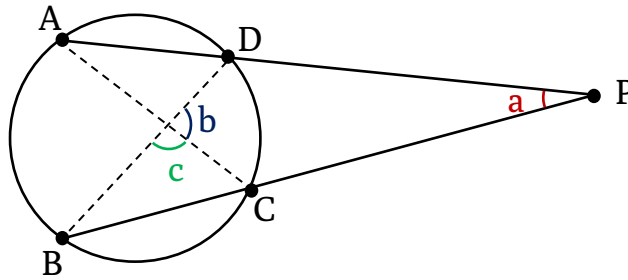


R:

a) $x = \frac{86^\circ}{2} + \frac{28^\circ}{2} \Rightarrow x = 43^\circ + 14^\circ \Rightarrow x = 57^\circ.$

b) $x = \frac{92^\circ}{2} - \frac{56^\circ}{2} \Rightarrow x = 46^\circ - 28^\circ \Rightarrow x = 18^\circ.$

3. Determine as medidas a , b e c indicadas na figura, sabendo que a medida do arco AB é 125° e a medida do arco CD é 65° .

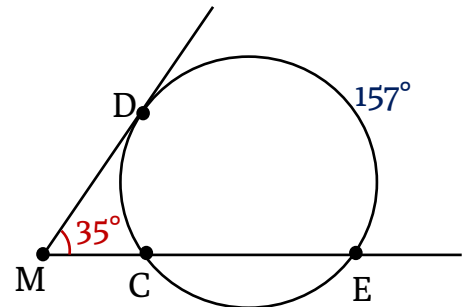


$$\text{R: } a = \frac{AB}{2} - \frac{CD}{2} \Rightarrow a = \frac{125^\circ}{2} - \frac{65^\circ}{2} \Rightarrow a = 62,5^\circ - 32,5^\circ \Rightarrow a = 30^\circ ;$$

$$b = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} \Rightarrow b = \frac{125^\circ}{2} + \frac{65^\circ}{2} \Rightarrow b = 62,5^\circ + 32,5^\circ \Rightarrow b = 95^\circ ;$$

$$c + b = 180^\circ \Rightarrow c + 95^\circ = 180^\circ \Rightarrow c = 180^\circ - 95^\circ \Rightarrow c = 85^\circ .$$

4. Se o arco DE mede 157° , quanto mede o arco CD na figura a seguir?



R:

$$\text{DMC} = \frac{DE}{2} - \frac{CD}{2} \Rightarrow 35^\circ = \frac{157^\circ}{2} - \frac{CD}{2} \Rightarrow 35^\circ - \frac{157^\circ}{2} = -\frac{CD}{2} \Rightarrow -CD = \left(\frac{35^\circ \cdot 2 - 157^\circ}{2}\right) \cdot 2 \Rightarrow CD = -70^\circ + 157^\circ \Rightarrow CD = 87^\circ .$$

Lição 108 – Unidades de medida de volume

1. Transforme $5,472 \text{ km}^3$ em hm^3 .

$$\text{R: } 5,472 \text{ km}^3 = 5,472 \cdot 1000 \text{ hm}^3 = 5472 \text{ hm}^3 .$$

2. Transforme 360 hm^3 em km^3

$$\text{R: } 360 \text{ hm}^3 = \frac{360}{1000} \text{ km}^3 = 0,36 \text{ km}^3 .$$

3. Transforme 10 dm^3 em dam^3

$$\text{R: } 10 \text{ dm}^3 = \frac{10}{1000} \text{ m}^3 = 0,001 \text{ m}^3 = \frac{0,001}{1000} \text{ dam}^3 = 0,000001 \text{ dam}^3.$$

4. Transforme $0,04 \text{ dm}^3$ em m^3

$$\text{R: } 0,04 \text{ dm}^3 = \frac{0,04}{1000} \text{ m}^3 = 0,00004 \text{ m}^3.$$

5. Transforme $900.000.000 \text{ mm}^3$ em m^3

$$\text{R: } 900\,000\,000 \text{ mm}^3 = \frac{900\,000\,000}{1000} \text{ cm}^3 = \frac{900\,000}{1000} \text{ dm}^3 = \frac{900}{1000} \text{ m}^3 = 0,9 \text{ m}^3.$$

6. Qual é a unidade fundamental do volume? E o que representa essa medida?

R: A unidade fundamental de volume é o metro cúbico, que corresponde ao espaço ocupado por um cubo de aresta 1m.

7. Expresse em metros cúbicos o valor da expressão:

$$3\,540 \text{ dm}^3 + 340\,000 \text{ cm}^3$$

R: Transformando cm^3 em dm^3 :

$$340\,000 \text{ cm}^3 = \frac{340\,000}{1000} \text{ dm}^3 = 340 \text{ dm}^3.$$

Assim, a soma passa a ser:

$$3\,540 \text{ dm}^3 + 340 \text{ dm}^3 = 3\,880 \text{ dm}^3.$$

Transformando esse valor em m^3 , temos:

$$3\,880 \text{ dm}^3 = \frac{3.880}{1000} \text{ m}^3 = 3,88 \text{ m}^3.$$

Lição 109 – Volume de um cubo

1. Calcule o volume de um cubo, sabendo que a medida de seu lado é igual a 3 cm.

$$\text{R: } V = l^3 \Rightarrow V = 3^3 \Rightarrow V = 27 \text{ cm}^3.$$

2. Calcule o volume de um cubo, sabendo que a medida de seu lado é igual a 12 cm.

$$\text{R: } V = l^3 \Rightarrow V = 12^3 \Rightarrow V = 1\,728 \text{ cm}^3.$$

3. Calcule o volume de um cubo, sabendo que a medida de seu lado é igual a 20 cm.

$$\text{R: } V = l^3 \Rightarrow V = 20^3 \Rightarrow V = 8000 \text{ cm}^3.$$

4. Calcule o volume de um cubo, sabendo que a medida de seu lado é igual a 9 m.

$$\text{R: } V = l^3 \Rightarrow V = 9^3 \Rightarrow V = 729 \text{ m}^3.$$

5. Seis quadrados iguais com lado medindo 9 cm são colados formando um cubo. Calcule o volume desse cubo.

$$\text{R: } V = l^3 \Rightarrow V = 9^3 \Rightarrow V = 729 \text{ cm}^3.$$

6. A área de um dos lados de um cubo mede 36 cm^2 . Com base nessa informação, calcule o volume desse cubo.

$$\text{R: } A = l^2 \Rightarrow 36 = l^2 \Rightarrow l = 6 \text{ cm. } V = l^3 \Rightarrow V = 6^3 \Rightarrow V = 216 \text{ cm}^3.$$

7. A soma das áreas dos lados de um cubo é igual a 864 cm^2 . Calcule o volume desse cubo.

R: Sabendo a área total do cubo, temos:

$$\text{Área total} = 6 \cdot l^2 \Rightarrow 864 = 6 \cdot l^2 \Rightarrow \frac{864}{6} = l^2 \Rightarrow l^2 = 144 \Rightarrow l = 12 \text{ cm}.$$

Assim, tendo o valor do lado do cubo, seu volume é:

$$V = l^3 \Rightarrow V = 12^3 \Rightarrow V = 1728 \text{ cm}^3.$$

Lição 110 – Volume de um bloco retangular

1. Calcule o volume de um bloco retangular com dimensões 40 cm, 10 cm e 20 cm.

R: $V = abc \Rightarrow V = 40 \cdot 10 \cdot 20 \Rightarrow V = 8000 \text{ cm}^3$.

2. Calcule o volume de um bloco retangular com dimensões 4 cm, 5 cm e 6 cm.

R: $V = abc \Rightarrow V = 4 \cdot 5 \cdot 6 \Rightarrow V = 120 \text{ cm}^3$.

3. Calcule o volume de um bloco retangular com dimensões 15 cm, 20 cm e 25 cm.

R: $V = abc \Rightarrow V = 15 \cdot 20 \cdot 25 \Rightarrow V = 7500 \text{ cm}^3$.

4. Calcule o volume de um bloco retangular com dimensões 60 cm, 30 cm e 15 cm.

R: $V = abc \Rightarrow V = 60 \cdot 30 \cdot 15 \Rightarrow V = 27000 \text{ cm}^3$.

5. Calcule a área lateral dos blocos retangulares dos exercícios 1, 2, 3 e 4.

R:

Exercício 1: $A_L = 2(ac + bc) \Rightarrow A_L = 2(40 \cdot 20 + 10 \cdot 20) \Rightarrow A_L = 2(800 + 200) \Rightarrow A_L = 2 \cdot 1000 \Rightarrow A_L = 2000 \text{ cm}^2$.

Exercício 2: $A_L = 2(ac + bc) \Rightarrow A_L = 2(4 \cdot 6 + 5 \cdot 6) \Rightarrow A_L = 2(24 + 30) \Rightarrow A_L = 2 \cdot 54 \Rightarrow A_L = 108 \text{ cm}^2$.

Exercício 3: $A_L = 2(ac + bc) \Rightarrow A_L = 2(15 \cdot 25 + 20 \cdot 25) \Rightarrow A_L = 2(375 + 500) \Rightarrow A_L = 2 \cdot 875 \Rightarrow A_L = 1750 \text{ cm}^2$.

Exercício 4: $A_L = 2(ac + bc) \Rightarrow A_L = 2(60 \cdot 15 + 30 \cdot 15) \Rightarrow A_L = 2(900 + 450) \Rightarrow A_L = 2 \cdot 1350 \Rightarrow A_L = 2700 \text{ cm}^2$.

6. Calcule a área total dos blocos retangulares dos exercícios 1, 2, 3 e 4.

R:

Exercício 1: $A_T = 2(ac + ab + bc) \Rightarrow A_T = 2(40 \cdot 20 + 40 \cdot 10 + 10 \cdot 20) \Rightarrow A_T = 2(800 + 400 + 200) \Rightarrow A_T = 2 \cdot 1400 \Rightarrow A_T = 2800 \text{ cm}^2$.

Exercício 2 : $A_T = 2(ac + ab + bc) \Rightarrow A_T = 2(4 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6) \Rightarrow A_T = 2(24 + 20 + 30) \Rightarrow A_T = 2 \cdot 74 \Rightarrow A_T = 148 \text{ cm}^2$.

Exercício 3 : $A_T = 2(ac + ab + bc) \Rightarrow A_T = 2(15 \cdot 25 + 15 \cdot 20 + 20 \cdot 25) \Rightarrow A_T = 2(375 + 300 + 500) \Rightarrow A_T = 2 \cdot 1175 \Rightarrow A_T = 2350 \text{ cm}^2$.

Exercício 4 : $A_T = 2(ac + ab + bc) \Rightarrow A_T = 2(60 \cdot 15 + 60 \cdot 30 + 30 \cdot 15) \Rightarrow A_T = 2(900 + 1.800 + 450) \Rightarrow A_T = 2 \cdot 3150 \Rightarrow A_T = 6300 \text{ cm}^2$.

Lição 111 – Volume de um cilindro

1. Um reservatório cilíndrico possui raio igual a 2 metros e altura de 10 metros. Qual é a quantidade de água que cabe nesse reservatório em m^3 ?

R: $V = \pi r^2 h \Rightarrow V = 3,14 \cdot 2^2 \cdot 10 = 3,14 \cdot 4 \cdot 10 \Rightarrow V = 125,6 \text{ m}^3$.

2. Calcule o volume de um cilindro cuja área da base seja de 3 cm^2 e tenha altura de 9 cm.

R: $V = A_B \cdot h \Rightarrow V = 3 \cdot 9 \Rightarrow V = 27 \text{ cm}^3$.

3. O raio do círculo da base mede 17 cm, e a altura mede 6 cm. Qual é o volume do cilindro, dado: $\pi = 3,14$?

R: $V = \pi r^2 h \Rightarrow V = 3,14 \cdot 17^2 \cdot 6 = 3,14 \cdot 289 \cdot 6 \Rightarrow V = 5\,444,76 \text{ cm}^3$.

4. Um clube adquiriu 2 tanques de água com formato cilíndrico. Sabe-se que ambos os tanques medem 6 m de altura. A base do primeiro tem 6 m de diâmetro e o segundo tem 2 m de raio. Qual é o volume dos dois tanques?

R: O primeiro tanque tem 6 m de diâmetro, portanto 3 m de raio. Assim, seu volume é:

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = 3,14 \cdot 3^2 \cdot 6 = 3,14 \cdot 9 \cdot 6 \Rightarrow V = 169,56 \text{ m}^3.$$

O segundo tanque tem volume de:

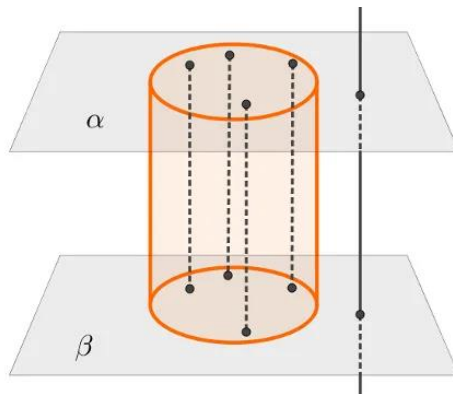
$$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = 3,14 \cdot 2^2 \cdot 6 = 3,14 \cdot 4 \cdot 6 \Rightarrow V = 75,36 \text{ m}^3.$$

5. Quais são os elementos de um cilindro?

R: Os elementos de um cilindro são: Bases, altura e a geratriz.

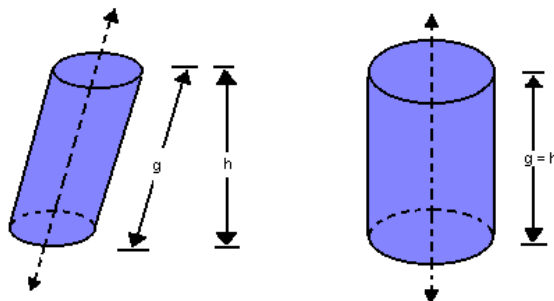
6. Defina um cilindro com palavras e com um desenho.

R: Dados dois planos paralelos α e β , um círculo C no plano α e uma reta r secante a esses planos, um cilindro é o conjunto de segmentos paralelos a r que possuem como extremidade o círculo C no plano α e algum ponto do plano β .



7. O cilindro pode ser classificado de duas formas. Escreva a diferença e faça dois desenhos representando as duas formas de classificação.

R: O cilindro pode ser classificado como circular oblíquo e circular reto, onde o circular oblíquo possui as geratrizes oblíquas às bases (cilindro à esquerda), e o circular reto possui as geratrizes perpendiculares às bases (cilindro à direita).



Lição 112 – Unidade de medida de capacidade

1. Transforme 7,15 kl em dl

R: $7,15 \text{ kl} = 7,15 \cdot 10 \text{ hl} = 7,15 \cdot 100 \text{ dal} = 7,15 \cdot 1000 \text{ l} = 7,15 \cdot 10000 \text{ dl} = 71500 \text{ dl}.$

2. Transforme 6,5 hl em l

R: $6,5 \text{ hl} = 6,5 \cdot 10 \text{ dal} = 6,5 \cdot 100 \text{ l} = 650 \text{ l}.$

3. Transforme 90,6 ml em l

R: $90,6 \text{ ml} = \frac{90,6}{10} \text{ cl} = \frac{90,6}{100} \text{ dl} = \frac{90,6}{1000} \text{ l} = 0,0906 \text{ l}.$

4. Expresse em litros o valor da expressão:

$$0,6\text{m}^3 + 10 \text{ dal} + 1\text{hl}$$

R: Sabendo que: $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l}$, $1 \text{ dal} = 10 \text{ l}$ e $1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$, o valor da expressão, em litros é:

$$0,6 \cdot 1000 + 10 \cdot 10 + 1 \cdot 100 = 600 + 100 + 100 = 800 \text{ l}.$$

Gabarito de Matemática

8º ano, Volume 8

Lição 113 – Razão e proporção

1. Qual é a definição de razão na matemática?

R: Razão é uma relação de comparação entre dois valores ou duas grandezas, expressa pelo quociente entre esses valores.

2. Qual é o significado da palavra proporção? Explique de maneira breve o que é uma proporção.

R: A palavra proporção significa uma igualdade entre duas razões.

3. Qual é o símbolo matemático para expressar uma proporção? Como se lê uma proporção?

R: O símbolo matemático para representar uma proporção entre dois números é $\propto$. Uma proporção dada por $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lê-se como: “a está para b assim como c está para d”.

4. A constante de proporcionalidade de uma razão é o valor que se obtém...

R: A constante de proporcionalidade de uma razão é o valor que se obtém pelo quociente dos termos da razão.

5. Substitua o valor de x de tal forma que a razão entre a e b esteja correta:

a	6	8	- 1,2	x	x	x
b	3	x	x	- 5	- 9	8
$\frac{a}{b}$	x	4	0,5	3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$

R:

a	6	8	- 1,2	- 15	- 3	- 2
b	3	2	- 0,6	- 5	- 9	8
$\frac{a}{b}$	2	4	0,5	3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$

Lição 114 – Proporção

1. O que é uma proporção contínua? Dê três exemplos de proporções contínuas.

R: Uma proporção contínua ocorre quando os termos centrais de uma quádrupla são iguais. Exemplos: (1,2,2,4), (2,6,6,18) e (1,3,3,9).

2. O que é a terceira proporcional?

R: Dados dois números racionais a e b, ambos diferentes de zero, denomina-se terceira proporcional entre a e b o número x que verifica a proporção contínua:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

3. Encontre a terceira proporcional entre:

a) 1 e 5

$$\text{R: } \frac{1}{5} = \frac{5}{x} \Rightarrow 1 \cdot x = 5 \cdot 5 \Rightarrow x = 25 \Rightarrow (1,5,5,25)$$

b) 4 e 6

$$\text{R: } \frac{4}{6} = \frac{6}{x} \Rightarrow 4 \cdot x = 6 \cdot 6 \Rightarrow x = \frac{36}{4} \Rightarrow x = 9 \Rightarrow (4,6,6,9)$$

c) 7 e 2

$$\text{R: } \frac{7}{2} = \frac{2}{x} \Rightarrow 7 \cdot x = 2 \cdot 2 \Rightarrow x = \frac{4}{7} \Rightarrow (7,2,2, \frac{4}{7})$$

d) $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{5}$

$$\text{R: } \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{5}{3}}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot x = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{\frac{9}{25}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{9}{25} \cdot 2 \Rightarrow x = \frac{18}{25} = 0,72 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, 0,72\right)$$

e) 4 e $\frac{1}{3}$

$$\text{R: } \frac{4}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{x} \Rightarrow 4 \cdot x = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{\frac{1}{9}}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{36} \Rightarrow \left(4, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{36}\right).$$

f) $\frac{1}{4}$ e 3

$$\text{R: } \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot x = 3 \cdot 3 \Rightarrow x = \frac{9}{\frac{1}{4}} \Rightarrow x = 9 \cdot 4 \Rightarrow x = 36 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}, 3, 3, 36\right).$$

g) 2,5 e 1,5

$$\text{R: } \frac{2,5}{1,5} = \frac{1,5}{x} \Rightarrow 2,5 \cdot x = 1,5 \cdot 1,5 \Rightarrow x = \frac{2,25}{2,5} \Rightarrow x = 0,9 \Rightarrow (2,5; 1,5; 1,5; 0,9).$$

4. O que é a quarta proporcional?

R: Dados três números racionais a, b e c , todos diferentes de zero, denomina-se quarta proporcional entre a, b e c o número x que verifica a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

5. Encontre a quarta proporcional entre:

a) 1, 2 e 5

$$\text{R: } \frac{1}{2} = \frac{5}{x} \Rightarrow 1 \cdot x = 2 \cdot 5 \Rightarrow x = 10$$

b) 6, 3 e 8

$$\text{R: } \frac{6}{3} = \frac{8}{x} \Rightarrow 6 \cdot x = 3 \cdot 8 \Rightarrow x = \frac{24}{6} \Rightarrow x = 4$$

c) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{2}$

$$\text{R: } \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{3}{2}}{x} \Rightarrow x \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{\frac{6}{1}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{0,6}{0,5} = 1,2$$

d) 1,5, 2 e 5.

$$\text{R: } \frac{1,5}{2} = \frac{5}{x} \Rightarrow 1,5 \cdot x = 2 \cdot 5 \Rightarrow x = \frac{10}{1,5} \Rightarrow x = 6,67$$

e) $4, \frac{1}{3}$ e 2,5

$$\text{R: } \frac{4}{\frac{1}{3}} = \frac{2,5}{x} \Rightarrow x \cdot 4 = \frac{1}{3} \cdot 2,5 \Rightarrow x = \frac{\frac{2,5}{3}}{4} \Rightarrow x = 0,2083$$

6. Verifique se os números 15, 30, 45 e 90 são proporcionais.

$$\text{R: } \frac{15}{30} = 0,5 \text{ e } \frac{45}{90} = 0,5, \text{ portanto, } \frac{15}{30} = \frac{45}{90} = 0,5, \text{ sendo proporcionais.}$$

Lição 115 – Propriedades de proporção

1. Faça a demonstração da 1ª propriedade (sem acompanhar a demonstração da apostila).

R: Sabendo que nossa quádrupla é uma proporção, temos a seguinte igualdade:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

Ora, sabemos que, se somarmos a mesma quantidade aos dois membros da igualdade, essa igualdade permanecerá verdadeira. Vamos, então, somar 1 aos dois membros da igualdade.

$$\frac{x}{y} + 1 = \frac{a}{b} + 1$$

Ora, sabemos também que para somar frações o denominador precisa ser igual. No primeiro membro de nossa igualdade, temos a soma de uma fração cujo denominador é y. Sabemos também que qualquer número dividido por ele mesmo é sempre 1. Logo,

$$\frac{y}{y} = 1$$

Já que temos uma igualdade, podemos substituir o número 1 do primeiro membro por $\frac{y}{y}$:

$$\frac{x}{y} + 1 = \frac{a}{b} + 1$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{y} = \frac{a}{b} + 1$$

Utilizando o mesmo raciocínio, como temos a soma de uma fração no segundo membro da igualdade cujo denominador é b, poderíamos transformar o número 1 em uma divisão cujo denominador também seja b:

$$\frac{b}{b} = 1$$

Substituindo o número 1 do segundo membro por $\frac{b}{b}$, temos:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{y} = \frac{a}{b} + 1$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{y} = \frac{a}{b} + \frac{b}{b}$$

Aprendemos que, para somar frações, basta conservar os denominadores e somar os numeradores. Logo,

$$\frac{x+y}{y} = \frac{a+b}{b}$$

Portanto, está provada nossa 1ª propriedade. Perceba que em todos os passos utilizamos somente verdades matemáticas e que, portanto, a igualdade final só pode ser verdadeira.

2. Verifique a 1ª propriedade nas seguintes proporções:

a) (1, 2, 10, 20)

$$\text{R: } \frac{1+2}{2} = \frac{10+20}{20} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{30}{20} = 1,5$$

b) (1, 5, 25, 125)

$$\text{R: } \frac{1+5}{5} = \frac{25+125}{125} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{150}{125} = 1,2$$

c) (4, 5, 48, 60)

$$\text{R: } \frac{4+5}{5} = \frac{48+60}{60} \Rightarrow \frac{9}{5} = \frac{108}{60} = 1,8$$

d) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5})$

$$\text{R: } \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{5}}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \frac{\frac{2}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{5}}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{5}}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \frac{5}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{3} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{5}} \cdot \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{5}{3} = 1,67$$

3. Faça a demonstração da 2ª propriedade (sem acompanhar a demonstração da apostila).

R: Para demonstrar esta propriedade, vamos utilizar o mesmo recurso que usamos na demonstração anterior. Euclides escreveu em seu livro diversos axiomas, entre os quais:

– Se adicionarmos uma mesma quantidade aos dois membros de uma igualdade, esta igualdade permanecerá verdadeira.

– Se subtrairmos uma mesma quantidade aos dois membros de uma igualdade, esta igualdade permanecerá verdadeira.

Na primeira demonstração utilizamos o primeiro axioma. Agora vamos utilizar o segundo.

Sabendo que nossa quádrupla é uma proporção, temos a seguinte igualdade:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

Ora, sabemos que, se subtrairmos a mesma quantidade aos dois membros da igualdade, essa igualdade permanecerá verdadeira. Vamos, então, subtrair 1 aos dois membros da igualdade.

$$\frac{x}{y} - 1 = \frac{a}{b} - 1$$

Utilizando os mesmos conceitos da demonstração anterior, transformaremos o – 1 em frações cujos denominadores são, respectivamente, y e b. Logo,

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{y} = \frac{a}{b} - \frac{b}{b}$$

Aprendemos que, para subtrair frações, basta conservar os denominadores e subtrair os numeradores. Logo,

$$\frac{x - y}{y} = \frac{a - b}{b}$$

Portanto, está provada nossa 2ª propriedade. Perceba que em todos os passos utilizamos somente verdades matemáticas e que, portanto, a igualdade final só pode ser verdadeira.

4. Verifique a 2ª propriedade nas seguintes proporções:

a) (1, 2, 10, 20)

$$\text{R: } \frac{1-2}{2} = \frac{10-20}{20} = \frac{-1}{2} = \frac{-10}{20} = -0,5$$

b) (1, 5, 25, 125)

$$\text{R: } \frac{1-5}{5} = \frac{25-125}{125} \Rightarrow \frac{-4}{5} = \frac{-100}{125} = -0,8$$

c) (4, 5, 48, 60)

$$\text{R: } \frac{4-5}{5} = \frac{48-60}{60} \Rightarrow \frac{-1}{5} = \frac{-12}{60} = -0,2$$

d) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5})$

$$\text{R: } \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{2}{5} - \frac{3}{5}}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \frac{\frac{-1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{-1}{5}}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \frac{-1}{3} = \frac{-1}{3} = -0,33$$

5. Faça a demonstração da 3ª propriedade (sem acompanhar a demonstração da apostila)

R: Sabendo que nossa quádrupla é uma proporção, temos a seguinte igualdade:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

Ora, quando aprendemos álgebra, vimos que um número que está dividindo passa para o outro lado da igualdade multiplicando. Vamos então passar y para o 2º membro, multiplicando $\frac{a}{b}$.

$$x = \frac{a \cdot y}{b}$$

Ainda sabemos que um número que está multiplicando passa para o outro lado da igualdade dividindo. Vamos então passar o a para o 1º membro, dividindo x.

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

Nossa nova proporção é da seguinte forma: (x, a, y, b). Aplicando a primeira propriedade de proporção, sabemos que a soma dos dois primeiros termos está para

o segundo termo, assim como a soma dos dois últimos termos está para o quarto termo. Logo,

$$\frac{x+a}{a} = \frac{y+b}{b}$$

$$x+a = \frac{a \cdot (y+b)}{b}$$

Passando agora o fator $y + b$ dividindo o primeiro membro, temos:

$$\frac{x+a}{y+b} = \frac{a}{b}$$

Portanto, está provada nossa 3ª propriedade. Perceba que em todos os passos utilizamos somente verdades matemáticas e que, portanto, a igualdade final só pode ser verdadeira.

6. Verifique a 3ª propriedade nas seguintes proporções:

a) (1, 2, 10, 20)

$$\text{R: } \frac{1+10}{2+20} = \frac{10}{20} \Rightarrow \frac{11}{22} = \frac{10}{20} = 0,5$$

b) (1, 5, 25, 125)

$$\text{R: } \frac{1+25}{5+125} = \frac{25}{125} \Rightarrow \frac{26}{130} = \frac{25}{125} = 0,2$$

c) (4, 5, 48, 60)

$$\text{R: } \frac{4+48}{5+60} = \frac{48}{60} \Rightarrow \frac{52}{65} = \frac{48}{60} = 0,8$$

d) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5})$

$$\text{R: } \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{5}}{\frac{2}{4} + \frac{3}{5}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \frac{\frac{9}{10}}{\frac{10}{20}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = 0,67$$

7. Demonstre que, se a seguinte quádrupla x, y, a, b é proporcional, então $x, x + y, a, a + b$ também será proporcional. Depois substitua x, y, a e b por números proporcionais e verifique o que acabou de demonstrar.

R: Utilizando a primeira propriedade, temos que

$$\frac{x+y}{y} = \frac{a+b}{b}$$

Dessa forma, utilizando a quádrupla ($\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$), podemos isolar o y , obtendo:

$$y = \frac{xb}{a}$$

Assim, aplicaremos o valor de y na primeira propriedade da proporção:

$$\frac{x+y}{\frac{xb}{a}} = \frac{a+b}{b}$$

Com isso, trocamos o novo y pelo $(a+b)$, por ser uma proporção, obtendo:

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{\frac{xb}{a}}{b}$$

Após a troca, com a propriedade da divisão de frações, efetuamos a divisão da razão à esquerda:

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{xb}{a} \cdot \frac{1}{b}$$

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{x\cancel{b}}{a} \cdot \frac{1}{\cancel{b}} ..$$

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{x}{a}$$

Feito isso, trocamos novamente a proporção, resultando em:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{a+b}{a}$$

Para concluir, basta inverter ambas as frações, mantendo a proporção, justamente por inverter de ambos os lados, e não de apenas um:

$$\frac{x}{x+y} = \frac{a}{a+b}$$

Provando assim, que se a quádrupla x, y, a, b é proporcional, então $x, x+y, a, a+b$, também é proporcional.

Substituindo pela quádrupla 1, 2, 4, 8, temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = 0,5$$

e

$$\frac{1}{1+2} = \frac{4}{4+8} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{12} = 0,33$$

8. Demonstre que, se a seguinte quádrupla x, y, a, b é proporcional, então $x, x - y, a, a - b$ também será proporcional. Depois substitua x, y, a e b por números proporcionais e verifique o que acabou de demonstrar.

R: Utilizando a segunda propriedade, temos que

$$\frac{x-y}{y} = \frac{a-b}{b}$$

Dessa forma, utilizando a quádrupla $(\frac{x}{y} = \frac{a}{b})$, podemos isolar o y , obtendo:

$$y = \frac{xb}{a}$$

Assim, aplicaremos o valor de y na segunda propriedade da proporção:

$$\frac{x-y}{\frac{xb}{a}} = \frac{a-b}{b}$$

Com isso, trocamos o novo y pelo (a - b), por ser uma proporção, obtendo:

$$\frac{x-y}{a-b} = \frac{\frac{xb}{a}}{b}$$

Após a troca, com a propriedade da divisão de frações, efetuamos a divisão da razão à esquerda:

$$\frac{x-y}{a-b} = \frac{xb}{a} \cdot \frac{1}{b}$$

$$\frac{x-y}{a-b} = \frac{x\cancel{b}}{a} \cdot \frac{1}{\cancel{b}} ..$$

$$\frac{x-y}{a-b} = \frac{x}{a}$$

Feito isso, trocamos novamente a proporção, resultando em:

$$\frac{x-y}{x} = \frac{a-b}{a}$$

Para concluir, basta inverter ambas as frações, mantendo a proporção, justamente por inverter de ambos os lados, e não de apenas um:

$$\frac{x}{x-y} = \frac{a}{a-b}$$

Provando assim, que se a quádrupla x, y, a, b é proporcional, então x, x-y, a, a-b, também é proporcional.

Substituindo pela quádrupla 1, 2, 4, 8, temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = 0,5$$

e

$$\frac{1}{1-2} = \frac{4}{4-8} \Rightarrow \frac{1}{-1} = \frac{4}{-4} = -1$$

Lição 116 – Grandezas proporcionais

1. Maurício foi a uma quitanda e viu que três alcachofras custavam R\$ 11,70. Decidiu comprar 8. Quanto ele pagou no total?

R: Utilizando as propriedades de proporção, podemos fazer a seguinte comparação:

$$\frac{11,70}{3} = \frac{x}{8} \Rightarrow 11,70 \cdot 8 = \frac{x}{3} \Rightarrow x = \frac{93,6}{3} = 31,2, \text{ portanto Maurício pagou R\$ 31,20.}$$

2. Um prêmio de loteria, no valor de R\$ 1.530.000,00, será dividido igualmente pelo total de acertadores.

a) Quanto cada acertador receberá, se o prêmio for dividido entre 5 ganhadores?

R: Se houver 5 ganhadores o valor será dividido entre eles, assim, cada um ganhará $\frac{1.530.000}{5} = \text{R\$ } 306.000,00$.

b) E se fossem 6 ganhadores?

R: Caso sejam 6 ganhadores, cada um receberá $\frac{1.530.000}{6} = \text{R\$ } 255.000,00$.

c) Faça um quadro relacionando as quantidades 1, 2, 5 e 6 de acertadores e o valor do prêmio correspondente.

R:

Quantidade de ganhadores	Valor do prêmio
1	R\$ 1.530.000,00
2	$\frac{1.530.000}{2} = \text{R\$ } 765.000,00$
5	$\frac{1.530.000}{5} = \text{R\$ } 306.000,00$
6	$\frac{1.530.000}{6} = \text{R\$ } 255.000,00$

d) Conforme o número de acertadores aumenta, o que acontece com o valor do prêmio?

R: Conforme aumenta o número de ganhadores, o prêmio que cada um receberá será menor, pois o valor é dividido entre os ganhadores. Portanto quanto maior o número de ganhadores, maior a divisão e menor o prêmio.

Lição 117 – Grandezas não proporcionais

1. Retome a relação entre as escalas termométricas estudadas na Unidade. Vimos que as escalas Celsius e Fahrenheit não são proporcionais. A relação matemática entre elas é dada pela expressão: $^{\circ}\text{F} = 1,8 \cdot ^{\circ}\text{C} + 32$. Assim, determine:

a) 68°F em $^{\circ}\text{C}$

$$\text{R: } 68 = 1,8^{\circ}\text{C} + 32 \Rightarrow 68 - 32 = 1,8^{\circ}\text{C} \Rightarrow \frac{36}{1,8} = ^{\circ}\text{C} = 20^{\circ}\text{C}.$$

b) 25°C em $^{\circ}\text{F}$

$$\text{R: } ^{\circ}\text{F} = 1,8 \cdot 25 + 32 \Rightarrow ^{\circ}\text{F} = 45 + 32 \Rightarrow ^{\circ}\text{F} = 77^{\circ}\text{F}.$$

2. Classifique as grandezas apresentadas nas situações a seguir em Proporcionais (P) ou em Não Proporcionais (NP).

a) A medida do lado de um hexágono regular e seu perímetro.

R: Proporcionais.

b) A quantidade de cestas convertidas em uma partida de basquetebol e o tempo de jogo.

R: Não proporcionais.

c) A temperatura e a hora em que foi medida ao longo de um dia.

R: Não proporcionais.

d) A distância percorrida por um automóvel, a uma velocidade constante, e o tempo do percurso.

R: Proporcionais.

e) A medida da aresta de um cubo e seu volume em litros.

R: Não proporcionais.

3. Uma livraria decidiu fazer uma liquidação de alguns livros, com o seguinte anúncio: “2 livros por R\$ 19,00”; “5 livros por R\$ 38,00”. Os preços são proporcionais ao número de livros comprados? Justifique sua resposta.

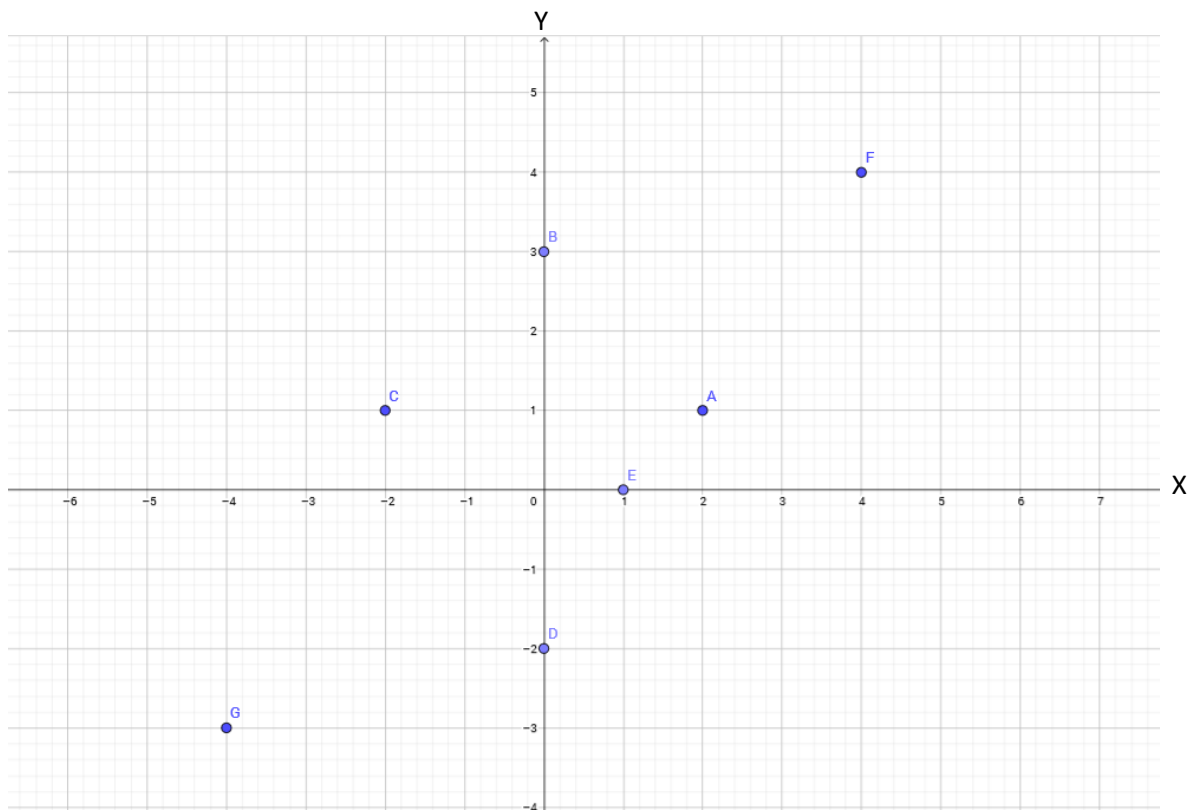
R: De acordo com o anúncio, podemos montar a proporção $\frac{19}{2} = \frac{38}{5}$, assim vemos que os preços não são proporcionais, pois $\frac{19}{2} = 9,5$ e $\frac{38}{5} = 7,6$.

Lição 118 – Plano cartesiano

1. Quais são os nomes dados ao eixo x e ao eixo y?

R: O eixo x é também conhecido como eixo das abscissas (do latim *abscissus*, que significa 'separado em dois'), e o eixo y como eixo das ordenadas.

2. Dados os pontos abaixo, indique quais são suas coordenadas:



R: Ponto A = (2,1); Ponto B = (0,3); Ponto C = (-2,1); Ponto D = (0,-2); Ponto E = (1,0); Ponto F = (4,4) e ponto G = (-4,-3).

3. Sem construir o plano cartesiano, analise os pontos a seguir e indique em que quadrante o ponto está localizado:

a) $A = (3, -5)$

R: Quarto quadrante.

b) $B = (-7, -1)$

R: Terceiro quadrante.

c) $C = (-4, 4)$

R: Segundo quadrante.

d) $D = (2, 2)$

R: Primeiro quadrante.

4. Em papel quadriculado construa um plano cartesiano, com o eixo x de -10 a 10 , e o eixo y de -10 a 10 . Lembre-se de que a distância entre os números do eixo x precisa ser sempre igual, e a distância entre os valores do eixo y também precisa ser sempre igual. Como o papel é quadriculado, você pode utilizar cada quadradinho como medida, e depois marque os seguintes pontos:

a) $A = (3, 5)$

b) $B = (7, 8)$

c) $C = (-4, 5)$

d) $D = (-10, 0)$

e) $E = (0, 10)$

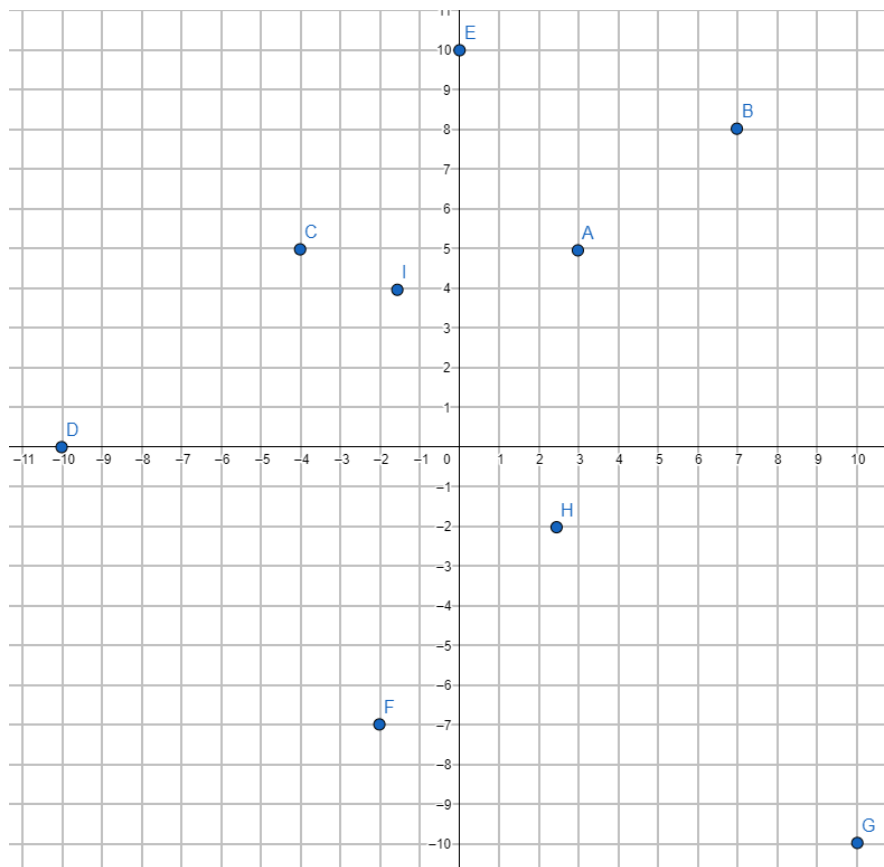
f) $F = (-2, -7)$

g) $G = (10, -10)$

h) $H = (\frac{5}{2}, -2)$

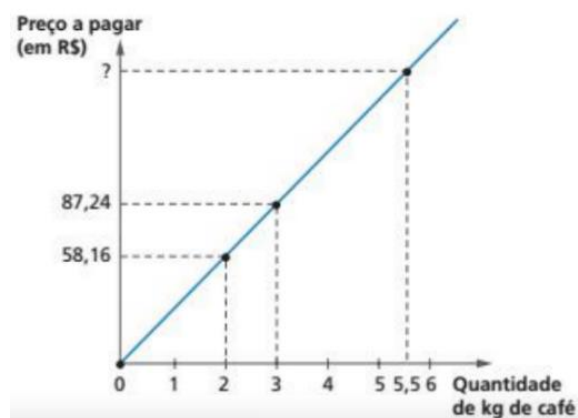
i) $I = (-1,5; 4)$

R:



Lição 119 – Representação gráfica

1. Observe o gráfico ao lado e responda:



a) Qual é o preço de 2 kg de café?

R: Observando o gráfico, quando a quantidade de café é de 2 kg, o preço a se pagar é R\$ 58,16.

b) Qual é o valor pago por 5,5 kg de café?

R: Observando o gráfico, de 2 para 3 kg de café houve um aumento de R\$ 29,08, sendo esse o preço de 1 kg de café, portanto, 5,5 kg de café custam $5,5 \cdot 29,08 = \text{R\$ } 159,94$.

2. A tarifa de táxi é composta de um valor fixo, chamado bandeirada, adicionado ao valor pago por quilômetro rodado. Sabendo que o valor da bandeirada é de R\$ 5,12 e o valor por quilômetro rodado é de R\$ 2,49, responda às perguntas:

a) O valor a ser pago em um táxi e a quantidade de quilômetros rodados são duas grandezas proporcionais? Explique-o.

R: As grandezas não são proporcionais, pois o valor da bandeira é fixo, isto é, independentemente da quantidade de quilômetros rodados, o valor é o mesmo.

b) Paola pegou um táxi em Recife às 10h da manhã. Fez um percurso de 12 quilômetros. Qual é o valor pago por ela?

R: Sendo o valor a ser pago dado pela equação: $\text{Valor} = 2,49x + 5,12$, O valor pago por Paola foi de: $V = 2,49 \cdot 12 + 5,12 = 29,88 + 5,12 \Rightarrow V = \text{R\$ } 35,00$

Lição 120 – Velocidade média

1. Dê a definição de velocidade média.

R: Velocidade média é a razão entre a distância total percorrida e o tempo gasto para percorrê-la.

$$V_m = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto}}$$

2. Transforme em km/h:

a) 72 m/s

R: $72 \text{ m/s} = 72 \cdot 3,6 \text{ km/h} = 259,2 \text{ km/h}$

b) 187,2 m/s

R: $187,2 \text{ m/s} = 187,2 \cdot 3,6 \text{ km/h} = 673,92 \text{ km/h}$

c) 200 m/s

$$\text{R: } 200 \text{ m/s} = 200 \cdot 3,6 \text{ km/h} = 720 \text{ km/h}$$

3. Transforme em m/s:

a) 5 km/h

$$\text{R: } 5 \text{ km/h} = \frac{5}{3,6} \text{ m/s} = 1,39 \text{ m/s}$$

b) 30 km/h

$$\text{R: } 30 \text{ km/h} = \frac{30}{3,6} \text{ m/s} = 8,33 \text{ m/s}$$

c) 120 km/h

$$\text{R: } 120 \text{ km/h} = \frac{120}{3,6} \text{ m/s} = 33,33 \text{ m/s}.$$

3. Um ônibus parte às 15 h de São Paulo com destino ao Rio de Janeiro e previsão de chegada às 21 h. Calcule a velocidade média (m/s) dessa viagem que dista 450 km.

R: Saindo às 15h e chegando às 21h, o percurso demorou $21 - 15 = 6\text{h}$. Assim, a velocidade média foi de $v = \frac{d}{t} = \frac{450}{6} = 75 \text{ km/h}$, que equivale a $\frac{75}{3,6} = 20,83 \text{ m/s}$.

4. Um ônibus sai do Rio de Janeiro às 8 h e chega a Rio das Ostras, que dista 174 km da capital, às 11 h. No trecho de Rio Bonito a Silva Jardim, de aproximadamente 45 km, a sua velocidade constante era igual a 90km/h. Calcule a velocidade média, em km/h, no trajeto Rio de Janeiro-Rio das Ostras e o tempo entre Rio Bonito e Silva Jardim.

R: Sendo 45 km percorridos a 90 km/h, o ônibus demorou 0,5 h para percorrer este trecho do percurso, assim, restam 2,5 h e 129 km. Desta forma, a velocidade média deste segundo trecho foi de $v = \frac{d}{t} = \frac{129}{2,5} = 51,6 \text{ km/h}$. Assim, podemos determinar a velocidade média pela média ponderada das velocidades, onde os pesos são as distâncias percorridas em cada velocidade: $v = \frac{129 \cdot 51,6 + 45 \cdot 90}{174} = 61,53 \text{ km/h}$.

5. Uma família viaja de São Paulo para o Rio de Janeiro, para passar ali as férias. A viagem tem uma duração de 6 horas em um percurso de 435 km. Qual é a velocidade média do automóvel da família?

R: A velocidade média é de $v = \frac{d}{t} = \frac{435}{6} = 72,5 \text{ km/h}$.

6. Antigamente, o trajeto São Paulo-Rio podia ser feito por trem. À velocidade média de 50 km/h, o trem fazia essa viagem em 8 horas. Se ele desenvolvesse a velocidade de 80 km/h, em quanto tempo faria o mesmo trajeto?

R: Sendo o tempo do trajeto de 8 h, a 50 km/h, o trem percorria $8 \cdot 50 = 400 \text{ km}$. Dessa maneira, se a velocidade fosse de 80 km/h, o tempo do trajeto seria de

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow 80 = \frac{400}{t} \Rightarrow t = \frac{400}{80} = 5\text{h}$$

7. Um automóvel percorreu uma distância de 455 km em 7 horas. Qual foi a velocidade média desse automóvel nesse percurso?

R: A velocidade média é de $v = \frac{d}{t} = \frac{455}{7} = 65 \text{ km/h}$.

8. Leia as informações: a distância entre a Terra e o Sol é de, aproximadamente, 150.000.000 km; a luz do sol, para atingir a Terra, leva em torno de 500 segundos. Responda:

a) Qual é a velocidade da luz no vácuo?

R: $v = \frac{d}{t} = \frac{150.000.000}{500} = 300.000 \text{ km/s}$.

b) Quantos minutos a luz do sol leva para chegar à Terra?

R: $500 \text{ s} = \frac{500}{60} \text{ min} = 8,33 \text{ min}$.

Lição 121 – Escala

1. (ENEM/2015) Na construção de um conjunto habitacional de casas populares, todas serão feitas num mesmo modelo, ocupando, cada uma delas, terrenos cujas dimensões são iguais a 20m de comprimento por 8m de largura. Visando à comercialização dessas casas, antes do início das obras a empresa resolveu apresentá-las por meio de maquetes construídas numa escala de 1 : 200. As medidas do comprimento e da largura dos terrenos, respectivamente, em centímetros, na maquete construída, foram de

- a) 4 e 10
- b) 5 e 2
- c) 10 e 4
- d) 20 e 8
- e) 50 e 20

R: Sendo a escala de 1 : 200 , 1 centímetro no mapa vale a 200 cm = 2 m. Assim, os 20 m de comprimento valem $\frac{20}{2} = 10$ cm no mapa e os 8 m de largura valem $\frac{8}{2} = 4$ cm.

Alternativa c.

2. A praça de Tian'anmen, na China, é mundialmente conhecida pelo seu enorme tamanho. Ela foi representada, em uma folha de papel, com 5,5 cm de comprimento por 3,125 cm de largura. Sabendo que a escala utilizada foi 1 : 16.000, determine as dimensões reais da praça.

R: A praça possui $5,5 \cdot 16.000$ cm = 88.000 cm de comprimento, que equivalem a 880 metros, E também possui $3,125 \cdot 16.000$ cm = 50.000 cm de largura, que equivalem a 500 metros.

Lição 122 – Densidade de um corpo

1. Defina a densidade de um corpo.

R: A densidade de um corpo é dada pela razão entre a massa e o volume deste corpo.

$$\text{densidade} = \frac{\text{massa do corpo}}{\text{volume do corpo}}$$

2. Uma solução foi preparada misturando-se 30 gramas de um sal em 300 g de água. Considerando-se que o volume da solução é igual a 300 mL, a densidade dessa solução em g/mL será de:

- a) 10,0
- b) 1,0
- c) 0,9
- d) 1,1**
- e) 0,1

R: densidade = $\frac{\text{massa do corpo}}{\text{volume do corpo}} \Rightarrow d = \frac{330}{300} = 1,1 \text{ g / mL} .$

Alternativa d.

3. O mercúrio é um metal que possui densidade de 13,6 g/cm³ em condições normais. Dessa forma, um volume de 1 litro (1 dm³) deste metal tem massa, em quilogramas, igual a:

- a) 0,0136
- b) 0,136
- c) 1,36
- d) 13,6**
- e) 136

R: $d = \frac{m}{v} \Rightarrow 13,6 = \frac{m}{1.000} = 13.600 \text{ g} = 13,6 \text{ kg} .$

Alternativa d.

4. Densidade é uma propriedade definida pela relação:

- a) massa/pressão.
- b) pressão/temperatura.
- c) massa/volume.**
- d) pressão/volume.

5. Um vidro contém 200 cm³ de mercúrio de densidade 13,6 g/cm³. A massa de mercúrio contido no vidro é:

- a) 0,8 kg
- b) 0,68 kg
- c) 2,72 kg**
- d) 27,2 kg
- e) 6,8 kg

R: $d = \frac{m}{v} \Rightarrow 13,6 = \frac{m}{200} = 2.720 \text{ g} = 2,72 \text{ kg}.$

Alternativa c.

Lição 123 – Densidade demográfica

1. Defina densidade demográfica.

R: A densidade demográfica é dada pela razão entre o número de habitantes e a área da região ocupada.

$$\text{densidade demográfica} = \frac{\text{número de habitantes}}{\text{área de região ocupada}}$$

2. Encontre a densidade demográfica da sua cidade, do seu estado e do seu país.

R: Resposta pessoal. Exemplo da cidade onde está situado o Instituto Cidade de Deus: Cidade de São Carlos:

$$d = \frac{\text{hab}}{A} \Rightarrow d = \frac{251.983}{1.137,3} = 221,6 \text{ hab / km}^2 ,$$

Estado de São Paulo:

$$d = \frac{\text{hab}}{A} \Rightarrow d = \frac{41.262.199}{248.219,485} = 166,23 \text{ hab / km}^2 ,$$

Brasil:

$$d = \frac{\text{hab}}{A} \Rightarrow d = \frac{202.768.562}{8.515.767,049} = 23,8 \text{ hab / km}^2.$$

3. Israel possui 22.000 km², uma população de 5.500.000 habitantes e uma renda per capita de 13.220 dólares. Calcule a densidade demográfica.

a) 25 hab/km²

b) 250 hab/km²

c) 350 hab/km²

d) 150 hab/km²

e) 2.500 hab/km²

R: $d = \frac{\text{hab}}{A} \Rightarrow d = \frac{5.500.000}{22.000} = 250 \text{ hab / km}^2.$

Alternativa b.

4. Calcule a densidade demográfica dos seguintes estados brasileiros com base nos dados do censo de 2010.

Estados	Pop. Absoluta	Área – km ²	Densidade Demográfica
Amapá	669.526	142.470,762	4,70 hab/km²
Roraima	450.479	223.644,530	2,01 hab/km²
São Paulo	41.262.199	248.219,485	166,23 hab/km²
Rio de Janeiro	15.989.929	43.750,425	365,48 hab/km²

Lição 124 – Grandezas diretamente proporcionais

1. Qual é a característica entre as grandezas e sequências que são diretamente proporcionais?

R: Grandezas e sequências diretamente proporcionais aumentam ou diminuem conforme a sua proporcional aumenta ou diminui.

2. O que a Propriedade Fundamental da Proporção enuncia?

R: Dadas as razões $a : b$ e $c : d$, elas são diretamente proporcionais se o produto dos meios for igual ao produto dos extremos.

$$\begin{array}{c} \text{extremos} \\ \swarrow \quad \searrow \\ a : b = c : d \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \text{Meios} \\ a \cdot d = b \cdot c \end{array}$$

3. Verifique se as razões abaixo são proporcionais:

a) $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$

R: $3 \cdot 35 = 7 \cdot 15 \Rightarrow 105 = 105$, portanto são proporcionais.

b) $\frac{6}{5} = \frac{24}{20}$

R: $6 \cdot 20 = 5 \cdot 24 \Rightarrow 120 = 120$, portanto são proporcionais.

c) $\frac{4}{5} = \frac{6}{7,5}$

R: $4 \cdot 7,5 = 5 \cdot 6 \Rightarrow 30 = 30$, portanto são proporcionais.

d) $\frac{0,1}{0,01} = \frac{2}{20}$

R: $0,1 \cdot 20 = 0,01 \cdot 2 \Rightarrow 2 \neq 0,02$, portanto não são proporcionais.

e) $1 : 2 = 30 : 60$

R: $1 \cdot 60 = 2 \cdot 30 \Rightarrow 60 = 60$, portanto são proporcionais.

f) $15 : 13 = 90 : 65$

R: $15 \cdot 65 = 13 \cdot 90 \Rightarrow 975 \neq 1.170$, portanto não são proporcionais.

4. Dadas as sucessões de números diretamente proporcionais 2, 4, 6 e 12, 24, 36, descubra qual é a constante de proporcionalidade.

R: $\frac{2}{12} = \frac{4}{24} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, portanto a constante de proporcionalidade é $\frac{1}{6}$.

5. Qual é o valor de x em cada proporção?

a) $x : 3 = 5 : 15$

R: $x \cdot 15 = 3 \cdot 5 \Rightarrow 15x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{15} = 1$

b) $1 : x = 2 : 6$

R: $1 \cdot 6 = x \cdot 2 \Rightarrow 6 = 2x \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$

c) $\frac{1}{2} : \frac{2}{7} = \frac{3}{4} : x$

R: $\frac{1}{2} \cdot x = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{6}{28} \Rightarrow 28x = 6 \cdot 2 \Rightarrow x = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$.

6. A sequência 2, x é diretamente proporcional à sequência 6,30. Qual é o valor de x?

R: $2 : x = 6 : 30 \Rightarrow 2 \cdot 30 = x \cdot 6 \Rightarrow x = \frac{60}{6} = 10$.

7. Os números 15, 6, 12 e 18 são diretamente proporcionais aos números da sucessão a, b, c e d. Qual é o valor de a, b, c e d, se o fator de proporcionalidade entre as proporções é 3?

R: $\frac{15}{a} = \frac{6}{b} = \frac{12}{c} = \frac{18}{d} = 3$, portanto, temos as seguintes proporções:

$$\begin{aligned} \frac{15}{a} = 3 &\Rightarrow a = \frac{15}{3} \Rightarrow a = 5, & \frac{6}{b} = 3 &\Rightarrow b = \frac{6}{3} \Rightarrow b = 2, & \frac{12}{c} = 3 &\Rightarrow c = \frac{12}{3} \Rightarrow c = 4 \text{ e} \\ \frac{18}{d} = 3 &\Rightarrow d = \frac{18}{3} \Rightarrow d = 6. \end{aligned}$$

8. Descubra os valores das incógnitas abaixo:

$$\frac{x}{4} = \frac{40}{y} = \frac{5}{6} = \frac{12}{z}$$

R: Sendo uma igualdade, podemos tirar as razões da ordem e montar as seguintes

proporções: $\frac{x}{4} = \frac{5}{6}$, $\frac{40}{y} = \frac{5}{6}$ e $\frac{12}{z} = \frac{5}{6}$, dessa forma, $\frac{x}{4} = \frac{5}{6} \Rightarrow 6x = 4 \cdot 5 \Rightarrow x = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$,

$$\frac{40}{y} = \frac{5}{6} \Rightarrow 40 \cdot 6 = 5y \Rightarrow y = \frac{240}{5} = 48 \text{ e } \frac{12}{z} = \frac{5}{6} \Rightarrow 12 \cdot 6 = 5z \Rightarrow z = \frac{72}{5}$$

Lição 125 - Grandezas inversamente proporcionais

1. Qual é a característica entre as grandezas e sequências que são inversamente proporcionais?

R: Conforme uma dobra, a outra cai pela metade, se uma triplica, a outra cai a um terço do valor, e assim por diante.

2. A sequência X, Y é inversamente proporcional a 5, 6, e sabe-se que a constante de proporcionalidade é 120. Qual é o valor da soma de x e y?

R: utilizando a propriedade de que se duas grandezas são inversamente proporcionais, a multiplicação desta resulta em uma constante, temos: $x \cdot 5 = 120 \Rightarrow$

$$x = \frac{120}{5} = 24 \text{ e } y \cdot 6 = 120 \Rightarrow y = \frac{120}{6} = 20, \text{ portanto, } x + y = 24 + 20 = 44.$$

3. Classifique a relação entre as grandezas como Diretamente Proporcionais, Inversamente Proporcionais ou Não Proporcionais:

a)

Volume do combustível (litros)	1	2	5	10	20
Preço do combustível (R\$)	0,60	1,20	3,00	6,00	12,00

R: Diretamente proporcionais.

b)

Altura do prédio (m)	10,5	14	17,5	21	24,5
Número de Andares	3	4	5	6	7

R: Diretamente proporcionais.

c)

Hora do dia	0	4	8	12	16
Temperatura (°C)	10	5	10	15	17

R: Não proporcionais.

d) Numa caminhada de 6 km (= 600.000 cm)

Metros por minuto	60	75	80	100	120
Tempo de caminhada (min)	100	80	75	60	50

R: Inversamente proporcionais.

e)

Comprimento do passo (cm)	50	60	75	80	100
Número de passos	12.000	10.000	8.000	7.500	6.000

R: Inversamente proporcionais.

4. Denomina-se velocidade média V_m a razão entre a distância d percorrida e o tempo t gasto para percorrê-lo, ou seja, $V_m = \frac{d}{t}$.

a) João percorreu 450 km em 5 horas. Qual foi a sua velocidade média?

R: $V_m = \frac{450}{5} = 90 \text{ km/h}$

b) Na corrida de São Silvestre, Jonas correu por aproximadamente 42 km em quase duas horas. Qual foi sua velocidade média?

R: $V_m = \frac{42}{2} = 21 \text{ km/h}$

5. Considere uma jarra com 2l de suco (o que corresponde a 2000ml) que será dividido entre algumas pessoas. Quanto mais pessoas houver, menos suco cada uma receberá. Os dados estão anotados abaixo. Diga se são proporcionais e encontre a constante de proporcionalidade.

Quantidade de pessoas	1	2	4	5	10
Quanto cada um recebe	2.000ml	1.000ml	500ml	400ml	200ml

R: São inversamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é $1 \cdot 2.000 = 2 \cdot 1.000 = 4 \cdot 500 = 5 \cdot 400 = 10 \cdot 200 = 2.000$.

Lição 126 – Regra de três simples – Parte I

1. O que é uma regra de três simples? Por que ela recebe esse nome?

R: A “Regra de três simples” é um mecanismo prático para resolver problemas que envolvam duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais. Para utilizá-la, é necessário analisar a relação entre as grandezas e aplicar a mesma ideia da quarta proporcional. Isto quer dizer que, em uma regra de três simples, sempre se têm três valores conhecidos e se deseja encontrar o quarto valor.

2. Se 3,5 litros de água custam R\$ 4,55, quanto custarão 6,5 litros?

R:
$$\begin{array}{l} 3,5 \text{ L} \quad \text{R\$ 4,55} \\ 6,5 \text{ L} \quad \text{R\$ x} \end{array} \Rightarrow x \cdot 3,5 = 6,5 \cdot 4,55 \Rightarrow x = \frac{29,575}{3,5} = \text{R\$ 8,45}.$$

3. Atualmente 1 dólar americano corresponde a 4,08 do real brasileiro. Quantos dólares é possível obter com R\$ 129,00? Quantos reais é possível obter com 55 dólares?

R:
$$\begin{array}{l} \text{R\$ 4,08} \quad \text{1 dólar} \\ \text{R\$ 129} \quad \text{x dólar} \end{array} \Rightarrow x \cdot 4,08 = 129 \Rightarrow x = \frac{129}{4,08} = 31,61 \text{ dólares}.$$

$$\begin{array}{l} \text{1 dólar} \quad \text{R\$ 4,08} \\ \text{55 dólares} \quad \text{R\$ x} \end{array} \Rightarrow x = 4,08 \cdot 55 \Rightarrow x = \text{R\$ 224,40}.$$

4. Um conjunto de três impressoras industriais, todas iguais, é capaz de imprimir 2.400 folhas em uma hora, caso as três máquinas trabalhem juntas. Quantas folhas serão produzidas se forem utilizadas sete dessas impressoras?

R:
$$\begin{array}{l} 3 \text{ impressoras} \quad 2.400 \text{ folhas} \\ 7 \text{ impressoras} \quad x \text{ folhas} \end{array} \Rightarrow x \cdot 3 = 7 \cdot 2.400 \Rightarrow x = \frac{16.800}{3} = 5.600 \text{ folhas}.$$

5. Um atleta dá 6 voltas numa pista, mantendo velocidade constante, em 24 minutos. Quantas voltas ele dará em duas horas?

R: Duas horas equivalem a 120 minutos, assim, vale a regra de 3:

$$\begin{array}{l} 24 \text{ min} \quad 6 \text{ voltas} \\ 120 \text{ min} \quad x \text{ voltas} \end{array} \Rightarrow x \cdot 24 = 120 \cdot 6 \Rightarrow x = \frac{720}{24} = 30 \text{ voltas}.$$

Lição 127 - Regra de três simples - Parte II

1. Para construir um telhado, cinco homens levam 20 dias. Quanto tempo um conjunto de oito homens, com a mesma capacidade de serviço, levaria para construir este telhado?

R:
$$\begin{array}{l} 5 \text{ homens} \quad x \text{ dias} \\ 8 \text{ homens} \quad 20 \text{ dias} \end{array} \Rightarrow 5 \cdot 20 = 8x \Rightarrow x = \frac{100}{8} = 12,5 \text{ dias}.$$

2. Um navio foi abastecido com comida suficiente para alimentar 14 pessoas durante 45 dias. Se 18 pessoas embarcarem nesse navio, para quantos dias, no máximo, as reservas de alimento serão suficientes?

R:
$$\begin{array}{l} 14 \text{ pessoas} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad x \text{ dias} \\ 18 \text{ pessoas} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 45 \text{ dias} \end{array} \Rightarrow 14 \cdot 45 = 18x \Rightarrow x = \frac{630}{18} = 35 \text{ dias.}$$

3. Dez pessoas realizam um trabalho em 15 dias. Qual é o número de dias em que seis pessoas, com igual força de trabalho, fariam o mesmo trabalho?

R:
$$\begin{array}{l} 10 \text{ pessoas} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad x \text{ dias} \\ 6 \text{ pessoas} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 15 \text{ dias} \end{array} \Rightarrow 10 \cdot 15 = 6x \Rightarrow x = \frac{150}{6} = 25 \text{ dias.}$$

4. Para imprimir 5.100 exemplares de certo livro, foram usados 2.244 quilos de papel. Quantos exemplares desse livro podem ser impressos com 2.156 quilos do mesmo papel?

R:
$$\begin{array}{l} 5.100 \text{ exemplares} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 2.244 \text{ quilos} \\ x \text{ exemplares} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 2.156 \text{ quilos} \end{array} \Rightarrow 5.100 \cdot 2.156 = 2.244x \Rightarrow$$

$$x = \frac{10.995.600}{2.244} = 4.900 \text{ exemplares.}$$

Lição 128 – Regra de três composta

1. Um livro tem 150 páginas, cada página tem 36 linhas, e cada linha tem 50 letras. Se quisermos escrever o mesmo texto em 250 páginas, quantas letras deverá haver em cada linha para que cada página tenha 30 linhas?

R:
$$\begin{array}{l} \text{Páginas} \quad \text{Linhas} \quad \text{Letras} \\ 150 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 36 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 50 \quad \Rightarrow 150 \cdot 36 \cdot 50 = 250 \cdot 30 \cdot x \Rightarrow \\ 250 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 30 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad x \end{array}$$

$$x = \frac{150 \cdot 36 \cdot 50}{250 \cdot 30} = \frac{270.000}{7.500} = 36 \text{ letras.}$$

2. Em uma fábrica 12 máquinas produziram 120 peças em 4 dias. Qual é o tempo necessário para que 8 máquinas iguais às primeiras produzam 300 peças?

	Máquinas	Peças	Dias	
R:	12	120	4	$\Rightarrow \frac{12 \cdot 4}{120} = \frac{8 \cdot x}{300} \Rightarrow x = \frac{12 \cdot 4 \cdot 300}{120 \cdot 8} = \frac{14.400}{960} = 15 \text{ dias}.$
	8	300	x	

3. Um ônibus, à velocidade de 80 km/h, percorre 400 quilômetros em 5 horas. Se o ônibus rodar a 100 km/h durante 7 horas, que distância percorrerá?

	Velocidade	Distância	Horas	
R:	80	400	5	$\Rightarrow \frac{80 \cdot 5}{400} = \frac{100 \cdot 7}{x} \Rightarrow$
	100	x	7	

$$x = \frac{100 \cdot 7 \cdot 400}{80 \cdot 5} = \frac{280.000}{400} = 700 \text{ km}.$$

4. Um pequeno barco a vela, com 7 tripulantes, deve atravessar o oceano em 42 dias. Seu suprimento de água potável permite a cada pessoa dispor de 3,5 litros de água por dia (e é isso o que os tripulantes fazem). Após 12 dias de viagem, o barco encontra 3 naufragos numa jangada e os acolhe. Pergunta-se:

a) Quantos litros de água por dia caberão agora a cada pessoa se a viagem prosseguir como antes?

	Tripulantes	Dias	Litros	
R:	7	42	3,5	$\Rightarrow \frac{7 \cdot 3,5}{42} = \frac{10 \cdot x}{30} \Rightarrow$
	10	30	x	

$$x = \frac{7 \cdot 3,5 \cdot 30}{42 \cdot 10} = \frac{735}{420} = 1,75 \text{ Litros}.$$

b) Se os 10 ocupantes de agora continuarem consumindo 3,5 litros de água cada um, em quantos dias, no máximo, será necessário encontrar uma ilha onde haja água?

R: Como haviam sido percorridos 12 dias de viagem, restavam 30 dias, caso não houvessem novos tripulantes, fazendo-se a regra de três composta:

	Tripulantes	Dias	Litros	
	7	30	3,5	$\Rightarrow 7 \cdot 3,5 \cdot 30 = 10 \cdot 3,5 \cdot x \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 3,5 \cdot 30}{10 \cdot 3,5} = \frac{735}{35} = 21 \text{ dias}$
	10	x	3,5	

5. Numa fazenda há 5 cavalos que consomem 300 kg de ração em 6 dias. Suponha que todos eles consomem por dia a mesma quantidade de ração. Com apenas 240 kg de ração, por quantos dias 12 cavalos iguais aos dessa fazenda seriam alimentados?

R:

	Cavalos	Quilos	Dias	
	5	300	6	$\Rightarrow \frac{5 \cdot 6}{300} = \frac{12 \cdot x}{240} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 6 \cdot 240}{300 \cdot 12} = \frac{7.200}{3.600} = 2 \text{ Dias} .$
	12	240	x	

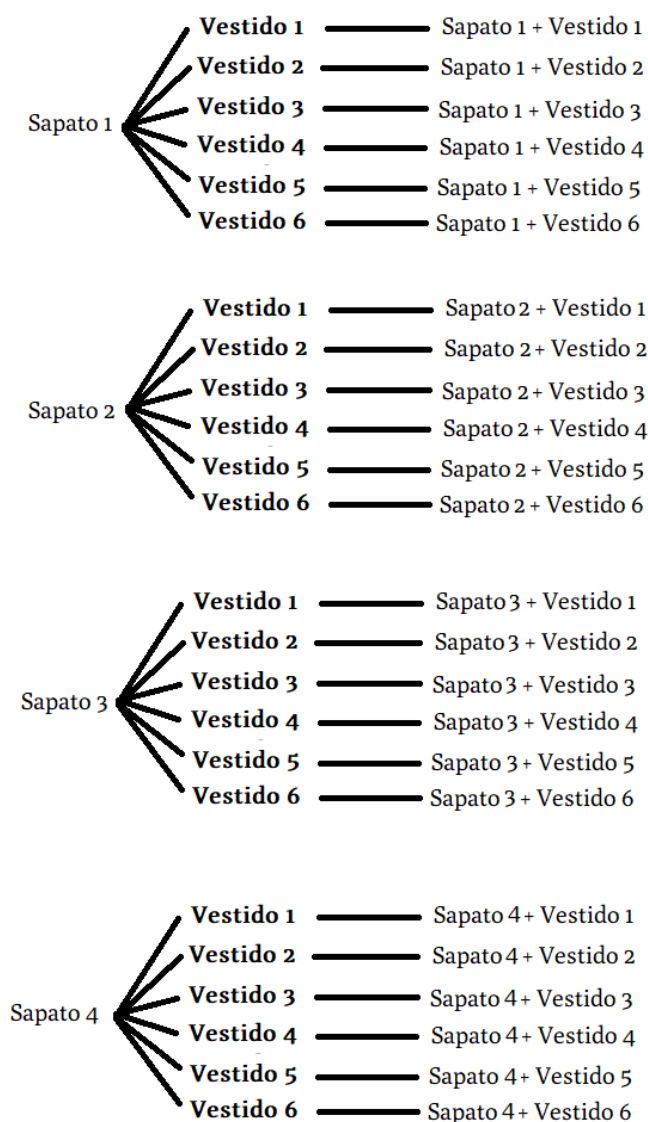
Gabarito de Matemática

8º ano, Volume 9

Lição 129 – Princípio fundamental da contagem

1. Maria precisa escolher um conjunto vestido-sapato para sua formatura. Se ela dispõe de 4 pares de sapatos e de 6 vestidos para escolher, de quantos modos pode formar o conjunto? Encontre o resultado pelo Princípio Fundamental da Contagem e construa a árvore de possibilidades.

R: De acordo com o Princípio Fundamental da Contagem, Maria tem $4 \cdot 6 = 24$ modos de formar o conjunto. A árvore de possibilidades é:



2. Quantos são os números de três algarismos em que os três algarismos são ímpares? Ou seja: de quantos modos podemos formar um número de três algarismos usando apenas algarismos ímpares?

Para resolver este problema, responda às questões a seguir.

a) Quais são os algarismos ímpares? Quantos são?

R: Algarismos ímpares são aqueles terminados em 1,3,5,7 ou 9. No total são 5 algarismos ímpares.

b) Quantas são as possibilidades para o algarismo da centena?

R: Para a centena, ou seja, de 100 a 999, temos os números de três algarismos, que podem conter 5 opções de números ímpares em cada algarismo, sendo $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, portanto há 125 números de três algarismos ímpares.

c) Para cada centena, quantas são as possibilidades para a dezena?

R: Para a dezena, ou seja, de 10 a 99, temos os números de dois algarismos, que podem conter 5 opções de números ímpares em cada algarismo, sendo $5 \cdot 5 = 25$, portanto há 25 números de dois algarismos ímpares.

d) Para cada centena e cada dezena, quantas são as possibilidades para a unidade?

R: Para a unidade, ou seja, de 1 a 9, temos os números de um algarismo, que pode conter 5 opções de números ímpares no algarismo, sendo 5 números ímpares de 0 a 9, portanto há 5 números de um algarismo ímpar.

e) Quantas são as possibilidades para formar o número?

R: Para se formar um número de três algarismos onde todos sejam ímpares, existem $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ possibilidades.

3. Quantos são os números de três algarismos **distintos** em que os três algarismos são ímpares? Siga o roteiro do exercício anterior, mas fique atento: quando for escolher o algarismo das dezenas, ele não poderá ser igual ao das centenas; o das unidades não poderá ser igual a nenhum dos anteriores.

R: Para se formar um número de três algarismos ímpares sem repetir nenhum algarismo, temos, pelo princípio fundamental da contagem a expressão:

$$x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2),$$

pois quando se utiliza o primeiro algarismo ímpar, as opções para o segundo diminui em um, e ao colocar o segundo, as opções para o terceiro diminuem em mais um.

Assim, a quantidade de números de três algarismos ímpares que podem ser formados sem repetir o algarismo é: $5 \cdot (5 - 1) \cdot (5 - 2) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ números.

4. Numa loja há quatro portas de entrada.

a) Quantas são as possibilidades de entrar por uma porta e sair por outra?

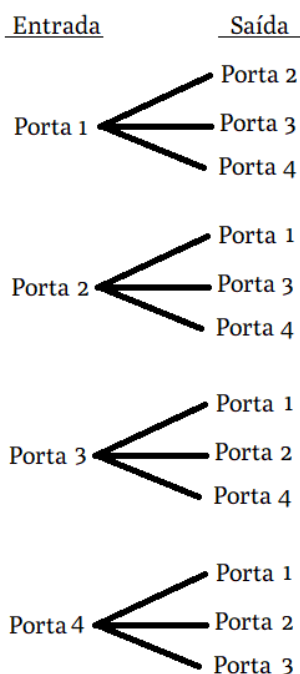
R: Ao entrar em uma das 4 opções de porta, necessariamente uma é excluída na hora de sair, a fim de que se entre por uma e saia por outra, dessa forma as possibilidades são $4 \cdot 3 = 12$ maneiras de se entrar por uma porta e sair por outra.

b) Quantas são as possibilidades de escolha das portas para entrar e sair da loja, podendo usar a mesma porta?

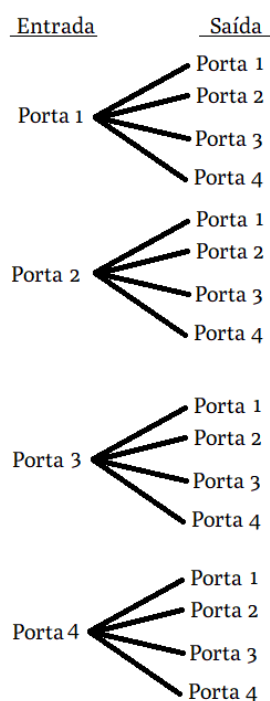
R: Podendo entrar por 4 portas e sair por 4, as possibilidades são $4 \cdot 4 = 16$ maneiras.

c) Construa a árvore de possibilidades dos dois itens anteriores.

R: Item a)



Item b)



5. Uma moeda é lançada algumas vezes, e a sequência de resultados, cara ou coroa, de cada lançamento é anotada.

Quantas sequências diferentes podem ser formadas:

a) se forem feitos 2 lançamentos?

R: $2 \cdot 2 = 4$

b) se forem feitos 3 lançamentos?

R: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

c) se forem feitos 4 lançamentos?

R: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Lição 130 – Problemas de contagem

1. Uma sorveteria dispõe de 18 sabores de sorvete que podem ser combinados com 4 caldas diferentes (morango, chocolate, caramelo e leite condensado). De quantas maneiras é possível combinar uma bola de sorvete e uma calda?

R: Os sabores de sorvete e a calda podem ser combinados de $18 \cdot 4 = 72$ maneiras diferentes.

2. Na criação da senha de uma conta bancária, o cliente é informado que deve ser feita uma combinação de seis números sem repetição. Os números utilizados devem ser os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Determine o número possível de senhas que podem ser criadas.

R: Para se criar a senha sem repetir nenhum número, ao colocar um número, diminui a quantidade de opções, assim, as possibilidades são:

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151.200$ maneiras diferentes de se fazer a senha.

3. Quantos anagramas possui a palavra ROMA?

R: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ anagramas.

4. Quantos anagramas possui a palavra QUARTO?

R: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ anagramas.

5. Quantos anagramas possui a palavra CLAUDIO?

R: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$ anagramas.

6. Quantos anagramas possui a palavra MURILO?

R: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ anagramas.

7. De quantos modos três pessoas podem ficar em fila indiana?

R: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras.

Lição 131 – Experimento aleatório

1. Qual é o significado da palavra experimento?

R: A palavra experimento tem origem no termo latino EXPERIMENTUM, que significa ação ou efeito de experimentar.

2. Defina experimento determinístico e dê dois exemplos.

R: Os Experimentos Determinísticos são os experimentos que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados previstos, determinados. Exemplo: Soltar uma moeda da mesma altura diversas vezes e calcular o tempo até tocar o chão, ou calcular a velocidade de um carro que percorre uma distância em um certo tempo.

3. Defina experimento aleatório e dê dois exemplos.

R: Os Experimentos Aleatórios são experimentos cujo resultado não se podem prever. Exemplo: Observar a face de cima ao lançar uma moeda ou ao lançar um dado.

Lição 132 – Espaço amostral

1. Dê um espaço amostral para cada experimento abaixo:

a) Uma letra é escolhida entre as letras da palavra *PROBABILIDADE*.

R: $\Omega = \{P, R, O, B, A, I, L, D, E\}$

b) Uma urna contém bolas vermelhas (*V*), bolas brancas (*B*) e bolas azuis (*A*). Uma bola é extraída e observada sua cor.

R: $\Omega = \{V, B, A\}$

- c) Uma urna contém 50 bolinhas numeradas de 1 a 50. Uma bolinha é extraída e observado seu número.

$$\mathbf{R:} \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, 48, 49, 50\}$$

- d) De um baralho de 52 cartas, uma é extraída e observada.

R: Quanto a naipe: $\Omega = \{Paus, Copas, Espada, Ouro\}$. Quanto a 'número' $\Omega = \{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Q, J, K\}$. Quanto a naipe e 'número' o espaço amostral contém a multiplicação do espaço amostral quanto a naipe e quanto a número, obtendo um espaço amostral de 52 amostras.

- e) Uma urna contém 5 bolas vermelhas (V) e 2 brancas (B). Duas bolas são extraídas, sem reposição, e são observadas suas cores, na sequência em que foram extraídas.

$$\mathbf{R:} \Omega = \{(V, B), (V, V), (B, V), (B, B)\}$$

- f) Três pessoas A , B e C são colocadas numa fila, e observa-se a disposição delas.

$$\mathbf{R:} \Omega = \{(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A)\}$$

- g) Um casal tem 3 filhos. Observa-se a sequência de sexos dos 3 filhos.

R: Seja Menino = Mo, e Menina = Ma,

$$\Omega = \left\{ (Mo, Mo, Mo), (Mo, Mo, Ma), (Mo, Ma, Ma), (Mo, Ma, Mo), (Ma, Mo, Mo), \right. \\ \left. (Ma, Ma, Mo), (Ma, Mo, Ma), (Ma, Ma, Ma) \right\}$$

- h) Dois dados, um verde e um vermelho, são lançados; observam-se os números das faces de cima.

$$\mathbf{R:} \Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), \\ (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,5), (5,6), (6,6)\}$$

- i) Entre 5 pessoas A, B, C, D e E , duas são escolhidas para formar uma comissão. Observam-se os elementos dessa comissão.

$$\mathbf{R:} \Omega = \{(A,B), (A,C), (A,D), (A,E), (B,C), (B,D), (B,E), (C,D), (C,E), (D,E)\}$$

Lição 133 – Evento

1. Uma urna contém 30 bolinhas numeradas de 1 a 30. Uma bolinha é escolhida e é observado seu número. Seja $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 29, 30\}$. Descreva os eventos:

a) O número obtido é par.

$$\mathbf{R: \Omega = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}.$$

b) O número obtido é ímpar.

$$\mathbf{R: \Omega = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}.$$

c) O número obtido é primo.

$$\mathbf{R: \Omega = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29\}.$$

d) O número obtido é maior que 16.

$$\mathbf{R: \Omega = \{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}.$$

e) O número é múltiplo de 2 e de 5.

$$\mathbf{R: \Omega = \{10, 20, 30\}.$$

f) O número é múltiplo de 3 ou de 8.

$$\mathbf{R: \Omega = \{3, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 21, 24, 27, 30\}.$$

g) O número não é múltiplo de 6.

$$\mathbf{R: \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29\}.$$

2. Dois dados, um verde e um vermelho, são lançados. Seja Ω o conjunto dos pares (a, b) , em que a representa o número do dado verde e b o do dado vermelho. Descreva os eventos:

a) **A:** ocorre 3 no dado verde.

$$\mathbf{R: \Omega = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}.$$

b) **B:** ocorrem números iguais nos dois dados.

$$\mathbf{R: } \Omega = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}.$$

c) **C:** ocorre o número 2 em ao menos um dado.

$$\mathbf{R: } \Omega = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (1,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)\}.$$

d) **D:** ocorrem números cuja soma é 7.

$$\mathbf{R: } \Omega = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}.$$

e) **E:** ocorrem números cuja soma é menor que 7.

$$\mathbf{R: } \Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (5,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (1,2), (3,2), (4,2), (1,3), (2,3), (1,4), (2,4), (1,5)\}.$$

3. Uma moeda e um dado são lançados. Seja:

$$\Omega = \{(K,1);(K,2);(K,3);(K,4);(K,5);(K,6);(C,1);(C,2);(C,3);(C,4);(C,5);(C,6)\}$$

Descreva os eventos:

a) **A:** ocorre cara.

$$\mathbf{R: } \Omega = \{(K,1);(K,2);(K,3);(K,4);(K,5);(K,6)\} *$$

b) **B:** ocorre número par.

$$\mathbf{R: } \Omega = \{(K,2),(K,4),(K,6),(C,2),(C,4),(C,6)\}.$$

c) **C:** ocorre o número 3.

$$\mathbf{R: } \Omega = \{(K,3),(C,3)\}.$$

Lição 134 - Probabilidade

1. Em um estojo há 13 lápis coloridos e 7 lápis pretos.

a) Se você retirar, ao acaso, sem olhar, um lápis desse estojo, a chance maior é que você pegue um lápis colorido ou um lápis preto?

R: Há maior chance de retirar um lápis colorido

b) Qual é a probabilidade de você retirar:

- Um lápis colorido?

R: $\frac{13}{20}$

- Um lápis preto?

R: $\frac{7}{20}$

2. Em um cesto há 12 bolas de vôlei, sendo 2 brancas, 6 amarelas e 4 vermelhas. Desse cesto, ao acaso, sem olhar, uma bola é retirada. Qual é a probabilidade de essa bola ser de cor:

a) Branca?

R: $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

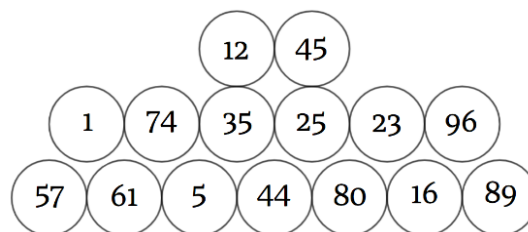
b) Amarela?

R: $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

c) Vermelha?

R: $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

3. Uma urna contém 15 bolas numeradas:



Retira-se uma bola, ao acaso, sem olhar, dessa urna, e observa-se o número retirado.

a) É mais provável que o número escrito na bola retirada seja um número par ou um número ímpar?

R: Ímpar.

b) Qual é a probabilidade de o número da bola retirada ser um número par?

R: $\frac{6}{15}$

c) Qual é a probabilidade de o número da bola retirada ser um número ímpar?

R: $\frac{9}{15}$

4. André tem fichas em que estão escritas letras e números.

A	56	84	B	C
15	M	92	47	66

a) Quantas fichas ele tem?

R: 10 fichas.

b) Ele coloca todas as fichas em uma urna. Se quiser tirar uma dessas fichas, ao acaso, sem olhar, a chance maior será sair uma ficha em que está escrito um número ou uma letra?

R: Número.

c) Qual é a probabilidade de sair uma ficha em que está escrita uma letra?

R: $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

d) Qual é a probabilidade de sair uma ficha em que está escrito um número?

R: $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Lição 135 – Conceitos básicos de estatística

1. Classifique as variáveis abaixo em qualitativas ou quantitativas:

a) Número de partidas num torneio esportivo.

R: Quantitativa.

b) Diâmetro interno de uma tubulação.

R: Quantitativa.

c) Cor dos cabelos.

R: Qualitativa.

d) Número de filhos de um casal.

R: Quantitativa.

e) Número de ações negociadas em um dia na bolsa de valores.

R: Quantitativa.

f) Teor alcoólico de uma bebida.

R: Quantitativa.

g) Sexo de um filhote nascido no zoológico.

R: Qualitativa.

2. Considere a seguinte situação imaginária: para indicar a média de altura do povo brasileiro, decidiu-se considerar apenas os habitantes do estado de São Paulo, por ser o estado mais numeroso do país. No entanto, sabe-se que os brasileiros da região Norte do país são considerados os mais altos de todo o país, em média de 1,90m para homens, e 1,80 m para mulheres. Se a pesquisa levar em consideração apenas o estado paulista, ela descreverá bem a realidade do Brasil? Se a altura dos homens e das mulheres da região Norte fosse levada em consideração, a média iria subir ou diminuir?

R: Levando em consideração apenas o estado de São Paulo, não será representada a realidade do Brasil. Ao incluir a região Norte, a média da altura aumentará.

3. Assinale a alternativa apenas com variáveis qualitativas.

a) cor dos cabelos e idade;

b) altura e cor dos olhos;

c) peso e grau de instrução

d) cor dos cabelos e grau de instrução;

e) peso e idade.

4. Assinale a alternativa apenas com variáveis quantitativas.

- a) número de alunos em uma sala de aula e cor dos olhos destes alunos;
- b) idade e cor da pele;
- c) grau de instrução e nacionalidade;
- d) altura e idade;**
- e) cor dos olhos e nacionalidade.

5. Como podemos classificar as variáveis qualitativas?

- a) nominal e ordinal;**
- b) contínua e ordinal;
- c) discreta e contínua;
- d) discreta e nominal;
- e) ordinal e discreta.

6. Como podemos classificar as variáveis quantitativas?

- a) nominal e ordinal;
- b) contínua e ordinal;
- c) discreta e contínua;**
- d) discreta e nominal;
- e) ordinal e discreta.

7. Que variável abaixo é qualitativa nominal?

- a) grau de instrução;
- b) cor dos olhos;**
- c) idade;
- d) altura;
- e) peso.

Lição 136 – Variáveis

1. Defina variáveis em estatística.

R: As variáveis são as características que estão sendo analisadas em uma amostra ou população. Podem assumir valores numéricos e não numéricos.

2. Defina variáveis quantitativas e dê a sua classificação com um exemplo de cada uma.

R: As variáveis quantitativas podem ser medidas usando uma escala numérica e são classificadas em discretas ou contínuas. As variáveis quantitativas discretas podem ser contadas e, em geral, são representadas por números inteiros. Exemplo: número de filhos. As variáveis quantitativas contínuas representam resultados de medidas. Exemplo: Massa de alguém.

3. Defina variáveis qualitativas e dê a sua classificação com um exemplo de cada uma.

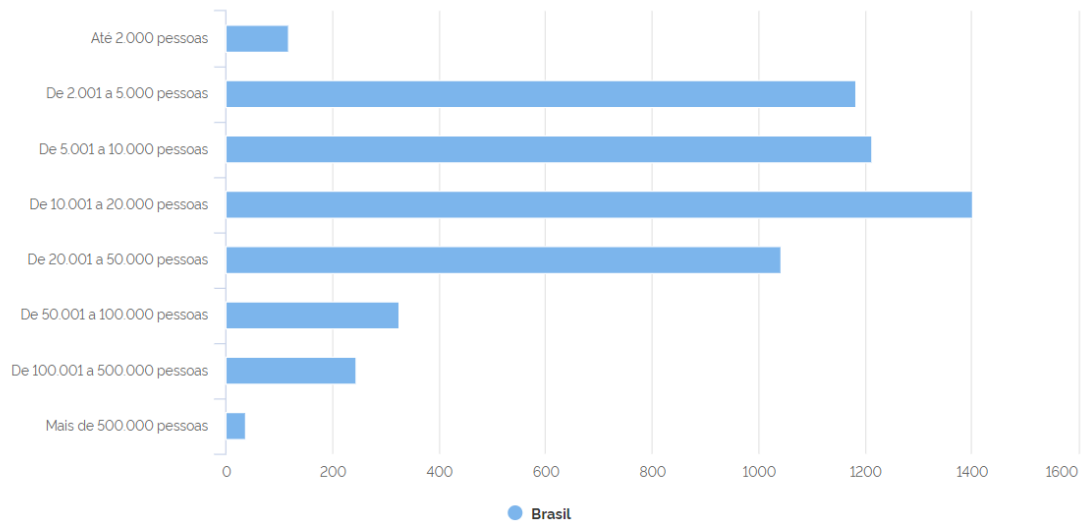
R: As variáveis qualitativas são as características que não possuem valores numéricos; são definidas por categorias ou atributos, ou seja, representam uma classificação dos elementos da população. São designadas como nominais ou ordinais.

As variáveis qualitativas nominais não requerem ordenação, como cor dos olhos ou região onde mora.

Já as variáveis qualitativas ordinais pressupõem uma ordenação, como grau de escolaridade ou estágio de crescimento de uma planta.

Lição 137 – Gráfico de barras

1. O último censo do Brasil, realizado em 2010, buscou classificar o número de municípios por tamanho da população.



De acordo com os dados fornecidos pelo gráfico, responda:

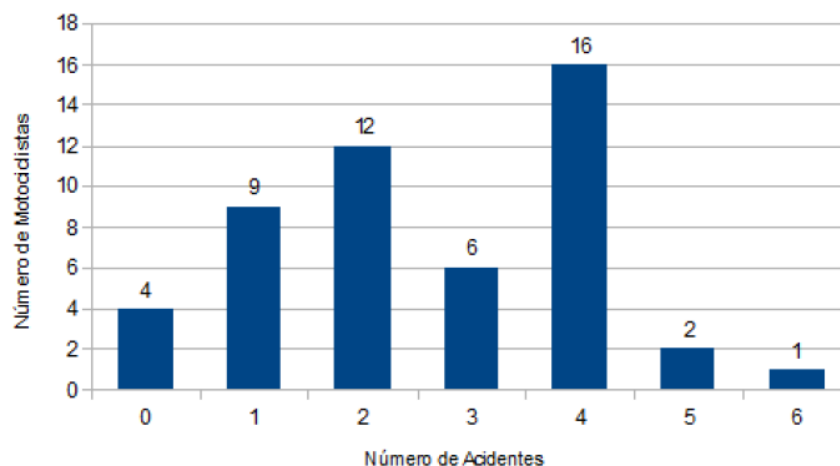
a) Qual é a moda da pesquisa?

R: Cidades de 10.001 a 20.000 pessoas.

b) Pesquise a população da sua cidade. Em qual das barras sua cidade se classifica?

R: Resposta pessoal.

2. O gráfico a seguir mostra o resultado de uma pesquisa sobre o número de acidentes ocorridos com 50 motociclistas de determinada empresa, no período de 1 ano.



Determine:

a) a média de acidentes por motocicleta;

R: $M = \frac{4 \cdot 0 + 9 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 16 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{50} \Rightarrow M = \frac{131}{50} = 2,62$ acidentes por motocicleta.

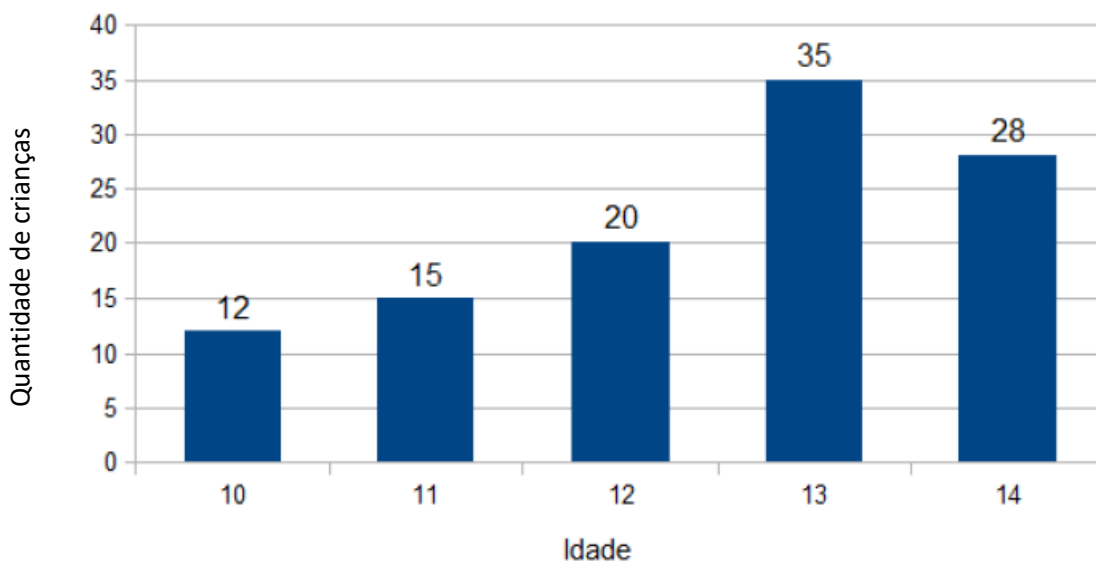
b) a média mensal de acidentes.

R: Sendo os acidentes registrados em 1 ano, a média mensal é de:

$$M = \frac{131}{12} = 10,91 \text{ acidentes por mês.}$$

3. Um grupo de famílias *homeschoolers* fez um levantamento das idades das crianças de seu grupo. O gráfico abaixo mostra os dados que foram levantados.

Determine:



a) a idade mediana;

R: O total de crianças é $12 + 15 + 20 + 35 + 28 = 110$, assim a mediana é a média da idade entre a 55ª e a 56ª criança, da mais nova a mais velha. Assim, as idades delas são 13 e 13 anos, portanto a mediana é 13 anos.

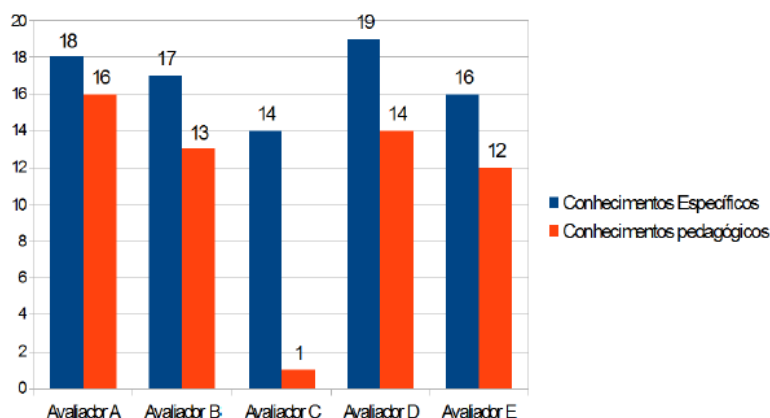
b) a idade média;

R: A média é: $M = \frac{12 \cdot 10 + 15 \cdot 11 + 20 \cdot 12 + 35 \cdot 13 + 28 \cdot 14}{110} \Rightarrow M = \frac{1.372}{110} = 12,47$ anos.

c) a moda.

R: A moda é 13 anos.

4. As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por 5 membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribui duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos de área de atuação, e outra aos conhecimentos pedagógicos. A média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora. Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor. Determine a nova média utilizando este critério.



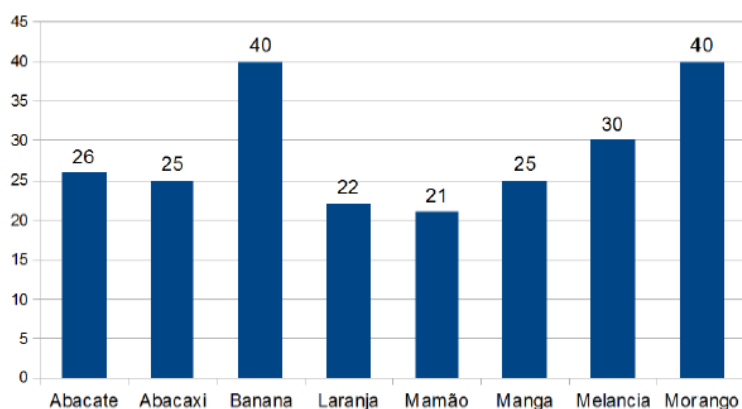
R: A nova média e conhecimentos específicos, descartando as notas 19 e 14 é:

$$M = \frac{16 + 17 + 18}{3} = \frac{51}{3} = 17.$$

E a média de conhecimentos pedagógicos, descartando as notas 16 e 1, é:

$$M = \frac{14 + 13 + 12}{3} = \frac{39}{3} = 13.$$

5. O Brasil é o quarto maior produtor mundial de alimentos, produzindo mais que o necessário para alimentar sua população. Entretanto, grande parte da produção é desperdiçada. O gráfico mostra o percentual do desperdício de frutas nas feiras do estado de São Paulo. Considerando os dados do gráfico, determine a média aritmética, a moda e a mediana destes dados.



R: A média de desperdício é:

$$M = \frac{26 + 25 + 40 + 22 + 21 + 25 + 30 + 40}{8} \Rightarrow M = \frac{229}{8} = 28,625\% \text{ de desperdício.}$$

A moda é Banana e Morango.

Sendo a soma total = 229, o termo central é o 115ª termo, assim, em ordem crescente, a mediana é: Abacate.

Lição 138 – Média aritmética

1. Maria Clara fez três provas de matemática no primeiro bimestre. Suas notas foram 6, 8 e 9,5. Determine sua média em matemática neste bimestre.

$$\text{R: } M = \frac{6 + 8 + 9,5}{3} = \frac{23,5}{3} = 7,83$$

2. Um atleta, em treinamento para as olimpíadas, corre quatro vezes por semana, sendo que nas segundas-feiras ele percorre 5 km; nas terças 7 km; nas quintas 8 km; e, por fim, nos sábados 8 km. Determine:

a) a distância média por dia de treino que esse atleta percorre;

$$\text{R: Distância média por dia de treino} = \frac{5 + 7 + 8 + 8}{4} = \frac{28}{4} = 7 \text{ km.}$$

b) a distância média por dia da semana que esse atleta percorre;

$$\text{R: Distância média por dia da semana} = \frac{5 + 7 + 8 + 8}{7} = \frac{28}{7} = 4 \text{ km.}$$

c) a distância percorrida para que sua média por dia da semana seja 6 km, se ele decide correr também aos domingos.

$$\text{R: } M = \frac{5 + 7 + 8 + 8 + x}{7} = 6 \Rightarrow 28 + x = 6 \cdot 7 \Rightarrow x = 42 - 28 = 12 \text{ km.}$$

Portanto, para que a média por dia da semana seja de 6 km percorridos, é necessário percorrer 12 km no domingo.

3. Deseja-se comprar lentes para óculos. As lentes devem ter espessuras o mais próximas possível da medida 3 mm. No estoque de uma loja, há lentes de espessuras: 3,10 mm; 3,021 mm; 2,96 mm; 2,099 mm e 3,07 mm. Determine a espessura média dessas medidas.

R: $M = \frac{3,10 + 3,021 + 2,96 + 2,099 + 3,07}{5} = \frac{14,85}{5} = 2,85 \text{ mm.}$

4. Em 2015, um vendedor recebeu três valores de salário diferentes: R\$2.000,00, por mês, de janeiro a maio; \$2.500,00, por mês, de junho a agosto; R\$3.100,00, por mês, de setembro a dezembro. Qual foi o salário médio desse vendedor em 2015?

R: Sendo que houve vários meses com o mesmo valor, podemos multiplicar o valor pela quantidade de meses, assim, temos:

$$M = \frac{2.000 \cdot 5 + 2.500 \cdot 3 + 3.100 \cdot 4}{12} = \frac{29.900}{12} = \text{R\$ } 2.491,66$$

Lição 139 – Moda

1. Sara fez três provas de matemática no primeiro bimestre. Suas notas foram 7, 8 e 2. Determine sua média em matemática neste bimestre.

R: A média de sara é: $M = \frac{7+8+2}{3} = \frac{17}{3} = 5,67.$

2. Analise o quadro a seguir.

3	4	4	5	5	7	9
12	12	21	21	21	21	30
31	31	31	33	35	42	45
45	60	72	72	78	89	89

Assinale a opção que apresenta a moda dos dados do quadro acima.

- a) 9
- b) 21
- c) 30
- d) 30,5
- e) 31

3. Uma empresa no primeiro semestre de 2016.

Mês	Faturamento (R\$)
jan	4.000
fev	12.000
mar	8.500
abr	7.500
maio	10.000
jun	12.000

Determine:

a) a média mensal de faturamento.

$$\text{R: } M = \frac{4000 + 12\,000 + 8500 + 7500 + 10\,000 + 12\,000}{6} = \frac{54\,000}{6} = \text{R\$ } 9000 \text{ por mês.}$$

b) o faturamento total do segundo semestre para que o faturamento médio mensal no ano de 2016 seja R\$10.000,00.

$$\text{R: } M = 10\,000 = \frac{54\,000 + x}{12} \Rightarrow x = 120\,000 - 54\,000 \Rightarrow x = \text{R\$ } 66.000 \text{ no segundo semestre.}$$

4. Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que entram quanto o número de pessoas que saem do elevador em cada um dos andares do edifício onde ele trabalha. O quadro apresenta os registros do ascensorista durante a primeira subida do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, ao quinto andar do edifício.

Número de pessoas	Térreo	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar
Que entram no elevador	4	4	1	2	2	2
Que saem do elevador	0	3	1	2	0	6

Com base no quadro, qual é a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar?

a) 2

d) 5

b) 3

e) 6

c) 4

R: No início entram quatro pessoas no elevador, no primeiro andar tem cinco, pois entraram mais quatro e saíram três pessoas, nos segundo e terceiro continuam com 5, pois entram a mesma quantidade de pessoas que saem. No quarto andar entram duas pessoas, totalizando sete e no quinto andar tem três pessoas, uma vez que saem seis e entram duas pessoas. Dessa forma, o número que mais se repete é o 5.

Alternativa d.

5. No verão de 2018, uma grande loja de eletrodomésticos registrou o número de unidades de ventiladores vendidas durante 10 dias consecutivos, conforme a tabela abaixo. Com isso, foi possível verificar qual o volume de vendas por dia e a variação do número de vendas de um dia para o dia seguinte.

Número de unidades vendidas por dia									
Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5	Dia 6	Dia 7	Dia 8	Dia 9	Dia 10
46	53	38	45	49	53	47	47	51	53

Qual é a moda das variações do número de vendas diárias no período considerado?

- a) 53
- b) 15
- c) 7
- d) 4
- e) 2

R: As variações de um dia para o outro são de: 7, 15, 7, 4, 4, 4, 0, 4, 2. Portanto a moda é 4.

Alternativa d.

Lição 140 – Mediana

1. Em uma turma de sétimo ano, as notas obtidas pelos alunos na prova de matemática foram: 13, 34, 45, 26, 19, 27, 48, 63, 81, 76, 52, 86, 92, 98. Determine:

- a) a moda;

R: A amostra é amodal.

b) a média;

R: A média é $M = \frac{13+34+45+26+19+27+48+63+81+76+52+86+92+98}{14} = \frac{760}{14} = 54,29$.

c) a mediana.

R: A mediana é a média entre o 7º e 8º termo, sendo assim, a média entre: 48 e 52. Portanto a mediana é 50.

2. Uma microempresa tem 10 funcionários que trabalham em 3 funções diferentes. O salário mensal deles é mostrado no quadro a seguir:

Salário mensal	Frequência
R\$ 11500,00	2
R\$ 2000,00	2
R\$ 1500,00	6

a) Calcule a média aritmética dos salários.

R: $M = \frac{11.500 \cdot 2 + 2.000 \cdot 2 + 1.500 \cdot 6}{10} = \frac{36.000}{10} = R\$3600,00$.

b) Obtenha a mediana dos salários desta microempresa.

R: A mediana é a média entre o 5º e o 6º termos. O valor dos dois termos são R\$1500,00, então a mediana é R\$1500,00.

c) Obtenha a moda dos salários desta microempresa.

R: A moda é o valor que mais se repete, portanto é R\$1500,00.

d) Que valor retrata melhor a realidade dos salários desta microempresa: a média aritmética, a moda ou a mediana dos salários mensais?

R: A média, uma vez que envolve todos os trabalhadores no cálculo.

3. Observe a tabela a seguir, que mostra o número de anos de escolaridade, a partir do 1º ano do Ensino Fundamental, de um grupo de 40 funcionários de uma empresa:

Quantidade de funcionários por anos de escolaridade	
Anos de escolaridade	Frequência
9	5
13	7
15	12
16	16

a) Qual é a moda do número de anos de escolaridade nesta empresa?

R: 16 anos de escolaridade.

b) E a média aritmética?

$$\text{R: } M = \frac{9 \cdot 5 + 13 \cdot 7 + 15 \cdot 12 + 16 \cdot 16}{40} = \frac{572}{40} = 14,3 \text{ anos de escolaridade.}$$

c) E a mediana?

R: 15 anos de escolaridade.

4. Observe as notas, cujo valor máximo era 10, obtidas em uma avaliação realizada em cinco municípios sobre a qualidade de vida da população:

2,0 3,0 3,0 9,0 9,0

a) Calcule a média, a moda e a mediana correspondentes aos dados apresentados.

R: A média das notas é: $M = \frac{2+3+3+9+9}{5} = \frac{26}{5} = 5,2$. A moda é 3 e 9, e a mediana corresponde a 3.

b) Suponha que tenha sido divulgado na imprensa que o município cuja nota foi 3,0 foi bem avaliado, pois ficou exatamente “no meio” entre a mais alta e a mais baixa das notas atribuídas aos municípios pesquisados. Essa notícia foi bem-intencionada?

R: Não, pois apesar de ser a mediana, está abaixo da metade da nota máxima (5), e pela nota, a qualidade de vida na cidade não é muito boa.

5. Considere o conjunto de valores abaixo.

3 – 5 – 5 – 5 – 7 – 8

a) Calcule a média aritmética, a moda e a mediana deste conjunto de valores.

R: A média das notas é: $M = \frac{3+5+5+5+7+8}{6} = \frac{33}{6} = 5,5$. A moda é 5, e a mediana corresponde a 5.

b) Acrescente o número 16 ao conjunto de valores e calcule novamente a média aritmética, a moda e a mediana. Qual das medidas sofreu maior alteração?

R: A nova média das notas é: $M = \frac{3+5+5+5+7+8+16}{7} = \frac{49}{7} = 7$. A moda ainda é 5, e a mediana corresponde a 5 também. A medida que sofreu alterações foi a média aritmética.

Lição 141 – Amplitude

1. Defina amplitude e dê dois exemplos.

R: A amplitude de uma série de dados é a diferença entre o maior e o menor valor observados. Exemplo, dada as notas de João iguais a 2-7-9-4 e da Maria 4-8-10-6. A amplitude da nota de João é $9 - 2 = 7$ e da Maria é $10 - 4 = 6$.

2. No curso de informática de João, a sala dele é formada por 10 pessoas de diferentes idades. Na tabela a seguir foram registradas as idades dos alunos do curso de informática que fazem parte da sala do João.

12	17	15	14	12	19	9	11	14	10
----	----	----	----	----	----	---	----	----	----

Agora, responda:

a) Qual é a idade média dos alunos?

R: $M = \frac{12+17+15+14+12+19+9+11+14+10}{10} = \frac{133}{10} = 13,3$ anos.

b) As idades possuem uma moda? Em caso afirmativo, qual é essa moda?

R: Sim, a moda é 12 e 14.

c) Encontre a mediana das idades.

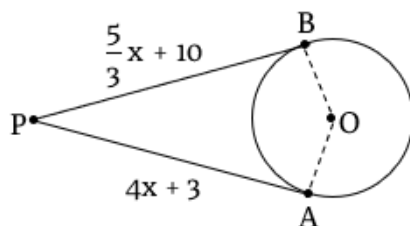
R: A mediana é a média do 5º e 6º termo, que são: 12 e 14. Portanto a mediana é 13 anos.

d) Determine a amplitude desses dados.

R: A amplitude das idades é: $19 - 9 = 10$ anos.

Lição 142 – Avaliação

1. Observe a figura e determine:



a) a medida x;

R:

$$4x + 3 = \frac{5}{3}x + 10 \Rightarrow 4x - \frac{5}{3}x = 10 - 3 \Rightarrow \frac{12x - 5x}{3} = 7 \Rightarrow \frac{7x}{3} = 7 \Rightarrow 7x = 7 \cdot 3 \Rightarrow x = \frac{21}{7} \Rightarrow x = 3$$

b) a medida do segmento PA;

R: $PA = 4x + 3 \Rightarrow PA = 4 \cdot 3 + 3 \Rightarrow PA = 12 + 3 \Rightarrow PA = 15$.

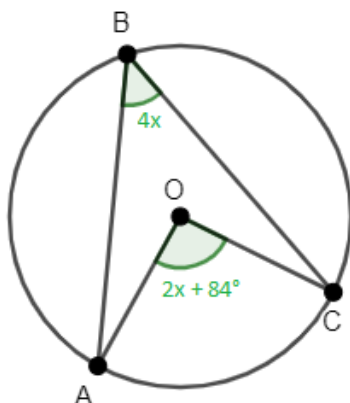
c) a medida do segmento PB;

R: $PB = \frac{5}{3}x + 10 \Rightarrow PB = \frac{5}{3} \cdot 3 + 10 \Rightarrow PB = 5 + 10 \Rightarrow PB = 15$.

d) o perímetro do quadrilátero PAOB, se o comprimento do raio é 7 cm.

R: $\text{Perímetro} = PA + PB + BO + AO \Rightarrow p = 15 + 15 + 7 + 7 \Rightarrow p = 44 \text{ cm}$.

2. Encontre o valor da medida de x na figura abaixo.



R: Sabendo que o ângulo inscrito de determinado arco é metade do ângulo central, temos:

$$4x = \frac{2x + 84^\circ}{2} \Rightarrow 4x \cdot 2 = 2x + 84^\circ \Rightarrow 8x - 2x = 84^\circ \Rightarrow 6x = 84^\circ \Rightarrow x = 14^\circ$$

3. Numa fazenda há 5 cavalos que consomem 300 kg de ração em 6 dias. Suponha que todos eles consomem por dia a mesma quantidade de ração. Com apenas 240 kg de ração, por quantos dias 12 cavalos iguais aos dessa fazenda seriam alimentados?

R:

	Cavalos	Quilos	Dias	
	5	300	6	$\Rightarrow \frac{5 \cdot 6}{300} = \frac{12 \cdot x}{240} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 6 \cdot 240}{300 \cdot 12} = \frac{7.200}{3.600} = 2 \text{ Dias}.$
	12	240	x	

4. Numa loja há quatro portas de entrada.

a) Quantas são as possibilidades de entrar por uma porta e sair por outra?

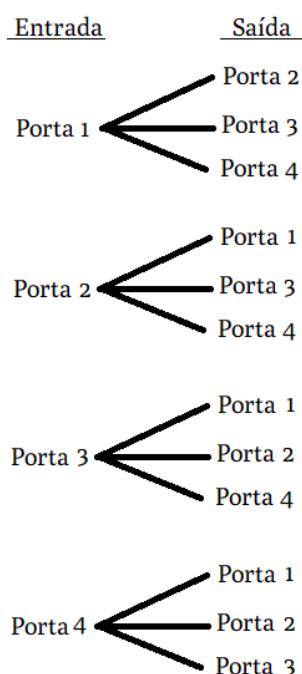
R: Ao entrar em uma das 4 opções de porta, necessariamente uma é excluída na hora de sair, a fim de que se entre por uma e saia por outra, dessa forma as possibilidades são $4 \cdot 3 = 12$ maneiras de se entrar por uma porta e sair por outra.

b) Quantas são as possibilidades de escolha das portas para entrar e sair da loja, podendo usar a mesma porta?

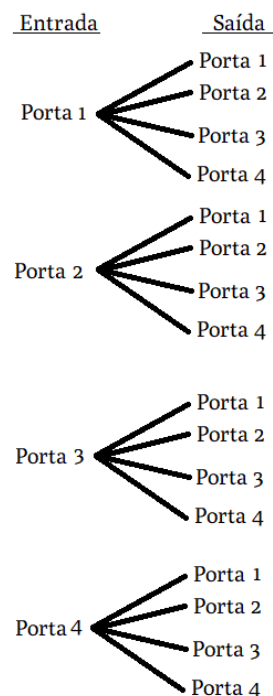
R: Podendo entrar por 4 portas e sair por 4, as possibilidades são $4 \cdot 4 = 16$ maneiras.

c) Construa a árvore de possibilidades dos dois itens anteriores.

R: Item a)



Item b)



5. Uma moeda é lançada algumas vezes, e a sequência de resultados, cara ou coroa, de cada lançamento é anotada. Quantas sequências diferentes podem ser formadas:

a) se forem feitos 2 lançamentos?

R: $2 \cdot 2 = 4$ sequências.

b) se forem feitos 3 lançamentos?

R: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ sequências.

c) se forem feitos 4 lançamentos?

R: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ sequências.

6. Quantos anagramas possui a palavra SERGIO?

R: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ anagramas.

7. De quantos modos sete pessoas podem ficar em fila indiana?

R: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$ maneiras.

8. Em um cesto há 12 bolas de vôlei, sendo 2 brancas, 6 amarelas e 4 vermelhas. Desse cesto, ao acaso, sem olhar, uma bola é retirada. Qual é a probabilidade de essa bola ser de cor:

a) Branca?

R: $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

b) Amarela?

R: $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

c) Vermelha?

R: $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

9. Maria Bárbara fez três provas de matemática no primeiro bimestre. Suas notas foram 6,5, 7,25 e 9,75. Determine sua média em matemática neste bimestre.

$$\text{R: } M = \frac{6,5 + 7,25 + 9,75}{3} = \frac{23,5}{3} = 7,83.$$

10. Em uma turma de sétimo ano, as notas obtidas pelos alunos na prova de matemática foram: 13, 34, 45, 26, 19, 27, 48, 63, 81, 76, 52, 86, 92, 98. Determine:

a) a moda;

R: A amostra é amodal.

b) a média;

R: A média é:

$$M = \frac{13 + 34 + 45 + 26 + 19 + 27 + 48 + 63 + 81 + 76 + 52 + 86 + 92 + 98}{14} = \frac{760}{14} = 54,29$$

c) a mediana.

R: A mediana é a média entre o 7º e 8º termos, sendo assim, a média entre: 48 e 52. Portanto a mediana é 50.

Lição 143 – Avaliação geral – Parte I

1. Indique com a letra V as sentenças verdadeiras e com a letra F as sentenças falsas. Transforme a sentença falsa em uma sentença verdadeira:

(F) O conjunto dos Reais é o menor conjunto numérico que existe.

R: O conjunto dos Reais é o maior conjunto numérico que existe.

(V) No conjunto dos Reais as operações da adição, subtração, multiplicação e divisão podem ser realizadas sem nenhuma restrição.

(F) As dízimas periódicas são números infinitos que não apresentam período.

R: As dízimas periódicas são números infinitos que apresentam período.

(V) O infinito dos Naturais é menor que o infinito dos Reais.

(F) A propriedade Comutativa da multiplicação enuncia que “a ordem das parcelas não altera a soma.”

R: A propriedade Comutativa da multiplicação enuncia que “a ordem das parcelas não altera o produto.”

(V) Se retirássemos todos os números racionais do conjunto dos Reais, ainda sobrariam os irracionais.

(V) A divisão de dois inteiros sempre resulta em um Racional.

(F) Uma dízima periódica pode ser representada como uma fração cujo denominador é 10, 100 ou 1.000.

R: Uma dízima periódica pode ser representada como uma fração cujo denominador é 9, 99 ou 999.

2. Explique, com suas próprias palavras, por que qualquer coisa elevada a zero sempre é 1. Se preferir, utilize um exemplo numérico.

R: Qualquer número elevado a 0 é igual a 1, pois ao dividirmos um número por ele mesmo o resultado é 1. Do mesmo modo, pela propriedade da potência, ao dividirmos duas potências de mesma base, temos: $x^3 : x^3 = x^{3-3} = x^0$, entretanto, como $x^3 = x^3$, essa divisão é igual a 1, assim $x^0 = 1$.

3. Passe para notação científica:

a) Estima-se que a Terra possua 40.075.000 metros de circunferência (ponto final)

R: $4,0075 \cdot 10^7$ m.

b) Quando procuramos “Igreja Católica” no Google, encontramos 1.200.000 resultados.

R: $1,2 \cdot 10^6$ resultados.

c) Quando procuramos “Santidade” no Google, encontramos 3.630.000 resultados.

R: $3,63 \cdot 10^6$ resultados.

d) Se nossa fé fosse do tamanho de um grão de mostarda, que mede 0,000002 km, moveríamos montanhas.

R: $2,0 \cdot 10^{-6}$ km.

4. Resolvas as expressões abaixo:

a) $6\sqrt{16} - 2\sqrt[3]{125}$

R: $6 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 24 - 10 = 14$

b) $\sqrt{64} - \sqrt{625}$
R: $8 - 25 = -17$

c) $\sqrt{\frac{81}{64}}$
R: $\frac{9}{4}$

d) $\sqrt{\frac{1}{100}}$
R: $\frac{1}{10}$

e) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$
R: $-\frac{2}{3}$

f) $\sqrt{3^2 + 4^2}$
R: $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

g) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
R: $\frac{\sqrt{6 \cdot 3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$

h) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{10}$
R: $\sqrt[4]{5 \cdot 2 \cdot 10} = \sqrt[4]{100}$

5. Desenvolva, utilizando as regras para produtos notáveis, as contas abaixo:

a) $(x + 2)^2$
R: $x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4$

b) $(3x + 1)^2$
R: $(3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1$

c) $(x - 3)^2$

$$\text{R: } x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9$$

$$\text{d) } (5x - 2y)^2$$

$$\text{R: } (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 2y + (2y)^2 \Rightarrow 25x^2 - 20xy + 4y^2$$

$$\text{e) } (x + 1) \cdot (x - 1)$$

$$\text{R: } x^2 - 1^2$$

$$\text{f) } \left(\frac{x^2 \cdot y^3}{z} - \frac{5}{6} \right) \cdot \left(\frac{x^2 \cdot y^3}{z} + \frac{5}{6} \right)$$

$$\text{R: } \left(\frac{x^2 \cdot y^3}{z} \right)^2 - \left(\frac{5}{6} \right)^2 \Rightarrow \frac{x^4 \cdot y^6}{z^2} - \frac{25}{36}$$

$$\text{g) } (5x^3 + 2) \cdot (2 - 5x^3)$$

$$\text{R: } (5x^3)^2 - 2^2 = 25x^6 - 4$$

$$\text{h) } (11a^2b^3 + 7)^2$$

$$\text{R: } (11a^2b^3)^2 + 2 \cdot 11a^2b^3 \cdot 7 + 7^2 \Rightarrow 121a^4b^6 + 154a^2b^3 + 49$$

$$\text{i) } (X^{2m} - X^{3m})^2$$

$$\text{R: } (X^{2m})^2 - 2 \cdot X^{2m} \cdot X^{3m} + (X^{3m})^2 \Rightarrow X^{4m} - 2X^{2m}X^{3m} + X^{6m}$$

$$\text{j) } (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + y)$$

$$\text{R: } (\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})(x + y) \Rightarrow (x - y)(x + y) \Rightarrow x^2 - y^2$$

6. Resolva os sistemas de equações abaixo pelo método que preferir:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\text{R: } x = 7 ; y = 4$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - y = 20 \\ 2x + y = 48 \end{cases}$$

$$\text{R: } x = 17 ; y = 14$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 11x - y = 42 \end{cases}$$

$$\text{R: } x = 3 ; y = -9$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

$$\text{R: } x = -1 ; y = 2$$

$$\text{e) } \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$$

$$\text{R: } x = 5 ; y = 2$$

$$\text{f) } \begin{cases} 5x + y = 5 \\ 10x - 2y = -2 \end{cases}$$

$$\text{R: } x = \frac{2}{5} ; y = 3$$

$$\text{g) } \begin{cases} x - 3 = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\text{R: } x = 3 ; y = 5$$

7. Classifique os sistemas abaixo como: Sistema Possível e Determinado (S.P.D), Sistema Possível e Indeterminado (S.P.I) e Sistema Impossível (S.I).

$$\text{a)} \begin{cases} y = x - 7 \\ x = y + 3 \end{cases}$$

R: S.I.

$$\text{b)} \begin{cases} y = 2x + 2 \\ x = 2y + 2 \end{cases}$$

R: S.I

$$\text{c)} \begin{cases} y = x + 2 \\ x = y - 2 \end{cases}$$

R: S.P.I.

$$\text{d)} \begin{cases} 2x + 3y = x + y + 7 \\ 1 + 2y = 3 - x \end{cases}$$

R: S.I

$$\text{e)} \begin{cases} 5x = 1 - 3y \\ 2x + 4y = y - 3x \end{cases}$$

R: S.I.

8. Desenvolva:

$$\text{a)} (x - a)^2$$

$$\text{R: } x^2 + 2 \cdot x \cdot a + a^2 \Rightarrow x^2 + 2xa + a^2$$

$$\text{b)} (x - 10)^2$$

$$\text{R: } x^2 - 2 \cdot x \cdot 10 + (-10)^2 \Rightarrow x^2 - 20x + 100$$

$$\text{c)} (4x - 1)^2$$

$$\text{R: } (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 1 + (-1)^2 \Rightarrow 16x^2 - 2x + 1$$

$$\text{d)} (5a - 3b)^2$$

$$\text{R: } (5a)^2 - 2 \cdot 5a \cdot 3b + (3b)^2 \Rightarrow 25a^2 - 30ab + 9b^2$$

$$\text{e)} (3a - 2b)^2$$

$$\text{R: } (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 2b + (2b)^2 \Rightarrow 9a^2 - 12ab + 4b^2$$

$$\text{f)} (x + 1)(x - 1)$$

$$\text{R: } x^2 - 1^2$$

$$\text{g)} (a + 5)(a - 5)$$

$$\text{R: } a^2 - 5^2 \Rightarrow a^2 - 25$$

$$\text{h)} (3b + 7)(3b - 7)$$

$$\text{R: } (3b)^2 - 7^2 \Rightarrow 9b^2 - 49$$

$$\text{i)} (3x - 2y)(3x + 2y)$$

$$\text{R: } (3x)^2 - (2y)^2 \Rightarrow 9x^2 - 4y^2$$

9. Qual é o conjunto solução de cada uma das seguintes equações do 2º grau, sendo $U = \mathbb{R}$?

$$\text{a)} (x + 5)(x - 6) = 51 - x$$

$$\text{R: } x^2 + 5x - 6x - 30 = 51 - x \Rightarrow x^2 + 5x + x - 6x = 51 + 30 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = \pm 9.$$

$$S = \{9 ; -9\}.$$

b) $2x(x+1) - x(x+5) = 3(12-x)$

R: $2x^2 + 2x - x^2 - 5x = 36 - 3x \Rightarrow 2x^2 - x^2 + 2x - 5x + 3x = 36 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6.$

$S = \{6; -6\}.$

10. Calcule o conjunto solução de cada equação:

a) $3x - \frac{1}{3x} = 0, x \neq 0, U = \mathbb{R}$

R: $\frac{9x^2 - 1}{3x} = 0 \Rightarrow 9x^2 - 1 = 0 \cdot 3x \Rightarrow 9x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3}.$

$S = \{\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\}.$

b) $\frac{x^2}{4} - \frac{5}{2} = -1, U = \mathbb{R}$

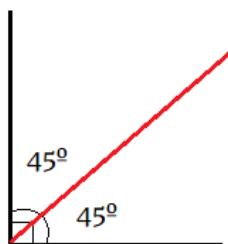
R: $\frac{2x^2 - 20}{8} = -1 \Rightarrow 2x^2 - 20 = -8 \Rightarrow 2x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm \sqrt{6}.$

$S = \{\sqrt{6}; -\sqrt{6}\}.$

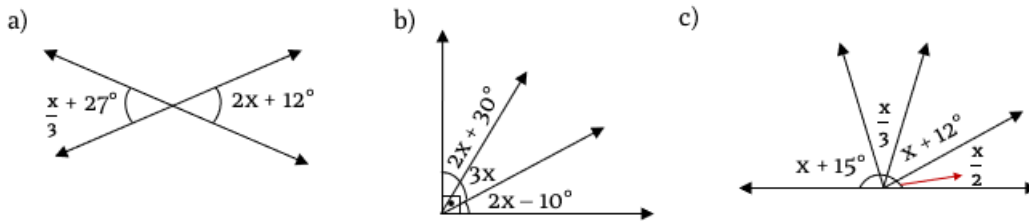
Lição 144 – Avaliação geral – Parte II

1. Defina bissetriz e faça a construção de uma bissetriz em um ângulo dado.

R: Bissetriz é uma semirreta que divide o ângulo em dois novos ângulos congruentes.
Dado o ângulo de 90° , temos a bissetriz:



2. Calcule x:

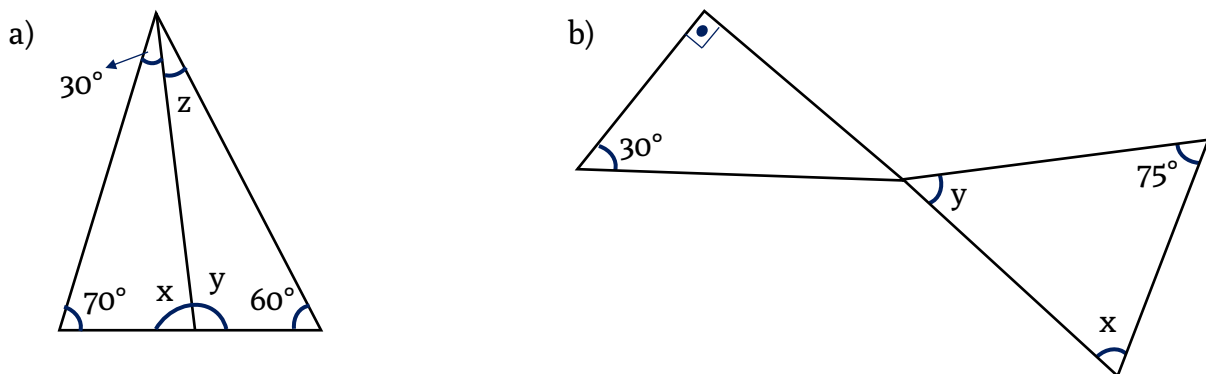


R: a) $\frac{x}{3} + 27 = 2x + 12 \Rightarrow 27 - 12 = 2x - \frac{x}{3} \Rightarrow 15 = \frac{5x}{3} \Rightarrow 5x = 45 \Rightarrow x = 9^\circ$

b) $2x + 30 + 3x + 2x - 10 = 90 \Rightarrow 7x + 20 = 90 \Rightarrow 7x = 70 \Rightarrow x = 10^\circ$

c) $x + 15 + \frac{x}{3} + x + 12 + \frac{x}{2} = 180 \Rightarrow \frac{17x}{6} + 27 = 180 \Rightarrow \frac{17x}{6} = 153 \Rightarrow 17x = 918 \Rightarrow x = 54^\circ$

3. Calcule os ângulos indicados pelas letras:



R:

a) Triângulo grande: $70^\circ + 60^\circ + 30^\circ + z = 180^\circ \Rightarrow z + 160^\circ = 180^\circ \Rightarrow z = 180^\circ - 160^\circ \Rightarrow z = 20^\circ$

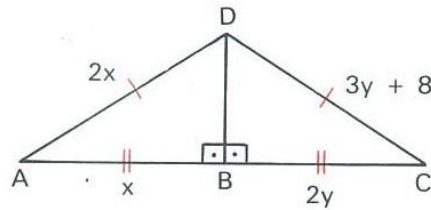
Triângulo da esquerda: $70^\circ + 30^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x + 100^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 100^\circ \Rightarrow x = 80^\circ$

Triângulo da direita: $60^\circ + 20^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow y + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow y = 180^\circ - 80^\circ \Rightarrow y = 100^\circ$.

b) Pelo teorema dos ângulos O.P.V., o ângulo faltante no triângulo da esquerda é congruente ao ângulo y, assim, temos:

$90^\circ + 30^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow y + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow y = 180^\circ - 120^\circ \Rightarrow y = 60^\circ$. Portanto, no triângulo da direita: $60^\circ + 75^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x + 135^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 135^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$.

4. Na figura abaixo, o triângulo ABD é congruente ao triângulo CBD. Calcule x e y e os lados do triângulo ACD.



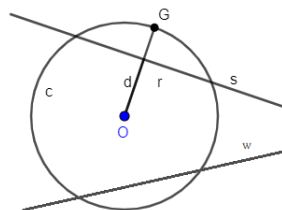
R: $2x = 3y + 8$
 $x = 2y$ substituindo a segunda equação na primeira: $2y \cdot 2 = 3y + 8 \Rightarrow 4y - 3y = 8 \Rightarrow y = 8$. Assim, $x = 2 \cdot 8 \Rightarrow x = 16$.

5. Sabendo que o raio de um círculo mede 6 cm, calcule a área desse círculo.

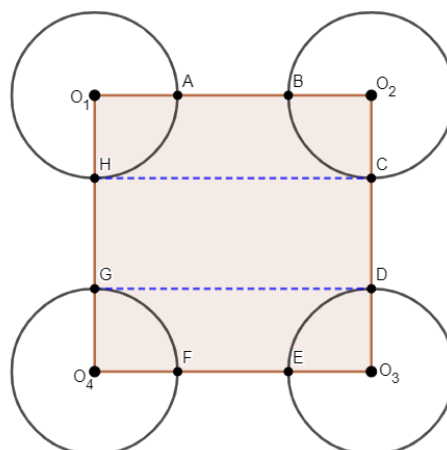
R: $A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi 6^2 \Rightarrow A = 36\pi$.

6. Defina reta secante na circunferência e dê dois exemplos.

R: Quando uma reta corta a circunferência em dois pontos distintos, a reta é chamada reta secante à circunferência. Exemplo: as retas s e w são secantes.



7. Na figura seguinte $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{EF} \equiv \overline{GH}$, e as circunferências de centros O_1, O_2, O_3 e O_4 têm o mesmo raio. Sabendo que a medida do segmento $\overline{AB}$ é 7 cm e que o comprimento de cada raio é 4 cm, determine:



a) O perímetro do quadrado $O_1O_2O_3O_4$.

R: Como $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{EF} \equiv \overline{GH}$ e os raios das circunferências são iguais, o perímetro é: $p = 4 \cdot AB + 8r \Rightarrow p = 4 \cdot 7 + 8 \cdot 4 \Rightarrow p = 28 + 32 \Rightarrow p = 60 \text{ cm}$.

b) A área do mesmo quadrado.

R: O lado do quadrado vale $l = AB + 2r \Rightarrow l = 7 + 2 \cdot 4 \Rightarrow l = 15 \text{ cm}$. Assim, a área, dada por $l \cdot l$ é: $A = l \cdot l = 15 \cdot 15 \Rightarrow A = 225 \text{ cm}^2$.

c) O perímetro do retângulo CDGH.

R: $HC = GD = l = 15 \text{ cm}$, $HG = CD = AB = 7 \text{ cm}$.

Portanto, $p = HG + HC + CD + DG \Rightarrow p = 7 + 15 + 7 + 15 \Rightarrow p = 44 \text{ cm}$.

8. Sem construir o plano cartesiano, analise os pontos a seguir e indique em que quadrante o ponto está localizado:

a) $A = (3, -5)$

R: Quarto quadrante.

b) $B = (-7, -1)$

R: Terceiro quadrante.

c) $C = (-4, 4)$

R: Segundo quadrante.

d) $D = (2, 2)$

R: Primeiro quadrante.

9. Uma família viaja de São Paulo ao Rio de Janeiro, para passar ali as férias. A viagem tem duração de 6 horas em um percurso de 435 km. Qual é a velocidade média do automóvel da família?

R: A velocidade média é de $v = \frac{d}{t} = \frac{435}{6} = 72,5 \text{ km/h}$.

10. Um livro tem 150 páginas, cada página tem 36 linhas, e cada linha tem 50 letras. Se quisermos escrever o mesmo texto em 250 páginas, quantas letras deverá haver em cada linha para que cada página tenha 30 linhas?

R:

Páginas	Linhas	Letras	
150	36	50	$\Rightarrow 150 \cdot 36 \cdot 50 = 250 \cdot 30 \cdot x \Rightarrow$
250	30	x	

$$x = \frac{150 \cdot 36 \cdot 50}{250 \cdot 30} = \frac{270.000}{7.500} = 36 \text{ letras.}$$