

Passo a passo de Matemática

Etapa 9, Volume 1

Lição 1 – Conceitos iniciais

1. Observe os números a seguir:

$$-7 \quad -\frac{1}{2} \quad -3,8 \quad 0,333... \quad 15 \quad \sqrt{21}$$

Quais deles pertencem ao conjunto:

a) $\mathbb{N}$?

R: Apenas o 15

Os naturais são os números positivos e inteiros (sem vírgula)

b) $\mathbb{Z}$?

R: -7 e 15

Os inteiros são os números inteiros (sem vírgula) positivos ou negativos.

c) $\mathbb{Z}$, mas não pertencem a $\mathbb{N}$?

R: -7

Os inteiros que não pertencem aos naturais são os números negativos.

d) $\mathbb{Q}$, mas não pertencem a $\mathbb{Z}$?

R: $-\frac{1}{2}, -3,8$, 0,333

Todos os inteiros são racionais. Nem todos os racionais são inteiros.

Os racionais que não são inteiros são os números positivos ou negativos que não são exatos (possuem vírgula).

2. Mostre que o número 3,8787... é racional, isto é, pode ser escrito na forma de fração.

R: Para mostrar que o 3,8787... é racional, precisamos recordar a definição de número racional.

Número racional: é aquele que pode ser escrito na forma de fração.

Então, precisamos escrever “3,8787...” como uma fração para provar que é um número racional.

Estamos buscando a **fração geratriz**, ou seja, a fração que gera a dízima periódica “3,8787...”

Chamaremos a fração geratriz de “x”:

$$x = 3,8787... \text{ (I)}$$

$$10x = 38,7878...$$

$$100x = 387,8787 \text{ (II)}$$

Vamos fazer a subtração entre a equação (II) e a equação (I):

$$100x - x = 387,8787... - 3,8787...$$

$$99x = 387 - 3$$

$$99x = 384$$

$$x = \frac{384}{99}$$

Podemos simplificar essa fração:

$$\frac{384}{99} = \frac{384 \div 3}{99 \div 3} = \frac{128}{33}$$

Assim, a fração geratriz é $\frac{128}{33}$, pois se fizermos $128 : 33 = 3,8787...$

Assim, provamos que “3,8787...” pode ser escrito na forma de fração ($\frac{128}{33}$) e, portanto, é um número racional.

Lição 2 – Número Pi

1. Usando o valor de 3,14 para π , calcule o comprimento de uma circunferência cujo raio mede:

a) 10 cm

R: Perceba que o exercício dá o valor do RAIO. Na expressão que aprendemos nesta lição, o π está relacionado com o comprimento da circunferência e o DIÂMETRO.

O DIÂMETRO de uma circunferência é = raio + raio = $2 \cdot$ raio

se o raio é 10 cm $\rightarrow$ o diâmetro é = $10 + 10 = 20$ cm

Basta aplicar os valores de π (3,14) e do diâmetro (20 cm) na expressão que conhecemos:

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \pi$$

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{20} = 3,14$$

$$\text{comprimento da circunferência} = 3,14 \cdot 20$$

$$\text{comprimento da circunferência} = 62,8$$

O comprimento da circunferência é 62,8 cm.

b) 4,5 cm

R: O DIÂMETRO de uma circunferência é = raio + raio = $2 \cdot$ raio

se o raio é 4,5 cm $\rightarrow$ o diâmetro é = $4,5 + 4,5 = 9$ cm

Basta aplicar os valores de π (3,14) e do diâmetro (9 cm) na expressão que conhecemos:

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \pi$$

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{9} = 3,14$$

$$\text{comprimento da circunferência} = 3,14 \cdot 9$$

$$\text{comprimento da circunferência} = 28,26$$

O comprimento da circunferência é 28,26 cm.

c) 9 cm

R: O DIÂMETRO de uma circunferência é = raio + raio = $2 \cdot \text{raio}$

$$\text{se o raio é 9 cm} \rightarrow \text{o diâmetro é} = 9 + 9 = 18 \text{ cm}$$

Basta aplicar os valores de π (3,14) e do diâmetro (18 cm) na expressão que conhecemos:

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \pi$$

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{18} = 3,14$$

$$\text{comprimento da circunferência} = 3,14 \cdot 18$$

$$\text{comprimento da circunferência} = 56,52$$

O comprimento da circunferência é 56,52 cm.

d) 0,45 cm

R: O DIÂMETRO de uma circunferência é = raio + raio = $2 \cdot \text{raio}$

$$\text{se o raio é 0,45 cm} \rightarrow \text{o diâmetro é} = 0,45 + 0,45 = 0,90 = 0,9 \text{ cm}$$

Basta aplicar os valores de π (3,14) e do diâmetro (0,9 cm) na expressão que conhecemos:

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \pi$$

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{0,9} = 3,14$$

$$\text{comprimento da circunferência} = 3,14 \cdot 0,9$$

$$\text{comprimento da circunferência} = 2,826$$

O comprimento da circunferência é 2,826 cm.

2. Um pneu mede 60 cm de diâmetro; considere $\pi = 3,14$ e responda às questões:

a) Qual será, aproximadamente, o comprimento da circunferência desse pneu em metros?

R: O capítulo nos dá a fórmula: $\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \pi$

Queremos saber o comprimento da circunferência.

Temos o diâmetro e sabemos que $\pi = 3,14$. Basta substituir os valores na fórmula:

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \pi$$

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{60} = 3,14$$

$$\text{comprimento da circunferência} = 3,14 \cdot 60$$

$$\text{comprimento da circunferência} = 188,4 \text{ cm}$$

ATENTE-SE QUE O DIÂMETRO ESTAVA EM CENTÍMETROS, ENTÃO O VALOR QUE ENCONTRAMOS PARA O COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA TAMBÉM ESTARÁ EM CENTÍMETROS.

Agora, precisamos fazer a regra de três para descobrir quantos metros são 188,4 cm.

$$1 \text{ metro} \text{ ----- } 100 \text{ cm}$$

$$x \text{ metros} \text{ ----- } 188,4 \text{ cm}$$

$$100 \cdot x = 1 \cdot 188,4$$

$$100x = 188,4$$

$$x = \frac{188,4}{100}$$

$$x = 1,884 \text{ m}$$

b) Se esse pneu der 4.000 voltas completas, de quantos metros será a distância percorrida pelo automóvel?

R: **Definição : Uma volta completa é a medida do comprimento da circunferência.**

Para encontrar “4.000” voltas completas, basta multiplicar o comprimento da circunferência por 4.000:

$$1 \text{ volta completa} \text{ ----- } 1 \text{ comprimento de circunferência}$$

$$4000 \text{ voltas completas} \text{ ----- } 4000 \text{ comprimentos de circunferência}$$

$$4000 \text{ voltas completas} = (\text{comprimento de circunferência}) \times 4000$$

$$4000 \text{ voltas completas} = 1,884 \cdot 4000$$

$$4000 \text{ voltas completas} = 7536 \text{ m}$$

Logo, a distância percorrida pelo automóvel (em metros) é 7.536 m.

3. Uma pista circular tem 200 m de diâmetro. Em uma competição, os corredores percorreram 15,7 km. Quantas voltas foram dadas nessa pista por esses corredores? ($\pi = 3,14$)

R: Definição: uma volta completa é a medida do comprimento da circunferência.

Antes de descobrirmos “as voltas completas” é necessário descobrirmos a medida do comprimento da circunferência (uma volta completa):

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \pi$$

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{200} = 3,14$$

Multiplique por 200 ambos os lados da igualdade.

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{200} \cdot 200 = 3,14 \cdot 200$$

$$\text{comprimento da circunferência} = 628 \text{ m}$$

ATENTE-SE QUE O DIÂMETRO ESTAVA EM METROS, ENTÃO O VALOR QUE ENCONTRAMOS PARA O COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA TAMBÉM ESTARÁ EM METROS.

Agora, precisamos relacionar o comprimento de uma circunferência, ou seja, uma volta completa com a distância 15,7 km. Não podemos misturar grandezas de comprimento. Ou convertemos o comprimento da circunferência para quilômetros ou convertemos a distância em quilômetros para metros.

$$1 \text{ km} \text{ ----- } 1000 \text{ m}$$

$$15,7 \text{ km} \text{ ----- } x \text{ m}$$

$$1 \cdot x = 15,7 \cdot 1000$$

$$x = 15.700 \text{ m}$$

Logo, 15,7 km = 15.700 m. Agora podemos relacionar as duas grandezas. Lembre-se que queremos saber quantas voltas são 15.700 km e sabemos que 1 volta vale o comprimento da circunferência (628 m):

$$1 \text{ volta} \text{ ----- } 628 \text{ m}$$

$$x \text{ voltas} \text{ ----- } 15700$$

$$628 \cdot x = 1 \cdot 15700$$

$$628x = 15700$$

$$x = \frac{15700}{628}$$

$$x = 25$$

Logo, 15,7 km (15700 m) corresponde a 25 voltas completas.

4. Sabendo que o comprimento de uma circunferência é 87,92 m, determine o diâmetro dessa circunferência, considerando $\pi = 3,14$.

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \pi$$

$$\frac{87,92}{\text{diâmetro}} = 3,14$$

Coloque o “1” embaixo do 3,14 e multiplique em cruz:

$$\frac{87,92}{\text{diâmetro}} = \frac{3,14}{1}$$

$$\text{diâmetro} \cdot 3,14 = 87,92$$

$$\text{diâmetro} = \frac{87,92}{3,14}$$

$$\text{diâmetro} = 28$$

Logo, o diâmetro dessa circunferência é 28.

Lição 3 – Os números reais

1. Calcule:

$$[(18 + 3 \cdot 2) \div 8 + 5 \cdot 3] \div 6$$

$$[(18 + 6) \div 8 + 5 \cdot 3] \div 6$$

$$[24 \div 8 + 5 \cdot 3] \div 6$$

$$[3 + 5 \cdot 3] \div 6$$

$$[3 + 15] \div 6$$

$$18 \div 6$$

$$3$$

2. Resolva a expressão abaixo:

$$\{[(8 \cdot 4 + 3) \div 7 + (3 + 15 \div 5) \cdot 3] \cdot 2 - (19 - 7) \div 6\} \cdot 2 + 12$$

$$\{[(32 + 3) \div 7 + (3 + 15 \div 5) \cdot 3] \cdot 2 - (19 - 7) \div 6\} \cdot 2 + 12$$

$$\{[35 \div 7 + (3 + 15 \div 5) \cdot 3] \cdot 2 - (19 - 7) \div 6\} \cdot 2 + 12$$

$$\{[35 \div 7 + (3 + 3) \cdot 3] \cdot 2 - (19 - 7) \div 6\} \cdot 2 + 12$$

$$\{[35 \div 7 + 6 \cdot 3] \cdot 2 - (19 - 7) \div 6\} \cdot 2 + 12$$

$$\{[5 + 6 \cdot 3] \cdot 2 - (19 - 7) \div 6\} \cdot 2 + 12$$

$$\{[5 + 18] \cdot 2 - (19 - 7) \div 6\} \cdot 2 + 12$$

$$\{23 \cdot 2 - (19 - 7) \div 6\} \cdot 2 + 12$$

$$\{46 - (19 - 7) \div 6\} \cdot 2 + 12$$

$$\{46 - 12 \div 6\} \cdot 2 + 12$$

$$\{46 - 2\} \cdot 2 + 12$$

$$44 \cdot 2 + 12$$

$$88 + 12$$

$$100$$

3. Qual destes números reais é o maior:

$$\sqrt{13} \text{ ou } \frac{29}{10}$$

Para saber qual desses números é maior, precisamos saber seus valores decimais.

- $\sqrt{13} = 3,6055...$ (o que pode ser calculado com o auxílio de uma calculadora)
- $\frac{29}{10} = 29 \div 10 = 2,9$

É óbvio que $3,6055 > 2,9$

$$\text{Portanto, } \sqrt{13} > \frac{29}{10}$$

4. Analise cada uma das sentenças a seguir e diga se são verdadeiras ou falsas:

a) $57 \in \mathbb{R}_+$

R: Verdadeira. $\mathbb{R}_+$ é o conjunto dos números reais POSITIVOS. Como 57 é positivo e é um número real, ele *pertence* ($\in$) a esse conjunto.

b) $25 \notin \mathbb{R}_-$

R: Verdadeira. $\mathbb{R}_-$ é o conjunto dos números reais NEGATIVOS. Como 25 é um número real, MAS NÃO É NEGATIVO (ele é positivo), ele *NÃO pertence* ($\notin$) a esse conjunto.

c) $\sqrt{-100} \in \mathbb{R}$

R: Falsa. $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais. Contudo, não existe RAIZ DE NÚMERO NEGATIVO NO CONJUNTO DOS REAIS. Portanto, essa RAIZ NÃO PERTENCE à esse conjunto. O símbolo ($\in$) deve ser trocado por ($\notin$).

d) $-\pi \notin \mathbb{R}_-$

R: FALSA. $\mathbb{R}_-$ é o conjunto dos números reais NEGATIVOS. Como $-\pi$ é negativo e é um número real, ele *pertence* ($\in$) a esse conjunto. O símbolo ($\notin \rightarrow$ de “não pertence”) deve ser trocado por ($\in$).

Lição 4 – Introdução de Potência e Raiz

2. Por que as raízes são importantes no cálculo de áreas de um quadrado?

Se considerarmos que $l \cdot l = l^2$, iremos nos lembrar de que “toda raiz ao quadrado resulta no próprio radicando”, e chegamos à conclusão:

$$A = l \cdot l$$

$$2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{Logo } l = \sqrt{2}.$$

Sem as raízes, não seria possível calcular o lado de nenhum quadrado cuja área não fosse um quadrado perfeito (quadrado perfeito é todo número que possui raiz quadrada exata).

Lição 5 – Propriedades de Potência

1. Prove que as propriedades das potências são verdadeiras substituindo as letras por números para efetuar as contas:

- 1ª Propriedade: multiplicação com potências de mesma base:

$$5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3}$$

$$25 \cdot 125 = 5^5$$

$$3125 = 3125$$

Assim, provamos a propriedade.

- 2ª Propriedade: divisão com potências de mesma base:

$$\frac{5^3}{5^1} = 5^{3-1}$$

$$\frac{125}{5} = 5^2$$

$$25 = 25$$

Assim, provamos a propriedade.

- 3ª Propriedade: multiplicação de potências de mesmo expoente:

$$5^{-3} \cdot 2^{-3} = (5 \cdot 2)^{-3}$$

$$\frac{1}{125} \cdot \frac{1}{8} = (10)^{-3}$$

$$\frac{1}{1000} = \frac{1}{1000}$$

Assim, provamos a propriedade.

- 4ª Propriedade: divisão de potências de mesmo expoente:

$$\frac{5^2}{3^2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$\frac{25}{9} = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3}$$

$$\frac{25}{9} = \frac{25}{9}$$

Assim, provamos a propriedade.

2. Calcule as potências:

a) 5^3

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125$$

b) $(-3)^5$

$$-3 \cdot -3 \cdot -3 \cdot -3 \cdot -3 =$$

$$9 \cdot -3 \cdot -3 \cdot -3 =$$

$$-27 \cdot -3 \cdot -3 =$$

$$81 \cdot -3 =$$

$$-243$$

c) $(-6)^2$

$$-6 \cdot -6 = 36$$

d) $(0,1)^3$

$$0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,01 \cdot 0,1 = 0,001$$

e) $(1,5)^2$

$$1,5 \cdot 1,5 = 2,25$$

$$f) \left(\frac{7}{3}\right)^0 = 1$$

Todo número elevado a 0 é igual a 1.

$$g) (0,9)^2$$

$$0,9 \cdot 0,9 = 0,81$$

$$h) \left(-\frac{1}{2}\right)^4$$

$$-\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} =$$

$$\frac{-1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot -1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} =$$

$$\frac{1 \cdot -1 \cdot -1}{4 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$\frac{-1 \cdot -1}{8 \cdot 2}$$

$$\frac{1}{16}$$

$$i) \left(-\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\frac{-2}{3} \cdot \frac{-2}{3} \cdot \frac{-2}{3}$$

$$\frac{-2 \cdot -2 \cdot -2}{3 \cdot 3 \cdot 3} =$$

$$\frac{4 \cdot -2}{9 \cdot 3} =$$

$$\frac{-8}{27}$$

3. Calcule $\frac{x^2y^2 - x^3y}{y^2 - x^2}$, para $x = 2$ e $y = 5$. (Deixe o resultado em forma de fração).

Se $x = 2$, substituímos “2” no lugar de “x”.

Se $y = 5$, substituímos “5” no lugar de “y”:

$$\frac{x^2 \cdot y^2 - x^3 \cdot y}{y^2 - x^2} = \frac{2^2 \cdot 5^2 - 2^3 \cdot 5}{5^2 - 2^2}$$

$$\frac{4 \cdot 5^2 - 2^3 \cdot 5}{5^2 - 2^2} =$$

$$\frac{4 \cdot 25 - 2^3 \cdot 5}{5^2 - 2^2} =$$

$$\frac{4 \cdot 25 - 8 \cdot 5}{5^2 - 2^2} =$$

$$\frac{4 \cdot 25 - 8 \cdot 5}{25 - 4} =$$

$$\frac{100 - 8 \cdot 5}{25 - 4} =$$

$$\frac{100 - 40}{25 - 4} =$$

$$\frac{60}{25 - 4} =$$

$$\frac{60}{21}$$

Simplifique a fração:

$$\frac{60}{21} = \frac{60 \div 3}{21 \div 3} = \frac{20}{7}$$

Assim, se $x = 2$ e $y = 5$, a expressão vale $\frac{20}{7}$.

4. Calcule

$$3\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot 2^{-1} - 3 \cdot 2^0$$

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot 2^{-1} - 3 \cdot 2^0$$

Resolva primeiro as potências:

$$3 \cdot \frac{1^3}{2^3} - 5 \cdot \frac{(-1)^2}{2^2} + 5 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 1 =$$

$$3 \cdot \frac{1}{8} - 5 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 1 =$$

$$\frac{3 \cdot 1}{8} - \frac{5 \cdot 1}{4} + \frac{5 \cdot 1}{2} - 3 \cdot 1 =$$

$$\frac{3}{8} - \frac{5}{4} + \frac{5}{2} - 3 =$$

$$\frac{3}{8} - \frac{5 \cdot 2}{4 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 4} - 3 =$$

$$\frac{3}{8} - \frac{10}{8} + \frac{20}{8} - 3 =$$

$$\frac{3-10+20}{8} - 3 =$$

$$\frac{13}{8} - 3 =$$

$$\frac{13}{8} - \frac{3}{1} = \frac{13}{8} - \frac{3 \cdot 8}{1 \cdot 8} =$$

$$\frac{13}{8} - \frac{24}{8} =$$

$$\frac{13-24}{8} =$$

$$\frac{-11}{8}$$

5. Escreva na forma mais simples a expressão:

$$(a \cdot b \cdot c)^5 \cdot (a \cdot b)^3 \cdot c^2$$

Utilize a propriedade da multiplicação de potências de mesmo expoente:

$$a^5 \cdot b^5 \cdot c^5 \cdot (a \cdot b)^3 \cdot c^2$$

$$a^5 \cdot b^5 \cdot c^5 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot c^2$$

Rearranje os fatores (a multiplicação é comutativa, ou seja, a ordem dos fatores não altera o produto → logo, tanto faz a ordem da multiplicação):

$$a^5 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot b^5 \cdot c^5 \cdot c^2$$

Utilize a propriedade da multiplicação com potências de mesma base:

$$a^{5+3} \cdot b^{5+3} \cdot c^{5+2}$$

$$a^8 \cdot b^8 \cdot c^7$$

6. Qual é a potência que devemos colocar em lugar do símbolo * para que cada uma das seguintes sentenças seja verdadeira?

a) $3^{11} : * = 3^7$

Em primeiro lugar, **note que a base da potência deve ser 3.**

Pois, o resultado é uma potência de base 3; o que nos leva a concluir que é uma divisão de potências de mesma base.

Lembre-se que $\rightarrow$ na divisão de potências de mesma base, *mantemos a base e subtraímos o expoente*.

Agora, qual é o expoente da potência de base 3?

Devemos pensar: que número devemos subtrair de 11 para obter 7?

O expoente só pode ser 4.

Logo:

$$* = 3^4$$

Pois:

$$3^{11} : 3^4 = 3^7$$

$$\text{b) } (*)^3 = 216$$

Devemos pensar: que número que multiplicado por ele mesmo 3 vezes dá 216?

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 36 \cdot 6 = 216$$

Logo:

$$* = 6$$

Pois:

$$(6^3) = 216$$

$$\text{c) } * \cdot (-10)^9 = (-10)^{11}$$

Em primeiro lugar, ***note que a base da potência deve ser -10 .***

Pois, o resultado é uma potência de base -10 ; o que nos leva a concluir que é uma multiplicação de potências de mesma base.

Lembre-se que $\rightarrow$ na multiplicação de potências de mesma base, *mantemos a base e somamos o expoente*.

Agora, qual é o expoente da potência de base -10 ?

Devemos pensar: que número devemos somar com 9 para obter 11?

O expoente só pode ser 2.

Logo:

$$* = (-10^2)$$

Pois:

$$(-10^2) \cdot (-10^9) = (-10^{11})$$

$$\text{d) } (-0,1)^{10} \cdot (-0,1)^5 \cdot * = (-0,1)^{16}$$

Em primeiro lugar, ***note que a base da potência deve ser $-0,1$.***

Pois, o resultado é uma potência de base $-0,1$; o que nos leva a concluir que é uma multiplicação de potências de mesma base.

Lembre-se que $\rightarrow$ na multiplicação de potências de mesma base, *mantemos a base e somamos o expoente*.

Agora, qual é o expoente da potência de base $-0,1$?

Devemos pensar: que número devemos somar com 10 e 5 para obter 16?

O expoente só pode ser 1 ($10 + 5 + 1 = 16$).

Logo:

$$* = (-0,1)^1$$

Pois:

$$(-0,1)^{10} \cdot (-10)^5 \cdot (-10)^1 = -10^{16}$$

Lição 6 – Propriedades de Potência

1. Prove que as propriedades das potências são verdadeiras substituindo as letras por números para efetuar as contas.

- 5ª Propriedade: potência elevada a um expoente:

$$(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3}$$

$$(4)^3 = 2^6$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$64 = 64$$

Assim, provamos a propriedade.

- 6ª Propriedade: elevado a 0

$$4^0 = 1$$

$$1 = 1$$

Assim, provamos a propriedade.

- 7ª Propriedade: elevado a -1 :

$$4^1 = 4$$

$$4 = 4$$

Assim, provamos a propriedade.

8ª Propriedade: potência de expoente negativo:

$$25^{-2} = (25^2)^{-1}$$

$$\frac{1}{25^2} = (625)^{-1}$$

$$\frac{1}{625} = \frac{1}{625}$$

Assim, provamos a propriedade.

2. Calcule x , de modo que $10^{2x-4} = 1$:

Lembre-se que podemos escrever o “1” como qualquer potência elevada a “0”.

Logo: $1 = 10^0$. Substitua o 1 por 10^0 :

$$10^{2x-4} = 10^0$$

Igual os expoentes:

$$2x - 4 = 0$$

$$2x = 4$$

$$x = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$

3. Calcule o valor de $(-1)^n + (-1)^{2n} + (-1)^{3n}$ em duas situações:

a) 1ª situação: n é ímpar:

Lembre-se:

- Se um número é negativo e é elevado a um expoente PAR, ele se torna positivo.
- Se um número é negativo e é elevado a um expoente ÍMPAR, ele permanece negativo.
- O número “-1” elevado a algum expoente só pode resultar em -1 ou +1 (Pois, fazemos número vezes número e depois fazemos o jogo de sinal $\rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$; o que muda será apenas o sinal).

$$\text{Então: } (-1)^{\text{par}} = 1 \text{ e } (-1)^{\text{ímpar}} = -1$$

Se “ n ” é ímpar:

$$\rightarrow (-1)^n = (-1)^{\text{ímpar}} = -1$$

$$\rightarrow (-1)^{2n} = (-1)^{2 \cdot \text{ímpar}} = (-1)^{\text{par}} = 1$$

Perceba que quando multiplicamos um número ímpar por 2, formamos um número par:

$$(p.e : 3 \times 2 = 6)$$

$$\rightarrow (-1)^{3n} = (-1)^{3 \cdot \text{ímpar}} = (-1)^{\text{ímpar}} = -1$$

Perceba que quando multiplicamos um número ímpar por outro número ímpar, formamos OUTRO número ímpar:

$$(p.e : 3 \times 5 = 15)$$

Logo, se “n” é ímpar: $(-1)^n = -1$; $(-1)^{2n} = 1$ e $(-1)^{3n} = -1$.

Assim:

$$\begin{aligned} (-1)^n + (-1)^{2n} + (-1)^{3n} &= \\ -1 + 1 - 1 &= \\ 0 - 1 &= \\ -1 & \end{aligned}$$

b) 2ª situação: n é par:

Lembre-se: $(-1)^{\text{par}} = 1$ e $(-1)^{\text{ímpar}} = -1$

Se “n” é par:

$$\begin{aligned} \rightarrow (-1)^n &= (-1)^{\text{par}} = 1 \\ \rightarrow (-1)^{2n} &= (-1)^{2 \cdot \text{par}} = (-1)^{\text{par}} = 1 \end{aligned}$$

Perceba que quando multiplicamos um número par por 2, formamos um OUTRO número par:

$$\begin{aligned} (p.e : 4 \times 2 = 8) \\ \rightarrow (-1)^{3n} &= (-1)^{3 \cdot \text{par}} = (-1)^{\text{par}} = 1 \end{aligned}$$

*Perceba que quando multiplicamos um número ímpar (3) por um número par, formamos um número **par**:*

$$(p.e : 3 \times 4 = 12)$$

Logo, se “n” é ímpar: $(-1)^n = -1$; $(-1)^{2n} = 1$ e $(-1)^{3n} = -1$.

Assim:

$$\begin{aligned} (-1)^n + (-1)^{2n} + (-1)^{3n} &= \\ 1 + 1 + 1 &= \\ 3 & \end{aligned}$$

4. Reduza a uma só potência aplicando as propriedades das potências:

a) $\frac{10^8}{10^3}$

$$\frac{10^8}{10^3} = 10^{8-3} = 10^5$$

$$b) \frac{(a^3)^3 \cdot a^{-2}}{a}$$

$$\frac{(a^3)^3 \cdot a^{-2}}{a} = \frac{a^{3 \cdot 3} \cdot a^{-2}}{a} =$$

$$\frac{a^9 \cdot a^{-2}}{a} = \frac{a^{9+(-2)}}{a} = \frac{a^{9-2}}{a} =$$

$$\frac{a^7}{a^1} = a^{7-1} = a^6$$

5. Classifique como verdadeiro (V) ou falso (F), e corrija as afirmações falsas:

$$a) 2^7 \cdot 2^2 = 2^9$$

Verdadeiro (V)

$$b) (7^3)^2 = 7^5$$

Falso (F)

Correção: $(7^3)^2 = 7^{3 \cdot 2} = 7^6$

$$c) 2^{3^2} = (2^3)^2$$

Falso (F)

Correção: $2^{3^2} = 2^9$

O “2” está elevando o “3” e não a potência 2^3 . Para que o “2” estivesse elevando a potência 2^3 , haveria um parêntese originalmente (não devemos criar um parêntese).

$$d) (5+2)^2 = 5^2 + 2^2$$

Falso (F)

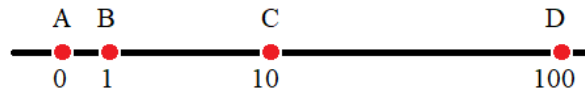
Correção: $(5+2)^2 = (7)^2$

A soma que está dentro dos parênteses deve ser realizada primeiro.

$$e) \frac{10^3}{10^5}$$

Verdadeira (V)

6. Na reta numérica estão assinalados alguns pontos:



Entre que pontos consecutivos deve ser assinalado o número resultante do cálculo de:

$$\frac{10^{4+n} - 10^3 \cdot 10^n}{10^4 \cdot 10^n}$$

Comece “abrindo” a potência 10^{4+n} . Se há uma soma no expoente é porque é uma multiplicação de potências de mesma base:

$$\frac{10^{4+n} - 10^3 \cdot 10^n}{10^4 \cdot 10^n} = \frac{10^4 \cdot 10^n - 10^3 \cdot 10^n}{10^4 \cdot 10^n}$$

Agora, evidencie 10^n :

$$\frac{10^4 \cdot 10^n - 10^3 \cdot 10^n}{10^4 \cdot 10^n} = \frac{10^n \cdot (10^4 - 10^3)}{10^n \cdot (10^4)}$$

Corte o 10^n :

$$\begin{aligned} \frac{10^n \cdot (10^4 - 10^3)}{10^n \cdot (10^4)} &= \frac{10^4 - 10^3}{10^4} \\ &= \frac{10000 - 1000}{10000} \\ &= \frac{9000}{10000} = 9000 \div 10000 = 0,9 \end{aligned}$$

O número 0,9 está entre 0 e 1. Logo, o resultado desta expressão está entre os pontos A e B.

Lição 7 – Notação Científica

1. Passe para notação científica os seguintes números:

a) Quando procuramos a palavra Igreja Católica no Google, encontramos 4.830.000 resultados.

R: $4,83 \cdot 10^6$

A vírgula anda 6 casas para a esquerda (o 6 fica positivo).

b) A distância do Brasil até o Vaticano é de 9.062.000 metros.

R: $9,062 \cdot 10^6$

A vírgula anda 6 casas para a esquerda (o 6 fica positivo).

c) Tenho uma relíquia de São João Bosco: um pedaço do osso dele, que mede 0,0024 metros.

R: $2,4 \cdot 10^{-3}$

A vírgula anda 3 casas para a direita (o 3 fica negativo).

2. Transforme os números abaixo em notação científica:

a) 1.234.567.000

R: $1,234567 \cdot 10^9$

A vírgula anda 9 casas para a esquerda (o 9 fica positivo).

b) 0,0000000000009

R: $9 \cdot 10^{-12}$

A vírgula anda 12 casas para a direita (o 12 fica negativo).

c) 0,0000001240

R: $1,240 \cdot 10^{-7}$ ou $1,24 \cdot 10^{-7}$

A vírgula anda 7 casas para a direita (o 7 fica negativo).

d) 1.004,58

R: $1,00458 \cdot 10^3$

A vírgula anda 3 casas para a esquerda (o 3 fica positivo).

e) 4.560.000.000.000.000

R: $4,56 \cdot 10^{15}$

A vírgula anda 15 casas para a esquerda (o 15 fica positivo).

f) 0,8904

R: $8,904 \cdot 10^{-1}$

A vírgula anda 1 casas para a direita (o 1 fica negativo).

Lição 8 – Raiz enésima

1. Sabendo que $\sqrt{5}=2,23606797\dots$ e que $\sqrt{2}=1,41421356\dots$, calcule, utilizando aproximações com duas casas decimais:

Em primeiro lugar, faça a aproximação:

Quando se pede um arredondamento com duas casas decimais, a terceira casa deve ser analisada.

$$\sqrt{5} = 2,23\textcolor{blue}{6}06797\dots$$

Como $6 > 5$:

$$\sqrt{5} = 2,24$$

(a segunda casa se altera: soma-se +1 ao algarismo da segunda casa)

$$\sqrt{2} = 1,41\underline{4}21356\dots$$

Como $4 < 5$:

$$\sqrt{2} = 1,41$$

(a segunda casa não se altera)

a) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$

Basta somar $1,41 + 2,24 = 3,65$

Atente-se que, ao armar a conta, é necessário colocar unidade embaixo de unidade, décimos embaixo de décimos e centésimos embaixo de centésimos.

b) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

Sabemos que:

$$\sqrt{5} \cong 2,24 \quad \text{e} \quad \sqrt{2} \cong 1,41$$

Basta fazer $2,24 - 1,41 = 0,83$.

Atente-se que, ao armar a conta, é necessário colocar unidade embaixo de unidade, décimos embaixo de décimos e centésimos embaixo de centésimos.

2. Com os dados do exercício acima, calcule usando aproximações com três casas decimais:

Em primeiro lugar, faça a aproximação:

Quando se pede um arredondamento com três casas decimais, a 4ª casa deve ser analisada.

$$\sqrt{5} = 2,236\underline{0}6797\dots$$

Como $0 < 5$:

$$\sqrt{5} = 2,236$$

(a 3ª casa não se altera)

$$\sqrt{2} = 1,414\underline{2}1356\dots$$

Como $2 < 5$:

$$\sqrt{2} = 1,414$$

(a 3ª casa não se altera)

a) $2\sqrt{2}$

Basta fazer: $2 \cdot 1,414 = 2,828$

$$b) \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Basta fazer: $2,236 : 2 = 1,118$.

$$c) \frac{\sqrt{5}}{2} - 2\sqrt{2}$$

Perceba que a letra c) pede a subtração do resultado da letra b) menos resultado da letra a). Ou seja:

Já vimos que $2 \cdot \sqrt{2} = 2,828$

$$\text{E que } \frac{\sqrt{5}}{2} = 1,118$$

Logo:

$$\frac{\sqrt{5}}{2} - 2\sqrt{2} = 1,118 - 2,828 = -1,71$$

$$d) \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$$

Basta fazer $2,236 \cdot 1,414 = 3,161704$

Lição 9 – Relação de Potência e Raiz

1. Calcule utilizando a relação entre potência e raiz:

$$a) 49^{\frac{1}{2}}$$

Lembre-se → pela propriedade sabemos que:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Então:

$$49^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{49^1} = \sqrt{49} = 7$$

Note que quando a raiz é quadrada, podemos omitir o 2 ($\sqrt[2]{\text{número}} = \sqrt{\text{número}}$).

$$b) 16^{\frac{3}{2}}$$

Lembre-se → pela propriedade sabemos que:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Então:

$$16^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{16^3} = \sqrt{16 \cdot 16 \cdot 16} = \sqrt{4096} = 64$$

Note que $4096 = 2^{12}$. Então:

$$\sqrt{4096} = \sqrt{2^{12}} = 2^{\frac{12}{2}} = 2^6 = 64$$

c) $9^{0,5}$

$$0,5 = \frac{1}{2} \rightarrow 9^{0,5} = 9^{\frac{1}{2}}$$

Lembre-se $\rightarrow$ pela propriedade sabemos que:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Então:

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1} = \sqrt{9} = 3$$

d) $81^{\frac{-1}{4}}$

Lembre-se $\rightarrow$ pela propriedade sabemos que:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Então:

$$81^{\frac{-1}{4}} = \sqrt[4]{81^{-1}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} =$$

Aplique a seguinte propriedade da raiz de uma fração: $\sqrt[z]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[z]{x}}{\sqrt[z]{y}}$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{1}{3}$$

Note que $81 = 3^4$. Então:

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3^{\frac{4}{4}} = 3^1 = 3$$

2. Escreva como potência:

a) $\sqrt[3]{2^4}$

Lembre-se $\rightarrow$ pela propriedade sabemos que:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Então o contrário também é verdade:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Logo:

$$\sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$$

b) $\sqrt{7}$

Sabemos que:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Logo:

$$\sqrt{7} = \sqrt[2]{7} = \sqrt[2]{7^1} = 7^{\frac{1}{2}}$$

Note que:

- quando a raiz é quadrada, o 2 está omitido ($\sqrt{\text{número}} = \sqrt[2]{\text{número}}$).
- quando um número não “tem” expoente é porque está elevado a 1 ($7 = 7^1$).

Lição 10 – Propriedades do radical

1. Calcule:

a) $3 + \sqrt{16} - 25$

Comece sempre pela(s) raiz(es).

$$3 + 4 - 25$$

$$7 - 25$$

$$-18$$

b) $5\sqrt{49} - \sqrt{121}$

Comece sempre pelas raízes.

$$5 \cdot 7 - \sqrt{121}$$

$$5 \cdot 7 - 11$$

Faça primeiro a multiplicação.

$$35 - 11$$

$$24$$

c) $\sqrt{\frac{4}{25}} + 3\sqrt{\frac{1}{9}}$

Comece sempre pelas raízes.

Aplique a seguinte propriedade da raiz de uma fração: $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} + 3\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} + 3\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} =$$

$$\frac{2}{5} + 3\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{5} + \frac{3 \cdot 1}{3} =$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{3} = \frac{2}{5} + 1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{1} =$$

$$\frac{2}{5} + \frac{1 \cdot 5}{1 \cdot 5} = \frac{2}{5} + \frac{5}{5} = \frac{2+5}{5} = \frac{7}{5}$$

2. Dê o valor das expressões:

a) $\sqrt[3]{-1}$

-1, pois $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$

Aplique a seguinte propriedade da raiz de uma fração: $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$$

- $\sqrt[3]{1} = 1$, pois $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
- $\sqrt[3]{125} = 5$, pois $5 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125$

c) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$

Aplique a seguinte propriedade da raiz de uma fração: $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{-2}{3}$$

- $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 4 \cdot (-2) = -8$
- $\sqrt[3]{27} = 3$, pois $3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 3 = 27$

d) $\sqrt[4]{256}$

Note que : $256 = 2^8$

$$\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{2^8} =$$

Aplice a propriedade da relação entre potência e raiz: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$$\sqrt[4]{2^8} = 2^{\frac{8}{4}} = 2^2 = 4$$

e) $\sqrt[4]{\frac{1}{10000}}$

Aplice a seguinte propriedade da raiz de uma fração: $\sqrt[z]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[z]{x}}{\sqrt[z]{y}}$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{10000}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{10000}} = \frac{1}{10}$$

- $\sqrt[4]{1} = 1$, pois $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
- $\sqrt[4]{10000} = 10$, pois $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$

f) $\sqrt[5]{32}$

Note que : $32 = 2^5$

$$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5}$$

Aplice a propriedade da relação entre potência e raiz: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$$\sqrt[5]{2^5} = 2^{\frac{5}{5}} = 2^1 = 2$$

g) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$

Aplice a seguinte propriedade da raiz de uma fração: $\sqrt[z]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[z]{x}}{\sqrt[z]{y}}$

$$\sqrt[5]{\frac{-1}{32}} = \frac{\sqrt[5]{-1}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{-1}{2}$$

- $\sqrt[5]{-1} = -1$, pois $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$
- $\sqrt[5]{32} = 2$, como calculamos no item anterior.

h) $\sqrt[6]{0}$

$$\sqrt[6]{0} = 0, \text{ pois } 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

i) $\sqrt[10]{1024}$

Note que $1024 = 2^{10}$

$$\sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}}$$

Aplice a propriedade da relação entre potência e raiz: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$$\sqrt[10]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{10}} = 2^1 = 2$$

3. Calcule:

a) $5\sqrt{9} - 3\sqrt[3]{8}$

Comece pelas raízes.

$$5 \cdot 3 - 3\sqrt[3]{8} =$$

$$5 \cdot 3 - 3 \cdot 2 =$$

$$15 - 3 \cdot 2 =$$

$$15 - 6 =$$

$$9$$

b) $\sqrt{21 \cdot 4 - 3}$

Comece pela multiplicação:

$$\sqrt{84 - 3} =$$

$$\sqrt{81} =$$

$$9$$

c) $\sqrt{6^2 + 8^2} =$

Comece pelas potências.

$$\sqrt{36 + 8^2} =$$

$$\sqrt{36 + 64} =$$

$$\sqrt{100} =$$

$$10$$

d) $3^0 - \sqrt[3]{0} =$

Lembre-se que qualquer número **elevado a 0** resulta em 1.

$$1 - \sqrt[3]{0}$$

Note que $\sqrt[3]{0} = 0$, porque $0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

$$1 - 0 =$$

$$1$$

e) $\left(\sqrt{9 - 4 \cdot 2} - 5\right)^2 \times$

Comece fazendo a multiplicação que está dentro da raiz.

$$(\sqrt{9-8}-5)^2 x =$$

$$(\sqrt{1}-5)^2 x =$$

$$(1-5)^2 x =$$

$$(-4)^2 x$$

$$16x$$

$$f) \sqrt{52-32} \cdot \sqrt[3]{7-2^3}$$

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt[3]{7-2^3} =$$

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt[3]{7-8} =$$

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt[3]{-1}$$

$$\sqrt{20} \cdot -1$$

$$-\sqrt{20}$$

$$-2\sqrt{5}$$

A $\sqrt{20}$ pode ser escrita como $2\sqrt{5}$, pois:

$$\sqrt{20} = -\sqrt{4 \cdot 5}$$

Utilize a propriedade da multiplicação dentro de uma raiz: $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$

$$-\sqrt{4 \cdot 5} = -\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = -2\sqrt{5}$$

Lição 11 – Cálculo das raízes: fatoração

1. Faça a fatoração dos seguintes radicandos:

$$a) \sqrt{729}$$

A fatoração do número deve ficar assim:

$$729 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$$

(a ordem da esquerda para a direita da multiplicação é a que deve constar na chave de cima para baixo)

$$\sqrt{729} = \sqrt{3^6} = 3^{\frac{6}{2}} = 3^3 = 27$$

$$b) \sqrt[3]{343}$$

A fatoração do número deve ficar assim:

$$343 = 7 \times 7 \times 7 = 7^3$$

(a ordem da esquerda para a direita da multiplicação é a que deve constar na chave de cima para baixo)

$$\sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7^{\frac{3}{3}} = 7^1 = 7$$

c) $\sqrt[5]{1024}$

A fatoração do número deve ficar assim:

$$1024 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10}$$

(a ordem da esquerda para a direita da multiplicação é a que deve constar na chave de cima para baixo)

$$\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2 = 4$$

d) $\sqrt{1089}$

A fatoração do número deve ficar assim:

$$1089 = 3 \times 3 \times 11 \times 11 = 3^2 \cdot 11^2$$

(a ordem da esquerda para a direita da multiplicação é a que deve constar na chave de cima para baixo)

$$\sqrt{1089} = \sqrt{3^2 \cdot 11^2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{11^2} = 3^{\frac{2}{2}} \cdot 11^{\frac{2}{2}} =$$

$$3^1 \cdot 11^1 = 3 \cdot 11 = 33$$

Lição 12 - Simplificando Radicais

1. Simplifique os radicais e reduza os termos:

a) $2\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$

Some “número” com “número”:

$$(2+7)\sqrt{3} =$$

$$9\sqrt{3}$$

b) $6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

Some e subtraia “número” com “número”:

$$(6-4+2)\sqrt{2} =$$

$$(2+2)\sqrt{2} =$$

$$4\sqrt{2}$$

c) $\sqrt{50} + 4\sqrt{18} - 6\sqrt{2}$

Simplifique a raiz de 50:

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Simplifique a raiz de 18:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Substitua as raízes simplificadas na expressão:

$$\sqrt{50} + 4\sqrt{18} - 6\sqrt{2} =$$

$$5\sqrt{2} + 4 \cdot 3\sqrt{2} - 6\sqrt{2} =$$

$$5\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 6\sqrt{2} =$$

Some e subtraia “número” com “número”:

$$(5 + 12 - 6)\sqrt{2} =$$

$$(17 - 6)\sqrt{2} =$$

$$11\sqrt{2}$$

$$\text{d) } 2\sqrt{20} - 4\sqrt{45} + \sqrt{125}$$

Simplifique a raiz de 20:

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Simplifique a raiz de 45:

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Simplifique a raiz de 125:

$$\sqrt{125} = \sqrt{25 \cdot 5} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

Substitua as raízes simplificadas na expressão:

$$2\sqrt{20} - 4\sqrt{45} + \sqrt{125}$$

$$2 \cdot 2\sqrt{5} - 4 \cdot 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$$

$$4\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$$

Some e subtraia “número” com “número”:

$$(4 - 12 + 5)\sqrt{5} =$$

$$(-8 + 5)\sqrt{5} =$$

$$(-3)\sqrt{5} = -3\sqrt{5}$$

$$\text{e) } 3 + \sqrt{16} - 25$$

Comece resolvendo a raiz:

$$3 + 4 - 25$$

$$7 - 25$$

$$-18$$

$$f) 5\sqrt{49} - \sqrt{121}$$

Comece resolvendo as raízes:

$$5 \cdot 7 - \sqrt{121}$$

$$5 \cdot 7 - 11$$

$$35 - 11$$

$$24$$

$$g) \sqrt{\frac{4}{25}} + 3\sqrt{\frac{1}{9}}$$

Comece resolvendo as raízes:

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} + 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}}$$

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} + 3 \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}}$$

$$\frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}}$$

$$\frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{5} + \frac{3 \cdot 1}{3} =$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{3} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} + \frac{15}{15} = \frac{6+15}{15} = \frac{21}{15}$$

Simplifique essa fração:

$$\frac{21}{15} = \frac{21 \div 3}{15 \div 3} = \frac{7}{5}$$

$$h) \sqrt{5} \cdot \sqrt{6}$$

Utilize a propriedade da multiplicação de fração: $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{5 \cdot 6} = \sqrt{30}$$

$$i) \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{10}$$

Utilize a propriedade da multiplicação de raízes: $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$

$$\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{10} = \sqrt[4]{5 \cdot 2 \cdot 10} =$$

$$\sqrt[4]{10 \cdot 10} = \sqrt[4]{100}$$

Note que $100 = 10^2$

$$\sqrt[4]{100} = \sqrt[4]{10^2} = 10^{\frac{2}{4}} = 10^{\frac{2+2}{4+2}} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{10^1} = \sqrt{10}$$

$$j) \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Utilize a propriedade da multiplicação de raízes: $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$

$$\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6 \cdot 3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$$

Utilize a propriedade da divisão de raízes: $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$

$$= \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$k) \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}$$

Utilize a propriedade da divisão de raízes: $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$

$$\sqrt{\frac{18}{6}} = \sqrt{3}$$

$$l) \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[3]{10}}$$

$$\frac{\sqrt{2 \cdot 5}}{\sqrt[3]{10}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[3]{10}} = \frac{10^{\frac{1}{2}}}{10^{\frac{1}{3}}} =$$

$$10^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 10^{\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}} = 10^{\frac{3}{6} - \frac{2}{6}} = 10^{\frac{3-2}{6}}$$

$$= 10^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{10^1} = \sqrt[6]{10}$$

Lição 13 - Introduzindo fator externo do radical

1. Nas expressões seguintes, vamos introduzir o fator externo no radicando:

Lembre-se: um fator externo pode ser introduzido como fator no radicando, quando o escrevemos no radicando com um expoente igual ao índice do radical.

$$a) 8\sqrt{3}$$

$$8\sqrt{3} = \sqrt{8^2 \cdot 3} = \sqrt{64 \cdot 3} = \sqrt{192}$$

$$b) 3\sqrt{5}$$

$$3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$$

$$c) 10\sqrt{7}$$

$$10\sqrt{7} = \sqrt{10^2 \cdot 7} = \sqrt{100 \cdot 7} = \sqrt{700}$$

$$d) 15\sqrt{2}$$

$$15\sqrt{2} = \sqrt{15^2 \cdot 2} = \sqrt{225 \cdot 2} = \sqrt{450}$$

$$e) 2\sqrt[3]{2}$$

$$2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = \sqrt[3]{16}$$

$$f) 3\sqrt[6]{10}$$

$$3\sqrt[6]{10} = \sqrt[6]{3^6 \cdot 10} = \sqrt[6]{729 \cdot 10} = \sqrt[6]{7290}$$

2. Sendo $a \geq 0$ e $b > 0$, introduza o fator externo no radicando:

Lembre-se: um fator externo pode ser introduzido como fator no radicando, quando o escrevemos no radicando com um expoente igual ao índice do radical.

A restrição de a e b serem maiores que zero é porque não existe raiz de índice par de valores negativos.

$$a) 4\sqrt{a}$$

$$4\sqrt{a} = \sqrt{4^2 a} = \sqrt{16a}$$

$$b) 3a\sqrt{b}$$

$$3a\sqrt{b} = \sqrt{3^2 a^2 b} = \sqrt{9a^2 b}$$

$$c) 2a\sqrt{a}$$

$$2a\sqrt{a} = \sqrt{2^2 a^2 a} = \sqrt{4a^3}$$

$$d) 5a\sqrt{ab}$$

$$5a\sqrt{ab} = \sqrt{5^2 a^2 b^2 ab} = \sqrt{25a^3 b^3}$$

$$e) a\sqrt[3]{ab}$$

$$a\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a^3 ab} = \sqrt[3]{a^4 b}$$

$$f) b\sqrt[5]{2b}$$

$$b\sqrt[5]{2b} = \sqrt[5]{b^5 2b} = \sqrt[5]{2b^6}$$

g) $2\sqrt[3]{2}$

$$2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^4}$$

3. Sendo x e y dois números reais positivos, transforme em um só radical as expressões:

a) $\sqrt[6]{y^3\sqrt[3]{y^2}}$

Coloque o “y” dentro da raiz cúbica, multiplicando o y^2 (*lembre-se que ele entra como y^3*):

$$\sqrt[6]{y^3\sqrt[3]{y^2}} = \sqrt[6]{\sqrt[3]{y^3 \cdot y^2}} =$$

Em multiplicação de potências de mesma base, somamos os expoentes:

$$\sqrt[6]{\sqrt[3]{y^{3+2}}} = \sqrt[6]{\sqrt[3]{y^5}} =$$

Multiplique os índices das raízes.

$$\sqrt[6 \cdot 3]{y^5} = \sqrt[18]{y^5}$$

b) $\sqrt{y^5\sqrt[5]{y^2x^3}}$

Coloque o “y” dentro da raiz quinta, multiplicando o y^2x^3 (*lembre-se que ele entra como y^5*):

$$\sqrt{y^5\sqrt[5]{y^2x^3}} = \sqrt{\sqrt[5]{y^5 \cdot y^2x^3}} =$$

Em multiplicação de potências de mesma base, somamos os expoentes:

$$\sqrt{\sqrt[5]{y^{5+2}x^3}} = \sqrt{\sqrt[5]{y^7x^3}}$$

Multiplique os índices das raízes.

(*lembre-se que quando “não tem nada” é raiz quadrada: índice 2*).

$$\sqrt[2 \cdot 5]{y^7x^3} = \sqrt[10]{y^7x^3}$$

Lição 14 – Adição algébrica de radicais

1. Calcule o valor de $\sqrt{50} + \sqrt{18}$:

Simplifique a raiz de 50:

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Simplifique a raiz de 18:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Substitua as raízes simplificadas na expressão:

$$\sqrt{50} + \sqrt{18} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$$

Some “número com número”:

$$(5+3)\sqrt{2} =$$

$$8\sqrt{2}$$

2. Escreva na forma mais simples possível a expressão:

$$\sqrt[3]{125x^4y} - \sqrt[3]{27x^4y} + \sqrt[3]{8x^4y}$$

Lembre-se: quando há algo do tipo “5x” ou “xy” está oculto o sinal da multiplicação.

$$= \sqrt[3]{125 \cdot x^4 \cdot y} - \sqrt[3]{27 \cdot x^4 \cdot y} + \sqrt[3]{8 \cdot x^4 \cdot y}$$

Utilize a propriedade da multiplicação dentro de uma raiz: $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$

$$= \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{y}$$

Resolva algumas raízes:

$$= 5 \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{y}$$

$$= 5 \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{y} - 3 \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{y}$$

$$= 5 \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{y} - 3 \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{y} + 2 \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{y}$$

Note que $x^4 = x^3 \cdot x$

$$= 5 \cdot \sqrt[3]{x^3 \cdot x} \cdot \sqrt[3]{y} - 3 \cdot \sqrt[3]{x^3 \cdot x} \cdot \sqrt[3]{y} + 2 \cdot \sqrt[3]{x^3 \cdot x} \cdot \sqrt[3]{y}$$

$$= 5 \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} - 3 \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} + 2 \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$$

$$= 5 \cdot x^{\frac{3}{3}} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} - 3 \cdot x^{\frac{3}{3}} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} + 2 \cdot x^{\frac{3}{3}} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$$

$$= 5 \cdot x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} - 3 \cdot x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} + 2 \cdot x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$$

$$= 5x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} - 3x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} + 2x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$$

Utilize a propriedade da multiplicação dentro de uma raiz: $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$

$$= 5x \cdot \sqrt[3]{x \cdot y} - 3x \cdot \sqrt[3]{x \cdot y} + 2x \cdot \sqrt[3]{x \cdot y}$$

Soma e subtraia os termos semelhantes:

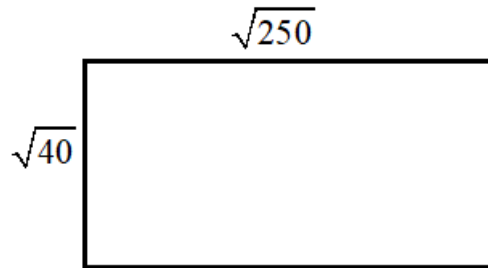
$$= (5x - 3x + 2x) \cdot \sqrt[3]{x \cdot y}$$

$$= (2x + 2x) \cdot \sqrt[3]{x \cdot y}$$

$$= 4x \cdot \sqrt[3]{x \cdot y}$$

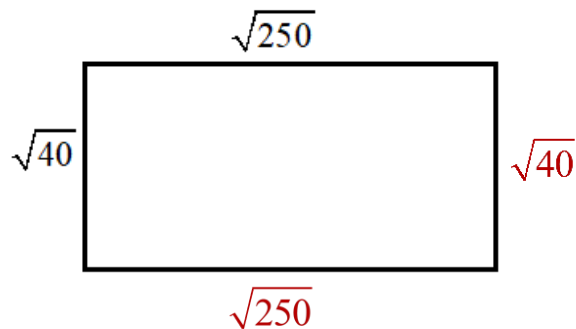
$$= 4x\sqrt[3]{x \cdot y}$$

3. As medidas do retângulo são dadas em centímetros. Determine o perímetro deste retângulo:



O perímetro é a soma de todos os lados.

Note que: os lados opostos têm a mesma medida.



Perímetro = soma de todos os lados.

$$\text{Perímetro} = \sqrt{40} + \sqrt{250} + \sqrt{40} + \sqrt{250}$$

Simplifique a raiz de 40:

$$\sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

Note que nós também poderíamos escrever o 40 como 9×5 . Mas isso nos resultaria em uma expressão com raiz de 5.

Quando fôssemos simplificar a raiz de 250 não conseguiríamos chegar em uma expressão com raiz de 5...

É interessante chegarmos em expressões com as mesmas raízes para que consigamos somar os termos semelhantes.

Simplifique a raiz de 250:

$$\sqrt{250} = \sqrt{25 \cdot 10} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{10} = 5\sqrt{10}$$

Substitua as raízes simplificadas na expressão:

$$\text{Perímetro} = \sqrt{40} + \sqrt{250} + \sqrt{40} + \sqrt{250} = 2\sqrt{10} + 5\sqrt{10} + 2\sqrt{10} + 5\sqrt{10} =$$

Some “número com número”:

$$(2+5+2+5) \cdot \sqrt{10} =$$

$$14 \cdot \sqrt{10} =$$

$$14\sqrt{10}$$

$$\text{Perímetro} = 14\sqrt{10}$$

Lição 15 – Multiplicação com radicais

1. Efetue as multiplicações:

Lembre-se: para multiplicar radicais de mesmo índice, basta conservar o índice e multiplicar os radicandos. No final, extraímos a raiz.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\text{a) } \sqrt{30} \cdot \sqrt{12}$$

$$\sqrt{30} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{30 \cdot 12} = \sqrt{360}$$

Simplifique a raiz de 360:

$$\sqrt{360} = \sqrt{36 \cdot 10} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{10} = 6 \cdot \sqrt{10} = 6\sqrt{10}$$

$$\text{b) } \sqrt[11]{3x} \cdot \sqrt[11]{5x}$$

$$\sqrt[11]{3x} \cdot \sqrt[11]{5x} = \sqrt[11]{3x \cdot 5x} = \sqrt[11]{15x^2}$$

$$\text{c) } \sqrt[5]{125} \cdot \sqrt[5]{5}$$

$$\sqrt[5]{125} \cdot \sqrt[5]{5} = \sqrt[5]{125 \cdot 5} = \sqrt[5]{625}$$

$$\text{d) } \sqrt{30} \cdot \sqrt{12}$$

$$\sqrt{30} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{30 \cdot 12} = \sqrt{360}$$

Simplifique a raiz de 360:

$$\sqrt{360} = \sqrt{36 \cdot 10} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{10} = 6 \cdot \sqrt{10} = 6\sqrt{10}$$

$$\text{e) } \sqrt[5]{11} \cdot \sqrt[5]{12} \cdot \sqrt[5]{13}$$

$$\sqrt[5]{11} \cdot \sqrt[5]{12} \cdot \sqrt[5]{13} = \sqrt[5]{11 \cdot 12 \cdot 13} = \sqrt[5]{1716}$$

2. Calcule:

$$\text{a) } \sqrt{2} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{3})$$

Faça a distributiva:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2 \cdot 6} - \sqrt{2 \cdot 3}$$

$$\sqrt{12} - \sqrt{6}$$

Simplifique a raiz de 12:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Substitua a raiz simplificada:

$$\sqrt{12} - \sqrt{6} =$$

$$2\sqrt{3} - \sqrt{6}$$

$$\text{b) } \sqrt{7} \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{2})$$

Faça a distributiva:

$$\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{7} \cdot \sqrt{2} =$$

$$\sqrt{7 \cdot 7} + \sqrt{7 \cdot 2} =$$

$$\sqrt{49} + \sqrt{14} =$$

$$7 + \sqrt{14}$$

$$\text{c) } \sqrt{10} \cdot (3\sqrt{2} - 7\sqrt{4})$$

Faça a distributiva:

$$\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{2} - \sqrt{10} \cdot 7\sqrt{4} =$$

$$\sqrt{10} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{10} \cdot 7 \cdot \sqrt{4} =$$

$$3 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{2} - 7 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} =$$

$$3 \cdot \sqrt{10 \cdot 2} - 7 \cdot \sqrt{4 \cdot 10} =$$

$$3 \cdot \sqrt{20} - 7 \cdot \sqrt{40} =$$

Simplifique a raiz de 20:

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Simplifique a raiz de 40:

$$\sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

Substitua as raízes simplificadas na expressão:

$$3 \cdot \sqrt{20} - 7 \cdot \sqrt{40} =$$

$$3 \cdot 2\sqrt{5} - 7 \cdot 2\sqrt{10} =$$

$$6\sqrt{5} - 14\sqrt{10}$$

$$\text{d) } \sqrt{5} \cdot (\sqrt{4} + 3)$$

Faça a distributiva:

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{4} + \sqrt{5} \cdot 3 =$$

Note que: $\sqrt{4} = 2$

$$\sqrt{5} \cdot 2 + \sqrt{5} \cdot 3 =$$

$$2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} =$$

$$(2 + 3)\sqrt{5} =$$

$$5\sqrt{5}$$

$$\text{e) } \sqrt{2} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{3})$$

Faça a distributiva:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$\sqrt{12} - \sqrt{6}$$

Simplifique a raiz de 12:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Substitua a raiz simplificada:

$$\sqrt{12} - \sqrt{6} =$$

$$2\sqrt{3} - \sqrt{6}$$

$$\text{f) } (2\sqrt{3} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3} + 4\sqrt{2})$$

Faça a distributiva:

$$2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{5} \cdot 4\sqrt{2} =$$

$$2\sqrt{3 \cdot 3} + 2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{5} \cdot 4\sqrt{2} =$$

$$2\sqrt{9} + 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{5} \cdot 4\sqrt{2} =$$

$$2 \cdot 3 + 8\sqrt{3 \cdot 2} - \sqrt{5 \cdot 3} - \sqrt{5} \cdot 4\sqrt{2} =$$

$$6 + 8\sqrt{6} - \sqrt{15} - 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} =$$

$$6+8\sqrt{6}-\sqrt{15}-4\sqrt{2\cdot 5}=$$

$$6+8\sqrt{6}-\sqrt{15}-4\sqrt{10}$$

$$g) (4+\sqrt{13})\cdot(4-\sqrt{13})$$

Faça a distributiva:

$$4\cdot 4-4\cdot\sqrt{13}+4\cdot\sqrt{13}-\sqrt{13}\cdot\sqrt{13} =$$

$$16-4\sqrt{13}+4\sqrt{13}-\sqrt{13\cdot 13}=$$

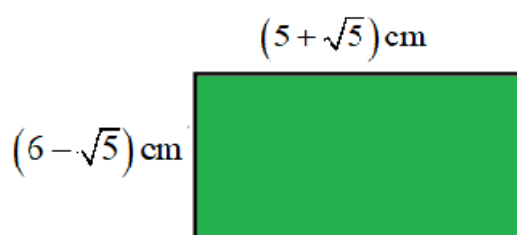
$$16+0-\sqrt{169}=$$

$$16+0-13=$$

$$16-13=$$

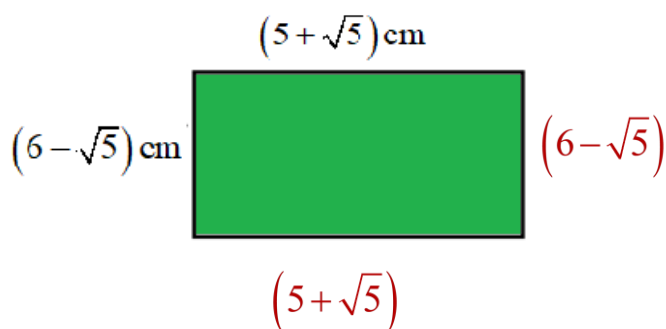
$$3$$

3. Determine o perímetro e a área do retângulo da figura abaixo.



O perímetro é a soma de todos os lados.

Note que: os lados opostos têm a mesma medida.



Perímetro = soma de todos os lados

$$\text{Perímetro} = (6 - \sqrt{5}) + (5 + \sqrt{5}) + (6 - \sqrt{5}) + (5 + \sqrt{5})$$

$$\text{Perímetro} = 6 + 5 + 6 + 5 - \sqrt{5} + \sqrt{5} - \sqrt{5} + \sqrt{5}$$

$$\text{Perímetro} = 11 + 11 - 0 - \sqrt{5} + \sqrt{5}$$

$$\text{Perímetro} = 22 - 0 - 0$$

$$\text{Perímetro} = 22$$

Para encontrar a área de um retângulo utilizamos a seguinte expressão:

$$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura}$$

$$\text{Área} = (5 + \sqrt{5}) \cdot (6 - \sqrt{5})$$

Faça a distributiva:

$$\text{Área} = 5 \cdot 6 - 5 \cdot \sqrt{5} + 6 \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$$

$$\text{Área} = 30 - 5\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - \sqrt{5 \cdot 5}$$

$$\text{Área} = 30 - 5\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - \sqrt{25}$$

$$\text{Área} = 30 - 5\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 5$$

$$\text{Área} = 30 - 5 - 5\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$$

$$\text{Área} = 25 - 5\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$$

$$\text{Área} = 25 + \sqrt{5}$$

$$\text{Note que: } -5\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

4. Qual é o número real que resulta da expressão

$$\sqrt{10 + \sqrt{10}} \cdot \sqrt{10 - \sqrt{10}} ?$$

Utilize a seguinte propriedade: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$$\sqrt{10 + \sqrt{10}} \cdot \sqrt{10 - \sqrt{10}} = \sqrt{(10 + \sqrt{10}) \cdot (10 - \sqrt{10})} =$$

Faça a distributiva:

$$= \sqrt{10 \cdot 10 - 10\sqrt{10} + \sqrt{10} \cdot 10 - \sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}$$

$$= \sqrt{100 - 10\sqrt{10} + \sqrt{10} \cdot 10 - \sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}$$

$$= \sqrt{100 - 10\sqrt{10} + 10\sqrt{10} - \sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}$$

$$\text{Note que: } -10\sqrt{10} + 10\sqrt{10} = 0$$

$$= \sqrt{100 - 0 - \sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}$$

$$= \sqrt{100 - 0 - \sqrt{10 \cdot 10}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{100 - \sqrt{100}} \\
 &= \sqrt{100 - 10} \\
 &= \sqrt{90}
 \end{aligned}$$

Simplifique a raiz de 90:

$$\sqrt{90} = \sqrt{9 \cdot 10} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$$

Logo, o valor da expressão é $3\sqrt{10}$.

Lição 16 – Divisão com radicais

1. Efetue as divisões:

Utilize sempre a propriedade:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

a) $\sqrt{200} \div \sqrt{5} = 2\sqrt{10}$, pois:

$$\sqrt{200} \div \sqrt{5} = \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{200}{5}} = \sqrt{40}$$

Simplifique a raiz de 40:

$$\sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

b) $\sqrt[3]{12} \div \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{3}$, pois:

$$\sqrt[3]{12} \div \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\frac{12}{4}} = \sqrt[3]{3}$$

c) $\sqrt{168} \div \sqrt{2} = 2\sqrt{21}$, pois:

$$\sqrt{168} \div \sqrt{2} = \sqrt{\frac{168}{2}} = \sqrt{84}$$

Simplifique a raiz de 84:

$$\sqrt{84} = \sqrt{4 \cdot 21} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{21} = 2\sqrt{21}$$

d) $\sqrt[5]{125} \div \sqrt[5]{5} = \sqrt[5]{25}$, pois:

$$\sqrt[5]{125} \div \sqrt[5]{5} = \sqrt[5]{\frac{125}{5}} = \sqrt[5]{25}$$

e) $\sqrt{240} \div \sqrt{8} = \sqrt{30}$, pois:

$$\sqrt{240} \div \sqrt{8} = \sqrt{\frac{240}{8}} = \sqrt{30}$$

f) $\sqrt[11]{x^7} \div \sqrt[11]{x^4} = \sqrt[11]{x^3}$, pois:

$$\sqrt[11]{x^7} \div \sqrt[11]{x^4} = \sqrt[11]{\frac{x^7}{x^4}} = \sqrt[11]{x^{7-4}} = \sqrt[11]{x^3}$$

Lembre-se que na divisão de potências de mesma base, subtraímos os expoentes.

2. Resolva:

Utilize sempre a propriedade:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

a) $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{4}} = \sqrt{15}$, pois:

$$\sqrt{\frac{60}{4}} = \sqrt{60 \div 4} = \sqrt{15}$$

b) $\frac{\sqrt{810}}{\sqrt{30}} = 3\sqrt{3}$, pois:

$$\sqrt{\frac{810}{30}} = \sqrt{810 \div 30} = \sqrt{27}$$

Simplifique a raiz de 27:

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

c) $\frac{\sqrt{162}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{6}$, pois:

$$\sqrt{\frac{162}{3}} = \sqrt{162 \div 3} = \sqrt{54}$$

Simplifique a raiz de 54:

$$\sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = 3 \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

d) $\frac{\sqrt[5]{y^{28}}}{\sqrt[5]{y^9}}$

$$\sqrt[5]{\frac{y^{28}}{y^9}} = \sqrt[5]{y^{28-9}} = \sqrt[5]{y^{19}}$$

Lembre-se que na divisão de potências de mesma base, subtraímos os expoentes.

Simplifique a raiz quántupla de y^{19} :

$$\sqrt[5]{y^{19}} = \sqrt[5]{y^{5+5+5+4}} = \sqrt[5]{y^5 \cdot y^5 \cdot y^5 \cdot y^4} =$$

$$\sqrt[5]{y^5} \cdot \sqrt[5]{y^5} \cdot \sqrt[5]{y^5} \cdot \sqrt[5]{y^4} = y \cdot y \cdot y \cdot \sqrt[5]{y^4} =$$

$$y^{1+1+1} \cdot \sqrt[5]{y^4} =$$

$$y^3 \sqrt[5]{y^4}$$

3. Simplifique as expressões:

a) $\sqrt{200} + \sqrt{500} + \sqrt{8} - \sqrt{45} = 12\sqrt{2} + 7\sqrt{5}$, pois:

Simplifique a raiz de 200:

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

Simplifique a raiz de 500:

$$\sqrt{500} = \sqrt{100 \cdot 5} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{5} = 10\sqrt{5}$$

Simplifique a raiz de 8:

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Simplifique a raiz de 45:

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Substitua as raízes simplificadas na expressão:

$$\sqrt{200} + \sqrt{500} + \sqrt{8} - \sqrt{45} = 10\sqrt{2} + 10\sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{5} =$$

$$= 10\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 10\sqrt{5} - 3\sqrt{5} =$$

$$(10 + 2)\sqrt{2} + (10 - 3)\sqrt{5} =$$

$$12\sqrt{2} + 7\sqrt{5}$$

b) $\frac{\sqrt{12} + \sqrt{75}}{2\sqrt{147}} = \frac{1}{2}$, pois:

Simplifique a raiz de 12:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Simplifique a raiz de 75:

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Simplifique a raiz de 147:

$$\sqrt{147} = \sqrt{49 \cdot 3} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

Substitua as raízes simplificadas na expressão:

$$\frac{\sqrt{12} + \sqrt{75}}{2 \cdot \sqrt{147}} = \frac{2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{2 \cdot 7\sqrt{3}} = \frac{(2+5)\sqrt{3}}{14\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{14\sqrt{3}} = \frac{7}{14}$$

Perceba que $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$; por isso sobra apenas o $\frac{7}{14}$.

Simplifique $\frac{7}{14}$:

$$\frac{7}{14} = \frac{7 \div 7}{14 \div 7} = \frac{1}{2}$$

$$c) \frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80} - 2\sqrt{45}}{8} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ pois:}$$

Simplifique a raiz de 20:

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Simplifique a raiz de 80:

$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

Simplifique a raiz de 45:

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Substitua as raízes simplificadas na expressão:

$$\frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80} - 2\sqrt{45}}{8} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 2 \cdot 3\sqrt{5}}{8} =$$

$$\frac{6\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 6\sqrt{5}}{8} =$$

$$\frac{10\sqrt{5} - 6\sqrt{5}}{8} = \frac{4\sqrt{5}}{8}$$

Simplifique a fração:

$$\frac{4\sqrt{5}}{8} = \frac{4\sqrt{5} \div 4}{8 \div 4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$d) \frac{\sqrt{28} + \sqrt{175}}{\sqrt{63}}$$

Simplifique a raiz de 28:

$$\sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$$

Simplifique a raiz de 175:

$$\sqrt{175} = \sqrt{25 \cdot 7} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{7} = 5\sqrt{7}$$

Simplifique a raiz de 63:

$$\sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

Substitua as raízes simplificadas na expressão:

$$\frac{\sqrt{28} + \sqrt{175}}{\sqrt{63}} = \frac{2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}}{3\sqrt{7}} =$$

$$\frac{7\sqrt{7}}{3\sqrt{7}} =$$

$$\frac{7}{3}$$

Perceba que $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = 1$; por isso sobra apenas o $\frac{7}{3}$.

$$\text{e) } \frac{\sqrt{50} - \sqrt{18}}{\sqrt{200}}$$

Simplifique a raiz de 50:

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Simplifique a raiz de 18:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Simplifique a raiz de 200:

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

Substitua as raízes simplificadas na expressão:

$$\frac{\sqrt{50} - \sqrt{18}}{\sqrt{200}} = \frac{5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} =$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} = \frac{2}{10}$$

Perceba que $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$; por isso sobra apenas o $\frac{2}{10}$.

Simplifique a fração:

$$\frac{2}{10} = \frac{2 \div 2}{10 \div 2} = \frac{1}{5}$$

4. Simplifique a expressão:

$$\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+2} \div \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{3}}$$

Lembre-se: na divisão de fração mantemos a primeira e multiplicamos pelo inverso da segunda:

$$= \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-2}$$

Faça a distributiva:

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 2 \cdot 2} \\ &= \frac{\sqrt{3 \cdot 3} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{6 \cdot 6} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 4} \\ &= \frac{\sqrt{9} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{36} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 4} \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6 - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 4} \end{aligned}$$

Note que $-2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 0$

$$\begin{aligned} &= \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6 - 0 - 4} \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6 - 4} \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Não podemos somar $3 + 2\sqrt{3}$, pois o “3” não é semelhante ao “ $2\sqrt{3}$ ” por não possuir a raiz de 3.

Passo a passo de Matemática

Etapla 9, Volume 2

Lição 17 – Potenciação de radicais

1. Calcule:

a) $(\sqrt{50})^2$

$$(\sqrt{50})^2 = 50^{\frac{2}{2}} = 50^1 = 50$$

b) $(\sqrt[3]{4})^2$

$$(\sqrt[3]{4})^2 = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^{3+1}} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^1} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^1} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}$$

c) $(7\sqrt{5})^2$

$$(7\sqrt{5})^2 = 7^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 49 \cdot 5^{\frac{2}{2}} = 49 \cdot 5^1 = 49 \cdot 5 = 245$$

d) $(\sqrt[4]{3})^9$

$$(\sqrt[4]{3})^9 = \sqrt[4]{3^9} = \sqrt[4]{3^{4+4+1}} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^1} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{3^1} = 3 \cdot 3 \cdot \sqrt[4]{3} = 9 \cdot \sqrt[4]{3}$$

e) $\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{20}\right)^2$

$$\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{20}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (\sqrt{20})^2 = \frac{1^2}{3^2} \cdot 20^{\frac{2}{2}} = \frac{1}{9} \cdot 20^1 = \frac{1}{9} \cdot 20 = \frac{1 \cdot 20}{9} = \frac{20}{9}$$

2. São dados os números reais $x = 3\sqrt{10}$ e $y = 10\sqrt{3}$. Qual é o valor da expressão x^2y^2 ?

R: Se são conhecidos os valores para x e y , basta substituir esses valores na expressão x^2y^2 :

$$x^2 \cdot y^2 = (3\sqrt{10})^2 (10\sqrt{3})^2 =$$

$$\left[3^2 \cdot (\sqrt{10})^2\right] \cdot \left[10^2 \cdot (\sqrt{3})^2\right] =$$

$$\left[9 \cdot 10^{\frac{2}{2}}\right] \cdot \left[100 \cdot 3^{\frac{2}{2}}\right] =$$

$$[9 \cdot 10^1] \cdot [100 \cdot 3^1] = [9 \cdot 10] \cdot [100 \cdot 3] =$$

$$[90] \cdot [300] = 27000$$

Então:

$$x^2 y^2 = 27000$$

3. Calcule utilizando a propriedade distributiva.

ERRO NO ENUNCIADO. A propriedade distributiva só será usada na letra e). Nas letras a), b), c) e d) devemos usar o produto notável do quadrado de uma soma/subtração.

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

Aplique o produto notável do quadrado da soma: $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$

$$3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2 =$$

$$3 + 2 \cdot \sqrt{3 \cdot 2} + 2 =$$

$$3 + 2 \cdot \sqrt{6} + 2 =$$

$$3 + 2 + 2 \cdot \sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6}$$

b) $(2 - \sqrt{5})^2$

Aplique o produto notável do quadrado da subtração: $(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$$(2 - \sqrt{5})^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 =$$

$$4 - 2 \cdot 2\sqrt{5} + 5 =$$

$$4 - 4 \cdot \sqrt{5} + 5 =$$

$$4 + 5 - 4 \cdot \sqrt{5} = 9 - 4\sqrt{5}$$

c) $(4\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$

Aplique o produto notável do quadrado da soma: $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$$(4\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (4\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 =$$

$$4^2 \cdot (\sqrt{2})^2 + 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 =$$

$$16 \cdot 2 + 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 3 =$$

$$16 \cdot 2 + 8 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} + 3 =$$

$$32 + 8 \cdot \sqrt{6} + 3 =$$

$$32 + 3 + 8 \cdot \sqrt{6} = 35 + 8\sqrt{6}$$

$$d) (3 + \sqrt{7})^2$$

Aplique o produto notável do quadrado da soma: $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$$(3 + \sqrt{7})^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 =$$

$$9 + 6 \cdot \sqrt{7} + 7 =$$

$$9 + 7 + 6 \cdot \sqrt{7} = 16 + 6\sqrt{7}$$

$$e) (\sqrt{13} + \sqrt{17}) \cdot (\sqrt{13} - \sqrt{17})$$

Aplique a distributiva.

$$\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} + \sqrt{13} \cdot (-\sqrt{17}) + \sqrt{17} \cdot \sqrt{13} + \sqrt{17} \cdot (-\sqrt{17}) =$$

$$(\sqrt{13})^2 - \sqrt{13} \cdot \sqrt{17} + \sqrt{17} \cdot \sqrt{13} - (\sqrt{17})^2 =$$

$$13 - \sqrt{13 \cdot 17} + \sqrt{17 \cdot 13} - 17 =$$

$$13 - \sqrt{221} + \sqrt{221} - 17 =$$

$$\rightarrow \text{Note que } -\sqrt{221} + \sqrt{221} = 0$$

$$13 + 0 - 17 = -4$$

Lição 18 - Potenciação de radicais

1. Racionalize o denominador de cada uma das expressões:

$$a) \frac{5}{\sqrt{10}}$$

Multiplique o denominador e o numerador por $\sqrt{10}$:

$$\frac{5}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10 \cdot 10}} = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{100}} = \frac{5\sqrt{10}}{10}$$

Note que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$.

Simplifique a fração:

$$\frac{5\sqrt{10} \div 5}{10 \div 5} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

b) $\frac{7}{\sqrt{7}}$

Multiplique o denominador e o numerador por $\sqrt{7}$:

$$\frac{7}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{7 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{7 \cdot 7}} = \frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{49}} = \frac{7\sqrt{7}}{7}$$

Note que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$.

Simplifique a fração:

$$\frac{7\sqrt{7} \div 7}{7 \div 7} = \frac{\sqrt{7}}{1} = \sqrt{7}$$

c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

Multiplique o denominador e o numerador por $\sqrt{3}$:

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 3}}{\sqrt{3 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

d) $\frac{3}{\sqrt{6}}$

Multiplique o denominador e o numerador por $\sqrt{6}$:

$$\frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6 \cdot 6}} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{36}} = \frac{3\sqrt{6}}{6}$$

Simplifique a fração:

$$\frac{3\sqrt{6} \div 3}{6 \div 3} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

e) $\frac{20}{4\sqrt{5}}$

Multiplique o denominador e o numerador por $\sqrt{5}$:

$$\frac{20}{4\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{20 \cdot \sqrt{5}}{4 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{20 \cdot \sqrt{5}}{4 \cdot \sqrt{5 \cdot 5}} = \frac{20 \cdot \sqrt{5}}{4 \cdot \sqrt{25}} = \frac{20\sqrt{5}}{4 \cdot 5} = \frac{20\sqrt{5}}{20}$$

Simplifique a fração:

$$\frac{20\sqrt{5} \div 20}{20 \div 20} = \sqrt{5}$$

f) $\frac{1}{\sqrt{11}}$

Multiplique o denominador e o numerador por $\sqrt{11}$:

$$\frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \frac{1 \cdot \sqrt{11}}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11 \cdot 11}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{121}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

g) $\frac{7\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}$

Multiplique o denominador e o numerador por $\sqrt{7}$:

$$\frac{7\sqrt{3}}{3\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{7 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{3 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{7 \cdot \sqrt{3 \cdot 7}}{3 \cdot \sqrt{7 \cdot 7}} = \frac{7 \cdot \sqrt{21}}{3 \cdot \sqrt{49}} = \frac{7 \cdot \sqrt{21}}{3 \cdot 7} = \frac{7 \cdot \sqrt{21}}{21}$$

Simplifique a fração:

$$\frac{7 \cdot \sqrt{21} \div 7}{21 \div 7} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

h) $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

Multiplique o denominador e o numerador por $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ (o conjugado de $\sqrt{5} + \sqrt{3}$):

$$\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2}$$

Simplifique a fração:

$$\frac{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3}) \div 2}{2 \div 2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{1} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

i) $\frac{2 - 2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$

Multiplique o denominador e o numerador por $2 + \sqrt{2}$ (o conjugado de $2 - \sqrt{2}$):

$$\frac{2 - 2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{(2 - 2\sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2})} = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot 2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{4 + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2}{4 - 2} = \frac{4 - 2\sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{4}}{2} =$$

$$\frac{4 - 2\sqrt{2} - 2 \cdot 2}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{2} - 4}{2} = \frac{4 - 4 - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{0 - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{-2\sqrt{2}}{2}$$

Simplifique a fração:

$$\frac{-2\sqrt{2} \div 2}{2 \div 2} = \frac{-\sqrt{2}}{1} = -\sqrt{2}$$

j) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

Multiplique o denominador e o numerador por $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (o conjugado de $\sqrt{3} + \sqrt{2}$):

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot -\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2} \cdot -\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3 - \sqrt{3} \cdot 2 - \sqrt{2} \cdot 3 + \sqrt{2} \cdot 2}{3-2} =$$

$$\frac{\sqrt{9}-\sqrt{6}-\sqrt{6}+\sqrt{4}}{1} = \frac{3-2\sqrt{6}+2}{1} = \frac{3+2-2\sqrt{6}}{1} = \frac{5-2\sqrt{6}}{1} = 5-2\sqrt{6}$$

k) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$

Multiplique o denominador e o numerador por $\sqrt[3]{4^2}$:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4 \cdot 4^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^1 \cdot 4^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^{1+2}}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{16}}{4}$$

Simplifique a raiz cúbica:

$$\frac{2 \cdot \sqrt[3]{16}}{4} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^4}}{4} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^1}}{4} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^1}}{4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2^1}}{4} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{2}}{4}$$

Simplifique a fração:

$$\frac{4 \cdot \sqrt[3]{2} \div 4}{4 \div 4} = \frac{\sqrt[3]{2}}{1} = \sqrt[3]{2}$$

l) $\frac{9}{\sqrt[5]{3^2}}$

Multiplique o denominador e o numerador por $\sqrt[5]{3^3}$:

$$\frac{9}{\sqrt[5]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{9 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2 \cdot 3^3}} = \frac{9 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^{2+3}}} = \frac{9 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{9 \cdot \sqrt[5]{27}}{3}$$

Simplifique a fração:

$$\frac{9 \cdot \sqrt[5]{27} \div 3}{3 \div 3} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{27}}{1} = 3 \cdot \sqrt[5]{27}$$

Lição 19 – Calculadora científica

1. Resolva utilizando a CALCULADORA:

a) $\sqrt[5]{32768} = 8$

b) $\sqrt[3]{46656} = 36$

c) $\sqrt{784} = 28$

d) $\sqrt[10]{1048576} = 4$

e) $16^{0,25} = 2$

$$f) 32^{0,2} = 2$$

$$g) 64^{0,5} = 8$$

Lição 20 - Quadrado da soma de dois termos

1. Calcule os produtos notáveis.

$$a) (x+1)^2 =$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 =$$

$$x^2 + 2x + 1$$

$$b) (x+6)^2 =$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 =$$

$$x^2 + 12x + 36$$

$$c) (a+10)^2 =$$

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot 10 + 10^2 =$$

$$a^2 + 20a + 100$$

$$d) (y+4)^2 =$$

$$y^2 + 2 \cdot y \cdot 4 + 4^2 =$$

$$y^2 + 8y + 16$$

$$e) (3x+1)^2 =$$

$$(3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 = 3^2 \cdot x^2 + 6x + 1 =$$

$$9x^2 + 6x + 1$$

$$f) (2a+5)^2 =$$

$$(2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 5 + 5^2 = 2^2 \cdot a^2 + 20a + 25 =$$

$$4a^2 + 20a + 25$$

$$g) (a+2b)^2 =$$

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot 2b + (2b)^2 = a^2 + 4ab + 2^2 \cdot b^2 =$$

$$a^2 + 4ab + 4b^2$$

$$h) (x^2+4)^2 =$$

$$(x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 4 + 4^2 =$$

$$x^4 + 8x^2 + 16$$

$$i) (a^2 + 1)^2 =$$

$$(a^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot 1 + 1^2 =$$

$$a^4 + 2a^2 + 1$$

$$j) (5a + 3b)^2 =$$

$$(5a)^2 + 2 \cdot 5a \cdot 3b + (3b)^2 = 5^2 \cdot a^2 + 10a \cdot 3b + 3^2 \cdot b^2 =$$

$$25a^2 + 30ab + 9b^2$$

2. Observe o exemplo:

$$\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4x + 4}$$

Agora, calcule:

$$a) \left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2 =$$

$$\frac{(3x+1)^2}{(x+2)^2} = \frac{(3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2}{x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2} = \frac{3^2 \cdot x^2 + 6x + 1}{x^2 + 4x + 4} = \frac{9x^2 + 6x + 1}{x^2 + 4x + 4}$$

$$b) \left(\frac{a}{2a+2}\right)^2 =$$

$$\frac{(a)^2}{(2a+2)^2} = \frac{a^2}{(2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 2 + 2^2} = \frac{a^2}{2^2 \cdot a^2 + 8a + 4} = \frac{a^2}{4a^2 + 8a + 4}$$

$$c) \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 = \frac{(x^2+1)^2}{(x)^2} = \frac{(x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1^2}{x^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2}$$

3. Responda: certo ou errado?

$$a) (x+a)^2 = x^2 + a^2$$

Errado.

Correção: $(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$

b) $(x+a)^2 = x^2 + a^2 + 2ax$

Certo.

c) $p^2 + q^2 = (p+q)^2$

Errado.

Correção: $p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2$

d) $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4$

Errado.

Correção: $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

e) $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

Certo.

4. Sabe-se que $x^2 + y^2 = 20$ e $xy = 3$. Qual é o valor de $(x + y)^2$?

R: Desenvolva o quadrado $(x+y)^2$:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Reorganize a soma:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

Sabemos o valor de $x^2 + y^2$ e de xy . Substitua-os:

$$\rightarrow x^2 + y^2 = 20$$

$$\rightarrow xy = 3$$

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$(x+y)^2 = 20 + 2xy$$

$$(x+y)^2 = 20 + 2 \cdot xy$$

$$(x+y)^2 = 20 + 2 \cdot 3$$

$$(x+y)^2 = 20 + 6 = 26$$

5. Sabendo que $x^2 + y^2 = 153$ e que $xy = 36$, calcule o valor de $(x + y)^2$.

R: Desenvolva o quadrado $(x + y)^2$:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Reorganize a soma:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

Sabemos o valor de $x^2 + y^2$ e de xy . Substitua-os:

$$\rightarrow x^2 + y^2 = 153$$

$$\rightarrow xy = 36$$

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$(x+y)^2 = 153 + 2xy$$

$$(x+y)^2 = 153 + 2 \cdot xy$$

$$(x+y)^2 = 153 + 2 \cdot 36$$

$$(x+y)^2 = 153 + 72 = 225$$

6. Veja o seguinte exemplo para calcular o quadrado de um número:

$$42^2 = (40 + 2)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2 = 1600 + 160 + 4 = 1764$$

Calcule os quadrados dos números abaixo utilizando o mesmo método.

a) 13

$$13^2 = (10 + 3)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 3 + 3^2 = 100 + 20 \cdot 3 + 9 = 100 + 60 + 9 = 169$$

b) 19

$$19^2 = (10 + 9)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 9 + 9^2 = 100 + 20 \cdot 9 + 81 = 100 + 180 + 81 = 361$$

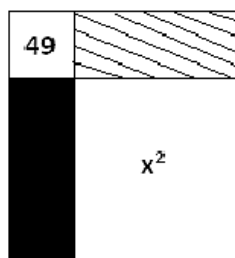
c) 23

$$23^2 = (20 + 3)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2 = 400 + 40 \cdot 3 + 9 = 400 + 120 + 9 = 529$$

d) 42

$$42^2 = (40 + 2)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2 = 1600 + 80 \cdot 2 + 4 = 1600 + 160 + 4 = 1764$$

7. Observe na figura abaixo: a área de um quadrado é x^2 e do outro quadrado é 49:



a) Qual é a área do retângulo hachurado (riscado)?

R: A área de um retângulo hachurado é calculada através da seguinte expressão:

$$\text{Área}_{\text{retângulo}} = \text{base} \cdot \text{altura}$$

A base do retângulo é um dos lados do quadrado de área x.

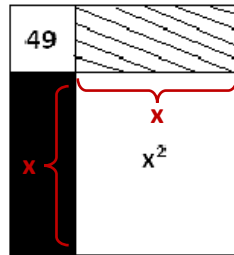
Quanto mede esse lado?

A área do quadrado é calculada através de:

$$\text{Área}_{\text{quadrado}} = \text{lado} \cdot \text{lado}$$

Se a área do quadrado em branco é x^2 , então seus lados só podem valer “x”.

$$x^2 = x \cdot x$$



A altura do retângulo hachurado é um dos lados do quadrado de área 49.

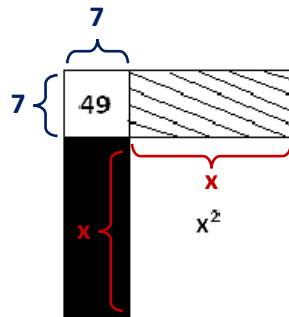
Quanto mede esse lado?

A área do quadrado é calculada através de:

$$\text{Área}_{\text{quadrado}} = \text{lado} \cdot \text{lado}$$

Se a área do quadrado em branco é 49, então seus lados só podem valer “7”.

$$49 = 7 \cdot 7$$



Portanto:

- a altura do retângulo hachurado = 7
- a base do retângulo hachurado = x
- então, a área do retângulo hachurado vale:

$$\text{Área}_{\text{retângulo hachurado}} = \text{base} \cdot \text{altura}$$

$$\text{Área}_{\text{retângulo hachurado}} = x \cdot 7$$

$$\text{Área}_{\text{retângulo hachurado}} = 7x$$

b) Qual é a área do retângulo colorido (preto)?

Para calcular a área deste retângulo vamos usar novamente:

$$\text{Área}_{\text{retângulo}} = \text{base} \cdot \text{altura}$$

A base do retângulo preto vale o mesmo que um dos lados do quadrado de área 49. Portanto, a base do retângulo preto vale 7.

A altura do retângulo preto vale o mesmo que um dos lados do quadrado de área x^2 . Portanto, a altura do retângulo preto vale x .

Portanto:

- a altura do retângulo preto = x
- a base do retângulo preto = 7
- então, a área do retângulo preto vale:

$$\text{Área}_{\text{retângulo preto}} = \text{base} \cdot \text{altura}$$

$$\text{Área}_{\text{retângulo preto}} = 7 \cdot x$$

$$\text{Área}_{\text{retângulo preto}} = 7x$$

c) Qual é a área total da figura?

Para saber a área total da figura devemos somar as áreas: i) do retângulo preto; ii) do retângulo hachurado; iii) do retângulo de área x^2 e iv) do retângulo de área 49.

Portanto:

$$\text{Área}_{\text{total}} = \text{Área}_{\text{retângulo}}$$

$$\text{Área}_{\text{total}} = x^2 + 49 + \text{Área}_{\text{retângulo preto}} + \text{Área}_{\text{retângulo hachurado}}$$

$$\text{Área}_{\text{total}} = x^2 + 49 + 7x + 7x$$

$$\text{Área}_{\text{total}} = x^2 + 49 + 14x$$

Reorganize.

$$\text{Área}_{\text{total}} = x^2 + 14x + 49$$

Lição 21 – Quadrado da diferença de dois termos

1. Desenvolva:

a) $(x - a)^2 =$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot a + a^2 = x^2 - 2xa + a^2$$

b) $(x - 10)^2 =$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 10 + 10^2 = x^2 - 20x + 100$$

c) $(4x - 1)^2 =$

$$(4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 1 + 1^2 = 4^2 \cdot x^2 - 8x + 1 = 16x^2 - 8x + 1$$

d) $(5a - 3b)^2 =$

$$(5a)^2 - 2 \cdot 5a \cdot 3b + (3b)^2 = 5^2 \cdot a^2 - 10a \cdot 3b + 3^2 \cdot b^2 = 25a^2 - 30ab + 9b^2$$

e) $(3a - 2b)^2$

$$(3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 2b + (2b)^2 = 3^2 \cdot a^2 - 6a \cdot 2b + 2^2 \cdot b^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2$$

2. Se $a = 5x^2 - 2$, determine o valor de $a^2 - 3a + 1$.

R: Se o valor de a é $(5x^2 - 2)$, basta substituir essa expressão no lugar de “a”:

$$a^2 - 3a + 1 = a^2 - 3 \cdot a + 1 = (5x^2 - 2)^2 - 3 \cdot (5x^2 - 2) + 1 =$$

$$(5x^2)^2 - 2 \cdot 5x^2 \cdot 2 + 2^2 - 3 \cdot (5x^2 - 2) + 1 =$$

$$5^2 \cdot x^4 - 10x^2 \cdot 2 + 2^2 - 3 \cdot (5x^2 - 2) + 1 =$$

$$25x^4 - 20x^2 + 4 - 3 \cdot (5x^2 - 2) + 1 =$$

$$25x^4 - 20x^2 + 4 - 3 \cdot 5x^2 - 3 \cdot -2 + 1 =$$

$$25x^4 - 20x^2 + 4 - 15x^2 + 6 + 1 =$$

$$25x^4 - 20x^2 - 15x^2 + 4 + 6 + 1 =$$

$$25x^4 - 35x^2 + 11$$

3. Qual é o valor numérico da expressão $(a - 2b)^2$, sabendo-se que $a^2 + 4b^2 = 30$ e $ab = 5$.

R: Desenvolva o quadrado $(a - 2b)^2$:

$$(a - 2b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 2b + (2b)^2 = a^2 - 4ab + 4b^2$$

Reorganize a soma:

$$(a - 2b)^2 = a^2 + 4b^2 - 4ab$$

Sabemos o valor de $a^2 + 4b^2$ e de ab . Substitua-os:

$$\rightarrow a^2 + 4b^2 = 30$$

$$\rightarrow ab = 5$$

$$(a - 2b)^2 = a^2 + 4b^2 - 4ab$$

$$(a - 2b)^2 = 30 - 4ab$$

$$(a - 2b)^2 = 30 - 4 \cdot ab$$

$$(a - 2b)^2 = 30 - 4 \cdot 5$$

$$(a - 2b)^2 = 30 - 20 = 10$$

4. A diferença entre o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois números reais é igual:

a) a diferença dos quadrados dos dois números.

b) a soma dos quadrados dos dois números.

c) a diferença dos dois números.

d) ao dobro do produto dos números.

e) ao quádruplo do produto dos números

Resolução:

A diferença entre o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois números reais é igual:

$$\begin{aligned}(x + y)^2 - (x - y)^2 &= \\(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) &= \end{aligned}$$

Atenção ao jogo de sinal.

$$x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 =$$

Reorganize:

$$x^2 - x^2 + 2xy + 2xy + y^2 - y^2 =$$

$$0 + 4xy + 0 =$$

$$4xy$$

Portanto, a diferença entre o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois números reais é igual ao quádruplo do produto desses dois números ($4xy$).

Lição 22 – Produto da soma pela diferença

1. Calcule:

$$a) (x + 1)(x - 1) =$$

$$x^2 - 1^2 = x^2 - 1$$

$$b) (a + 5)(a - 5) =$$

$$a^2 - 5^2 = a^2 - 25$$

$$c) (3b + 7)(3b - 7) =$$

$$(3b)^2 - 7^2 = 3^2 \cdot b^2 - 7^2 = 9b^2 - 49$$

$$d) (3x - 2y)(3x + 2y) =$$

$$(3x)^2 - (2y)^2 = 3^2 \cdot x^2 - 2^2 \cdot y^2 = 9x^2 - 4y^2$$

2. Calcule mentalmente usando produtos notáveis:

a) $52 \cdot 48$

$$52 \cdot 48 = (50 + 2) \cdot (50 - 2) = 50^2 - 2^2 = 2500 - 4 = 2496$$

b) $57 \cdot 63$

$$57 \cdot 63 = (60 - 3) \cdot (60 + 3) = 60^2 - 3^2 = 3600 - 9 = 3591$$

c) $91 \cdot 89$

$$91 \cdot 89 = (90 + 1) \cdot (90 - 1) = 90^2 - 1^2 = 8100 - 1 = 8099$$

d) $210 \cdot 190$

$$210 \cdot 190 = (200 + 10) \cdot (200 - 10) = 200^2 - 10^2 = 40000 - 100 = 39900$$

e) $301 \cdot 299$

$$301 \cdot 299 = (300 + 1) \cdot (300 - 1) = 300^2 - 1^2 = 90000 - 1 = 89999$$

3. Calcule usando as regras dos produtos notáveis:

a) $(x+1)^2 + (x-1)^2 + 2(x+1)(x-1) =$

Aplique o produto notável do quadrado da soma/da diferença:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 + 2(x+1)(x-1) =$$

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 + 2(x+1)(x-1) =$$

$$x^2 + x^2 + 2x - 2x + 1 + 1 + 2(x+1)(x-1) =$$

$$2x^2 + 0 + 2 + 2(x+1)(x-1) =$$

$$2x^2 + 2 + 2(x+1)(x-1) =$$

Aplique o produto notável do produto da soma pela diferença:

$$2x^2 + 2 + 2(x^2 - 1^2) =$$

$$2x^2 + 2 + 2 \cdot x^2 - 2 \cdot 1 =$$

$$2x^2 + 2 + 2x^2 - 2 =$$

$$2x^2 + 2x^2 + 2 - 2 =$$

$$4x^2 + 0 =$$

$$4x^2$$

b) $(x+3)(x-3) - (x+2)(x-2) =$

Aplique o produto notável do produto da soma pela diferença:

$$(x^2 - 3^2) - (x^2 - 2^2) =$$

$$x^2 - 9 - (x^2 - 4) =$$

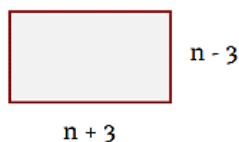
$$x^2 - 9 - x^2 + 4 =$$

$$x^2 - x^2 - 9 + 4 =$$

$$0 - 9 + 4 =$$

$$-5$$

4. A área do retângulo abaixo é 216:



a) Calcule o valor de n .

R: A área de um retângulo é base $\cdot$ altura

A base desse retângulo é $(n + 3)$

A altura desse retângulo é $(n - 3)$

Então, sua área é : $(n + 3) \cdot (n - 3)$

Mas, o exercício nos afirma que a área vale 216. Logo:

$$(n + 3) \cdot (n - 3) = \text{Área do retângulo}$$

$$(n + 3) \cdot (n - 3) = 216$$

Desenvolva o produto notável.

$$n^2 - 3^2 = 216$$

$$n^2 - 9 = 216$$

$$n^2 = 216 + 9$$

$$n^2 = 225$$

$$n = \pm\sqrt{225}$$

$$n = 15 \text{ ou } n = -15$$

Mas, se n for igual a -15 , as medidas ficariam negativas ($n + 3 = -12$; $n - 3 = -18$).

Como não existem medidas negativas, o único valor possível para n é 15. Logo, $n = 15$.

b) Quanto mede o maior lado?

R: O maior lado é $n + 3$. Se $n = 15$, $n + 3 = 18$.

5. Calcule um número par n , positivo, sabendo que o produto de seus dois vizinhos ímpares é 255.

R: O número “ n ” é par. Seus vizinhos ímpares são $n + 1$ e $n - 1$.

Pense no número 2 (par).

Seus vizinhos ímpares são 1 e 3.

O número 1 é $2 - 1$.

O número 3 é $2 + 1$.

Logo, os vizinhos ímpares de um número par são $\rightarrow n - 1$ e $n + 1$.

O produto desses vizinhos é: $(n - 1) \cdot (n + 1)$

Contudo, este produto vale 255. Logo:

$$(n - 1) \cdot (n + 1) = 255$$

$$n^2 - 1^2 = 255$$

$$n^2 - 1 = 255$$

$$n^2 = 255 + 1$$

$$n^2 = 256$$

$$n = \pm \sqrt{256}$$

$$n = -16 \text{ ou } n = 16$$

Mas, o enunciado deixa claro que estamos procurando um par POSITIVO. Conclui-se que o n só pode valer 16.

Então, 16 é o número par que procuramos (e seus vizinhos ímpares são 15 e 17, cujo produto $15 \times 17 = 255$).

6. Associe cada igualdade a uma das afirmações, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes.

I. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

II. $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

III. $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$

(II) O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo, menos duas vezes o 1º termo vezes o 2º, mais o quadrado do 2º termo.

(I) O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo, mais duas vezes o 1º termo vezes o 2º termo, mais o quadrado do 2º termo.

(III) O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo menos o quadrado do 2º termo

Lição 23 – Cubo da soma de dois termos

1. Desenvolva as seguintes expressões:

Basta usar o produto notável: $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$$a) (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$b) (2a + 1)^3 = (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (2a) \cdot 1^2 + 1^3 =$$

$$2^3 \cdot a^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot a^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2a \cdot 1 + 1 =$$

$$8 \cdot a^3 + 3 \cdot 4 \cdot a^2 + 6a + 1 =$$

$$8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$$

$$c) (2x + y)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot (2x) \cdot y^2 + y^3 =$$

$$2^3 \cdot x^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot x^2 \cdot y + 6xy^2 + y^3 =$$

$$8 \cdot x^3 + 3 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot y + 6xy^2 + y^3 =$$

$$8 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 \cdot y + 6xy^2 + y^3 =$$

$$8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$$

$$d) (3x + 6)^3 =$$

$$(3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot 6 + 3 \cdot (3x) \cdot 6^2 + 6^3 =$$

$$3^3 \cdot x^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot x^2 \cdot 6 + 3 \cdot (3x) \cdot 6^2 + 6^3 =$$

$$27 \cdot x^3 + 3 \cdot 9 \cdot x^2 \cdot 6 + 3 \cdot (3x) \cdot 36 + 216 =$$

$$27x^3 + 27 \cdot 6x^2 + 9x \cdot 36 + 216 =$$

$$27x^3 + 162x^2 + 324x + 216$$

$$e) (y + x)^3 = y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3$$

$$f) (2m + 5)^3 = (2m)^3 + 3 \cdot (2m)^2 \cdot 5 + 3 \cdot (2m) \cdot 5^2 + 5^3 =$$

$$2^3 \cdot m^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot m^2 \cdot 5 + 3 \cdot (2m) \cdot 5^2 + 5^3 =$$

$$8 \cdot m^3 + 3 \cdot 4 \cdot m^2 \cdot 5 + 3 \cdot (2m) \cdot 25 + 125 =$$

$$8m^3 + 12 \cdot 5 \cdot m^2 + 6m \cdot 25 + 125 =$$

$$8m^3 + 60m^2 + 150m + 125$$

$$g) (3y + 1)^3 = (3y)^3 + 3 \cdot (3y)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (3y) \cdot 1^2 + 1^3 =$$

$$3^3 \cdot y^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot y^2 \cdot 1 + 3 \cdot (3y) \cdot 1^2 + 1^3 =$$

$$27 \cdot y^3 + 3 \cdot 9 \cdot y^2 \cdot 1 + 3 \cdot (3y) \cdot 1 + 1 =$$

$$27 \cdot y^3 + 27 \cdot 1 \cdot y^2 + 9y \cdot 1 + 1 =$$

$$27y^3 + 27y^2 + 9y + 1$$

$$h) (b+c)^3 = b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$$

$$i) (1+2a)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 2a + 3 \cdot 1 \cdot (2a)^2 + (2a)^3 =$$

$$1 + 3 \cdot 1 \cdot 2a + 3 \cdot 1 \cdot 2^2 \cdot a^2 + 2^3 \cdot a^3 =$$

$$1 + 3 \cdot 2a + 3 \cdot 4 \cdot a^2 + 8 \cdot a^3 =$$

$$1 + 6a + 12a^2 + 8a^3$$

$$j) (4+5b)^3 = 4^3 + 3 \cdot 4^2 \cdot (5b) + 3 \cdot 4 \cdot (5b)^2 + (5b)^3 =$$

$$64 + 3 \cdot 16 \cdot (5b) + 3 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot b^2 + 5^3 \cdot b^3 =$$

$$64 + 48 \cdot (5b) + 12 \cdot 25 \cdot b^2 + 125 \cdot b^3 =$$

$$64 + 240b + 300b^2 + 125b^3$$

Lição 24 - Cubo da diferença de dois termos

1. Desenvolva as seguintes expressões:

Basta usar o produto notável: $(x+y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$$a) (b-c)^3 = b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3$$

$$b) (1-2a)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot (2a) + 3 \cdot 1 \cdot (2a)^2 - (2a)^3 =$$

$$1 - 3 \cdot 1 \cdot (2a) + 3 \cdot 1 \cdot 2^2 \cdot a^2 - 2^3 \cdot a^3 =$$

$$1 - 6a + 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot a^2 - 8 \cdot a^3 =$$

$$1 - 6a + 12a^2 - 8a^3$$

$$c) (3y-1)^3 = (3y)^3 - 3 \cdot (3y)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (3y) \cdot 1^2 - 1^3 =$$

$$3^3 \cdot y^3 - 3 \cdot 3^2 \cdot y^2 \cdot 1 + 3 \cdot (3y) \cdot 1 - 1 =$$

$$27 \cdot y^3 - 3 \cdot 9 \cdot y^2 \cdot 1 + 9y - 1 =$$

$$27y^3 - 27y^2 + 9y - 1$$

$$d) (y-x)^3 = y^3 - 3xy^2 + 3x^2y - x^3$$

$$e) (3x-4)^3 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 4 + 3 \cdot (3x) \cdot 4^2 - 4^3 =$$

$$3^3 \cdot x^3 - 3 \cdot 3^2 \cdot x^2 \cdot 4 + 3 \cdot (3x) \cdot 4^2 - 4^3 =$$

$$27 \cdot x^3 - 3 \cdot 9 \cdot x^2 \cdot 4 + 9x \cdot 16 - 64 =$$

$$27 \cdot x^3 - 3 \cdot 9 \cdot 4x^2 + 9x \cdot 16 - 64 =$$

$$27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$$

$$f) (2m-5)^3 = (2m)^3 - 3 \cdot (2m)^2 \cdot 5 + 3 \cdot (2m) \cdot 5^2 - 5^3 =$$

$$2^3 \cdot m^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot m^2 \cdot 5 + 3 \cdot (2m) \cdot 25 - 125 =$$

$$8 \cdot m^3 - 3 \cdot 4 \cdot m^2 \cdot 5 + 6m \cdot 25 - 125 =$$

$$8 \cdot m^3 - 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot m^2 + 6m \cdot 25 - 125 =$$

$$8m^3 - 60m^2 + 150m - 125$$

2. Resolva as expressões abaixo:

$$a) (a-b)^3 - (a^3 - b^3) + 4ab(a-b) =$$

Aplique a propriedade do cubo da diferença:

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - (a^3 - b^3) + 4ab(a-b) =$$

Aplique a distributiva:

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 + b^3 + 4ab(a-b) =$$

Reorganize:

$$a^3 - a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + b^3 + 4ab(a-b) =$$

Some os termos semelhantes:

$$0 - 3a^2b + 3ab^2 + 0 + 4ab(a-b) =$$

$$-3a^2b + 3ab^2 + 4ab(a-b) =$$

Aplique a distributiva:

$$-3a^2b + 3ab^2 + 4ab \cdot a - 4ab \cdot b =$$

$$-3a^2b + 3ab^2 + 4a^2b - 4ab^2 =$$

Reorganize:

$$-3a^2b + 4a^2b + 3ab^2 - 4ab^2 =$$

Some os termos semelhantes (a^2b com a^2b e ab^2 com ab^2):

$$a^2b - ab^2$$

$$b) (2x-y)^3 - (2x+y)^3 + 2xy(2x+y) =$$

Aplique a propriedade do cubo da diferença:

$$(2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot (2x) \cdot y^2 - y^3 - (2x+y)^3 + 2xy(2x+y) =$$

$$8x^3 - 3 \cdot 4x^2 \cdot y + 6xy^2 - y^3 - (2x+y)^3 + 2xy(2x+y) =$$

$$8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 - (2x + y)^3 + 2xy(2x + y) =$$

Aplique a propriedade do cubo da soma:

$$8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 - \left[(2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot (2x) \cdot y^2 + y^3 \right] + 2xy(2x + y) =$$

$$8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 - \left[8x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot y + 6xy^2 + y^3 \right] + 2xy(2x + y) =$$

$$8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 - \left[8x^3 + 12x^2 \cdot y + 6xy^2 + y^3 \right] + 2xy(2x + y) =$$

Aplique a distributiva:

$$8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 - 8x^3 - 12x^2y - 6xy^2 - y^3 + 2xy(2x + y) =$$

Reorganize:

$$8x^3 - 8x^3 - 12x^2y - 12x^2y + 6xy^2 - 6xy^2 - y^3 - y^3 + 2xy(2x + y) =$$

Some os termos semelhantes:

$$0 - 24x^2y + 0 - 2y^3 + 2xy(2x + y) =$$

$$-24x^2y - 2y^3 + 2xy(2x + y) =$$

Aplique a distributiva:

$$-24x^2y - 2y^3 + 2xy \cdot 2x + 2xy \cdot y =$$

$$-24x^2y - 2y^3 + 4x^2y + 2xy^2 =$$

Reorganize:

$$-24x^2y + 4x^2y - 2y^3 + 2xy^2 =$$

Some os termos semelhantes (x^2y com x^2y):

$$-20x^2y - 2y^3 + 2xy^2 =$$

$$c) (1-a)^3 + 2a(-2+a^2) + (1-a^3) =$$

Aplique a propriedade do cubo da diferença:

$$1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot a + 3 \cdot 1 \cdot a^2 - a^3 + 2a(-2+a^2) + (1-a^3) =$$

$$1 - 3a + 3a^2 - a^3 + 2a(-2+a^2) + (1-a^3) =$$

Aplique a distributiva:

$$1 - 3a + 3a^2 - a^3 + 2a \cdot -2 + 2a \cdot a^2 + (1-a^3) =$$

$$1 - 3a + 3a^2 - a^3 - 4a + 2a^3 + (1-a^3) =$$

$$1 - 3a + 3a^2 - a^3 - 4a + 2a^3 + 1 - a^3 =$$

Reorganize:

$$1+1-3a-4a+3a^2-a^3+2a^3-a^3=$$

$$2-7a+3a^2+a^3-a^3=$$

$$2-7a+3a^2$$

Organize:

$$3a^2-7a+2$$

Lição 25 – Fator comum em evidência

1. Ponha em evidência o fator comum e fatore:

a) $mx+nx-px$

O fator comum é x .

$$m \cdot x + n \cdot x - p \cdot x =$$

$$x \cdot (m + n - p)$$

b) $20x^2+25x$

O fator comum é $5x$.

$$5x \cdot 4x + 5x \cdot 5 =$$

$$5x \cdot (4x + 5)$$

c) $4m^3-6m^2$

O fator comum é $2m^2$.

$$2m^3 \cdot 2m + 2m^2 \cdot (-3) =$$

$$2m^2 \cdot (2m - 3)$$

d) $a^3b^2c^2+a^2b^3c^2+a^2b^2c^3$

O fator comum é $a^2b^2c^2$.

$$a^2 \cdot a \cdot b^2 \cdot c^2 + a^2 \cdot b^2 \cdot b \cdot c^2 + a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot c =$$

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot a + a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot b + a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot c =$$

$$(a^2b^2c^2) \cdot a + (a^2b^2c^2) \cdot b + (a^2b^2c^2) \cdot c =$$

$$a^2b^2c^2 \cdot (a + b + c)$$

e) $3x^2y^2-9xy$

O fator comum é $3xy$.

$$3x \cdot x \cdot y \cdot y + 3xy \cdot (-3) =$$

$$3x \cdot y \cdot x \cdot y + 3xy \cdot (-3) =$$

$$(3xy) \cdot x \cdot y + (3xy) \cdot (-3) =$$

$$(3xy) \cdot xy + (3xy) \cdot (-3) =$$

$$3xy \cdot (xy - 3)$$

$$f) 16a^4 - 64a^3$$

O fator comum é $16a^3$.

$$16a^3 \cdot a + 16a^3 \cdot (-4) =$$

$$(16a^3) \cdot a + (16a^3) \cdot (-4) =$$

$$16a^3 \cdot (a - 4)$$

$$g) (a + b)x + 2(a + b)$$

O fator comum é $(a + b)$.

$$(a + b) \cdot x + (a + b) \cdot 2 =$$

$$(a + b) \cdot (x + 2)$$

$$h) (a + 1)x + (a + 1)y$$

O fator comum é $(a + 1)$:

$$(a + 1) \cdot x + (a + 1) \cdot y =$$

$$(a + 1) \cdot (x + y)$$

2. Fatore completamente:

$$a) a^4 - a^2$$

Comece evidenciando a^2 :

$$a^2 \cdot a^2 + a^2 \cdot (-1) =$$

$$a^2 \cdot (a^2 - 1)$$

Fatore $(a^2 - 1)$, pois é uma diferença de quadrados $\left[(a^2 - 1) = (a^2 - 1^2) = (a + 1) \cdot (a - 1) \right]$:

$$a^2 \cdot (a - 1) \cdot (a + 1)$$

$$b) 2ax^2 - 32a$$

Comece evidenciando $2a$:

$$2a \cdot x^2 + 2a \cdot (-16) =$$

$$2a \cdot (x^2 - 16) =$$

Fatore $(x^2 - 16)$, pois é uma diferença de quadrados $\left[(x^2 - 16) = (x^2 - 4^2) = (x + 4) \cdot (x - 4) \right]$:

$$2a \cdot (x + 4) \cdot (x - 4)$$

c) $a^3 + a^2 - 4a - 4$

Comece evidenciando a^2 :

$$a^2 \cdot a + a^2 \cdot 1 - 4a - 4 =$$

$$a^2 \cdot (a + 1) - 4a - 4 =$$

Agora evidencie o -4 :

$$a^2 \cdot (a + 1) - 4 \cdot a - 4 \cdot 1 =$$

$$a^2 \cdot (a + 1) - 4 \cdot (a + 1) =$$

Evidencie o $(a + 1)$:

$$(a + 1) \cdot (a^2 - 4) =$$

Fatore $(a^2 - 4)$, pois é uma diferença de quadrados $\left[(a^2 - 4) = (a^2 - 2^2) = (a + 2) \cdot (a - 2) \right]$:

$$(a + 1) \cdot (a - 2) \cdot (a + 2)$$

d) $x^8 - 1$

Fatore $(x^8 - 1)$, pois é uma diferença de quadrados $\left[(x^8 - 1) = \left((x^4)^2 - 1^2 \right) = (x^4 + 1) \cdot (x^4 - 1) \right]$:

$$(x^4 + 1) \cdot (x^4 - 1) =$$

Fatore $(x^4 - 1)$, pois é uma diferença de quadrados $\left[(x^4 - 1) = \left((x^2)^2 - 1^2 \right) = (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) \right]$:

$$(x^4 + 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) =$$

Fatore $(x^2 - 1)$, pois é uma diferença de quadrados $\left[(x^2 - 1) = (x^2 - 1^2) = (x + 1) \cdot (x - 1) \right]$:

$$(x^4 + 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$$

e) $x^3 - 2x^2 + x$

Comece evidenciando o x :

$$x \cdot x^2 + x \cdot (-2x) + x \cdot 1 =$$

$$x \cdot (x^2 - 2x + 1) =$$

Fatore $(x^2 - 2x + 1)$, pois é um trinômio perfeito $\left[x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \right]$:

$$x \cdot (x - 1)^2$$

f) $x^5 + 2x^4 + x^3$

Comece evidenciando o x^3 :

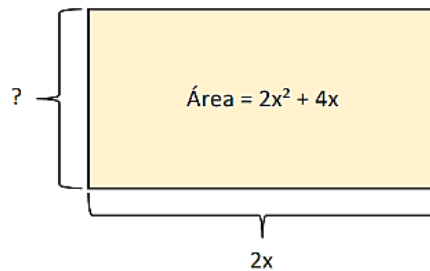
$$x^3 \cdot x^2 + x^3 \cdot (2x) + x^3 \cdot 1 =$$

$$x^3 \cdot (x^2 + 2x + 1) =$$

Fatore $(x^2 + 2x + 1)$, pois é um trinômio perfeito $\left[x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \right]$:

$$x^3 \cdot (x + 1)^2$$

3. A área de um retângulo é dada pela expressão $2x^2 + 4x$, e um dos lados é $2x$. Qual é a expressão que dá a medida do outro lado?



R: Fatore a expressão da área.

$$\text{Área} = 2x^2 + 4x$$

$$\text{Área} = 2x \cdot (x + 2)$$

A área de um retângulo é:

$$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura}.$$

A base é $2x$.

Logo, o outro fator, $(x + 2)$, só pode ser a altura.

Assim, a medida do outro lado (a altura) é $x + 2$.

Lição 26 – Fatoração por agrupamento

1. Agrupe convenientemente os termos e fatore:

a) $ax + ay - bx - by$

$$a \cdot (x + y) - bx - by =$$

$$a \cdot (x + y) - b \cdot (x + y) =$$

$$(x + y) \cdot (a - b)$$

b) $m^2 - mp - 3m + 3p$

$$m \cdot (m - p) - 3m + 3p =$$

$$m \cdot (m - p) - 3 \cdot (m - p) =$$

$$(m - p) \cdot (m - 3)$$

$$c) x^3 + 2x^2 + 2x + 4$$

$$x^2 \cdot (x + 2) + 2x + 4 =$$

$$x^2 \cdot (x + 2) + 2 \cdot (x + 2) =$$

$$(x + 2) \cdot (x^2 + 2)$$

$$d) 12 + 4a + 3b + ab$$

$$4 \cdot (3 + a) + 3b + ab =$$

$$4 \cdot (3 + a) + b \cdot (3 + a) =$$

$$(3 + a) \cdot (4 + b)$$

$$e) 7x^2 - y + x - 7xy$$

Reorganize:

$$7x^2 + x - 7xy - y =$$

$$x \cdot (7x + 1) - 7xy - y =$$

$$x \cdot (7x + 1) - y \cdot (7x + 1) =$$

$$(7x + 1) \cdot (x - y)$$

$$f) m^2u - 1 + u - m^2$$

Reorganize:

$$m^2u + u - m^2 - 1 =$$

$$u \cdot (m^2 + 1) - m^2 - 1 =$$

$$u \cdot (m^2 + 1) - 1 \cdot (m^2 + 1) =$$

$$(m^2 + 1) \cdot (u - 1)$$

Lição 27 - Diferença de dois quadrados

1. Fatore as diferenças de quadrados:

$$a) x^2 - 81$$

$$x^2 - 9^2 = (x + 9) \cdot (x - 9)$$

$$b) 25b^2 - 16$$

$$5^2b^2 - 4^2 = (5b)^2 - 4^2 = (5b - 4) \cdot (5b + 4)$$

$$c) 100x^2 - 1$$

$$10^2x^2 - 1^2 = (10x)^2 - 1^2 = (10x - 1) \cdot (10x + 1)$$

$$d) a^2b^2 - 4$$

$$(ab)^2 - 2^2 = (ab - 2) \cdot (ab + 2)$$

$$e) 4p^2 - 9b^2$$

$$2^2p^2 - 3^2b^2 = (2p)^2 - (3b)^2 = (2p - 3b) \cdot (2p + 3b)$$

$$f) (x + y)^2 - y^2$$

$$[(x + y) - y] \cdot [(x + y) + y] =$$

$$x \cdot (x + 2y) =$$

$$x^2 + 2xy$$

$$g) (a + b)^2 - (a - b)^2$$

$$[(a + b) - (a - b)] \cdot [(a + b) + (a - b)] =$$

$$2b \cdot 2a =$$

$$4ab$$

$$h) 1 - (x + y)^2$$

$$1^2 - (x + y)^2 = [1 - (x + y)] \cdot [1 + (x + y)]$$

Lição 28 - Trinômio quadrado perfeito

1. Faça os trinômios, escrevendo-os na forma de quadrado da soma ou da subtração:

$$a) x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$b) a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$$

Atenção: o enunciado é $a^2 + 2a + 1$

$$c) x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

$$d) 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$$

$$e) m^2 + 2mn + n^2 = (m + n)^2$$

$$f) x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$$

$$g) 9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$$

$$h) x^3 + 2x^2 + x =$$

Primeiro evidencie o x:

$$x \cdot (x^2 + 2x + 1) =$$

Agora fatore o trinômio quadrado perfeito $\left[x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \right]$:

$$x \cdot (x + 1)^2$$

Lição 29 – Soma ou diferença de dois cubos

1. Escreva a forma fatorada de cada um dos seguintes polinômios:

a) $x^3 + y^3 = (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2)$

b) $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

c) $c^3 - 1 = c^3 - 1^3 = (c - 1) \cdot (c^2 + c + 1)$

d) $m^3 + 8 = m^3 + 2^3 = (m + 2) \cdot (m^2 - 2m + 4)$

e) $27 - n^3 = 3^3 - n^3 = (3 - n) \cdot (3^2 + 3n + n^2) = (3 - n) \cdot (9 + 3n + n^2)$

f) $\frac{1}{125} + p^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 + p^3 = \left(\frac{1}{5} + p\right) \cdot \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{5} \cdot p + p^2\right] = \left(\frac{1}{5} + p\right) \cdot \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{5}p + p^2\right)$

2. Fatore os polinômios:

a) $a^4 - b^4$

Fatore a diferença de quadrados $\left[a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 + b^2) \cdot (a^2 - b^2) \right]$:

$$(a^2 + b^2) \cdot (a^2 - b^2) =$$

Fatore a diferença de quadrados $\left[a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b) \right]$:

$$(a^2 + b^2) \cdot (a + b) \cdot (a - b)$$

b) $3x^2 - 6x + 3$

Evidencie o 3:

$$3 \cdot x^2 + 3 \cdot -2x + 3 \cdot 1 =$$

$$3 \cdot (x^2 - 2x + 1) =$$

Fatore o trinômio quadrado perfeito $\left[x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \right]$:

$$3 \cdot (x - 1)^2$$

c) $m^2x - x$

Evidencie o x:

$$x \cdot m^2 - x \cdot 1 =$$

$$x \cdot (m^2 - 1) =$$

Fatore a diferença de quadrados $\left[(m^2 - 1) = m^2 - 1^2 = (m + 1) \cdot (m - 1)\right]$:

$$x \cdot (m + 1) \cdot (m - 1)$$

$$d) 5a^2 + 30ab + 45b^2$$

Evidencie o 5:

$$5 \cdot a^2 + 5 \cdot (6ab) + 5 \cdot (9b^2) =$$

$$5 \cdot (a^2 + 6ab + 9b^2) =$$

Fatore o trinômio quadrado perfeito $\left[(a^2 + 6ab + 9b^2) = (a + 3b)^2\right]$:

$$5 \cdot (a + 3b)^2$$

$$e) x^3y - xy^3$$

Evidencie o xy :

$$x^2 \cdot xy - xy \cdot y^2 = xy \cdot x^2 - xy \cdot y^2 =$$

$$xy \cdot (x^2 - y^2) =$$

Fatore a diferença de quadrados $\left[(x^2 - y^2) = (x + y) \cdot (x - y)\right]$:

$$xy \cdot (x + y) \cdot (x - y)$$

Lição 30 – Fatorando mais de uma vez

1. Fatore o polinômio $ax^3 - ax + bx^3 - bx$:

R: Evidencie “ ax ”:

$$ax \cdot (x^2 - 1) + bx^3 - bx =$$

Evidencie “ bx ”:

$$ax \cdot (x^2 - 1) + bx \cdot (x^2 - 1) =$$

Evidencie “ $x^2 - 1$ ”:

$$(x^2 - 1) \cdot (ax + bx) =$$

Evidencie x :

$$(x^2 - 1) \cdot x \cdot (a + b) =$$

Fatore a diferença de quadrados $\left[x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x + 1) \cdot (x - 1)\right]$:

$$(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot x \cdot (a + b)$$

2. Fatore o polinômio $x^3y + 2x^2y^2 + xy^3$ e determine o seu valor numérico, sabendo que $xy = 10$ e $x + y = -5$.

R: Para fatorar o polinômio, comece evidenciando o xy :

$$x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 = xy \cdot (x^2 + 2xy + y^2) =$$

Fatore o trinômio quadrado perfeito $\left[x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \right]$:

$$xy \cdot (x + y)^2$$

Sabemos que:

$$\rightarrow xy = 10$$

$$\rightarrow x + y = -5$$

Substitua esses valores de “ xy ” e “ $x + y$ ” na expressão fatorada:

$$xy \cdot (x + y)^2 =$$

$$10 \cdot (x + y)^2 =$$

$$10 \cdot (-5)^2 =$$

$$10 \cdot 25 =$$

$$250$$

3. Qual é a fatoração da expressão $ab^2 - ac^2 + b^3 - bc^2$?

Comece evidenciando “ a ”:

$$a \cdot (b^2 - c^2) + b^3 - bc^2 =$$

Evidencie “ b ”:

$$a \cdot (b^2 - c^2) + b \cdot (b^2 - c^2) =$$

Evidencie “ $b^2 - c^2$ ”:

$$(b^2 - c^2) \cdot (a + b) =$$

Fatore a diferença de quadrados $\left[(b^2 - c^2) = (b - c) \cdot (b + c) \right]$:

$$(b - c) \cdot (b + c) \cdot (a + b)$$

Lição 31 – Usando a fatoração para resolver equações

1. Determine as raízes das equações abaixo:

a) $x^2 - 9x = 0$

Evidencie o “x”.

$$x \cdot (x - 9) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9 \end{cases}$$

b) $x^2 - 81 = 0$

Utilize a propriedade da diferença de quadrados.

$$x^2 - 9^2 = 0$$

$$(x + 9) \cdot (x - 9) = 0 \quad \begin{cases} x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9 \\ x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9 \end{cases}$$

c) $x^2 - 64 = 0$

Utilize a propriedade da diferença de quadrados

$$x^2 - 8^2 = 0$$

$$(x + 8) \cdot (x - 8) = 0 \quad \begin{cases} x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8 \\ x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \end{cases}$$

d) $x^2 + 20x = 0$

Evidencie o “x”.

$$x \cdot (x + 20) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x + 20 = 0 \Rightarrow x = -20 \end{cases}$$

e) $x^2 - x = 0$

Evidencie o “x”.

$$x \cdot (x - 1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

f) $x^2 - 0,25 = 0$

Utilize a propriedade da diferença de quadrados

$$(x + 0,5) \cdot (x - 0,5) = 0 \quad \begin{cases} x + 0,5 = 0 \Rightarrow x = -0,5 \\ x - 0,5 = 0 \Rightarrow x = 0,5 \end{cases}$$

Note que: $(0,5)^2 = 0,25$

g) $x^2 - 1 = 0$

Utilize a propriedade da diferença de quadrados

$$(x + 1) \cdot (x - 1) = 0 \quad \begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

h) $x^2 + 0,6x = 0$

Evidencie o “x”.

$$x \cdot (x + 0,6) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x + 0,6 = 0 \Rightarrow x = -0,6 \end{cases}$$

i) $x^2 - 0,01 = 0$

Utilize a propriedade da diferença de quadrados

$$(x + 0,1) \cdot (x - 0,1) = 0 \quad \begin{cases} x + 0,1 = 0 \Rightarrow x = -0,1 \\ x - 0,1 = 0 \Rightarrow x = 0,1 \end{cases}$$

Note que: $(0,1)^2 = 0,01$

j) $x^2 - \frac{x}{4} = 0$

Evidencie o “x”.

$$x \cdot \left(x - \frac{1}{4} \right) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

2. Qual é a forma fatorada da expressão $(x + y)^2 - (2x + y)(-x + y)$?

a) $x(3x - y)$

b) $x(3x + y)$

c) $x(2x + y)$

d) $y(3x - y)$

e) $y(3x + y)$

ATENÇÃO: há um erro no enunciado. O enunciado correto é: $(x + y)^2 - (2x + y)(-x + y) =$

Resolução:

$$(x + y)^2 - (2x + y)(-x + y) =$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - (-2x^2 + 2xy - xy + y^2) =$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - (-2x^2 + xy + y^2) =$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x^2 - xy - y^2 =$$

$$x^2 + 2x^2 + 2xy - xy + y^2 - y^2 =$$

$$3x^2 + xy + 0 =$$

$$3x^2 + xy$$

$$x \cdot (3x + y)$$

Logo, é a alternativa b).

Lição 32 – Avaliação

1. Calcule as potências:

a) $7^3 = 343$

b) $(-2)^4 = 16$

c) $(-1)^7 = -1$

d) $(0,82)^0 = 1$

e) $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$

g) $5^{-1} = \frac{1}{5}$

h) $0^{10} = 0$

i) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

j) $(-2)^{-1} = -\frac{1}{2^1} = -\frac{1}{2}$

2. Passe para a notação científica os números a seguir:

a) 170.000

$1,7 \cdot 10^5$

Como vírgula anda 5 casas para a esquerda, o 5 no expoente é positivo.

b) 12

$1,2 \cdot 10^1$

Como vírgula anda 1 casa para a esquerda, o 1 no expoente é positivo.

c) 0,000004

$4,0 \cdot 10^{-6}$

Como vírgula anda 6 casas para a direita, o 6 no expoente é negativo.

d) 18,4

$1,84 \cdot 10^1$

Como vírgula anda 1 casa para a esquerda, o 1 no expoente é positivo.

e) 0,0058

$5,8 \cdot 10^{-3}$

Como vírgula anda 3 casas para a direita, o 3 no expoente é negativo.

3. Reduza a uma só potência, aplicando as propriedades das potências:

a) $2^8 \cdot 2^{10}$

$$2^{8+10} = 2^{18}$$

b) $\frac{5^{15}}{5^7}$

$$5^{15-7} = 5^8$$

c) $(2^2)^3$

$$2^{2 \cdot 3} = 2^6$$

d) $\frac{(9^2)^6 \cdot 9^7}{9^9}$

$$\frac{9^{2 \cdot 6} \cdot 9^7}{9^9} = \frac{9^{12+7}}{9^9} = \frac{9^{19}}{9^9} = 9^{19-9} = 9^{10}$$

4. Calcule:

a) $4 + \sqrt{25} - 3$

$$4 + 5 - 3$$

$$6$$

b) $3 \cdot \sqrt{16} - \sqrt{100}$

$$3 \cdot 4 - \sqrt{100} =$$

$$12 - 10 =$$

$$2$$

c) $\sqrt{\frac{4}{25}} + \frac{3}{5}$

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} + \frac{3}{5} =$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} =$$

$$\frac{2+3}{5} = \frac{5}{5} = 5 \div 5 = 1$$

d) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$

$$\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$$

$$\text{e) } \sqrt[4]{81} + \sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{-1}$$

$$3 + \sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{-1} =$$

$$3 + 2 + \sqrt[3]{-1} =$$

$$3 + 2 + (-1) =$$

$$5 - 1 =$$

$$4$$

$$\text{f) } \sqrt{21 \cdot 4 - 3}$$

$$\sqrt{84 - 3} = \sqrt{81} = 9$$

$$\text{g) } 3^0 - \sqrt[3]{0}$$

$$1 - 0 =$$

$$1$$

$$\text{h) } 49^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[2]{49^1} = \sqrt{49} = 7$$

$$\text{i) } 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$$

$$(2 + 7)\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$\text{j) } 2\sqrt{12} - 4\sqrt{27} + \sqrt{48}$$

$$2 \cdot \sqrt{4 \cdot 3} - 4\sqrt{9 \cdot 3} + \sqrt{16 \cdot 3} =$$

$$2 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} =$$

$$2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt{3} =$$

$$4 \cdot \sqrt{3} - 12 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt{3} =$$

$$4\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 4\sqrt{3} =$$

$$-8\sqrt{3} + 4\sqrt{3} =$$

$$-4\sqrt{3}$$

$$\text{k) } \sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$$

$$\sqrt{2 \cdot 50} = \sqrt{100} = 10$$

$$1) \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{6 \cdot 3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

5. Calcule usando a regra dos produtos notáveis:

$$a) (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$b) (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$c) (x + 3) \cdot (x - 3) = x^2 - 9$$

$$d) (x + 3) \cdot (x - 3) - (x + 2)(x - 2) =$$

$$x^2 - 3^2 - (x^2 - 2^2) =$$

$$x^2 - 9 - (x^2 - 4) =$$

$$x^2 - 9 - x^2 + 4 =$$

$$x^2 - x^2 - 9 + 4 =$$

$$0 - 9 + 4 =$$

$$-5$$

$$e) (x + 3)^2 - (x - 3)^2 =$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - (x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) =$$

$$x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 6x + 9) =$$

$$x^2 + 6x + 9 - x^2 + 6x - 9 =$$

$$x^2 - x^2 + 6x + 6x + 9 - 9 =$$

$$0 + 6x + 6x + 0 =$$

$$12x$$

6. Fatore as expressões a seguir:

$$a) 20x^2 + 25x$$

Evidencie o 5x:

$$5x \cdot 4x + 5x \cdot 5 =$$

$$5x \cdot (4x + 5)$$

$$b) ax + ay - bx - by$$

Evidencie o “a”:

$$a \cdot (x + y) - bx - by =$$

Evidencie o “b”:

$$a \cdot (x + y) - b \cdot (x + y) =$$

Evidencie o “x + y”:

$$(x + y) \cdot (a - b)$$

c) $4m^3 - 6m^2$

Evidencie o $2m^2$:

$$2m^2 \cdot 2m + 2m^2 \cdot (-3) =$$

$$2m^2 \cdot (2m - 3)$$

d) $(a + 1)x + (a + 1)y$

Evidencie o “a + 1”:

$$(a + 1) \cdot (x + y)$$

e) $12 + 4a + 3b + ab$

Evidencie o 4:

$$4 \cdot (3 + a) + 3b + ab =$$

Evidencie o b:

$$4 \cdot (3 + a) + b \cdot (3 + a) =$$

Evidencie o “3 + a”:

$$(3 + a) \cdot (4 + b)$$

f) $100x^2 - 1$

Fatore utilizando a propriedade da diferença de quadrados:

$$10^2x^2 - 1^2 = (10x)^2 - 1^2 =$$

$$(10x + 1) \cdot (10x - 1)$$

g) $25b^2 - 16$

Fatore utilizando a propriedade da diferença de quadrados:

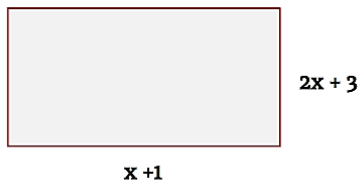
$$5^2b^2 - 4^2 = (5b)^2 - 4^2 =$$

$$(5b - 4) \cdot (5b + 4)$$

h) $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

i) $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$

7. Qual é a área do retângulo a seguir?



A área de um retângulo é calculada pela seguinte expressão:

$$A_{\text{retângulo}} = \text{base} \cdot \text{altura}$$

A base desse retângulo é $(x + 1)$.

A altura desse retângulo é $(2x + 3)$.

Basta substituir tais valores na expressão:

$$A_{\text{retângulo}} = \text{base} \cdot \text{altura}$$

$$A_{\text{retângulo}} = (x + 1) \cdot (2x + 3)$$

$$A_{\text{retângulo}} = x \cdot 2x + x \cdot 3 + 1 \cdot 2x + 1 \cdot 3$$

$$A_{\text{retângulo}} = 2x^2 + 3x + 2x + 3$$

$$A_{\text{retângulo}} = 2x^2 + 5x + 3$$

Passo a passo de Matemática

Etapa 9, Volume 3

Lição 33 – Equação

1. Defina com suas palavras:

a) Equação.

R: Equação é uma expressão algébrica, com uma ou mais incógnitas, que contém uma igualdade.

b) Expressão algébrica.

R: Expressão algébrica é uma expressão matemática que apresenta números, letras e operações.

c) Incógnita.

R: Incógnita são as letras que aparecem nas expressões, mas que possuem um valor específico que deve ser descoberto.

d) Igualdade

R: Igualdade é o sinal de igual entre duas expressões.

2. Diga o grau de cada equação abaixo:

a) $x^2 + 2x + 7 = 108$

R: Segundo grau.

b) $x^4 + 4x - 2 = x^3 + 5x^2 - 24$

R: Quarto grau.

c) $x^7 + x^2 - x^3 + 45 = x^9 + 84$

R: Nono grau.

d) $x^{45} + x^{46} + x^{47} + x^{49} = x^{50} - 14 + x^3$

R: Quinquagésimo grau.

e) $5x^5 + 7x^2 - 9x^3 = 0$

R: Quinto grau.

f) $10x^{100} + 100x^{1000} + 1000x^{10000} = 0$

R: Décimo milésimo grau.

Lição 34 – Equação do 1º grau

1. Resolva as equações:

a) $b + 7 = 13$

$$b = 13 - 7$$

$$b = 6$$

b) $3x = 21$

$$x = \frac{21}{3}$$

$$x = 7$$

c) $4y = -24$

$$y = \frac{-24}{4}$$

$$y = -6$$

d) $-2x = -12$

$$x = \frac{-12}{-2}$$

$$x = 6$$

e) $\frac{a}{-5} = 12$

$$a = 12 \cdot -5$$

$$a = -60$$

f) $18x - 43 = 65$

$$18x = 65 + 43$$

$$18x = 108$$

$$x = \frac{108}{18}$$

$$x = 6$$

g) $23x - 16 = 14 - 17x$

$$23x = 14 - 17x + 16$$

$$23x = 14 + 16 - 17x$$

$$23x = 30 - 17x$$

$$23x + 17x = 30$$

$$40x = 30$$

$$x = \frac{30}{40}$$

Simplifique a fração.

$$x = \frac{30}{40} = \frac{30 : 10}{40 : 10} = \frac{3}{4}$$

$$h) 10y - 5(1 + y) = 3(2y - 2) - 20$$

$$10y - 5 - 5y = 3(2y - 2) - 20$$

$$10y - 5y - 5 = 6y - 6 - 20$$

$$5y - 5 = 6y - 26$$

$$5y - 5 - 6y = -26$$

$$5y - 6y - 5 = -26$$

$$-y - 5 = -26$$

$$-y = -26 + 56$$

$$-y = -21$$

$$y = 21$$

$$i) \frac{5}{b} + 2 = 10 - 2$$

$$\frac{5}{b} + 2 = 8$$

$$\frac{5}{b} = 8 - 2$$

$$\frac{5}{b} = 6$$

$$5 = 6 \cdot b$$

$$5 = 6b$$

$$-6b = -5$$

$$6b = 5$$

$$b = \frac{5}{6}$$

Lição 35 - Problemas envolvendo equação de 1º grau

1. O dobro do meu antecessor menos três é igual a vinte e cinco. Que número eu sou?

R: O dobro de algo é: $2 \cdot (\text{algo})$

O antecessor de um número é: $x - 1$

Assim, dobro do antecessor de um número é: $2 \cdot (x - 1) = 2x - 2$

O dobro de um antecessor menos 3 é igual a vinte cinco é:

$$2x - 2 - 3 = 25$$

Basta resolver a equação.

$$2x - 2 - 3 = 25$$

$$2x - 5 = 25$$

$$2x = 25 + 5$$

$$2x = 30$$

$$x = \frac{30}{2}$$

$$x = 15$$

Portanto, o número é 15.

2. O quántuplo de um número mais quinze é igual ao dobro deste número adicionado de quarenta e cinco. Qual é esse número?

R: O quántuplo de um número é : $5x$

O quántuplo de um número mais 15 é: $5x + 15$

O dobro de um número é: $2x$

O dobro de um número adicionado de 45 é: $2x + 45$

Assim:

o quántuplo de um número mais 15 = o dobro de um número adicionado de 45

$$5x + 15 = 2x + 45$$

Basta resolver a equação.

$$5x + 15 - 2x = 45$$

$$5x - 2x + 15 = 45$$

$$3x + 15 = 45$$

$$3x = 45 - 15$$

$$3x = 30$$

$$x = \frac{30}{3}$$

$$x = 10$$

Logo, o número é 10.

3. Antônio passou $\frac{1}{3}$ do dia dormindo e $\frac{1}{4}$ brincando com os amigos. Quantas horas do dia restaram para ele fazer as outras atividades?

R: Esse problema não é um problema de equacionamento e sim de fração.

Um dia tem 24 horas.

Um terço de algo significa dividir aquele algo por 3.

Assim, um terço de um dia significa $24 : 3 = 8$. Logo, Antônio passou 8 horas dormindo.

Da mesma forma, um quarto de algo significa dividir aquele algo por 4.

Assim, um quarto de um dia significa $24 : 4 = 6$. Logo, Antônio passou 6 horas brincando com os amigos.

No total, Antônio gastou nessas duas atividades 14 horas ($8 + 6$).

Se um dia tem 24 horas, lhe sobram 10 horas para realizar outras atividades ($24 - 14 = 10$).

4. Reparta R\$ 560,00 entre Marta, Maria e Lázaro, de modo que Marta receba mais R\$ 70,00 que Maria, e Maria receba mais R\$ 50,00 que Lázaro.

R: Note que o valor que Marta receberá depende do valor que Maria receberá (deve ser obrigatoriamente 70 reais a mais que Maria).

Da mesma forma, o valor que Maria receberá depende do valor que Lázaro receberá (deve ser obrigatoriamente 50 reais a mais que Lázaro).

O único valor que não depende de nenhum outro valor é a quantia que Lázaro receberá. Assim, devemos começar por ele e chamar esse valor que ele receberá de x .

Assim, Lázaro receberá : x reais.

Maria deve receber 50 reais a mais que Lázaro. Logo, Maria receberá: $x + 50$.

Marta deve receber 70 reais a mais que Maria. Logo, Marta receberá: $x + 50 + 70 = x + 120$

Se somarmos quanto cada um recebeu, a soma deve resultar em 560, pois é o valor total que foi repartido. Assim:

$$\$ \$ \text{ que Lázaro recebeu} + \$ \$ \text{ que Maria recebeu} + \$ \$ \text{ que Marta recebeu} = 560$$

$$x + x + 50 + x + 120 = 560$$

Basta resolver a equação.

$$x + x + x + 50 + 120 = 560$$

$$3x + 50 + 120 = 560$$

$$3x + 170 = 560$$

$$3x = 560 - 170$$

$$3x = 390$$

$$x = \frac{390}{3}$$

$$x = 130$$

Agora, voltemos às expressões que escrevemos para cada irmão.

Lázaro deve receber x reais. Assim, se $x = 130$, Lázaro receberá 130 reais.

Maria deve receber $x + 50$ reais. Assim, se $x = 130$, Maria receberá 180 reais ($130 + 50 = 180$).

Marta deve receber $x + 120$ reais. Assim, se $x = 130$, Marta receberá 250 reais ($130 + 120 = 250$).

Portanto, Lázaro deve receber R\$ 130,00; Maria deve receber R\$ 180,00 (50 a mais que Lázaro); e Marta deve receber R\$ 250,00 (70 a mais que Maria).

5. Uma fita de 274 metros vai ser dividida em duas partes, de modo que uma tenha mais 37 centímetros que a outra. Quanto medirá a parte maior?

R: A primeira coisa que precisamos notar é que não podemos somar metros com centímetros. 1 metro + 1 centímetro não resulta em 2 metros. É preciso transformar os centímetros em metros para que possamos somar.

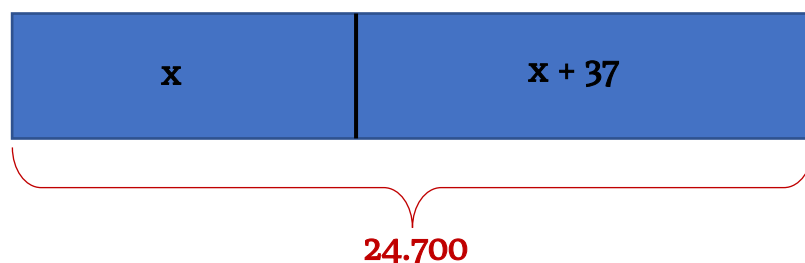
Da mesma forma, para realizarmos a equação, não podemos ter metros e centímetros na conta. É preciso escolher uma unidade.

1 metro tem 100 centímetros. Assim, 274 metros são 24.700 centímetros.

Vamos escolher seguir a conta com centímetros e, a partir de agora, diremos que a fita tem 24.700 centímetros.

Vamos dividir essa fita em duas partes. Não sabemos quanto medirá cada parte. Podemos dizer então, que a primeira parte medirá x centímetros.

A segunda parte medirá 37 centímetros a mais que a primeira. Então, a segunda parte medirá $x + 37$ centímetros. Observe a imagem a seguir para entender melhor:



Assim, como podemos notar com a imagem, se somarmos quanto medem as duas partes obteremos 24700:

$$x + x + 37 = 24700$$

$$2x + 37 = 24700$$

$$2x = 24700 - 37$$

$$2x = 24663$$

$$x = \frac{24663}{2}$$

$$x = 12.331,5 \text{ cm}$$

Assim, a parte menor medirá 12.331,5 cm.

A parte maior mede 37 centímetros a mais ($x + 37$). Então, a parte maior medirá 12.368,5 cm.

Sabemos que a cada 100 cm temos um metro. Então 12.368,5 cm correspondem a:

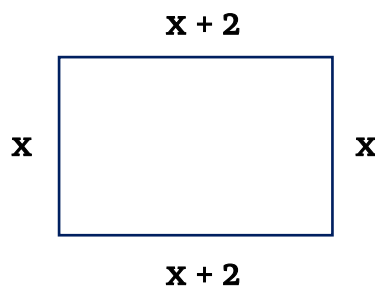
$$\frac{12368,5}{100} = 123,685 \text{ metros.}$$

Logo, a parte maior medirá 123,685 m.

6. Num retângulo de perímetro 44 cm, um lado mede mais 2 cm que o outro. Quanto mede o menor lado do retângulo?

R: Não conhecemos um dos lados, por isso, o chamaremos de **x**.

O outro lado mede 2 cm a mais que o outro. Então, o outro lado mede **x + 2**. Desse modo, podemos representar o retângulo:



O perímetro é a *soma de todos os lados*. Assim, se somarmos todos os lados, a soma será 44 (é o valor do perímetro):

$$x + (x + 2) + x + (x + 2) = 44$$

$$x + x + 2 + x + x + 2 = 44$$

$$x + x + x + x + 2 + 2 = 44$$

$$4x + 4 = 44$$

$$4x = 44 - 4$$

$$4x = 40$$

$$x = \frac{40}{4}$$

$$x = 10$$

Assim, o lado menor do retângulo mede 10 cm (o lado menor é **x**).

7. Uma fazenda tem vacas e galinhas. Sabendo-se que existem 16 vacas e que o número de patas é 100, qual é o número de galinhas?

R: Sabemos que vacas tem 4 patas e que galinhas tem 2 patas.

Se queremos saber o número total de “patas”, precisamos fazer:

$$\text{Total de patas} = (\text{quantidade de galinhas}) \cdot 2 \text{ patas} + (\text{quantidade de vacas}) \cdot 4 \text{ patas}$$

Temos o número total de patas (100). Sabemos que existem 16 vacas. Queremos saber a quantidade de galinhas. Chame “quantidade de galinhas” de x .

Substitua os valores:

$$\text{Total de patas} = (\text{quantidade de galinhas}) \cdot 2 \text{ patas} + (\text{quantidade de vacas}) \cdot 4 \text{ patas}$$

$$100 = x \cdot 2 \text{ patas} + 16 \cdot 4 \text{ patas}$$

$$100 = x \cdot 2 + 16 \cdot 4$$

$$100 = 2x + 64$$

$$-2x = 64 - 100$$

$$-2x = -36$$

$$x = \frac{-36}{-2}$$

$$x = 18$$

Portanto, há 18 galinhas (“ x ” era a “quantidade de galinhas”).

Lição 36 – Equações de 2º grau com uma incógnita

1. Identifique quais são equações de 2º grau com uma incógnita:

a) $3x^2 - 5x + 1 = 0$

É de 2º grau com uma incógnita pois possui apenas a incógnita x e o maior expoente de x é 2.

b) $10x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

Não é equação de 2º grau, pois o maior expoente de x é 4; portanto, é uma equação do 4º grau.

c) $2x - 3 = 0$

Não é equação de 2º grau, pois o maior expoente de x é 1; portanto, é uma equação do 1º grau.

d) $-x^2 - 3x + 2 = 0$

É de 2º grau com uma incógnita pois possui apenas a incógnita x e o maior expoente de x é 2.

e) $4x^2 - x = 0$

É de 2º grau com uma incógnita pois possui apenas a incógnita x e o maior expoente de x é 2.

f) $9x^2 - 1 = 0$

É de 2º grau com uma incógnita pois possui apenas a incógnita x e o maior expoente de x é 2.

g) $2x^4 + 5 = 0$

Não é equação de 2º grau, pois o maior expoente de x é 4; portanto, é uma equação do 4º grau.

h) $0x^2 - 5x + 6 = 0$

Não é equação de 2º grau, pois o coeficiente que acompanha o x^2 é 0 (zero) e qualquer número vezes 0 resulta em 0. Portanto, a equação fica:

$0 - 5x + 6 = 0$

$-5x + 6 = 0 \rightarrow$ equação do 1º grau.

2. Todas as equações seguintes são equações do segundo grau e estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$. Dessa forma, identifique os coeficientes de cada uma das equações:

a) $10x^2 + 3x - 1 = 0$

$a = 10$; $b = 3$; $c = -1$

b) $x^2 + 2x - 8 = 0$

$a = 1$; $b = 2$; $c = -8$

c) $y^2 - 3y - 4 = 0$

$a = 1$; $b = -3$; $c = -4$

d) $7p^2 + 10p + 3 = 0$

$a = 7$; $b = 10$; $c = 3$

e) $-4x^2 + 6x = 0$

$a = -4$; $b = 6$; $c = 0$

f) $r^2 - 16 = 0$

$a = 1$; $b = 0$; $c = -16$

g) $-6x^2 + x + 1 = 0$

$a = -6$; $b = 1$; $c = 1$

h) $5m^2 - 10m = 0$

$a = 5$; $b = -10$; $c = 0$

3. Escreva a equação de segundo grau quando:

a) $a = 1$, $b = 6$, $c = 9$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

b) $a = 4$, $b = -6$, $c = 2$

$$4x^2 - 6x + 2 = 0$$

c) $a = 4$, $b = 0$, $c = -25$

$$4x^2 - 25 = 0$$

d) $a = -21$, $b = 7$, $c = 0$

$$-21x^2 + 7x = 0$$

e) $a = -9$, $b = 0$, $c = 1$

$$-9x^2 + 1 = 0$$

f) $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = -\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{3} = 0$$

g) $a = 1,5$; $b = 1$; $c = 0,2$

$$1,5x^2 + x + 0,2 = 0$$

Lição 37 – Equação completa e equação incompleta

1. O que caracteriza uma equação do 2º grau como completa?

R: Os coeficientes b e c serem diferentes de zero.

2. O que caracteriza uma equação do 2º grau como incompleta?

R: Quando ou $b = 0$ ou $c = 0$, a equação do 2º grau é caracterizada como incompleta.

3. Identifique como completas ou incompletas as equações de 2º grau a seguir:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

Completa, pois $b = -7$ e $c = 10$.

b) $-2x^2 + 3x - 1 = 0$

Completa, pois $b = 3$ e $c = -1$.

c) $-4x^2 + 6x = 0$

Incompleta, pois $c = 0$.

d) $x^2 - x - 12 = 0$

Completa, pois $b = -1$ e $c = -12$.

$$e) 9x^2 - 4 = 0$$

Incompleta, pois $b = 0$.

$$f) 7x^2 + 14x = 0$$

Incompleta, pois $c = 0$.

Lição 38 – Equações de 2º grau: forma normal

1. Escreva na forma $ax^2 + bx + c = 0$ cada uma das seguintes equações de 2º grau:

$$a) x^2 - 1 = x + 11$$

$$x^2 - 1 - x - 11 = 0$$

$$x^2 - x - 1 - 11 = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$b) x^2 - 7x = 6 - 2x$$

$$x^2 - 7x - 6 + 2x = 0$$

$$x^2 - 7x + 2x - 6 = 0$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$c) x \cdot (x-3) + (x-1) \cdot (x-4) = 0$$

$$x \cdot x - x \cdot 3 + x \cdot x + x \cdot (-4) - 1 \cdot x - 1 \cdot (-4) = 0$$

$$x^2 - 3x + x^2 - 4x - x + 4 = 0$$

$$x^2 + x^2 - 3x - 4x - x + 4 = 0$$

$$2x^2 - 7x - x + 4 = 0$$

$$2x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$d) (x-3)^2 + (x+2)^2 = 10$$

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 + 4x + 4 = 10$$

$$x^2 + x^2 - 6x + 4x + 9 + 4 = 10$$

$$2x^2 - 2x + 13 = 10$$

$$2x^2 - 2x + 13 - 10 = 0$$

$$2x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$e) x^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}$$

$$x^2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} = 0$$

O MMC (4,2) = 4. Multiplique toda equação por 4:

$$4 \cdot x^2 - 4 \cdot \frac{1}{4}x^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot 0$$

$$4x^2 - x^2$$

$$3x^2 - 2 = 0$$

$$f) \frac{x^2}{5} = \frac{x}{4} + \frac{x^2}{10}$$

O MMC (5,4,10) = 20. Multiplique toda equação por 20:

$$20 \cdot \frac{x^2}{5} = 20 \cdot \frac{x}{4} + 20 \cdot \frac{x^2}{10}$$

$$\frac{20x^2}{5} = \frac{20x}{4} + \frac{20x^2}{10}$$

$$\frac{20}{5} \cdot x^2 = \frac{20}{4} \cdot x + \frac{20}{10} \cdot x^2$$

$$4 \cdot x^2 = 5 \cdot x + 2 \cdot x^2$$

$$4x^2 = 5x + 2x^2$$

$$4x^2 - 5x - 2x^2 = 0$$

$$4x^2 - 2x^2 - 5x = 0$$

$$2x^2 - 5x = 0$$

$$g) x - 3 = \frac{3x}{x-4}, \quad (\text{com } x \neq 4)$$

Passe o (x - 4) multiplicando:

$$(x-3) \cdot (x-4) = 3x$$

$$x \cdot x + x \cdot (-4) - 3 \cdot x - 3 \cdot (-4) = 3x$$

$$x^2 - 4x - 3x + 12 = 3x$$

$$x^2 - 7x + 12 = 3x$$

$$x^2 - 7x + 12 - 3x = 0$$

$$x^2 - 7x - 3x + 12 = 0$$

$$x^2 - 10x + 12 = 0$$

$$h) \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{-3x^2}{x^2-1}, \quad (\text{com } x \neq -1 \text{ e } x \neq 1)$$

Note que $x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$. Reescreva-o:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{-3x^2}{(x+1) \cdot (x-1)}$$

Multiplique toda equação por $(x + 1) \cdot (x - 1)$:

$$\frac{x}{x+1} \cdot (x+1) \cdot (x-1) + \frac{1}{x-1} \cdot (x+1) \cdot (x-1) = \frac{-3x^2}{(x+1) \cdot (x-1)} \cdot (x+1) \cdot (x-1)$$

$$\frac{x \cdot (x+1) \cdot (x-1)}{(x+1)} + \frac{1 \cdot (x+1) \cdot (x-1)}{(x-1)} = \frac{-3x^2 \cdot (x+1) \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot (x-1)}$$

$$x \cdot (x-1) + 1 \cdot (x+1) = -3x^2$$

$$x \cdot x + x \cdot (-1) + 1 \cdot x + 1 \cdot 1 = -3x^2$$

$$x^2 - x + x + 1 = -3x^2$$

$$x^2 + 0 + 1 = -3x^2$$

$$x^2 + 1 + 3x^2 = 0$$

$$x^2 + 3x^2 + 1 = 0$$

$$4x^2 + 1 = 0$$

2. O quadrado de um número aumentado do triplo deste número é igual ao próprio número mais 35. Escreva na forma $ax^2 + bx + c = 0$ a equação de 2º grau que se pode formar com os dados deste problema.

R: O quadrado de um número é: x^2 .

O triplo deste número é: $3x$.

Então, o quadrado de um número aumentado do triplo deste número é: $x^2 + 3x$.

O número mais 35 é: $x + 35$.

Assim:

o quadrado de um número aumentado do triplo deste número = o número mais 35

$$x^2 + 3x = x + 35$$

Passando para a forma $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x^2 + 3x = x + 35$$

$$x^2 + 3x - x - 35 = 0$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

3. A área de um retângulo é calculada multiplicando-se a medida do comprimento pela medida da largura. Em um retângulo de área 60 cm^2 , a medida do comprimento é expressa

por $(x + 2)$ cm, e a medida da largura é expressa por $(x - 5)$ cm. Nessas condições, escreva na forma $ax^2 + bx + c = 0$ a equação de 2º grau que se pode formar com esses dados.

R: Como o próprio exercício diz, para encontrar a área é preciso multiplicar a largura pelo comprimento:

$$\underline{(\text{largura}) \cdot (\text{comprimento}) = \text{área}}$$

Sabemos que a área = 60; a largura é $(x - 5)$ e o comprimento é $(x + 2)$. Basta substituir esses valores:

$$(x - 5) \cdot (x + 2) = 60$$

Passando para a forma $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x \cdot x + x \cdot 2 - 5 \cdot x - 5 \cdot 2 = 60$$

$$x^2 + 2x - 5x - 10 = 60$$

$$x^2 - 3x - 10 - 60 = 0$$

$$x^2 - 3x - 70 = 0$$

4. A área de um quadrado é calculada elevando-se a medida do lado ao quadrado ($\text{Área}_{\text{quadrado}} = \text{lado}^2$). A medida do lado de um quadrado é expressa por $(2x - 1)$ cm, e a área desse quadrado é 25 cm^2 . Qual é a equação de 2º grau, na forma $ax^2 + bx + c = 0$, que se pode obter com os dados deste problema?

R: Como próprio enunciado diz:

$$\text{Área}_{\text{quadrado}} = \text{lado}^2$$

Sabemos que a $\text{área}_{\text{quadrado}} = 25 \text{ cm}^2$ e o lado do quadrado é $(2x - 1)$. Assim, basta substituir:

$$25 = (2x - 1)^2$$

Passando para a forma $ax^2 + bx + c = 0$:

$$25 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$0 = 4x^2 - 4x + 1 - 25$$

$$0 = 4x^2 - 4x - 24$$

$$4x^2 - 4x - 24 = 0$$

5. O número de diagonais de um polígono pode ser obtido pela fórmula:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Sendo $d = 10$, escreva na forma $ax^2 + bx + c = 0$ a equação de 2º grau (com incógnita “n”) que se pode obter.

R: Se $d = 10$, substitua na expressão:

$$10 = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

$$10 \cdot 2 = n \cdot (n-3)$$

$$20 = n \cdot (n-3)$$

$$20 = n^2 - 3n$$

$$0 = n^2 - 3n - 20$$

$$n^2 - 3n - 20 = 0$$

Lição 39 - Resolvendo equações incompletas de 2º grau com uma incógnita

1. Resolva as equações:

a) $x^2 - 4 = 0$

$$x^2 = 0 + 4$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = 2 \text{ ou } x = -2$$

b) $x^2 = 9$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x = 3 \text{ ou } x = -3$$

c) $4x^2 - 25 = 0$

$$4x^2 = 0 + 25$$

$$4x^2 = 25$$

$$x^2 = \frac{25}{4}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} = \pm\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \pm\frac{5}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = -\frac{5}{2}$$

d) $2 = x^2$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

$$e) -2x^2 + 5 = 0$$

$$-2x^2 = 0 - 5$$

$$-2x^2 = -5$$

$$x^2 = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

A raiz de 2 e de 5 não é exata. Contudo, não podemos deixar uma raiz no denominador. É preciso racionalizar.

$$x = \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{5 \cdot 2}}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \pm \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}} = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{Assim, } x = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

$$f) x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = 0 - 1$$

$$x^2 = -1$$

Não há solução no conjunto dos reais, pois um número ao quadrado É SEMPRE positivo.

$$g) 3x^2 = 2$$

$$x^2 = \frac{2}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

A raiz de 2 e de 3 não é exata. Contudo, não podemos deixar uma raiz no denominador. É preciso racionalizar.

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{\sqrt{3 \cdot 3}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Assim, } x = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$h) 4x^2 = 100$$

$$x^2 = \frac{100}{4}$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm \sqrt{25}$$

$$x = 5 \text{ ou } x = -5$$

$$\text{i) } 2x^2 + 11 = 0$$

$$2x^2 = 0 - 11$$

$$2x^2 = -11$$

$$x^2 = -\frac{11}{2}$$

Não há solução no conjunto dos reais, pois um número ao quadrado É SEMPRE positivo.

2. Resolva as equações:

$$\text{a) } x^2 - 2x = 0$$

Evidencie o x.

$$x \cdot (x - 2) = 0$$

Assim:

$$\text{ou } x = 0$$

$$\text{ou } x - 2 = 0 \rightarrow x = 0 + 2 \rightarrow x = 2$$

Logo, $x = 0$ ou $x = 2$.

$$\text{b) } x^2 + 5x = 0$$

Evidencie o x.

$$x \cdot (x + 5) = 0$$

Assim:

$$\text{ou } x = 0$$

$$\text{ou } x + 5 = 0 \rightarrow x = 0 - 5 \rightarrow x = -5$$

Logo, $x = 0$ ou $x = -5$.

$$\text{c) } 3x^2 - x = 0$$

Evidencie o x.

$$x \cdot (3x - 1) = 0$$

Assim:

$$\text{ou } x = 0$$

$$\text{ou } 3x - 1 = 0 \rightarrow 3x = 0 + 1 \rightarrow 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Logo, $x = 0$ ou $x = \frac{1}{3}$.

$$\text{d) } 2x^2 + x = 0$$

Evidencie o x.

$$x \cdot (2x + 1) = 0$$

Assim:

$$\text{ou } x = 0$$

$$\text{ou } 2x + 1 = 0 \rightarrow 2x = 0 - 1 \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{e) } -x^2 + 4x = 0$$

Evidencie o x.

$$x \cdot (-x + 4) = 0$$

Assim:

$$\text{ou } x = 0$$

$$\text{ou } -x + 4 = 0 \rightarrow -x = 0 - 4 \rightarrow -x = -4 \rightarrow x = 4.$$

$$\text{Logo, } x = 0 \text{ ou } x = 4.$$

$$\text{f) } -2x^2 - 7x = 0$$

Evidencie o x.

$$x \cdot (-2x - 7) = 0$$

Assim:

$$\text{ou } x = 0$$

$$\text{ou } -2x - 7 = 0 \rightarrow -2x = 0 + 7 \rightarrow -2x = 7 \rightarrow x = -\frac{7}{2}.$$

$$\text{Logo, } x = 0 \text{ ou } x = -\frac{7}{2}$$

$$\text{g) } 4x^2 - 5x = 0$$

Evidencie o x.

$$x \cdot (4x - 5) = 0$$

Assim:

$$\text{ou } x = 0$$

$$\text{ou } 4x - 5 = 0 \rightarrow 4x = 0 + 5 \rightarrow 4x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$\text{Logo, } x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{4}.$$

h) $3x^2 + 7x = 0$

Evidencie o x.

$$x \cdot (3x + 7) = 0$$

Assim:

$$\text{ou } x = 0$$

$$\text{ou } 3x + 7 = 0 \rightarrow 3x = 0 - 7 \rightarrow 3x = -7 \rightarrow x = -\frac{7}{3}$$

$$\text{Logo, } x = 0 \text{ ou } x = -\frac{7}{3}$$

i) $\frac{x^2}{4} + \frac{2x}{3} = 0$

Evidencie o x.

$$x \cdot \left(\frac{x}{4} + \frac{2}{3} \right) = 0$$

Assim:

$$\text{ou } x = 0$$

$$\text{ou } \frac{x}{4} + \frac{2}{3} = 0 \rightarrow \frac{x}{4} = -\frac{2}{3} \rightarrow x = -\frac{2}{3} \cdot 4 \rightarrow x = -\frac{2 \cdot 4}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$\text{Logo, } x = 0 \text{ ou } x = -\frac{8}{3}.$$

3. Determine o conjunto solução de cada uma das equações do segundo grau, sendo $U = \mathbb{R}$.

a) $(x-6)(x+5) + x = 51$

Desenvolva a distributiva.

$$(x \cdot x + x \cdot 5 - 6 \cdot x - 6 \cdot 5) + x = 51$$

$$x^2 + 5x - 6x - 30 + x = 51$$

$$x^2 - x - 30 + x = 51$$

$$x^2 - x + x = 51 + 30$$

$$x^2 + 0 = 81$$

$$x^2 = 81$$

$$x = \pm \sqrt{81}$$

$$x = -9 \text{ ou } x = 9 \rightarrow S = \{-9, 9\}$$

$$b) x^2 + 3x \cdot (x - 12) = 0$$

Desenvolva a distributiva.

$$x^2 + 3x \cdot x + 3x \cdot (-12) = 0$$

$$x^2 + 3x^2 - 36x = 0$$

$$4x^2 - 36x = 0$$

Evidencie o x.

$$x \cdot (4x - 36) = 0$$

Assim:

$$\text{ou } x = 0$$

$$\text{ou } 4x - 36 = 0 \rightarrow 4x = 0 + 36 \rightarrow 4x = 36 \rightarrow x = \frac{36}{4} \rightarrow x = 9$$

$$\text{Logo, } x = 0 \text{ ou } x = 9 \rightarrow S = \{0, 9\}$$

$$c) (x - 3)^2 = 5x + 9$$

Desenvolva o produto notável.

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = 5x + 9$$

$$x^2 - 6x + 9 = 5x + 9$$

$$x^2 - 6x + 9 - 5x - 9 = 0$$

$$x^2 - 6x - 5x + 9 - 9 = 0$$

$$x^2 - 11x + 0 = 0$$

$$x^2 - 11x = 0$$

Evidencie o x.

$$x \cdot (x - 11) = 0$$

Assim:

$$\text{ou } x = 0$$

$$\text{ou } x - 11 = 0 \rightarrow x = 0 + 11 \rightarrow x = 11$$

$$\text{Logo, } x = 0 \text{ ou } x = 11 \rightarrow S = \{0, 11\}$$

$$d) 2x \cdot (x + 1) - x \cdot (x + 5) = +3 \cdot (12 - x)$$

$$2x \cdot x + 2x \cdot 1 - x \cdot x - x \cdot 5 = 3 \cdot 12 + 3 \cdot (-x)$$

$$2x^2 + 2x - x^2 - 5x = 36 - 3x$$

$$2x^2 - x^2 + 2x - 5x + 3x - 36 = 0$$

$$x^2 - 3x + 3x - 36 = 0$$

$$x^2 + 0 - 36 = 0$$

$$x^2 - 36 = 0$$

$$x^2 = 0 + 36$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm\sqrt{36}$$

$$x = -6 \text{ ou } x = 6 \rightarrow S = \{-6, 6\}$$

$$e) 5x \cdot (x+1) + (x-4)^2 = 16 + 3x$$

$$5x \cdot x + 5x \cdot 1 + (x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2) = 16 + 3x$$

$$5x^2 + 5x + (x^2 - 8x + 16) = 16 + 3x$$

$$5x^2 + 5x + x^2 - 8x + 16 = 16 + 3x$$

$$5x^2 + x^2 + 5x - 8x + 16 - 16 - 3x = 0$$

$$6x^2 - 3x + 0 - 3x = 0$$

$$6x^2 - 3x - 3x = 0$$

$$6x^2 - 6x = 0$$

Evidencie o x.

$$x \cdot (6x - 6) = 0$$

$$\text{ou } x = 0$$

$$\text{ou } 6x - 6 = 0 \rightarrow 6x = 0 + 6 \rightarrow 6x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{6} \rightarrow x = 1$$

$$\text{Logo, } x = 0 \text{ ou } x = 1 \rightarrow S = \{0, 1\}$$

$$f) 3x - \frac{1}{3x} = 0, \text{ com } x \neq 0$$

Multiplique por 3x toda a equação:

$$3x \cdot 3x - \frac{1}{3x} \cdot 3x = 0 \cdot 3x$$

$$9x^2 - \frac{1 \cdot 3x}{3x} = 0$$

$$9x^2 - \frac{3x}{3x} = 0$$

$$9x^2 - 1 = 0$$

$$9x^2 = 0 + 1$$

$$9x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{9}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} = \pm \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \pm \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad S = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

Note que o x precisa ser diferente de zero. Neste caso, os valores encontrados satisfazem essa exigência.

$$g) \quad 1 + \frac{x^2}{4} = \frac{5}{2}$$

O MMC $(4, 2) = 4$. Multiplique toda a equação por 4.

$$4 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{x^2}{4} = 4 \cdot \frac{5}{2}$$

$$4 + \frac{4 \cdot x^2}{4} = \frac{4 \cdot 5}{2}$$

$$4 + \frac{4}{4} \cdot x^2 = \frac{20}{2}$$

$$4 + 1 \cdot x^2 = 10$$

$$4 + x^2 = 10$$

$$x^2 = 10 - 4$$

$$x^2 = 6$$

$$x = \pm \sqrt{6}$$

$$x = \sqrt{6} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{6} \quad \rightarrow \quad S = \{ -\sqrt{6}, \sqrt{6} \}$$

$$h) \quad \frac{x}{x+1} = \frac{8}{3} + \frac{x}{1-x}, \quad \text{com } x \neq -1 \quad \text{e} \quad x \neq 1$$

Multiplique toda equação por $(x+1) \cdot (1-x) \cdot 3$.

$$\frac{x}{x+1} \cdot (x+1) \cdot (1-x) \cdot 3 = \frac{8}{3} \cdot (x+1) \cdot (1-x) \cdot 3 + \frac{x}{1-x} \cdot (x+1) \cdot (1-x) \cdot 3$$

$$\frac{x \cdot (x+1) \cdot (1-x) \cdot 3}{(x+1)} = \frac{8 \cdot (x+1) \cdot (1-x) \cdot 3}{3} + \frac{x \cdot (x+1) \cdot (1-x) \cdot 3}{(1-x)}$$

$$x \cdot (1-x) \cdot 3 = 8 \cdot (x+1) \cdot (1-x) + x \cdot (x+1) \cdot 3$$

$$3x \cdot (1-x) = 8 \cdot (x+1) \cdot (1-x) + 3x \cdot (x+1)$$

$$3x \cdot 1 + 3x \cdot (-x) = (8 \cdot x + 8 \cdot 1) \cdot (1-x) + 3x \cdot x + 3x \cdot 1$$

$$3x - 3x^2 = (8x + 8) \cdot (1-x) + 3x^2 + 3x$$

$$3x - 3x^2 - 3x^2 - 3x = (8x + 8) \cdot (1-x)$$

$$3x - 6x^2 - 3x = (8x + 8) \cdot (1-x)$$

$$3x - 3x - 6x^2 = (8x + 8) \cdot (1-x)$$

$$0 - 6x^2 = (8x + 8) \cdot (1-x)$$

$$-6x^2 = (8x + 8) \cdot (1-x)$$

$$-6x^2 = 8x \cdot 1 + 8x \cdot (-x) + 8 \cdot 1 + 8 \cdot (-x)$$

$$-6x^2 = 8x - 8x^2 + 8 - 8x$$

$$-6x^2 = 8x - 8x - 8x^2 + 8$$

$$-6x^2 = 0 - 8x^2 + 8$$

$$-6x^2 + 8x^2 - 8 = 0$$

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$2x^2 = 0 + 8$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = \frac{8}{2} = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = -2 \text{ ou } x = 2 \rightarrow S = \{-2, 2\}$$

Note que o x precisa ser diferente de -1 e 1 . Neste caso, os valores encontrados satisfazem essa exigência.

$$\text{i) } \frac{x-3}{x^2-4} + 1 = \frac{1}{x-2}, \text{ com } x \neq -2 \text{ e } x \neq 1$$

Note que $x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2)$. Multiplique toda a equação por $(x + 2) \cdot (x - 2)$.

$$\frac{x-3}{x^2-4} \cdot (x+2) \cdot (x-2) + 1 \cdot (x+2) \cdot (x-2) = \frac{1}{x-2} \cdot (x+2) \cdot (x-2)$$

$$\frac{x-3}{x^2-4} \cdot (x^2-4) + (x+2) \cdot (x-2) = \frac{1 \cdot (x+2) \cdot (x-2)}{x-2}$$

$$\frac{x-3 \cdot (x^2-4)}{x^2-4} + (x+2) \cdot (x-2) = \frac{1 \cdot (x+2) \cdot (x-2)}{x-2}$$

$$x-3+(x+2)\cdot(x-2)=\frac{1\cdot(x+2)\cdot(x-2)}{x-2}$$

$$x-3+x^2-4=\frac{1\cdot(x+2)\cdot(x-2)}{x-2}$$

$$x-3+x^2-4=1\cdot(x+2)$$

$$x-3+x^2-4=x+2$$

$$x^2+x-3-4-x-2=0$$

$$x^2+x-x-3-4-2=0$$

$$x^2+0-7-2=0$$

$$x^2-9=0$$

$$x^2=0+9=9$$

$$x=\pm\sqrt{9}$$

$$x=-3 \text{ ou } x=3 \rightarrow S=\{-3, 3\}$$

Note que o x precisa ser diferente de -2 e 1. Neste caso, os valores encontrados satisfazem essa exigência.

$$j) \frac{2}{x} + \frac{1-x}{x^2} = \frac{5}{8} + \frac{1}{x^2}, \text{ com } x \neq 0$$

Multiplique toda a equação por $8x^2$.

$$\frac{2}{x} \cdot 8x^2 + \frac{1-x}{x^2} \cdot 8x^2 = \frac{5}{8} \cdot 8x^2 + \frac{1}{x^2} \cdot 8x^2$$

$$\frac{2 \cdot 8x^2}{x} + \frac{(1-x) \cdot 8x^2}{x^2} = \frac{5 \cdot 8x^2}{8} + \frac{1 \cdot 8x^2}{x^2}$$

$$\frac{16x^2}{x} + \frac{(1-x) \cdot 8 \cdot x^2}{x^2} = \frac{40x^2}{8} + \frac{8x^2}{x^2}$$

$$16 \cdot \frac{x^2}{x} + (1-x) \cdot 8 \cdot \frac{x^2}{x^2} = \frac{40}{8} \cdot x^2 + 8 \cdot \frac{x^2}{x^2}$$

$$16 \cdot x + (1-x) \cdot 8 \cdot 1 = 5 \cdot x^2 + 8 \cdot 1$$

$$16x + (1-x) \cdot 8 = 5x^2 + 8$$

$$16x + 8 \cdot 1 + 8 \cdot (-x) = 5x^2 + 8$$

$$16x + 8 - 8x = 5x^2 + 8$$

$$-5x^2 + 16x - 8x + 8 - 8 = 0$$

$$16x - 8x + 8 = 5x^2 + 8$$

$$8x + 8 = 5x^2 + 8$$

$$8x + 8 - 5x^2 - 8 = 0$$

$$-5x^2 + 8x + 8 - 8 = 0$$

$$-5x^2 + 8x + 0 = 0$$

$$-5x^2 + 8x = 0$$

Evidencie o x.

$$x \cdot (-5x + 8) = 0$$

$$\text{ou } x = 0$$

$$\text{ou } -5x + 8 = 0 \rightarrow -5x = 0 - 8 \rightarrow -5x = -8 \rightarrow x = \frac{-8}{-5} \rightarrow x = \frac{8}{5}$$

Contudo, temos uma RESTRIÇÃO. O x deve ser *diferente de zero*. Logo, o único valor possível para x é $\frac{8}{5}$. Assim, o conjunto solução é:

$$S = \left\{ \frac{8}{5} \right\}$$

4. Determine o número real y para que se tenha:

$$\frac{y^2 - y}{2} = y - \frac{y - y^2}{3}$$

R: O MMC (2, 3) = 6. Multiplique toda a equação por 6.

$$6 \cdot \frac{y^2 - y}{2} = 6 \cdot y - 6 \cdot \frac{y - y^2}{3}$$

$$\frac{6 \cdot (y^2 - y)}{2} = 6y - \frac{6 \cdot (y - y^2)}{3}$$

$$\frac{6}{2} \cdot (y^2 - y) = 6y - \frac{6}{3} \cdot (y - y^2)$$

$$3 \cdot (y^2 - y) = 6y - 2 \cdot (y - y^2)$$

$$3 \cdot y^2 + 3 \cdot (-y) = 6y - 2 \cdot y - 2 \cdot (-y^2)$$

$$3y^2 - 3y = 6y - 2y + 2y^2$$

$$3y^2 - 3y - 6y + 2y - 2y^2 = 0$$

$$3y^2 - 9y + 2y - 2y^2 = 0$$

$$3y^2 - 7y - 2y^2 = 0$$

$$3y^2 - 2y^2 - 7y = 0$$

$$y^2 - 7y = 0$$

Evidencie o y.

$$y \cdot (y - 7) = 0$$

Assim:

$$\text{ou } y = 0$$

$$\text{ou } y - 7 = 0 \rightarrow y = 0 + 7 \rightarrow y = 7$$

$$\text{Logo, ou } y = 0 \text{ ou } y = 7 \rightarrow S = \{0, 7\}$$

5. Qual deve ser o valor do número real t para que as expressões $\frac{t^2 + 2t + 1}{2}$ e $\frac{t^2 + 3t + 6}{3}$ sejam iguais?

R: Queremos que:

$$\frac{t^2 + 2t + 1}{2} = \frac{t^2 + 3t + 6}{3}$$

Basta resolver a equação. Multiplique em cruz:

$$3 \cdot (t^2 + 2t + 1) = 2 \cdot (t^2 + 3t + 6)$$

$$3 \cdot t^2 + 3 \cdot 2t + 3 \cdot 1 = 2 \cdot t^2 + 2 \cdot 3t + 2 \cdot 6$$

$$3t^2 + 6t + 3 = 2t^2 + 6t + 12$$

$$3t^2 - 2t^2 + 6t - 6t + 3 - 12 = 0$$

$$t^2 + 0 - 9 = 0$$

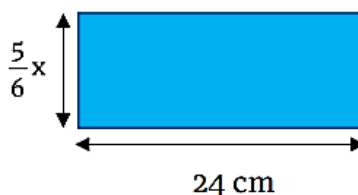
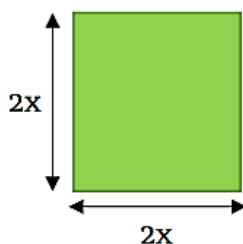
$$t^2 = 0 + 9$$

$$t^2 = 9$$

$$t = \pm\sqrt{9}$$

$$t = -3 \text{ ou } t = 3$$

6. O quadrado e o retângulo abaixo têm áreas iguais:



a) Encontre o valor de x ;

R: Para encontrar o valor de x , precisamos de uma equação.

A única informação que temos do enunciado é de que as áreas são iguais.

Ora, a área do quadrado é:

$$A_{\text{quadrado}} = (\text{lado})^2$$

Assim, a área do quadrado verde é:

$$A_{\text{quadrado}} = (2x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4 \cdot x^2 = 4x^2$$

E a área do retângulo é:

$$A_{\text{retângulo}} = (\text{comprimento}) \cdot (\text{largura})$$

Assim, a área do retângulo azul é:

$$A_{\text{retângulo}} = (24) \cdot \left(\frac{5}{6}x\right) = \frac{24 \cdot 5x}{6} = \frac{120x}{6} = \frac{120}{6} \cdot x = 20x$$

Se a área do quadrado e do retângulo são iguais, podemos escrever:

$$A_{\text{quadrado}} = A_{\text{retângulo}}$$

Substitua as expressões encontradas para as áreas:

$$4x^2 = 20x$$

$$4x^2 - 20x = 0$$

Evidencie o x .

$$x \cdot (4x - 20) = 0$$

Assim:

$$\text{ou } x = 0$$

$$\text{ou } 4x - 20 = 0 \rightarrow 4x = 20 \rightarrow x = \frac{20}{4} \rightarrow x = 5$$

Pela equação $x = 0$ ou $x = 5$. Contudo, como se trata de medidas (e medidas são necessariamente diferentes de 0), o x só pode ser igual a 5.

b) Qual é a medida do lado do quadrado?

R: O lado do quadrado é $2x$. Sabemos que $x = 5$. Assim:

$$2x = 2 \cdot x = 2 \cdot 5 = 10$$

Logo, o lado do quadrado é 10.

c) Qual é a medida da largura do retângulo

R: A largura do retângulo é $\frac{5}{6}x$. Sabemos que $x = 5$. Assim:

$$\frac{5}{6}x = \frac{5}{6} \cdot x = \frac{5}{6} \cdot 5 = \frac{5 \cdot 5}{6} = \frac{25}{6}$$

Logo, a largura do retângulo é $\frac{25}{6}$.

d) Qual é o perímetro do quadrado?

R: O perímetro é a soma de todos os lados. Já encontramos no item b) que o lado do quadrado vale 10.

Logo, se o quadrado tem 4 lados (que medem 10), seu perímetro é:

$$10 + 10 + 10 + 10 = 40$$

Assim, o perímetro do quadrado é igual a 40.

e) Qual é o perímetro do retângulo?

R: O perímetro é a soma de todos os lados. O comprimento do retângulo é 24. Encontramos no item c) que a largura do retângulo vale $\frac{25}{6}$.

Assim, o retângulo tem dois lados que valem 24 e dois lados que valem $\frac{25}{6}$. Logo, seu perímetro é:

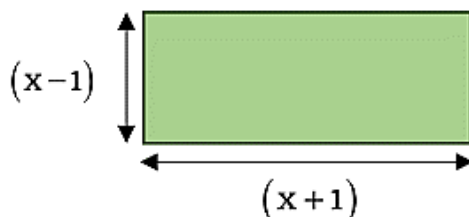
$$\begin{aligned} 24 + 24 + \frac{25}{6} + \frac{25}{6} &= 48 + \frac{25+25}{6} = 48 + \frac{50}{6} = \frac{48}{1} + \frac{50}{6} \\ \frac{48}{1} + \frac{50}{6} &= \frac{48 \cdot 6}{1 \cdot 6} + \frac{50}{6} = \frac{288}{6} + \frac{50}{6} = \frac{338}{6} = 338 : 6 = 56,3333... \end{aligned}$$

Se quiser deixar a resposta em fração, é preciso simplificar $\frac{338}{6}$:

$$\frac{338}{6} = \frac{338 : 2}{6 : 2} = \frac{169}{3}$$

Assim, o perímetro do retângulo é 56,333... $\left(\text{ou } \frac{169}{3} \right)$.

7. A área do retângulo abaixo é 399 m². As medidas do retângulo estão indicadas na figura. Determine essas medidas.



R: Sabemos que a área de um retângulo é dada por:

$$(\text{comprimento}) \cdot (\text{largura}) = A_{\text{retângulo}}$$

Temos o valor da área (399). Temos a medida do comprimento e da largura. Basta substituir na expressão:

$$(\text{comprimento}) \cdot (\text{largura}) = A_{\text{retângulo}}$$

$$(x + 1) \cdot (x - 1) = 399$$

Basta resolver a equação para encontrar o valor de x .

$$x \cdot x + x \cdot (-1) + 1 \cdot x + 1 \cdot (-1) = 399$$

$$x^2 - x + x - 1 = 399$$

$$x^2 + 0 - 1 = 399$$

$$x^2 - 1 = 399$$

$$x^2 = 399 + 1$$

$$x^2 = 400$$

$$x = \pm \sqrt{400}$$

Assim, $x = 20$ ou $x = -20$.

Contudo, se o $x = -20$, uma das medidas do retângulo será negativa. Não existem medidas negativas. Portanto, o único valor de x que podemos usar é $x = 20$.

Assim, se $x = 20$, as medidas são:

- Comprimento = $x + 1 = 20 + 1 = 21$
- Largura = $x - 1 = 20 - 1 = 19$

Logo, as medidas são 19 e 21.

Lição 40 - O processo de completar quadrados

1. Qual é o número que deve ser adicionado a cada uma das seguintes expressões para que tenhamos um trinômio quadrado perfeito?

a) $x^2 + 6x$

$$x^2 + 2 \cdot (3 \cdot x)$$

Devemos acrescentar a expressão o 3^2 , ou seja, o 9.

$$x^2 + 6x + 9$$

b) $x^2 - 10x$

$$x^2 - 2 \cdot (5 \cdot x)$$

Devemos acrescentar a expressão o 5^2 , ou seja, o 25.

$$x^2 - 10x + 25$$

c) $x^2 - 2x$

$$x^2 - 2 \cdot (1 \cdot x)$$

Devemos acrescentar a expressão o 1^2 , ou seja, o 1

$$x^2 - 2x + 1$$

d) $x^2 + 8x$

$$x^2 + 2 \cdot (4 \cdot x)$$

Devemos acrescentar a expressão o 4^2 , ou seja, o 16

$$x^2 + 8x + 16$$

e) $x^2 - 5x$

$$x^2 - 2 \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot x \right)$$

Devemos acrescentar a expressão o $\left(\frac{5}{2} \right)^2$, ou seja, o $\frac{25}{4}$

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4}$$

f) $x^2 + 9x$

$$x^2 + 2 \cdot \left(\frac{9}{2} \cdot x \right)$$

Devemos acrescentar a expressão o $\left(\frac{9}{2} \right)^2$, ou seja, o $\frac{81}{4}$

$$x^2 + 9x + \frac{81}{4}$$

g) $x^2 - 12x$

$$x^2 - 2 \cdot (6 \cdot x)$$

Devemos acrescentar a expressão o 6^2 , ou seja, o 36

$$x^2 - 12x + 36$$

h) $x^2 + x$

$$x^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x \right)$$

Devemos acrescentar a expressão o $\left(\frac{1}{2} \right)^2$, ou seja, o $\frac{1}{4}$

$$x^2 + x + \frac{1}{4}$$

2. Usando o processo do complemento de quadrados, determine o conjunto solução das seguintes equações do 2º grau, no conjunto $\mathbb{R}$:

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$x^2 - 6x = -8$$

$$x^2 - 6x + 9 = -8 + 9$$

$$(x - 3)^2 = 1$$

$$(x - 3) = \pm\sqrt{1}$$

$$(x - 3) = \pm 1$$

$$\begin{cases} x - 3 = 1 \Rightarrow x = 1 + 3 \Rightarrow x = 4 \\ x - 3 = -1 \Rightarrow x = -1 + 3 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Logo, $x = 2$ ou $x = 4 \rightarrow S = \{2, 4\}$

b) $x^2 - 10x + 9 = 0$

$$x^2 - 10x = -9$$

$$x^2 - 10x + 25 = -9 + 25$$

$$(x - 5)^2 = 16$$

$$(x - 5) = \pm\sqrt{16}$$

$$(x - 5) = \pm 4$$

$$\begin{cases} x - 5 = 4 \Rightarrow x = 4 + 5 \Rightarrow x = 9 \\ x - 5 = -4 \Rightarrow x = -4 + 5 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Logo, $x = 1$ ou $x = 9 \rightarrow S = \{1, 9\}$

c) $x^2 + 8x + 16 = 0$

Note que $x^2 + 8x + 16$ é um quadrado perfeito.

$$(x + 4)^2 = 0$$

$$(x + 4) = \pm\sqrt{0}$$

$$(x + 4) = 0$$

Não existe -0 .

$$x + 4 = 0$$

$$x = 0 - 4$$

$$x = -4$$

Assim, o conjunto solução é $S = \{-4\}$.

$$d) x^2 - 6x + 9 = 0$$

Note que $x^2 - 6x + 9$ é um quadrado perfeito.

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$(x - 3) = \pm \sqrt{0}$$

$$(x - 3) = 0 \text{ (Não existe } -0)$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 0 + 3$$

$$x = 3$$

Assim, o conjunto solução é $S = \{3\}$.

$$e) x^2 - x - 6 = 0$$

$$x^2 - x = 0 + 6$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{1} + \frac{1}{4} = \frac{6 \cdot 4}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4} = \frac{24}{4} + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \pm \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \pm \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} \Rightarrow x = 3 \\ x - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Logo, $x = -2$ ou $x = 3 \rightarrow S = \{-2, 3\}$

$$f) x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2 - 3x = 0 - 2$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = -2 + \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -2 + \frac{9}{4} = \frac{-2}{1} + \frac{9}{4} = \frac{-2 \cdot 4}{1 \cdot 4} + \frac{9}{4} = \frac{-8}{4} + \frac{9}{4} = \frac{-8+9}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2 \\ x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Logo, $x = 1$ ou $x = 2 \rightarrow S = \{1, 2\}$

$$g) x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x^2 - 4x = 0 + 5$$

$$x^2 - 4x + 4 = 5 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 9$$

$$(x - 2) = \pm \sqrt{9}$$

$$(x - 2) = \pm 3$$

$$\begin{cases} x - 2 = 3 \Rightarrow x = 3 + 2 \Rightarrow x = 5 \\ x - 2 = -3 \Rightarrow x = -3 + 2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

Logo, $x = -1$ ou $x = 5 \rightarrow S = \{-1, 5\}$

$$h) 2x^2 - 9x + 4 = 0$$

”Evidencie” o 2.

$$2 \cdot \left(x^2 - \frac{9}{2}x + 2\right) = 0$$

$$\left(x^2 - \frac{9}{2}x + 2\right) = \frac{0}{2} = 0$$

$$x^2 - \frac{9}{2}x + 2 = 0$$

$$x^2 - \frac{9}{2}x = 0 - 2$$

$$x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{81}{16} = -2 + \frac{81}{16}$$

$$\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 = -2 + \frac{81}{16} = -\frac{2}{1} + \frac{81}{16} = \frac{-2 \cdot 16}{1 \cdot 16} + \frac{81}{16} = \frac{-32}{16} + \frac{81}{16} = \frac{49}{16}$$

$$\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

$$\left(x - \frac{9}{4}\right) = \pm \sqrt{\frac{49}{16}} = \pm \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}} = \pm \frac{7}{4}$$

$$\begin{cases} x - \frac{9}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow x = \frac{7}{4} + \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{7+9}{4} \Rightarrow x = \frac{16}{4} = 4 \\ x - \frac{9}{4} = -\frac{7}{4} \Rightarrow x = -\frac{7}{4} + \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{-7+9}{4} \Rightarrow x = \frac{2}{4} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, $x = 4$ ou $x = \frac{1}{2} \rightarrow S = \left\{4, \frac{1}{2}\right\}$

i) $x^2 - 10x + 24 = 0$

$$x^2 - 10x = 0 - 24$$

$$x^2 - 10x + 25 = -24 + 25$$

$$(x - 5)^2 = 1$$

$$(x - 5) = \pm \sqrt{1}$$

$$(x - 5) = \pm 1$$

$$\begin{cases} x - 5 = 1 \Rightarrow x = 1 + 5 \Rightarrow x = 6 \\ x - 5 = -1 \Rightarrow x = -1 + 5 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Logo, $x = 4$ ou $x = 6 \rightarrow S = \{4, 6\}$

j) $6x^2 + x - 2 = 0$

“Evidencie” o 6:

$$6 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}\right) = \frac{0}{6} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{6}x = 0 + \frac{1}{3}$$

$$x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{144} = \frac{1}{3} + \frac{1}{144}$$

$$\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{144} = \frac{1 \cdot 48}{3 \cdot 48} + \frac{1}{144} = \frac{48}{144} + \frac{1}{144} = \frac{48+1}{144} = \frac{49}{144}$$

$$\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 = \frac{49}{144}$$

$$\left(x + \frac{1}{12}\right) = \pm \sqrt{\frac{49}{144}} = \pm \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{144}} = \pm \frac{7}{12}$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{12} = \frac{7}{12} & \Rightarrow & x = \frac{7}{12} - \frac{1}{12} & \Rightarrow & x = \frac{7-1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{6:6}{12:6} = \frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{12} = -\frac{7}{12} & \Rightarrow & x = -\frac{7}{12} - \frac{1}{12} & \Rightarrow & x = \frac{-7-1}{12} = \frac{-8}{12} = \frac{-8:4}{12:4} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Logo, } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{2}{3} \rightarrow S = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\}$$

$$\text{k) } x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$x^2 - 8x = 0 - 7$$

$$x^2 - 8x + 16 = -7 + 16$$

$$(x - 4)^2 = 9$$

$$(x - 4) = \pm \sqrt{9}$$

$$(x - 4) = \pm 3$$

$$\begin{cases} x - 4 = 3 & \Rightarrow & x = 3 + 4 & \Rightarrow & x = 7 \\ x - 4 = -3 & \Rightarrow & x = -3 + 4 & \Rightarrow & x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Logo, } x = 1 \text{ ou } x = 7 \rightarrow S = \{1, 7\}$$

$$\text{l) } 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

“Evidencie” o 4:

$$4 \cdot \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = \frac{0}{4} = 0$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 - x = 0 - \frac{1}{4}$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) = \pm \sqrt{0}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \text{ (Não existe -0)}$$

$$x - \frac{1}{2} = 0$$

$$x = 0 + \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Logo, o conjunto solução é $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Lição 41 – Fórmula de Bháskara

1. Aplique a fórmula de Bháskara para resolver as equações:

a) $6x^2 + 5x - 1 = 0$

$a = 6$; $b = 5$; $c = -1$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)$$

$$\Delta = 25 - 24 \cdot (-1) = 25 + 24 = 49$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{-5 + 7}{12} = \frac{2}{12} = \frac{2:2}{12:2} = \frac{1}{6}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{-5 - 7}{12} = \frac{-12}{12} = -1$$

Assim, $S = \left\{-1, \frac{1}{6}\right\}$

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$

$a = 1$; $b = -8$; $c = 16$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16$$

$$\Delta = 64 - 4 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) + \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{8 + 0}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) - \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{8 - 0}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\text{Assim, } S = \{4\}$$

$$\text{c) } 9y^2 - 24y + 16 = 0$$

$$a = 9 \quad ; \quad b = -24 \quad ; \quad c = 16$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-24)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16$$

$$\Delta = 576 - 36 \cdot 16 = 576 - 576 = 0$$

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-24) + 0}{2 \cdot 9} = \frac{24 + 0}{18} = \frac{24}{18} = \frac{24 : 6}{18 : 6} = \frac{4}{3}$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-24) - 0}{2 \cdot 9} = \frac{24 - 0}{18} = \frac{24}{18} = \frac{24 : 6}{18 : 6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Assim, } S = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$$

$$\text{d) } 4x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$a = 4 \quad ; \quad b = -4 \quad ; \quad c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)$$

$$\Delta = 16 - 16 \cdot (-3) = 16 + 48 = 64$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{4 + 8}{8} = \frac{12}{8} = \frac{12 : 4}{8 : 4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{4 - 8}{8} = \frac{-4}{8} = \frac{-4 : 4}{8 : 4} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{Assim, } S = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\}$$

$$\text{e) } t^2 - t - 1 = 0$$

$$a = 1 \quad ; \quad b = -1 \quad ; \quad c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Assim, } S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$$

$$f) -x^2 + 11x - 28 = 0$$

$$a = -1 \quad ; \quad b = 11 \quad ; \quad c = -28$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (11)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-28)$$

$$\Delta = 121 + 4 \cdot (-28) = 121 - 112 = 9$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11 + \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-11 + 3}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11 - \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-11 - 3}{-2} = \frac{-14}{-2} = 7$$

$$\text{Assim, } S = \{4, 7\}$$

$$g) 4x^2 + 16x + 15 = 0$$

$$a = 4 \quad ; \quad b = 16 \quad ; \quad c = 15$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15$$

$$\Delta = 256 - 16 \cdot 15 = 256 - 240 = 16$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 + \sqrt{16}}{2 \cdot 4} = \frac{-16 + 4}{8} = \frac{-12}{8} = \frac{-12 : 4}{8 : 4} = \frac{-3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 - \sqrt{16}}{2 \cdot 4} = \frac{-16 - 4}{8} = \frac{-20}{8} = \frac{-20 : 4}{8 : 4} = \frac{-5}{2}$$

$$\text{Assim, } S = \left\{ \frac{-3}{2}; \frac{-5}{2} \right\}$$

$$h) 8x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$a = 8 \quad ; \quad b = -10 \quad ; \quad c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3$$

$$\Delta = 100 - 32 \cdot 3 = 100 - 96 = 4$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) + \sqrt{4}}{2 \cdot 8} = \frac{10 + 2}{16} = \frac{12}{16} = \frac{12 : 4}{16 : 4} = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) - \sqrt{4}}{2 \cdot 8} = \frac{10 - 2}{16} = \frac{8}{16} = \frac{8 : 8}{16 : 8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Assim, } S = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right\}$$

$$\text{i) } \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{12} = 0$$

$$a = \frac{1}{4} \quad ; \quad b = \frac{1}{3} \quad ; \quad c = \frac{1}{12}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{3} \right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{12} \right)$$

$$\Delta = \frac{1}{9} - 1 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{9} - \frac{1}{12} = \frac{1 \cdot 4}{9 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{4}{36} - \frac{3}{36} = \frac{4 - 3}{36} = \frac{1}{36}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{-1}{3} + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{-1}{3} + \sqrt{\frac{1}{36}}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-1}{3} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{36}}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-1}{3} + \frac{1}{6}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-1 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1}{6}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-2}{6} + \frac{1}{6}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-2 + 1}{6}}{\frac{2}{4}} = \frac{\left(\frac{-1}{6} \right)}{\left(\frac{2}{4} \right)}$$

$$x_1 = \frac{-1}{6} \div \frac{2}{4} = \frac{-1}{6} \cdot \frac{4}{2} = \frac{-1 \cdot 4}{6 \cdot 2} = \frac{-4}{12} = \frac{-4 : 4}{12 : 4} = \frac{-1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{-1}{3} - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{-1}{3} - \sqrt{\frac{1}{36}}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-1}{3} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{36}}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-1}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-1 \cdot 2}{3 \cdot 2} - \frac{1}{6}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-2}{6} - \frac{1}{6}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-2 - 1}{6}}{\frac{2}{4}} = \frac{\left(\frac{-3}{6} \right)}{\left(\frac{2}{4} \right)}$$

$$x_2 = \frac{-3}{6} \div \frac{2}{4} = \frac{-3}{6} \cdot \frac{4}{2} = \frac{-3 \cdot 4}{6 \cdot 2} = \frac{-12}{12} = -1$$

$$\text{Logo, } S = \left\{ -1; \frac{-1}{3} \right\}$$

$$\text{j) } \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{4}{9} = 0$$

$$a = \frac{1}{2} \quad ; \quad b = -1 \quad ; \quad c = \frac{4}{9}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} =$$

$$\Delta = 1 - \frac{4 \cdot 1}{2} \cdot \frac{4}{9} = 1 - \frac{4}{2} \cdot \frac{4}{9} = 1 - 2 \cdot \frac{4}{9} = 1 - \frac{2 \cdot 4}{9} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9} - \frac{8}{9} = \frac{1 \cdot 9}{1 \cdot 9} - \frac{8}{9} = \frac{9 - 8}{9} = \frac{9 - 8}{9} = \frac{1}{9}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{9}}}{\frac{2 \cdot 1}{2}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}}}{\frac{2}{2}} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3 + 1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{9}}}{\frac{2 \cdot 1}{2}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}}}{\frac{2}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3 - 1}{3} = \frac{2}{3}$$

Assim, $S = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right\}$

2. Todas as equações seguintes estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$. Determine o valor do discriminante Δ em cada uma delas e diga se a equação tem raízes reais:

a) $x^2 - 3x - 4 = 0$

$a = 1$; $b = -3$; $c = -4$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$$

Como o discriminante é maior que zero, há **duas** raízes reais.

b) $5x^2 + 4x - 1 = 0$

$a = 5$; $b = 4$; $c = -1$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1)$$

$$\Delta = 16 - 20 \cdot (-1) = 16 + 20 = 36$$

Como o discriminante é maior que zero, há **duas** raízes reais.

c) $x^2 + 8x + 16 = 0$

$a = 1$; $b = 8$; $c = 16$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16$$

$$\Delta = 64 - 4 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$$

Como o discriminante é igual a zero, há apenas **uma** raiz real.

d) $x^2 - 7x + 15 = 0$

$$a = 1 ; b = -7 ; c = 15$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15$$

$$\Delta = 49 - 4 \cdot 15 = 49 - 60 = -11$$

Como o discriminante é menor que zero, **NÃO HÁ** raízes reais.

$$e) 9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$a = 9 ; b = -6 ; c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1$$

$$\Delta = 36 - 36 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$$

Como o discriminante é igual a zero, há apenas **uma** raiz real.

$$f) 4x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$a = 4 ; b = -2 ; c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1$$

$$\Delta = 4 - 16 \cdot 1 = 4 - 16 = -12$$

Como discriminante é menor que zero, **NÃO HÁ** raízes reais.

3. Todas as equações seguintes estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$. Usando a fórmula aprendida nesta lição, determine o conjunto solução de cada uma destas equações:

$$a) x^2 - x - 12 = 0$$

$$a = 1 ; b = -1 ; c = -12$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{1 + 7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{1 - 7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Assim, $S = \{-3, 4\}$

$$b) 6x^2 + x - 1 = 0$$

$$a = 6 ; b = 1 ; c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)$$

$$\Delta = 1 - 24 \cdot (-1) = 1 + 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 + 5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{4:4}{12:4} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 - 5}{12} = \frac{-6}{12} = \frac{-6:6}{12:6} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{Assim, } S = \left\{ \frac{-1}{2}; \frac{1}{3} \right\}$$

$$\text{c) } x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$a = 1 ; b = -2 ; c = -24$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-24) = 4 + 96 = 100$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 10}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 10}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$\text{Assim, } S = \{-4, 6\}$$

$$\text{d) } 7x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$a = 7 ; b = 2 ; c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 7 \cdot 1$$

$$\Delta = 4 - 28 \cdot 1 = 4 - 28 = -24$$

Não há solução real, pois o discriminante é menor que zero.

$$\text{e) } x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$a = 1 ; b = -12 ; c = 36$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36$$

$$\Delta = 144 - 4 \cdot 36 = 144 - 144 = 0$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 0}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\text{Assim, } S = \{6\}$$

$$f) 9x^2 + 8x - 1 = 0$$

$$a = 9 ; b = 8 ; c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (8)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-1)$$

$$\Delta = 64 - 36 \cdot (-1) = 64 + 36 = 100$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{100}}{2 \cdot 9} = \frac{-8 + 10}{18} = \frac{2}{18} = \frac{2 : 2}{18 : 2} = \frac{1}{9}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{100}}{2 \cdot 9} = \frac{-8 - 10}{18} = \frac{-18}{18} = -1$$

$$\text{Assim, } S = \left\{-1, \frac{1}{9}\right\}$$

$$g) -2x^2 + 9x + 18 = 0$$

$$a = -2 ; b = 9 ; c = 18$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (9)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 18$$

$$\Delta = 81 + 8 \cdot 18 = 81 + 144 = 225$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 + \sqrt{225}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-9 + 15}{-4} = \frac{6}{-4} = -\frac{6 : 2}{4 : 2} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 - \sqrt{225}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-9 - 15}{-4} = \frac{-24}{-4} = 6$$

$$\text{Assim, } S = \left\{-\frac{3}{2}, 6\right\}$$

$$h) 5x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$a = 5 ; b = -3 ; c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2)$$

$$\Delta = 9 - 20 \cdot (-2) = 9 + 40 = 49$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{49}}{2 \cdot 5} = \frac{3 + 7}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{49}}{2 \cdot 5} = \frac{3-7}{10} = \frac{-4}{10} = \frac{-4:2}{10:2} = \frac{-2}{5}$$

$$\text{Assim, } S = \left\{ -\frac{2}{5}, 1 \right\}$$

4. Quais são os valores reais de x para os quais as expressões $\frac{(3x-2)^2}{6}$ e $\frac{2x+3}{3} - \frac{x \cdot (1-5x)}{2}$ são iguais?

R: Queremos saber para qual valor de x vale:

$$\frac{(3x-2)^2}{6} = \frac{2x+3}{3} - \frac{x \cdot (1-5x)}{2}$$

Basta resolver a equação.

O MMC (6, 3, 2) = 6. Multiplique toda a equação por 6.

$$6 \cdot \frac{(3x-2)^2}{6} = 6 \cdot \frac{2x+3}{3} - 6 \cdot \frac{x \cdot (1-5x)}{2}$$

$$\frac{6}{6} \cdot (3x-2)^2 = \frac{6}{3} \cdot (2x+3) - \frac{6}{2} \cdot x \cdot (1-5x)$$

$$1 \cdot (3x-2)^2 = 2 \cdot (2x+3) - 3 \cdot x \cdot (1-5x)$$

$$(3x-2)^2 = 2 \cdot 2x + 2 \cdot 3 - 3x \cdot (1-5x)$$

$$(3x-2)^2 = 4x + 6 - 3x \cdot 1 - 3x \cdot (-5x)$$

$$(3x-2)^2 = 4x + 6 - 3x + 15x^2$$

$$(3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot 2 + 2^2 = 4x + 6 - 3x + 15x^2$$

$$9x^2 - 12x + 4 = 4x + 6 - 3x + 15x^2$$

$$9x^2 - 12x + 4 - 4x - 6 + 3x - 15x^2 = 0$$

$$9x^2 - 15x^2 - 12x - 4x + 3x + 4 - 6 = 0$$

$$-6x^2 - 16x + 3x + 4 - 6 = 0$$

$$-6x^2 - 13x - 2 = 0$$

Aplique Bhaskara.

$$a = -6 \quad ; \quad b = -13 \quad ; \quad c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \cdot (-6) \cdot (-2)$$

$$\Delta = 169 + 24 \cdot (-2) = 169 - 48$$

$$\Delta = 121$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) + \sqrt{121}}{2 \cdot (-6)} = \frac{13 + 11}{-12} = \frac{24}{-12} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) - \sqrt{121}}{2 \cdot (-6)} = \frac{13 - 11}{-12} = \frac{2}{-12} = -\frac{2:2}{12:2} = -\frac{1}{6}$$

Logo, as expressões são iguais quando $x = -2$ ou $x = -\frac{1}{6}$.

Lição 42 – Estudo do delta

1. Determine quantas raízes reais tem cada equação, somente pela análise do discriminante:

a) $x^2 + 7x + 5 = 0$

$a = 1$; $b = 7$; $c = 5$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 49 - 4 \cdot 5$$

$$\Delta = 49 - 20 = 29$$

Como o delta é maior que zero, há **duas** raízes reais.

b) $4x^2 + x - 1 = 0$

$a = 4$; $b = 1$; $c = -1$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 1 - 16 \cdot (-1)$$

$$\Delta = 1 + 16 = 17$$

Como o delta é maior que zero, há **duas** raízes reais.

c) $x^2 - 10x + 25 = 0$

$a = 1$; $b = -10$; $c = 25$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 4 \cdot 25$$

$$\Delta = 100 - 100 = 0$$

Como o delta é igual a zero, há **uma** raiz real.

d) $x^2 + x + 1 = 0$

$a = 1$; $b = 1$; $c = 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 \cdot 1$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

Como o delta é menor que zero, a equação *não possui raiz real*.

$$e) 9x^2 - 42x + 49 = 0$$

$$a = 9 ; b = -42 ; c = 49$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-42)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 49 = 1764 - 36 \cdot 49 =$$

$$\Delta = 1764 - 1764 = 0$$

Como o delta é igual a zero, há **uma** raiz real.

$$f) x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$a = 1 ; b = -3 ; c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 9 - 4 \cdot 3$$

$$\Delta = 9 - 12 = -3$$

Como o delta é menor que zero, a equação *não possui raiz real*.

2. A equação $2x^2 + Kx + 2 = 0$ possui duas raízes reais e iguais para que valores de K?

R: Se as raízes são IGUAIS, então NÃO HÁ duas raízes reais. É uma pegadinha.

Se são encontrados os mesmos valores para x_1 e x_2 , há apenas UMA raiz real.

Para que haja apenas UMA raiz real, o delta deve ser igual a zero. Ou seja:

$$\Delta = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

Os coeficientes dessa equação são:

$$a = 2 ; b = K ; c = 2$$

Substitua os valores dos coeficientes na expressão do delta:

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$K^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$$

$$K^2 - 8 \cdot 2 = 0$$

$$K^2 - 16 = 0$$

$$K^2 = 0 + 16$$

$$K^2 = 16$$

$$K = \pm\sqrt{16}$$

$$K = \pm 4$$

Ou seja, para $K = 4$ ou $K = -4$, o delta vale 0.

Dessa forma, para esses valores de K , a equação possui apenas uma raiz real.

3. A equação $x^2 + 4x + a = 0$ não possui raízes reais para que valores de a ?

R: Para que uma equação não tenha raízes reais, é preciso que seu delta seja menor que zero, ou seja:

$$\Delta < 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

$$b^2 - 4ac < 0$$

Os coeficientes dessa equação são:

$$a = 1 \quad ; \quad b = 4 \quad ; \quad c = a$$

Substitua os valores dos coeficientes na expressão do delta:

$$b^2 - 4ac < 0$$

$$4^2 - 4 \cdot 1 \cdot a < 0$$

$$16 - 4 \cdot 1 \cdot a < 0$$

$$-4 \cdot 1 \cdot a < 0 - 16$$

$$-4a < -16$$

$$-4a < -16 \quad \cdot (-1)$$

$$4a > 16$$

$$a > \frac{16}{4}$$

$$a > 4$$

Dessa forma, quando $a > 4$, o delta será negativo (menor que zero).

Assim, para $a > 4$, a equação não terá raízes reais.

Lição 43 – Problemas envolvendo equações do 2º grau

1. Para revestir a parede da sacristia da igreja de São João Batista, de 9 m^2 , são necessários exatamente 400 azulejos quadrados. Quanto mede o lado do azulejo?

R: A área da parede é justamente todas as áreas dos 400 azulejos juntas. Ou seja, 9 m^2 é a área de 400 azulejos quadrados.

Para saber a área de UM azulejo, basta dividir 9 por 400:

$$\text{Área de um azulejo} = \frac{9 \text{ m}^2}{400 \text{ azulejos}} = \frac{9}{400} \text{ m}^2$$

Se o azulejo é quadrado, a área do quadrado é dada por:

$$\text{Área de um azulejo} = \text{área de um quadrado de lado } x = x^2$$

Assim:

$$\text{Área de um azulejo} = \text{Área de um azulejo}$$

$$x^2 = \frac{9}{400}$$

Note que não utilizaremos a raiz negativa pois se trata de uma medida (a medida de um lado) e não existem medidas negativas.

$$x = \sqrt{\frac{9}{400}}$$

$$x = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{400}} = \frac{3}{20}$$

Como toda fração é uma divisão:

$$\frac{3}{20} = 3 \div 20 = 0,15$$

Assim, o lado do azulejo mede 0,15 m = 15 cm.

2. Qual é o número real tal que seu quadrado é igual ao seu quádruplo?

R: O quadrado de um número é: x^2

O quádruplo de um número é: $4x$

Assim, queremos saber o número que:

$$\text{seu quadrado} = \text{seu quádruplo}$$

$$x^2 = 4x$$

Basta resolver a equação.

$$x^2 - 4x = 0$$

Isole o x.

$$x \cdot (x - 4) = 0$$

$$\text{ou } x = 0$$

$$\text{ou } x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$$

Logo, o número pode ser 0 ou 4.

3. Qual é o número real tal que o dobro do seu quadrado é igual à sua oitava parte?

R: O dobro de algo é: $2 \cdot (\text{algo})$

O dobro do quadrado de um número = $2 \cdot x^2 = 2x^2$

Oitava parte de um número = $\frac{x}{8}$

Assim, queremos saber o número que:

dobro de seu quadrado = sua oitava parte

$$2x^2 = \frac{x}{8}$$

$$2x^2 - \frac{x}{8} = 0$$

Multiplique toda a equação por 8 (para “sumir” com o denominador):

$$8 \cdot 2x^2 - 8 \cdot \frac{x}{8} = 8 \cdot 0$$

$$16x^2 - \frac{8}{8} \cdot x = 0$$

$$16x^2 - 1 \cdot x = 0$$

$$16x^2 - x = 0$$

Evidencie o x:

$$x \cdot (16x - 1) = 0$$

$$\text{ou } x = 0$$

$$\text{ou } 16x - 1 = 0 \rightarrow 16x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{16}$$

Assim, o número pode ser 0 ou $\frac{1}{16}$.

4. A soma do quadrado de um número x com o quádruplo desse mesmo número é igual a 36. Qual é esse número x?

R: O quadrado de um número é: x^2

O quádruplo de um número é: $5x$

A soma do quadrado de um número com o quádruplo desse mesmo número é: $x^2 + 5x$

Assim, queremos saber o número que:

$$x^2 + 5x = 36$$

Resolva a equação.

$$x^2 + 5x - 36 = 0$$

$$a = 1 ; b = 5 ; c = -36$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot (-36) = 25 + 144 = 169$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 + 13}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 - 13}{2} = \frac{-18}{2} = -9$$

Logo, o número pode ser 4 ou -9.

5. A soma de um número real inteiro diferente de zero com o seu inverso dá $\frac{10}{3}$. Qual é esse número inteiro?

R: O inverso de um número é: $\frac{1}{x}$

A soma de um número com o seu inverso é: $x + \frac{1}{x}$

Assim, queremos saber o número que:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$$

Multiplique toda a equação por x (para “sumir” com o denominador):

$$x \cdot x + x \cdot \frac{1}{x} = x \cdot \frac{10}{3}$$

$$x^2 + \frac{x}{x} \cdot 1 = x \cdot \frac{10}{3}$$

$$x^2 + 1 \cdot 1 = x \cdot \frac{10}{3}$$

$$x^2 + 1 = x \cdot \frac{10}{3}$$

Multiplique toda a equação por 3 (para “sumir” com o denominador):

$$3 \cdot x^2 + 3 \cdot 1 = x \cdot \frac{10}{3} \cdot 3$$

$$3x^2 + 3 = x \cdot 10 \cdot \frac{3}{3}$$

$$3x^2 + 3 = x \cdot 10 \cdot 1$$

$$3x^2 + 3 = 10x$$

Resolva a equação.

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$a = 3 \quad ; \quad b = -10 \quad ; \quad c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\Delta = 100 - 12 \cdot 3$$

$$\Delta = 100 - 36 = 64$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) + \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{10 + 8}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) - \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{10 - 8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{2:2}{6:2} = \frac{1}{3}$$

Este número pode ser 3 ou $\frac{1}{3}$.

6. A soma de um número real positivo x com o seu quadrado dá 42. Determine esse número.

R: O quadrado de um número: x^2

A soma de um número x com o seu quadrado é: $x^2 + x$

Assim, queremos saber o número que:

$$x^2 + x = 42$$

Resolva a equação.

$$x^2 + x - 42 = 0$$

$$a = 1 \quad ; \quad b = 1 \quad ; \quad c = -42$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-42)$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-42)$$

$$\Delta = 1 + 168$$

$$\Delta = 169$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 13}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 13}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

Perceba que temos dois valores que x pode assumir: 6 e -7 . Ou seja:

$$6^2 + 6 = 42$$

$$(-7)^2 + (-7) = 42$$

Contudo, o enunciado fala de um número POSITIVO. Portanto, só pode ser o 6.

7. Multiplique o quadrado de um número inteiro por 3. O resultado é igual ao quádruplo do mesmo número aumentado de 2 unidades. Qual é esse número?

R: O quadrado de um número inteiro: x^2

Multiplcando o quadrado de um número por 3 $= 3 \cdot x^2 = 3x^2$

Quádruplo de um número $= 5x$

Quádruplo de um número aumentado de duas unidades: $5x + 2$

Assim, queremos saber o número que:

$3 \cdot$ quadrado de um número $=$ quádruplo do número aumentado de duas unidades

$$3x^2 = 5x + 2$$

Resolva a equação.

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$a = 3 ; b = -5 ; c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)$$

$$\Delta = 25 - 12 \cdot (-2)$$

$$\Delta = 25 + 24 = 49$$

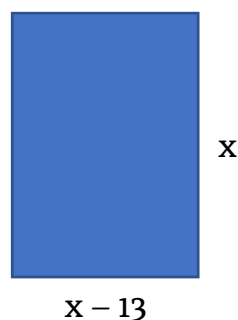
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \cdot 3} = \frac{5 + 7}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \cdot 3} = \frac{5 - 7}{6} = \frac{-2}{6} = \frac{-2 : 2}{6 : 2} = \frac{-1}{3}$$

O número pode ser 2 ou $\frac{-1}{3}$.

8. Um terreno retangular tem 300 m^2 de área. A frente do terreno tem menos 13 m que a lateral. Determine as dimensões desse terreno.

R: Se a lateral mede “x” (uma medida desconhecida), a frente do terreno deve medir “x – 13”, ou seja, 13 metros a menos que a lateral:



Encontramos a área de um terreno quando multiplicamos a largura pelo comprimento, ou seja, a medida da frente pela medida da lateral:

$$\text{Área}_{\text{terreno}} = (\text{medida da frente}) \cdot (\text{medida da lateral})$$

Também sabemos que a área do terreno equivale a 300 m². Ou seja, a multiplicação da medida da frente pela medida da lateral deve resultar em 300:

$$(\text{medida da frente}) \cdot (\text{medida da lateral}) = 300$$

$$(x - 13) \cdot (x) = 300$$

Faça a distributiva.

$$x \cdot x - 13 \cdot x = 300$$

$$x^2 - 13x = 300$$

Resolva a equação.

$$x^2 - 13x - 300 = 0$$

$$a = 1 ; b = -13 ; c = -300$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-300)$$

$$\Delta = 169 - 4 \cdot (-300)$$

$$\Delta = 169 + 1200 = 1369$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) + \sqrt{1369}}{2 \cdot 1} = \frac{13 + 37}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) - \sqrt{1369}}{2 \cdot 1} = \frac{13 - 37}{2} = \frac{-24}{2} = -12$$

Note que “x” é a medida da LATERAL. Como é medida, não pode ser negativa. Assim, o único valor de x possível para o problema é 25.

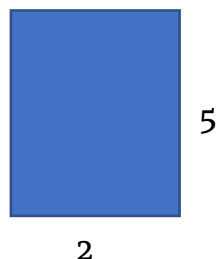
Logo, a lateral tem 25 m de comprimento.

E a frente tem 25 – 13 (x – 13), ou seja, 12 metros de comprimento (13 a menos que a lateral).

9. Um retângulo tem 5 m de comprimento e 2 m de largura. Se aumentarmos o comprimento e a largura na mesma quantidade, a área do novo retângulo será 7 vezes a área do retângulo original. Sabendo disto, responda:

a) Quais as dimensões do novo retângulo?

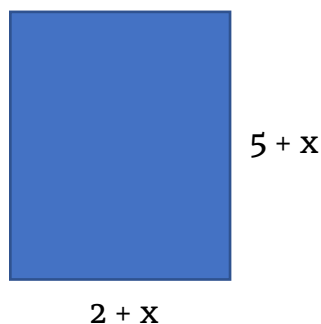
R: O terreno original tinha as seguintes dimensões:



Para encontrar a área de um terreno retangular, basta multiplicar o seu comprimento pela sua largura.

Assim, a área deste terreno é $2 \cdot 5 = 10 \text{ m}^2$.

Pense que você aumentou x dos dois lados... Então, as novas dimensões serão $5 + x$ e $2 + x$:



O exercício nos afirma que a área desse “novo” terreno é 7 vezes o valor da área “original”. A área original é quando o terreno tinha 2 metros de largura por 5 metros de comprimento. Ou seja, a área original era 10 m^2 . Se agora a nova área é 7 vezes esse valor, a nova área vale 70 m^2 ($10 \cdot 7$).

Assim, a multiplicação das dimensões desse “novo” terreno (ou seja, a multiplicação da nova largura pelo novo comprimento) deve resultar em 70:

$$(2 + x) \cdot (5 + x) = 70$$

Faça a distributiva.

$$2 \cdot 5 + 2 \cdot x + x \cdot 5 + x \cdot x = 70$$

$$10 + 2x + 5x + x^2 = 70$$

$$10 + 7x + x^2 = 70$$

Resolva a equação.

$$x^2 + 7x + 10 - 70 = 0$$

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$a = 1 ; b = 7 ; c = -60$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60)$$

$$\Delta = 49 - 4 \cdot (-60)$$

$$\Delta = 49 + 240 = 289$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 + \sqrt{289}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 + 17}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 - \sqrt{289}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 - 17}{2} = \frac{-24}{2} = -12$$

Note que “x” é o valor que AUMENTAMOS em cada medida. Não é possível aumentar, por exemplo, - 1 m o comprimento de um terreno. Medidas são sempre positivas. Assim, o único valor de x que nos interessa é $x = 5$.

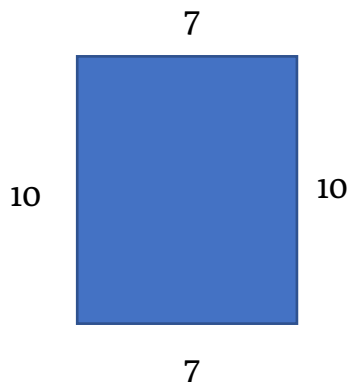
Logo, o novo terreno teve suas dimensões aumentadas em 5 unidades, ou seja:

- A largura passa a valer 7 (2 + 5).
- O comprimento passa a valer 10 (5 + 5).

Portanto, o novo terreno tem 10 m de comprimento e 7 m de largura.

b) Qual é o perímetro do novo retângulo?

R: O perímetro é a soma de todos os lados. O novo retângulo tem dois lados que valem 10 e dois lados que valem 7.



Assim, o perímetro é:

$$10 + 7 + 10 + 7 =$$

$$17 + 17 = 34$$

10. A soma S dos n primeiros números inteiros positivos é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$$

Agora, responda: quando essa soma dá 210?

R: Se a soma resulta em 210, a expressão vale 210:

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) = 210$$

Multiplique toda a equação por 2 (para “sumir” com o denominador):

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) = 2 \cdot 210$$

$$\frac{2}{2} \cdot 1 \cdot n \cdot (n+1) = 420$$

$$1 \cdot 1 \cdot n \cdot (n+1) = 420$$

$$n \cdot (n+1) = 420$$

Faça a distributiva:

$$n \cdot n + n \cdot 1 = 420$$

$$n^2 + n = 420$$

Resolva a equação.

$$n^2 + n - 420 = 0$$

$$a = 1 ; \quad b = 1 ; \quad c = -420$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-420)$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-420)$$

$$\Delta = 1 + 1680 = 1681$$

$$n_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{1681}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 41}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

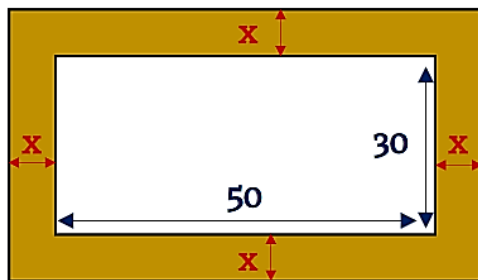
$$n_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{1681}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 41}{2} = \frac{-42}{2} = -21$$

O x representa uma quantidade, ou seja, quantos números devemos somar para obter o resultado 210. Não é possível somar, por exemplo, – 9 números. Quando falamos de QUANTIDADE, os valores são sempre positivos.

Logo, o único n que nos interessa é n = 20.

Então, quando somamos os 20 primeiros números inteiros positivos (quando n = 20) obtemos 210.

11. A tela de um quadro tem a forma retangular e mede 50 cm por 30 cm. Nessa tela, foi colocada uma moldura, também retangular, de largura x uniforme. Calcule essa largura sabendo que o quadro todo passou a ocupar uma área de 2.400 cm².



R: A área do quadro todo é 2.400. Contudo, a área do quadro é formada pela área da tela mais área da moldura:

$$A_{\text{quadro}} = A_{\text{tela}} + A_{\text{moldura}}$$

Ou seja, somando a área da tela com a área da moldura devemos obter 2400:

$$A_{\text{tela}} + A_{\text{moldura}} = 2400$$

A tela é um retângulo. Logo a sua área é:

$$A_{\text{tela}} = \text{base} \cdot \text{altura} = 50 \cdot 30 = 1500$$

Assim:

$$A_{\text{tela}} + A_{\text{moldura}} = 2400$$

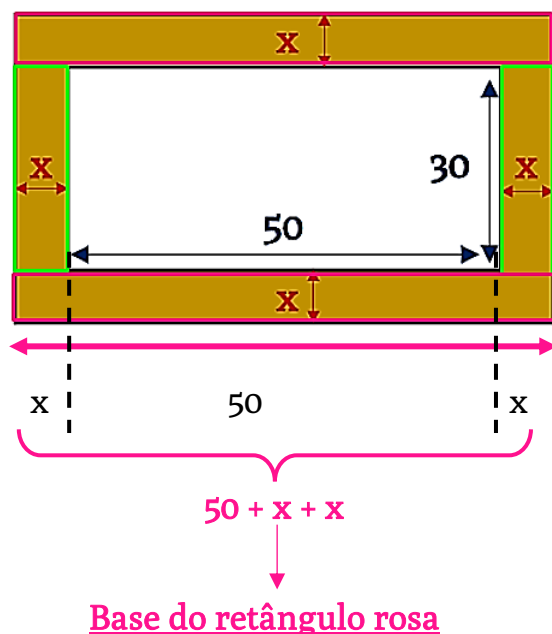
$$1500 + A_{\text{moldura}} = 2400$$

$$A_{\text{moldura}} = 2400 - 1500$$

$$A_{\text{moldura}} = 900$$

Então, a área que a moldura ocupa é 900 cm².

A moldura é formada por quatro retângulos, de dimensões diferentes. Observe a imagem para entender melhor:



Os retângulos em rosa são iguais. A altura desses retângulos é x. A base deles vale $50 + x + x$. Assim, a área de um retângulo rosa vale:

$$A_{\text{retângulo-rosa}} = \text{base} \cdot \text{altura} = (50 + x + x) \cdot x$$

$$A_{\text{retângulo-rosa}} = (50 + 2x) \cdot x$$

$$A_{\text{retângulo-rosa}} = 50 \cdot x + 2x \cdot x$$

$$A_{\text{retângulo-rosa}} = 50x + 2x^2$$

Os retângulos em verde são iguais. A altura desses retângulos é 30. A base deles vale x. Assim, a área de um retângulo verde vale:

$$A_{\text{retângulo-verde}} = \text{base} \cdot \text{altura} = x \cdot 30 = 30x$$

A área que a moldura ocupa corresponde à soma das áreas desses quatro retângulos:

$$A_{\text{moldura}} = A_{\text{retângulo-rosa}} + A_{\text{retângulo-rosa}} + A_{\text{retângulo-verde}} + A_{\text{retângulo-verde}}$$

Contudo, também sabemos que a área que a moldura ocupa é 900 cm². Assim, a soma dessas quatro áreas dos quatro retângulos deve resultar em 900:

$$A_{\text{retângulo-rosa}} + A_{\text{retângulo-rosa}} + A_{\text{retângulo-verde}} + A_{\text{retângulo-verde}} = 900$$

Substitua as expressões que encontramos para cada área:

$$50x + 2x^2 + 50x + 2x^2 + 30x + 30x = 900$$

$$2x^2 + 2x^2 + 50x + 50x + 30x + 30x = 900$$

$$4x^2 + 100x + 60x - 900 = 0$$

$$4x^2 + 160x - 900 = 0$$

Resolva a equação.

$$a = 4 ; b = 160 ; c = -900$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 160^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-900)$$

$$\Delta = 25600 - 16 \cdot (-900)$$

$$\Delta = 25600 + 14400 = 40000$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-160 + \sqrt{40000}}{2 \cdot 4} = \frac{-160 + 200}{8} = \frac{40}{8} = 5$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-160 - \sqrt{40000}}{2 \cdot 4} = \frac{-160 - 200}{8} = \frac{-360}{8} = -45$$

Voltemos ao problema. Quem é x? “X” é a MEDIDA da largura da moldura. Não existe medida negativa.

Assim, o único valor de “x” que nos interessa é x = 5.

Logo, a moldura tem 5 cm de largura.

1. Sem resolver, dê a soma e o produto das raízes e de cada equação.

a) $3x^2 + 5x + 2 = 0$

$a = 3$; $b = 5$; $c = 2$

Soma das raízes = $\frac{-b}{a} = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$

Produto das raízes = $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$

b) $2x^2 + 11x - 2 = 0$

$a = 2$; $b = 11$; $c = -2$

Soma das raízes = $\frac{-b}{a} = \frac{-11}{2} = -\frac{11}{2}$

Produto das raízes = $\frac{c}{a} = \frac{-2}{2} = -2 : 2 = -1$

c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

$a = 9$; $b = -6$; $c = 1$

Soma das raízes = $\frac{-b}{a} = \frac{-(-6)}{9} = \frac{6}{9}$

Simplifique essa fração:

$$\frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$$

Soma das raízes = $\frac{2}{3}$

Produto das raízes = Produto = $\frac{c}{a} = \frac{1}{9}$

d) $7x^2 - 5x - 3 = 0$

$a = 7$; $b = -5$; $c = -3$

Soma das raízes = $\frac{-b}{a} = \frac{-(-5)}{7} = \frac{5}{7}$

Produto das raízes = $\frac{c}{a} = \frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}$

e) $-2x^2 - 11x - 3 = 0$

$a = -2$; $b = -11$; $c = -3$

$$\text{Soma das raízes} = \frac{-b}{a} = \frac{-(-11)}{-2} = \frac{11}{-2} = -\frac{11}{2}$$

$$\text{Produto das raízes} = \frac{c}{a} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{f) } 11x^2 - 7 = 0$$

$$a = 11 ; b = 0 ; c = -7$$

$$\text{Soma das raízes} = \frac{-b}{a} = \frac{0}{11} = 0$$

$$\text{Produto das raízes} = \frac{c}{a} = \frac{-7}{11} = -\frac{7}{11}$$

$$\text{g) } 8x^2 + 5x = 0$$

$$a = 8 ; b = 5 ; c = 0$$

$$\text{Soma das raízes} = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{8} = -\frac{5}{8}$$

$$\text{Produto das raízes} = \frac{c}{a} = \frac{0}{8} = 0$$

$$\text{h) } x + 1 = 2x^2$$

Organize na forma $ax^2 + bx + c = 0$

$$x + 1 - 2x^2 = 0$$

$$-2x^2 + x + 1 = 0$$

$$a = -2 ; b = 1 ; c = 1$$

$$\text{Soma das raízes} = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Produto das raízes} = \frac{c}{a} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

2. Sendo p e q as raízes da equação $x^2 - x - 5 = 0$, calcule o valor de $(p + q)^{2pq}$.

R: Note que $p + q$ é a SOMA DAS RAÍZES e que $pq = p \cdot q$, ou seja, é o PRODUTO das raízes.

Sabemos como calcular a soma das raízes e como calcular o produto das raízes:

$$p + q = \text{Soma das raízes} = \frac{-b}{a}$$

$$p \cdot q = \text{Produto das raízes} = \frac{c}{a}$$

Os coeficientes da equação $x^2 - x - 5 = 0$ são:

$$a = 1 ; b = -1 ; c = -5$$

Assim:

$$p + q = \text{Soma das raízes} = \frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{1} = \frac{1}{1} = 1 : 1 = 1$$

$$p + q = 1$$

$$p \cdot q = \text{Produto das raízes} = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} = -5 : 1 = -5$$

$$p \cdot q = -5$$

Substitua os valores de $p + q$ e pq na expressão:

$$(p + q)^{2pq} =$$

$$(1)^{2 \cdot -5} =$$

$$(1)^{-10} =$$

Lembre-se que: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$$1^{-10} = \frac{1}{1^{10}} = \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Assim, $(p + q)^{2pq}$ vale 1.

3. Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $5x^2 - 7x - 11 = 0$, calcule o valor de cada uma das expressões:

a) $x_1 + x_2$

$$x_1 + x_2 = \text{Soma das raízes} = \frac{-b}{a}$$

os coeficientes de $5x^2 - 7x - 11 = 0$ são:

$$a = 5 ; b = -7 ; c = -11$$

Assim:

$$x_1 + x_2 = \text{Soma das raízes} = \frac{-b}{a} = \frac{-(-7)}{5} = \frac{7}{5}$$

b) $x_1 \cdot x_2$

$$x_1 \cdot x_2 = \text{Produto das raízes} = \frac{c}{a}$$

os coeficientes de $5x^2 - 7x - 11 = 0$ são:

$$a = 5 ; b = -7 ; c = -11$$

Assim:

$$x_1 \cdot x_2 = \text{Produto das raízes} = \frac{c}{a} = \frac{-11}{5} = -\frac{11}{5}$$

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

Esse é o “método da borboleta” para somar frações: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

Aplique esse método para somar essas frações:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$$

Note que o numerador desta nova fração é a soma das raízes, cujo valor já encontramos ($x_1 + x_2 = \frac{7}{5}$); e o denominador dessa fração é a multiplicação das raízes, cujo valor também

já encontramos ($x_1 \cdot x_2 = -\frac{11}{5}$). Assim:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{\left(\frac{7}{5}\right)}{\left(-\frac{11}{5}\right)} = \frac{7}{5} \div \frac{-11}{5} = \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{-11} = \frac{7 \cdot 5}{5 \cdot -11} = \frac{35}{-55}$$

Simplifique a fração encontrada.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{35}{-55} = -\frac{35:5}{55:5} = -\frac{7}{11}$$

d) $(1 + x_1) \cdot (1 + x_2)$

Faça a distributiva:

$$\begin{aligned} (1 + x_1) \cdot (1 + x_2) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot x_2 + x_1 \cdot 1 + x_1 \cdot x_2 \\ &= 1 + x_2 + x_1 + x_1 \cdot x_2 \\ &= 1 + (x_2 + x_1) + (x_1 \cdot x_2) \\ &= 1 + (x_1 + x_2) + (x_1 \cdot x_2) \end{aligned}$$

Note que nessa expressão há a soma das raízes, cujo valor já encontramos ($x_1 + x_2 = \frac{7}{5}$); e

o há também a multiplicação das raízes, cujo valor também já encontramos ($x_1 \cdot x_2 = -\frac{11}{5}$).

Assim:

$$\begin{aligned} (1 + x_1) \cdot (1 + x_2) &= 1 + (x_2 + x_1) + (x_1 \cdot x_2) = 1 + \left(\frac{7}{5}\right) + \left(-\frac{11}{5}\right) \\ &= 1 + \frac{7}{5} - \frac{11}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{7-11}{5} \\
 &= 1 + \frac{-4}{5} \\
 &= 1 - \frac{4}{5} = \frac{1 \cdot 5}{1 \cdot 5} - \frac{4}{5} =
 \end{aligned}$$

Note que transformamos “1” em uma fração com denominador 5. Afinal $\frac{5}{5} = 5 : 5 = 1$. Isso é necessário porque só se pode somar/subtrair frações que possuam o mesmo denominador.

$$\frac{5}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5}$$

4. Dada a equação $2x^2 + (k - 4)x + (6k - 2) = 0$, determine:

a) Para que valor de k as raízes têm soma 11?

R: Os coeficientes da equação são:

$$a = 2 \quad ; \quad b = k - 4 \quad ; \quad c = 6k - 2$$

A soma das raízes é dada por:

$$\text{Soma das raízes} = \frac{-b}{a}$$

Assim, se a soma das raízes é 11, $\frac{-b}{a}$ deve ser igual a 11:

$$\frac{-b}{a} = 11$$

Substitua os coeficientes:

$$\frac{-(k-4)}{2} = 11$$

$$\frac{-k+4}{2} = 11$$

$$-k+4 = 11 \cdot 2$$

$$-k+4 = 22$$

$$-k = 22 - 4$$

$$-k = 18$$

$$k = -18$$

Assim, para $k = -18$, a soma das raízes vale 11.

b) Para que valor de k o número 0 é raiz?

R: Se o “0” é raiz, então ele pode ser colocado no lugar de x:

$$2x^2 + (k - 4)x + (6k - 2) = 0$$

$$2 \cdot x^2 + (k - 4) \cdot x + (6k - 2) = 0$$

$$2 \cdot 0^2 + (k - 4) \cdot 0 + (6k - 2) = 0$$

$$2 \cdot 0 + (k - 4) \cdot 0 + (6k - 2) = 0$$

$$0 + (k - 4) \cdot 0 + (6k - 2) = 0$$

$$0 + 0 + (6k - 2) = 0$$

$$6k - 2 = 0$$

$$6k = 2$$

$$k = \frac{2}{6}$$

Simplifique a fração:

$$k = \frac{2}{6} = \frac{2:2}{6:2} = \frac{1}{3}$$

Assim, para $k = \frac{1}{3}$, zero é raiz da equação.

5. Demonstre porque a soma das raízes é $-\frac{b}{a}$ e porque o produto das raízes é $\frac{c}{a}$.

As demonstrações estão nos tópicos “Soma das Raízes” e “Produto das Raízes”.

Lição 45 - Fatoração de equação do 2º grau

1. Fatore os seguintes trinômios:

a) $x^2 - 7x + 10$

Vamos descobrir as raízes deste trinômio. Aplique Bhaskara.

$a = 1$; $b = -7$; $c = 10$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10$$

$$\Delta = 49 - 4 \cdot 10 = 49 - 40 = 9$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) + \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{7 + 3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) - \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{7 - 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

A fatoração de qualquer trinômio com $a = 1$ é:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Logo, a fatoração desse trinômio é:

$$(x - 2)(x - 5)$$

b) $x^2 + 4x + 3$

Vamos descobrir as raízes deste trinômio. Aplique Bhaskara.

$$a = 1 ; b = 4 ; c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 + 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 - 2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

A fatoração de qualquer trinômio com $a = 1$ é:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Logo, a fatoração desse trinômio é:

$$[x - (-1)][x - (-3)]$$

$$(x + 1)(x + 3)$$

c) $x^2 - 5x - 6$

Vamos descobrir as raízes deste trinômio. Aplique Bhaskara.

$$a = 1 ; b = -5 ; c = -6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{5 + 7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{5 - 7}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

A fatoração de qualquer trinômio com $a = 1$ é:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Logo, a fatoração desse trinômio é:

$$[x - (-1)][x - 6]$$

$$(x + 1)(x - 6)$$

d) $3x^2 - 7x + 2$

Vamos descobrir as raízes deste trinômio. Aplique Bhaskara.

$$a = 3 ; b = -7 ; c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\Delta = 49 - 12 \cdot 2 = 49 - 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) + \sqrt{25}}{2 \cdot 3} = \frac{7 + 5}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) - \sqrt{25}}{2 \cdot 3} = \frac{7 - 5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{2 : 2}{6 : 2} = \frac{1}{3}$$

A fatoração de qualquer trinômio com a DIFERENTE DE 1 é:

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$3 \cdot (x - 2) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)$$

A ordem dos fatores não altera o produto:

$$3 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot (x - 2)$$

Aplique a distributiva:

$$\left(3 \cdot x - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot (x - 2)$$

$$\left(3x - \frac{3}{3}\right) \cdot (x - 2)$$

$$(3x - 1) \cdot (x - 2)$$

e) $4x^2 + 8x + 3$

Vamos descobrir as raízes deste trinômio. Aplique Bhaskara.

$$a = 4 ; b = 8 ; c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3$$

$$\Delta = 64 - 16 \cdot 3 = 64 - 48 = 16$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{16}}{2 \cdot 4} = \frac{-8 + 4}{8} = \frac{-4}{8} = \frac{-4 : 4}{8 : 4} = \frac{-1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{16}}{2 \cdot 4} = \frac{-8 - 4}{8} = \frac{-12}{8} = \frac{-12 : 4}{8 : 4} = \frac{-3}{2}$$

A fatoração de qualquer trinômio com a DIFERENTE DE 1 é:

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$4 \cdot \left[x - \left(-\frac{1}{2} \right) \right] \cdot \left[x - \left(-\frac{3}{2} \right) \right]$$

4 pode ser escrito como $2 \cdot 2$:

$$2 \cdot 2 \cdot \left[x - \left(-\frac{1}{2} \right) \right] \cdot \left[x - \left(-\frac{3}{2} \right) \right]$$

A ordem dos fatores não altera o produto:

$$2 \cdot \left[x - \left(-\frac{1}{2} \right) \right] \cdot 2 \cdot \left[x - \left(-\frac{3}{2} \right) \right]$$

$$2 \cdot \left(x + \frac{1}{2} \right) \cdot 2 \cdot \left(x + \frac{3}{2} \right)$$

Aplique a distributiva:

$$\left(2 \cdot x + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \left(2 \cdot x + 2 \cdot \frac{3}{2} \right)$$

$$\left(2x + \frac{2}{2} \right) \cdot \left(2x + \frac{6}{2} \right)$$

$$(2x + 1) \cdot (2x + 3)$$

f) $5x^2 + 13x - 6$

Vamos descobrir as raízes deste trinômio. Aplique Bhaskara.

$$a = 5 ; b = 13 ; c = -6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (13)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-6)$$

$$\Delta = 169 - 20 \cdot (-6) = 169 + 120 = 289$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13 + \sqrt{289}}{2 \cdot 5} = \frac{-13 + 17}{10} = \frac{4}{10} = \frac{4 : 2}{10 : 2} = \frac{2}{5}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13 - \sqrt{289}}{2 \cdot 5} = \frac{-13 - 17}{10} = \frac{-30}{10} = -3$$

A fatoração de qualquer trinômio com a DIFERENTE DE 1 é:

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$5 \cdot \left(x - \frac{2}{5}\right) \cdot [x - (-3)]$$

$$5 \cdot \left(x - \frac{2}{5}\right) \cdot (x + 3)$$

Aplique a distributiva:

$$\left(5 \cdot x - 5 \cdot \frac{2}{5}\right) \cdot (x + 3)$$

$$\left(5x - \frac{10}{5}\right) \cdot (x + 3)$$

$$(5x - 2) \cdot (x + 3)$$

g) $2x^2 - 20x + 50$

Vamos descobrir as raízes deste trinômio. Aplique Bhaskara.

$$a = 2 ; \quad b = -20 ; \quad c = 50$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 50$$

$$\Delta = 400 - 8 \cdot 50 = 400 - 400 = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-20) + \sqrt{0}}{2 \cdot 2} = \frac{20 + 0}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-20) - \sqrt{0}}{2 \cdot 2} = \frac{20 - 0}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

A fatoração de qualquer trinômio com a DIFERENTE DE 1 é:

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$2 \cdot (x - 5) \cdot (x - 5)$$

$$2(x - 5)^2$$

h) $3x^2 - 6x + 3$

Vamos descobrir as raízes deste trinômio. Aplique Bhaskara.

$$a = 3 ; \quad b = -6 ; \quad c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\Delta = 36 - 12 \cdot 3 = 36 - 36 = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + \sqrt{0}}{2 \cdot 3} = \frac{6 + 0}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - \sqrt{0}}{2 \cdot 3} = \frac{6 - 0}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

A fatoração de qualquer trinômio com a DIFERENTE DE 1 é:

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$3 \cdot (x - 1) \cdot (x - 1)$$

$$3(x - 1)^2$$

2. Monte uma equação do 2º grau de coeficientes inteiros que tenha como raízes:

a) -1 e $-\frac{2}{3}$

R: Se temos as raízes x_1 e x_2 , podemos escrever a forma fatorada da equação do 2º grau de coeficientes inteiros (vamos assumir que $a = 1$):

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$\left[x - (-1) \right] \cdot \left[x - \left(-\frac{2}{3} \right) \right]$$

$$(x + 1) \cdot \left(x + \frac{2}{3} \right)$$

Para escrever essa equação na forma $ax^2 + bx + c$, basta fazer a distributiva:

$$(x + 1) \cdot \left(x + \frac{2}{3} \right) = x \cdot x + x \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot x + 1 \cdot \frac{2}{3}$$

$$= x^2 + \frac{2}{3}x + x + \frac{2}{3}$$

É preciso somar “x” com “x”. Para somar $\frac{2}{3}$ com 1, transforme 1 em uma fração com denominador 3:

$$= x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{3}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$= x^2 + \frac{2+3}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$= x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$$

b) $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$

R: Se temos as raízes x_1 e x_2 , podemos escrever a forma fatorada da equação do 2º grau de coeficientes inteiros (vamos assumir que $a = 1$):

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right)$$

Para escrever essa equação na forma $ax^2 + bx + c$, basta fazer a distributiva:

$$\left(x - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) = x \cdot x + x \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$= x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 4}$$

$$= x^2 + \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)x + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 4}$$

$$= x^2 + \left(\frac{-3-1}{4}\right)x + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 4}$$

$$= x^2 + \frac{-4}{4}x + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 4}$$

$$= x^2 - 1 \cdot x + \frac{3}{16}$$

$$= x^2 - x + \frac{3}{16}$$

c) $\frac{4}{7}$ e $-\frac{2}{7}$

R: Se temos as raízes x_1 e x_2 , podemos escrever a forma fatorada da equação do 2º grau de coeficientes inteiros (vamos assumir que $a = 1$):

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$\left(x - \frac{4}{7}\right) \cdot \left[x - \left(-\frac{2}{7}\right)\right]$$

$$\left(x - \frac{4}{7}\right) \cdot \left(x + \frac{2}{7}\right)$$

Para escrever essa equação na forma $ax^2 + bx + c$, basta fazer a distributiva:

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{4}{7}\right) \cdot \left(x + \frac{2}{7}\right) &= x \cdot x + x \cdot \frac{2}{7} - \frac{4}{7} \cdot x - \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{7} \\&= x^2 + \frac{2}{7}x - \frac{4}{7}x - \frac{4 \cdot 2}{7 \cdot 7} \\&= x^2 + \left(\frac{2}{7} - \frac{4}{7}\right)x - \frac{4 \cdot 2}{7 \cdot 7} \\&= x^2 + \left(\frac{2-4}{7}\right)x - \frac{4 \cdot 2}{7 \cdot 7} \\&= x^2 + \left(\frac{-2}{7}\right)x - \frac{4 \cdot 2}{7 \cdot 7} \\&= x^2 - \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}\end{aligned}$$

d) $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{3}$

R: Se temos as raízes x_1 e x_2 , podemos escrever a forma fatorada da equação do 2º grau de coeficientes inteiros (vamos assumir que $a = 1$):

$$\begin{aligned}(x - x_1) \cdot (x - x_2) \\ \left(x - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(x - \frac{5}{3}\right)\end{aligned}$$

Para escrever essa equação na forma $ax^2 + bx + c$, basta fazer a distributiva:

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(x - \frac{5}{3}\right) &= x \cdot x + x \cdot \left(\frac{-5}{3}\right) - \frac{3}{5} \cdot x - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{-5}{3}\right) \\&= x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{3}{5}x + \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 3} \\&= x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{3}{5}x + \frac{15}{15} \\&= x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{3}{5}x + 1\end{aligned}$$

É preciso somar “x” com “x”. Para somar $\frac{-5}{3}$ com $\frac{-3}{5}$, procure frações equivalentes com o mesmo denominador (para somar frações é preciso que tenham o mesmo denominador):

$$= x^2 + \left(-\frac{5}{3} - \frac{3}{5}\right) \cdot x + 1$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 + \left(-\frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 5} - \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} \right) \cdot x + 1 \\
&= x^2 + \left(-\frac{25}{15} - \frac{9}{15} \right) \cdot x + 1 \\
&= x^2 + \left(\frac{-25-9}{15} \right) \cdot x + 1 \\
&= x^2 + \left(\frac{-34}{15} \right) \cdot x + 1 \\
&= x^2 - \frac{34}{15}x + 1
\end{aligned}$$

Lição 46 – Equações biquadradas

1. Encontre as raízes:

$$a) x^4 - 18x^2 + 32 = 0$$

Reescreva:

$$(x^2)^2 - 18x^2 + 32 = 0$$

Troque a variável:

$$x^2 = p$$

$$(p)^2 - 18 \cdot p + 32 = 0$$

$$p^2 - 18p + 32 = 0$$

Aplique Bhaskara.

$$a = 1 \quad ; \quad b = -18 \quad ; \quad c = 32$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32$$

$$\Delta = 324 - 128$$

$$\Delta = 196$$

$$p_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{18 + 14}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

$$p_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{18 - 14}{2} = 2$$

Logo, $p_1 = 16$ e $p_2 = 2$

- se $p_1 = 16$:

$$x^2 = p$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

$$x = \pm 4$$

- se $p_2 = 2$:

$$x^2 = p$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Portanto:

$$S = (4, -4, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$$b) x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

Reescreva:

$$(x^2)^2 - 5x^2 + 6 = 0$$

Troque a variável:

$$x^2 = p$$

$$p^2 - 5p + 6 = 0$$

Aplique Bhaskara.

$$a = 1 \quad ; \quad b = -5 \quad ; \quad c = 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 6$$

$$\Delta = 25 - 24$$

$$\Delta = 1$$

$$p_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$p_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Logo, $p_1 = 3$ e $p_2 = 2$.

- Se $p_1 = 3$

$$x^2 = p$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

- Se $p_2 = 2$

$$x^2 = p$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Portanto:

$$S = (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$$c) x^4 + 10x^2 + 9 = 0$$

Reescreva:

$$(x^2)^2 + 10x^2 + 9 = 0$$

Troque a variável:

$$x^2 = p$$

$$p^2 + 10p + 9 = 0$$

Aplique Bhaskara.

$$a = 1 \quad ; \quad b = 10 \quad ; \quad c = 9$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$$

$$\Delta = 100 - 4 \cdot 9$$

$$\Delta = 100 - 36$$

$$\Delta = 64$$

$$p_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 + 8}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$p_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 - 8}{2} = \frac{-18}{2} = -9$$

Logo, $p_1 = -1$ e $p_2 = -9$.

- Se $p_1 = -1$

$$x^2 = p$$

$$x^2 = -1$$

Não há $x \in \mathbb{R}$ que seja solução desta equação, pois qualquer número ao quadrado resulta em um valor positivo.

- Se $p_2 = -9$

$$x^2 = p$$

$$x^2 = -9$$

Não há $x \in \mathbb{R}$ que seja solução desta equação, pois qualquer número ao quadrado resulta em um valor positivo.

Portanto, não há solução no conjunto dos reais.

$$S = x \notin \mathbb{R}$$

$$d) m^4 = m^2 + 12$$

Reorganize a equação (na forma $ax^2 + bx + c = 0$):

$$m^4 - m^2 - 12 = 0$$

Reescreva a equação:

$$(m^2)^2 - m^2 - 12 = 0$$

Troque a variável:

$$m^2 = y$$

$$y^2 - y - 12 = 0$$

Aplique Bhaskara.

$$a = 1 \quad ; \quad b = -1 \quad ; \quad c = -12$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-12)$$

$$\Delta = 1 + 48$$

$$\Delta = 49$$

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Logo, $y_1 = 4$ e $y_2 = -3$.

- Se $y_1 = 4$

$$m^2 = y$$

$$m^2 = 4$$

$$m = \pm\sqrt{4}$$

$$m = \pm 2$$

- Se $y_2 = -3$.

$$m^2 = y$$

$$m^2 = -3$$

Não há valor de m possível quando $y = -3$, pois nos números reais é impossível que um número ao quadrado resulte em um número negativo.

Assim, os únicos valores de m possíveis são: $m_1 = -2$ e $m_2 = 2$

Logo:

$$S = (-2, 2)$$

$$e) (t^2 + 2t)(t^2 - 2t) = 45$$

Reorganize a equação (na forma $ax^2 + bx + c = 0$). Para isso aplique o produto notável:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$(t^2 + 2t) \cdot (t^2 - 2t) = (t^2)^2 - (2t)^2 = t^{2 \cdot 2} - 2^2 t^2 = t^4 - 4t^2$$

$$(t^2 + 2t) \cdot (t^2 - 2t) = t^4 - 4t^2$$

Assim:

$$(t^2 + 2t)(t^2 - 2t) = 45$$

$$t^4 - 4t^2 = 45$$

$$t^4 - 4t^2 - 45 = 0$$

Reescreva a equação:

$$(t^2)^2 - 4t^2 - 45 = 0$$

Troque a variável:

$$t^2 = y$$

$$y^2 - 4y - 45 = 0$$

Aplique Bhaskara:

$$a = 1 \quad ; \quad b = -4 \quad ; \quad c = -45$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-45)$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot (-45)$$

$$\Delta = 16 + 180$$

$$\Delta = 196$$

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 14}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 14}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Logo, $y_1 = 9$ e $y_2 = -5$.

- Se $y_1 = 9$

$$t^2 = y$$

$$t^2 = 9$$

$$t = \pm\sqrt{9}$$

$$t = \pm 3$$

- Se $y_2 = -5$

$$t^2 = y$$

$$t^2 = -5$$

Não há valor de t possível quando $y = -5$, pois nos números reais é impossível que um número ao quadrado resulte em um número negativo.

Assim, os únicos valores de m possíveis são: $m_1 = -3$ e $m_2 = 3$

Logo:

$$S = (-3, 3)$$

Lição 47 – Resolvendo equações irracionais

1. Resolva, no conjunto $\mathbb{R}$, a equação irracional:

$$\sqrt{x-1} = 3-x$$

R: Primeiro, defina as condições para que essa equação seja válida no conjunto dos reais.

Para que seja válida, o que está dentro da raiz deve ser maior que zero (positivo). Logo:

$$x - 1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

Eleve os dois lados ao quadrado:

$$(\sqrt{x-1})^2 = (3-x)^2$$

Lembre do produto notável: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$x-1 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + x^2$$

$$x-1 = 9 - 6x + x^2$$

$$x-1-9+6x-x^2 = 0$$

$$-x^2 + 6x + x - 1 - 9 = 0$$

$$-x^2 + 7x - 10 = 0$$

Aplique Bhaskara:

$$a = -1 \quad ; \quad b = 7 \quad ; \quad c = -10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-10)$$

$$\Delta = 49 + 4 \cdot (-10)$$

$$\Delta = 49 - 40$$

$$\Delta = 9$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 + \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-7 + 3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 - \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-7 - 3}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5$$

Encontramos dois resultados para $x \rightarrow x = 2$ e $x = 5$. Ambos estão dentro da condição ($x \geq 1$).

Agora devemos fazer uma verificação com os valores obtidos para a variável x , pois, quando elevamos os dois membros da equação ao quadrado, podemos encontrar raízes diferentes da equação dada.

- Para $x = 2$

$$\sqrt{x-1} = 3-x$$

$$\sqrt{2-1} = 3-2$$

$$\sqrt{1} = 1$$

- Para $x = 5$

$$\sqrt{x-1} = 3-x$$

$$\sqrt{5-1} = 3-5$$

$$\sqrt{4} = -2$$

$$2 \neq -2$$

Portanto, somente o número 2 verifica a equação irracional, então temos:

$$S = \{2\}$$

2. Quais são os valores reais de x para os quais a expressão $\sqrt{x^2 - 6x + 16}$ é igual a $2\sqrt{2}$?

R: Queremos que:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 16} = 2\sqrt{2}$$

Primeiro, defina as condições para que essa equação seja válida no conjunto dos reais.

Para que seja válida, o que está dentro da raiz deve ser maior que zero (positivo). Logo:

$$x^2 - 6x + 16 \geq 0$$

Para saber quando este trinômio será positivo é preciso encontrar as raízes dele. Assim, aplique Bhaskara:

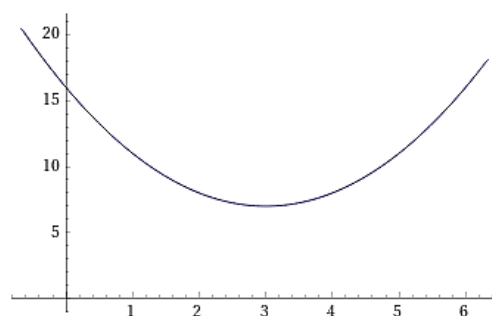
$$x^2 - 6x + 16 = 0$$

$$a = 1 \quad ; \quad b = -6 \quad ; \quad c = 16$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 36 - 4 \cdot 16 = 36 - 64 = -28$$

Como o delta é negativo, o trinômio não tem raízes reais. Então, ele será sempre positivo (pois $a > 0$).

O gráfico desta função está na página a seguir. Nele, vemos que os valores de $y = x^2 - 6x + 16$ são sempre positivos.



$$y = x^2 - 6x + 16$$

Note que mesmo que o x seja negativo, o “ y ” (o resultado da conta $x^2 - 6x + 16$) é sempre positivo.

Assim, para que esta equação seja válida, x só precisa pertencer aos reais ($x \in \mathbb{R}$).

Agora, eleve os dois lados ao quadrado para descobrir o valor de x :

$$\left(\sqrt{x^2 - 6x + 16}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$$

$$x^2 - 6x + 16 = 2^2 \cdot (\sqrt{2})^2$$

$$x^2 - 6x + 16 = 4 \cdot 2$$

$$x^2 - 6x + 16 = 8$$

$$x^2 - 6x + 16 - 8 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Aplique Bhaskara:

$$a = 1 \quad ; \quad b = -6 \quad ; \quad c = 8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8$$

$$\Delta = 36 - 4 \cdot 8$$

$$\Delta = 36 - 32$$

$$\Delta = 4$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{6 + 2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{6 - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Encontramos dois resultados para $x \rightarrow x = 2$ e $x = 4$. Ambos estão dentro da condição.

Agora devemos fazer uma verificação com os valores obtidos para a variável x , pois, quando elevamos os dois membros da equação ao quadrado, podemos encontrar raízes diferentes da equação dada.

- Para $x = 4$

$$\sqrt{x^2 - 6x + 16} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{4^2 - 6 \cdot 4 + 16} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{16 - 24 + 16} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{-8 + 16} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

- Para $x = 2$

$$\sqrt{x^2 - 6x + 16} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2^2 - 6 \cdot 2 + 16} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{4 - 12 + 16} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{-8 + 16} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Logo, ambos valores de x são válidos para esta equação irracional:

$$S = (2, 4)$$

3. Qual é o conjunto solução da equação $4 - x = \sqrt{x+2}$, no conjunto $\mathbb{R}$?

R: Primeiro, defina as condições para que essa equação seja válida no conjunto dos reais.

Para que seja válida, o que está dentro da raiz deve ser maior que zero (positivo). Logo:

$$x + 2 \geq 0$$

$$x \geq 0 - 2$$

$$x \geq -2$$

Eleve os dois lados ao quadrado:

$$(4 - x)^2 = (\sqrt{x+2})^2$$

Lembre do produto notável: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + x^2 = x + 2$$

$$16 - 8x + x^2 = x + 2$$

$$16 - 8x + x^2 - x - 2 = 0$$

$$x^2 - 8x - x + 16 - 2 = 0$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

Aplique Bhaskara:

$$a=1 \quad ; \quad b=-9 \quad ; \quad c=14$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14$$

$$\Delta = 81 - 4 \cdot 14$$

$$\Delta = 81 - 56$$

$$\Delta = 25$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{9+5}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{9-5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Encontramos dois resultados para $x \rightarrow x = 7$ e $x = 2$. Ambos estão dentro da condição ($x \geq -2$).

Agora devemos fazer uma verificação com os valores obtidos para a variável x , pois, quando elevamos os dois membros da equação ao quadrado, podemos encontrar raízes diferentes da equação dada.

- Para $x = 7$

$$4 - x = \sqrt{x+2}$$

$$4 - 7 = \sqrt{7+2}$$

$$-3 = \sqrt{9}$$

$$-3 = 3$$

O que é um absurdo, pois $-3 \neq 3$, assim, x não pode ser igual a 7.

- Para $x = 2$

$$4 - x = \sqrt{x+2}$$

$$4 - 2 = \sqrt{2+2}$$

$$2 = \sqrt{4}$$

$$2 = 2$$

Portanto, somente o número 2 verifica a equação irracional, então temos:

$$S = \{2\}$$

4. Sabendo que as expressões $\sqrt{x^2-9}$ e $\sqrt{x+11}$ apresentam o mesmo valor, determine os valores reais de x .

R: Se elas apresentam o mesmo valor, são iguais. Logo:

$$\sqrt{x^2-9} = \sqrt{x+11}$$

Defina as condições para que essa equação seja válida no conjunto dos reais. Para que seja válida, o que está dentro da raiz deve ser maior que zero (positivo). Logo:

$$x^2 - 9 \geq 0 \quad \text{e} \quad x + 11 \geq 0$$

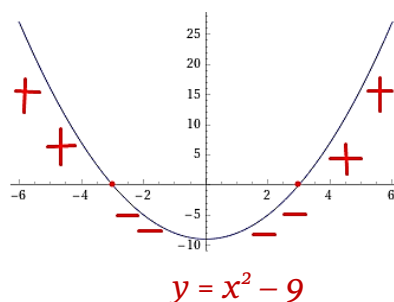
- $x^2 - 9 \geq 0$

$$x^2 \geq 0 + 9$$

$$x^2 \geq 9$$

$$x \leq -3 \quad \text{ou} \quad x \geq 3$$

O gráfico abaixo demonstra que $x^2 - 9$ só tem valores positivos quando x é maior que 3 ou x é menor que -3 .



- $x + 11 \geq 0$

$$x \geq 0 - 11$$

$$x \geq -11$$

Juntando as 3 condições, temos que o x deve ser:

$$\text{Ou } -11 \leq x \leq -3$$

$$\text{Ou } x \geq 3$$

Voltando à equação, eleve os dois lados ao quadrado para descobrir o valor de x :

$$\left(\sqrt{x^2 - 9}\right)^2 = \left(\sqrt{x + 11}\right)^2$$

$$x^2 - 9 = x + 11$$

$$x^2 - 9 - x - 11 = 0$$

$$x^2 - x - 9 - 11 = 0$$

$$x^2 - x - 20 = 0$$

Aplique Bhaskara:

$$a = 1 \quad ; \quad b = -1 \quad ; \quad c = -20$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-20)$$

$$\Delta = 1 + 80$$

$$\Delta = 81$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{1 + 9}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{1 - 9}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Encontramos dois resultados para $x \rightarrow x = 5$ e $x = -4$. Ambos estão dentro da condição $(-11 \leq -4 \leq -3$ e $5 \geq 3)$.

Agora devemos fazer uma verificação com os valores obtidos para a variável x , pois, quando elevamos os dois membros da equação ao quadrado, podemos encontrar raízes diferentes da equação dada.

- Para $x = 5$

$$\sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{x + 11}$$

$$\sqrt{5^2 - 9} = \sqrt{5 + 11}$$

$$\sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$\sqrt{16} = \sqrt{16}$$

$$4 = 4$$

- Para $x = -4$

$$\sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{x + 11}$$

$$\sqrt{(-4)^2 - 9} = \sqrt{-4 + 11}$$

$$\sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

$$\sqrt{7} = \sqrt{7}$$

Logo, ambos valores de x são válidos para esta equação irracional:

$$S = (-4, 5)$$

5. Sabendo que a raiz quadrada de um número real positivo x é igual à diferença entre 2 e o mesmo número, determine o número x .

R: A raiz quadrada de um número real x é: $\sqrt{x}$

A diferença entre 2 e o mesmo número é: $2 - x$

Assim, queremos que:

$$\sqrt{x} = 2 - x$$

Primeiro, defina as condições para que essa equação seja válida no conjunto dos reais. Para que seja válida, o que está dentro da raiz deve ser maior que zero (positivo). Logo:

$$x \geq 0$$

Para descobrir o valor de x , eleve os dois lados ao quadrado:

$$(\sqrt{x})^2 = (2-x)^2$$

Lembre do produto notável: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$x = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + x^2$$

$$x = 4 - 4x + x^2$$

$$x - 4 + 4x - x^2 = 0$$

$$-x^2 + x + 4x - 4 = 0$$

$$-x^2 + 5x - 4 = 0$$

Aplique Bhaskara:

$$a = -1 \quad ; \quad b = 5 \quad ; \quad c = -4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)$$

$$\Delta = 25 + 4 \cdot (-4)$$

$$\Delta = 25 - 16$$

$$\Delta = 9$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 + 3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 - 3}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Encontramos dois resultados para $x \rightarrow x = 1$ e $x = 4$. Ambos estão dentro da condição ($x \geq 0$).

Agora devemos fazer uma verificação com os valores obtidos para a variável x , pois, quando elevamos os dois membros da equação ao quadrado, podemos encontrar raízes diferentes da equação dada.

- Para $x = 1$

$$\sqrt{x} = 2 - x$$

$$\sqrt{1} = 2 - 1$$

$$1 = 1$$

- Para $x = 4$

$$\sqrt{x} = 2 - x$$

$$\sqrt{4} = 2 - 4$$

$$2 = -2$$

O que é um absurdo, pois $-2 \neq 2$, assim, x não pode ser igual a 4.

Portanto, somente o número 1 verifica a equação irracional, então temos:

$$S = \{1\}$$

6. Resolva, no conjunto $\mathbb{R}$, a equação irracional:

$$\sqrt{7x-3} - 1 = x$$

Dica: É melhor elevar somente a raiz ao quadrado. Passe o “excesso” para o outro lado.

R: Seguindo a dica do exercício, passe o “-1” para o outro lado (como + 1):

$$\sqrt{7x-3} = x + 1$$

Primeiro, defina as condições para que essa equação seja válida no conjunto dos reais. Para que seja válida, o que está dentro da raiz deve ser maior que zero (positivo). Logo:

$$7x - 3 \geq 0$$

$$7x \geq 3$$

$$x \geq \frac{3}{7}$$

Para descobrir o valor de x , eleve os dois lados ao quadrado:

$$\left(\sqrt{7x-3}\right)^2 = (x+1)^2$$

Lembre do produto notável: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$7x - 3 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2$$

$$7x - 3 = x^2 + 2x + 1$$

$$7x - 3 - x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$-x^2 + 7x - 2x - 3 - 1 = 0$$

$$-x^2 + 5x - 4 = 0$$

Aplique Bhaskara:

$$a = -1 \quad ; \quad b = 5 \quad ; \quad c = -4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)$$

$$\Delta = 25 + 4 \cdot (-4)$$

$$\Delta = 25 - 16$$

$$\Delta = 9$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 + 3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 - 3}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Encontramos dois resultados para $x \rightarrow x = 1$ e $x = 4$. Ambos estão dentro da condição ($x \geq \frac{3}{7}$).

Agora devemos fazer uma verificação com os valores obtidos para a variável x , pois, quando elevamos os dois membros da equação ao quadrado, podemos encontrar raízes diferentes da equação dada.

- Para $x = 1$

$$\sqrt{7x-3}-1=x$$

$$\sqrt{7 \cdot 1 - 3} - 1 = 1$$

$$\sqrt{7-3}-1=1$$

$$\sqrt{4}-1=1$$

$$2-1=1$$

$$1=1$$

- Para $x = 4$

$$\sqrt{7x-3}-1=x$$

$$\sqrt{7 \cdot 4 - 3} - 1 = 4$$

$$\sqrt{28-3}-1=4$$

$$\sqrt{25}-1=4$$

$$5-1=4$$

$$4=4$$

Portanto, ambos são solução da equação irracional. Então, temos:

$$S = \{1, 4\}$$

7. Qual é o valor do número real x que torna a expressão $\sqrt{x^2 - x + 4}$ igual a 4?

R: Queremos que:

$$\sqrt{x^2 - x + 4} = 4$$

Primeiro, defina as condições para que essa equação seja válida no conjunto dos reais. Para que seja válida, o que está dentro da raiz deve ser maior que zero (positivo). Logo:

$$x^2 - x + 4 \geq 0$$

Para saber quando este trinômio será positivo é preciso encontrar as raízes dele. Assim, aplique Bhaskara:

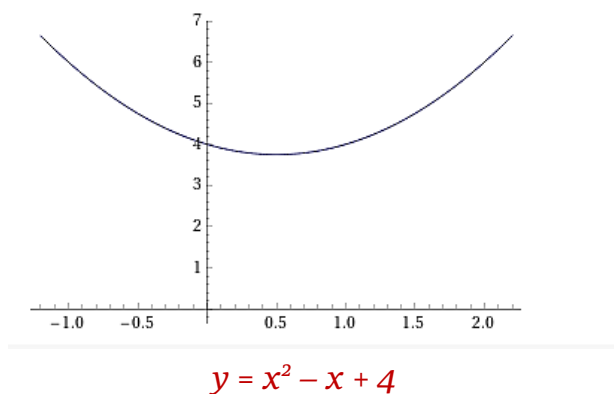
$$x^2 - x + 4 = 0$$

$$a = 1 \quad ; \quad b = -1 \quad ; \quad c = 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 1 - 4 \cdot 4 = 1 - 16 = -15$$

Como o delta é negativo, o trinômio não tem raízes reais. Então, ele será sempre positivo (pois $a > 0$).

O gráfico desta função está na página a seguir. Nele, vemos que os valores de $y = x^2 - x + 4$ são sempre positivos.



Note que mesmo que o x seja negativo, o “ y ” (o resultado da conta $x^2 - 6x + 16$) é sempre positivo.

Assim, para que esta equação seja válida, x só precisa pertencer aos reais ($x \in \mathbb{R}$).

Agora, eleve os dois lados ao quadrado para descobrir o valor de x :

$$\left(\sqrt{x^2 - x + 4}\right)^2 = (4)^2$$

$$x^2 - x + 4 = 16$$

$$x^2 - x + 4 - 16 = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

Aplique Bhaskara:

$$a = 1 \quad ; \quad b = -1 \quad ; \quad c = -12$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-12)$$

$$\Delta = 1 + 48$$

$$\Delta = 49$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{1 + 7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{1 - 7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Encontramos dois resultados para $x \rightarrow x = 4$ e $x = -3$. Ambos estão dentro da condição ($x \in \mathbb{R}$).

Agora devemos fazer uma verificação com os valores obtidos para a variável x , pois, quando elevamos os dois membros da equação ao quadrado, podemos encontrar raízes diferentes da equação dada.

- Para $x = 4$

$$\sqrt{x^2 - x + 4} = 4$$

$$\sqrt{4^2 - 4 + 4} = 4$$

$$\sqrt{16 - 4 + 4} = 4$$

$$\sqrt{12 + 4} = 4$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$4 = 4$$

- Para $x = -3$

$$\sqrt{x^2 - x + 4} = 4$$

$$\sqrt{(-3)^2 - (-3) + 4} = 4$$

$$\sqrt{9 + 3 + 4} = 4$$

$$\sqrt{12 + 4} = 4$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$4 = 4$$

Portanto, ambos são solução da equação irracional. Então, temos:

$$S = \{-3, 4\}$$

8. Sabendo que as expressões $\sqrt{x + \sqrt{x-1}}$ e $\sqrt{7}$ têm o mesmo valor numérico, determine o valor do número real x .

R: Queremos que:

$$\sqrt{x + \sqrt{x-1}} = \sqrt{7}$$

Primeiro, defina as condições para que essa equação seja válida no conjunto dos reais. Para que seja válida, o que está dentro da raiz deve ser maior que zero (positivo). Logo:

- $x - 1 \geq 0$
 $x \geq 1$

Se x deve ser maior que 1, o x é sempre positivo. Também, a raiz $\sqrt{x-1}$ é sempre positiva.

Assim, somando um número positivo (x) com outro positivo ($\sqrt{x-1}$), teremos sempre um número positivo.

Assim, $x + \sqrt{x-1}$, quando $x \geq 1$ é também sempre positivo. Logo, somente esta restrição basta ($x \geq 1$).

Agora, eleve os dois lados ao quadrado para descobrir o valor de x:

$$\left(\sqrt{x + \sqrt{x-1}}\right)^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2$$

$$x + \sqrt{x-1} = 7$$

Passe o “x” para o outro lado:

$$\sqrt{x-1} = 7 - x$$

Eleve ao quadrado novamente:

$$\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = (7-x)^2$$

Lembre do produto notável: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$x-1 = 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot x + x^2$$

$$x-1 = 49 - 14x + x^2$$

$$x-1-49+14x-x^2=0$$

$$-x^2+14x+x-49-1=0$$

$$-x^2+15x-50=0$$

Aplique Bhaskara:

$$a = -1 \quad ; \quad b = 15 \quad ; \quad c = -50$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 15^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-50)$$

$$\Delta = 225 + 4 \cdot (-50)$$

$$\Delta = 225 - 200$$

$$\Delta = 25$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15 + \sqrt{25}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-15 + 5}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15 - \sqrt{25}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-15 - 5}{-2} = \frac{-20}{-2} = 10$$

Encontramos dois resultados para $x \rightarrow x = 5$ e $x = 10$. Ambos estão dentro da condição ($x \geq 1$).

Agora devemos fazer uma verificação com os valores obtidos para a variável x , pois, quando elevamos os dois membros da equação ao quadrado, podemos encontrar raízes diferentes da equação dada.

- Para $x = 5$

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = \sqrt{7}$$

$$\sqrt{5} + \sqrt{5-1} = \sqrt{7}$$

$$\sqrt{5} + \sqrt{4} = \sqrt{7}$$

$$\sqrt{5} + 2 = \sqrt{7}$$

$$\sqrt{7} = \sqrt{7}$$

- Para $x = 10$

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = \sqrt{7}$$

$$\sqrt{10} + \sqrt{10-1} = \sqrt{7}$$

$$\sqrt{10} + \sqrt{9} = \sqrt{7}$$

$$\sqrt{10} + 3 = \sqrt{7}$$

$$\sqrt{13} = \sqrt{7}$$

O que é um absurdo, pois $\sqrt{13} \neq \sqrt{7}$. Assim, x não pode ser igual a 10.

Portanto, somente o número 5 verifica a equação irracional, então temos:

$$S = \{5\}$$

9. Qual é a solução da equação a seguir?

$$\sqrt{\frac{x}{4-x}} = \sqrt{\frac{4-x}{2}}, \text{ com } x \neq 4$$

R: Primeiro, defina as condições para que essa equação seja válida no conjunto dos reais. Para que seja válida, o que está dentro da raiz deve ser maior que zero (positivo). Logo:

- $\frac{x}{4-x} \geq 0$

É uma equação fracionária. Para saber quando esse quociente resultará em um número positivo, é preciso pensar no sinal de “x” e de “4 – x”.

→ Quando x será positivo?

R: Quando $x \geq 0$

→ Quando 4 – x será positivo?

R: Quando $4 - x \geq 0$, ou seja, quando $x \leq 4$

Temos três situações:

I) Quando $x \leq 0$

Nesse caso, “x” é negativo e “4 – x” é um número positivo.

A divisão de um número negativo (x) por um número positivo (4 – x), resulta em um número negativo.

Assim, quando $x \leq 0$ $\frac{x}{4-x} \leq 0$.

Então, o x não pode ser menor que zero, pois $\frac{x}{4-x}$ precisa ser um número positivo para estar dentro da raiz.

II) Quando x estiver entre 0 e 4, ou seja $0 \leq x \leq 4$:

Nesse caso, “x” é positivo e “4 – x” é um número positivo.

A divisão de um número positivo (x) por um número positivo (4 – x), resulta em um número POSITIVO.

Assim, quando $0 \leq x \leq 4$, $\frac{x}{4-x} \geq 0$.

Logo, se o x estiver entre 0 e 4 , $\frac{x}{4-x}$ será um número positivo e pode estar dentro da raiz.

III) Quando $x > 4$

Nesse caso, “x” é positivo e “4 – x” é um número negativo.

A divisão de um número positivo (x) por um número negativo (4 – x), resulta em um número negativo.

Assim, quando $x > 4$, $\frac{x}{4-x} \leq 0$.

Então, o x não pode ser maior que 4, pois $\frac{x}{4-x}$ precisa ser um número positivo para estar dentro da raiz.

- $\frac{4-x}{2} \geq 0$

$$4-x \geq 0 \cdot 2$$

$$-x \geq -4$$

$$-x \geq -4(\cdot -1)$$

$$x \leq 4$$

Assim, unindo os dois casos ($\frac{x}{4-x} \geq 0$ e $\frac{4-x}{2} \geq 0$), temos que o x só pode estar entre 0 e

4: $0 \leq x \leq 4$

Agora, para descobrir o valor de x , eleve os dois lados ao quadrado:

$$\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{4-x}{2}}\right)^2$$

$$\frac{x}{4-x} = \frac{4-x}{2}$$

Multiplique em cruz:

$$x \cdot 2 = (4-x) \cdot (4-x)$$

$$2x = (4-x) \cdot (4-x)$$

$$2x = 4 \cdot 4 + 4 \cdot (-x) - x \cdot 4 - x \cdot (-x)$$

$$2x = 16 - 4x - 4x + x^2$$

$$2x = 16 - 8x + x^2$$

$$2x - 16 + 8x - x^2 = 0$$

$$-x^2 + 2x + 8x - 16 = 0$$

$$-x^2 + 10x - 16 = 0$$

Aplique Bhaskara:

$$a = -1 \quad ; \quad b = 10 \quad ; \quad c = -16$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-16)$$

$$\Delta = 100 + 4 \cdot (-16)$$

$$\Delta = 100 - 64$$

$$\Delta = 36$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-10 + 6}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-10 - 6}{-2} = \frac{-16}{-2} = 8$$

Note que um dos resultados não satisfaz a nossa condição inicial: $0 \leq x \leq 4$, pois 8 é MAIOR QUE 4.

Somente o 2 é maior que 0 e menor que 4. Também 2 é diferente de 4 (outra condição dada para que o denominador fosse diferente de zero).

Assim, teste somente o 2:

- Para $x = 2$

$$\sqrt{\frac{x}{4-x}} = \sqrt{\frac{4-x}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{4-2}} = \sqrt{\frac{4-2}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}}$$

$$\sqrt{1} = \sqrt{1}$$

$$1 = 1$$

Portanto, $x = 2$ é solução da equação dada:

$$S = \{2\}$$

10. Se a um número real x adicionarmos o número real $\sqrt{x+2}$, vamos obter 10. Sabendo disto, qual é o valor do número x ?

R: Queremos que:

$$x + \sqrt{x+2} = 10$$

Primeiro, defina as condições para que essa equação seja válida no conjunto dos reais. Para que seja válida, o que está dentro da raiz deve ser maior que zero (positivo). Logo:

$$x + 2 \geq 0$$

$$x \geq -2$$

Para encontrar o x , utilize a mesma dica do exercício 6. Eleve a raiz ao quadrado “sozinha”. Passe o x para o lado esquerdo.

$$\sqrt{x+2} = 10 - x$$

$$(\sqrt{x+2})^2 = (10 - x)^2$$

Lembre do produto notável: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$x + 2 = 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot x + x^2$$

$$x + 2 = 100 - 20x + x^2$$

$$x + 2 - 100 + 20x - x^2 = 0$$

$$-x^2 + 20x + x + 2 - 100 = 0$$

$$-x^2 + 21x - 98 = 0$$

Aplique Bhaskara:

$$a = -1 \quad ; \quad b = 21 \quad ; \quad c = -98$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 21^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-98)$$

$$\Delta = 441 + 4 \cdot (-98)$$

$$\Delta = 441 - 392$$

$$\Delta = 49$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-21 + \sqrt{49}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-21 + 7}{-2} = \frac{-14}{-2} = 7$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-21 - \sqrt{49}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-21 - 7}{-2} = \frac{-28}{-2} = 14$$

Encontramos dois resultados para $x \rightarrow x = 7$ e $x = 14$. Ambos estão dentro da condição $x \geq -2$).

Agora devemos fazer uma verificação com os valores obtidos para a variável x , pois, quando elevamos os dois membros da equação ao quadrado, podemos encontrar raízes diferentes da equação dada.

- Para $x = 7$

$$\sqrt{x+2} = 10 - x$$

$$\sqrt{7+2} = 10 - 7$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$3 = 3$$

- Para $x = 14$

$$\sqrt{x+2} = 10 - x$$

$$\sqrt{14+2} = 10 - 14$$

$$\sqrt{16} = -4$$

$$4 = -4$$

O que é um absurdo, pois $4 \neq -4$. Assim, x não pode ser igual a 14.

Portanto, somente o número 7 verifica a equação irracional, então temos:

$$S = \{7\}$$

Lição 48 – Sistema de equações de 2º grau

1. Resolva os sistemas de equações abaixo pelo método que preferir:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Pelo método da Soma:

$$x + x + y - y = 11 + 3$$

$$2x + 0 = 14$$

$$2x = 14$$

$$x = \frac{14}{2}$$

$$x = 7$$

Agora, encontre o y substituindo o valor de x:

$$x + y = 11$$

$$7 + y = 11$$

$$y = 11 - 7$$

$$y = 4$$

Portanto:

$$(x, y) = (7, 4)$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

Pelo método da Soma:

$$x + x + y - y = 9 + 1$$

$$2x + 0 = 10$$

$$2x = 10$$

$$x = \frac{10}{2}$$

$$x = 5$$

Agora, encontre o y substituindo o valor de x:

$$x - y = 1$$

$$5 - y = 1$$

$$-y = 1 - 5$$

$$-y = -4$$

$$y = 4$$

Portanto:

$$(x, y) = (5, 4)$$

$$c) \begin{cases} x - y = 16 \\ x + y = 74 \end{cases}$$

Pelo método da Soma:

$$x + x + y - y = 16 + 74$$

$$2x + 0 = 90$$

$$2x = 90$$

$$x = \frac{90}{2}$$

$$x = 45$$

Agora, encontre o y substituindo o valor de x:

$$x - y = 16$$

$$45 - y = 16$$

$$-y = 16 - 45$$

$$-y = -29$$

$$y = 29$$

Portanto:

$$(x, y) = (45, 29)$$

$$d) \begin{cases} 2x - y = 20 \\ 2x + y = 48 \end{cases}$$

Pelo método da Soma:

$$2x + 2x - y + y = 20 + 48$$

$$4x + 0 = 68$$

$$4x = 68$$

$$x = \frac{68}{4}$$

$$x = 17$$

Agora, encontre o y substituindo o valor de x:

$$2x + y = 48$$

$$2 \cdot 17 + y = 48$$

$$34 + y = 48$$

$$y = 48 - 34$$

$$y = 14$$

Portanto:

$$(x, y) = (17, 14)$$

$$e) \begin{cases} 2x - 3y = -16 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$$

Pelo método da Soma:

$$2x + 5x + 3y - 3y = -16 + 2$$

$$7x + 0 = -14$$

$$7x = -14$$

$$x = \frac{-14}{7}$$

$$x = -2$$

Agora, encontre o y substituindo o valor de x:

$$5x + 3y = 2$$

$$5 \cdot (-2) + 3y = 2$$

$$-10 + 3y = 2$$

$$3y = 2 + 10$$

$$3y = 12$$

$$y = \frac{12}{3}$$

$$y = 4$$

Portanto:

$$(x, y) = (-2, 4)$$

$$f) \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 11x - y = 42 \end{cases}$$

Pelo método da Soma:

$$3x + 11x + y - y = 0 + 42$$

$$14x + 0 = 42$$

$$14x = 42$$

$$x = \frac{42}{14}$$

$$x = 3$$

Agora, encontre o y substituindo o valor de x:

$$3x + y = 0$$

$$3 \cdot 3 + y = 0$$

$$9 + y = 0$$

$$y = 0 - 9$$

$$y = -9$$

Portanto:

$$(x, y) = (3, -9)$$

$$g) \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

Faça pelo método da substituição. Isole o x da primeira equação:

$$x = 5 - 3y$$

Substitua o “valor” do x (a expressão acima) na segunda equação:

$$2 \cdot x - y = -4$$

$$2 \cdot (5 - 3y) - y = -4$$

$$2 \cdot 5 + 2 \cdot (-3y) - y = -4$$

$$10 - 6y - y = -4$$

$$10 - 7y = -4$$

$$-7y = -4 - 10$$

$$-7y = -14$$

$$y = \frac{-14}{-7}$$

$$y = 2$$

Agora, descubra o valor do x, substituindo o valor encontrado para y:

$$x = 5 - 3y$$

$$x = 5 - 3 \cdot 2$$

$$x = 5 - 6$$

$$x = -1$$

Portanto:

$$(x, y) = (-1, 2)$$

$$h) \begin{cases} 3x + 3y = 21 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

Faça pelo método da substituição. Isole o y da segunda equação:

$$-y = 5 - 2x$$

$$-y = 5 - 2x \cdot (-1)$$

$$y = -5 + 2x$$

$$y = 2x - 5$$

Substitua o “valor” do y (a expressão acima) na primeira equação:

$$3x + 3 \cdot y = 21$$

$$3x + 3 \cdot (2x - 5) = 21$$

$$3x + 3 \cdot 2x + 3 \cdot (-5) = 21$$

$$3x + 6x - 15 = 21$$

$$9x = 21 + 15$$

$$9x = 36$$

$$x = \frac{36}{9}$$

$$x = 4$$

Agora, descubra o valor do y, substituindo o valor encontrado para x:

$$y = 2 \cdot x - 5$$

$$y = 2 \cdot 4 - 5$$

$$y = 8 - 5$$

$$y = 3$$

Portanto:

$$(x, y) = (4, 3)$$

$$i) \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$$

Faça pelo método da substituição. Isole o x da primeira equação:

$$x = 3 + y$$

Substitua o “valor” do x (a expressão acima) na segunda equação:

$$2x + 3y = 16$$

$$2 \cdot x + 3y = 16$$

$$2 \cdot (3 + y) + 3y = 16$$

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot y + 3y = 16$$

$$6 + 2y + 3y = 16$$

$$6 + 5y = 16$$

$$5y = 16 - 6$$

$$5y = 10$$

$$y = \frac{10}{5}$$

$$y = 2$$

Agora, descubra o valor do x, substituindo o valor encontrado para y:

$$x = 3 + y$$

$$x = 3 + 2$$

$$x = 5$$

Portanto:

$$(x, y) = (5, 2)$$

$$j) \begin{cases} 5x + y = 5 \\ 10x - 2y = -2 \end{cases}$$

Faça pelo método da substituição. Isole o y da primeira equação:

$$y = 5 - 5x$$

Substitua o “valor” do y (a expressão acima) na segunda equação:

$$10x - 2y = -2$$

$$10x - 2 \cdot y = -2$$

$$10x - 2 \cdot (5 - 5x) = -2$$

$$10x - 2 \cdot 5 - 2 \cdot (-5x) = -2$$

$$10x - 10 + 10x = -2$$

$$10x + 10x = -2 + 10$$

$$20x = 8$$

$$x = \frac{8}{20}$$

Simplifique a fração.

$$x = \frac{8}{20} = \frac{8:4}{20:4} = \frac{2}{5}$$

Agora, descubra o valor do y, substituindo o valor encontrado para x:

$$y = 5 - 5x$$

$$y = 5 - 5 \cdot x$$

$$y = 5 - 5 \cdot \frac{2}{5}$$

$$y = 5 - \frac{5 \cdot 2}{5}$$

$$y = 5 - \frac{10}{5}$$

$$y = 5 - 2$$

$$y = 3$$

Portanto:

$$(x, y) = \left(\frac{2}{5}, 3 \right)$$

$$k) \begin{cases} x - 3 = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Note que não há “y” na primeira equação. É uma equação de primeiro grau de uma variável apenas. É possível descobrir o valor do x:

$$x - 3 = 0$$

$$x = 0 + 3$$

$$x = 3$$

Agora, descubra o valor do y, substituindo o valor encontrado para x (na segunda equação, que é a única que contém “y”):

$$2x - y = 1$$

$$2 \cdot x - y = 1$$

$$2 \cdot 3 - y = 1$$

$$6 - y = 1$$

$$-y = 1 - 6$$

$$-y = -5$$

$$y = 5$$

Portanto:

$$(x, y) = (3, 5)$$

$$l) \begin{cases} 5x - y = 4 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$$

Multiplique a segunda equação por -1 (isso não altera seu valor):

$$\begin{cases} 5x - y = 4 \\ 2x - y = -5 \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - y = 4 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - y = 4 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$$

Pelo método da soma:

$$5x - 2x - y + y = 4 + 5$$

$$3x + 0 = 9$$

$$3x = 9$$

$$x = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

Escolha qualquer uma das equações e substitua o valor de x encontrado para encontrar o valor de y:

$$5x - y = 4$$

$$5 \cdot x - y = 4$$

$$5 \cdot 3 - y = 4$$

$$15 - y = 4$$

$$-y = 4 - 15$$

$$-y = -11$$

$$y = 11$$

Portanto:

$$(x, y) = (3, 11)$$

2. Resolva os sistemas de equação de segundo grau abaixo:

$$a) \begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Faça pelo método da substituição. Isole o x da primeira equação (é melhor isolar uma variável que não esteja acompanhada de uma multiplicação ou de um quadrado):

$$x = 3 - y$$

Substitua o “valor” do x (a expressão acima) na segunda equação:

$$x^2 + y^2 = 5$$

$$(3 - y)^2 + y^2 = 5$$

Lembre-se do produto notável: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$3^2 - 2 \cdot 3 \cdot y + y^2 + y^2 = 5$$

$$9 - 6y + 2y^2 = 5$$

$$2y^2 - 6y + 9 - 5 = 0$$

$$2y^2 - 6y + 4 = 0$$

Aplique Bhaskara:

$$a = 2 \quad ; \quad b = -6 \quad ; \quad c = 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4$$

$$\Delta = 36 - 32$$

$$\Delta = 4$$

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + \sqrt{4}}{2 \cdot 2} = \frac{6 + 2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - \sqrt{4}}{2 \cdot 2} = \frac{6 - 2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

- Para $y_1 = 2$, encontre o x_1 substituindo o valor do y_1 :

$$x = 3 - y$$

$$x_1 = 3 - y_1 = 3 - 2 = 1$$

- Para $y_2 = 1$, encontre o x_2 substituindo o valor do y_2 :

$$x = 3 - y$$

$$x_2 = 3 - y_2 = 3 - 1 = 2$$

Assim:

$$(x_1, y_1) = (2, 1) \text{ e } (x_2, y_2) = (1, 2)$$

$$b) \begin{cases} x - y = 0 \\ 5x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$$

Faça pelo método da substituição. Isole o x da primeira equação (é melhor isolar uma variável que não esteja acompanhada de uma multiplicação ou de um quadrado):

$$x = 0 + y$$

$$x = y$$

Substitua o “valor” do x (a expressão acima) na segunda equação:

$$5x^2 - y^2 = 16$$

$$5 \cdot x^2 - y^2 = 16$$

$$5 \cdot y^2 - y^2 = 16$$

$$5y^2 - y^2 = 16$$

$$4y^2 = 16$$

$$y^2 = \frac{16}{4}$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm\sqrt{4}$$

$$y = \pm 2$$

- Para $y_1 = 2$, encontre o x_1 substituindo o valor do y_1 :

$$x = y$$

$$x_1 = y_1 = 2$$

- Para $y_2 = -2$, encontre o x_2 substituindo o valor do y_2 :

$$x = y$$

$$x_2 = y_2 = -2$$

Assim:

$$(x_1, y_1) = (2, 2) \text{ e } (x_2, y_2) = (-2, -2)$$

$$c) \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Faça pelo método da substituição. Isole o x da primeira equação (é melhor isolar uma variável que não esteja acompanhada de uma multiplicação ou de um quadrado):

$$x = 3 - y$$

Substitua o “valor” do x (a expressão acima) na segunda equação:

$$xy = 2$$

$$x \cdot y = 2$$

$$(3 - y) \cdot y = 2$$

$$3 \cdot y + y \cdot (-y) = 2$$

$$3y - y^2 = 2$$

$$-y^2 + 3y - 2 = 0$$

Aplique Bhaskara:

$$a = -1 \quad ; \quad b = 3 \quad ; \quad c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)$$

$$\Delta = 9 + 4 \cdot (-2)$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 + 1}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 - 1}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

- Para $y_1 = 1$, encontre o x_1 substituindo o valor do y_1 :

$$x = 3 - y$$

$$x_1 = 3 - y_1 = 3 - 1 = 2$$

- Para $y_2 = 2$, encontre o x_2 substituindo o valor do y_2 :

$$x = 3 - y$$

$$x_2 = 3 - y_2 = 3 - 2 = 1$$

Assim:

$$(x_1, y_1) = (2, 1) \text{ e } (x_2, y_2) = (1, 2)$$

$$d) \begin{cases} x = 1 + y \\ xy = 30 \end{cases}$$

Note que na primeira equação o x já está isolado. Faça pelo método da substituição.

Substitua o valor do x ($x = 1 + y$) na segunda equação:

$$xy = 30$$

$$x \cdot y = 30$$

$$(1 + y) \cdot y = 30$$

$$1 \cdot y + y \cdot y = 30$$

$$y + y^2 = 30$$

$$y^2 + y - 30 = 0$$

Aplique Bhaskara:

$$a = 1 \quad ; \quad b = 1 \quad ; \quad c = -30$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-30)$$

$$\Delta = 1 + 120$$

$$\Delta = 121$$

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 11}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 11}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

- Para $y_1 = 5$, encontre o x_1 substituindo o valor do y_1 :

$$x = 1 + y$$

$$x_1 = 1 + y_1 = 1 + 5 = 6$$

- Para $y_2 = -6$, encontre o x_2 substituindo o valor do y_2 :

$$x = 1 + y$$

$$x_2 = 1 + y_2 = 1 + (-6) = 1 - 6 = -5$$

Assim:

$$(x_1, y_1) = (6, 5) \text{ e } (x_2, y_2) = (-5, -6)$$

$$e) \begin{cases} x = -11 + 3y \\ xy = 20 \end{cases}$$

Note que na primeira equação o x já está isolado. Faça pelo método da substituição.

Substitua o valor do x ($x = -11 + 3y$) na segunda equação:

$$xy = 20$$

$$x \cdot y = 20$$

$$(-11 + 3y) \cdot y = 20$$

$$-11 \cdot y + 3y \cdot y = 20$$

$$-11y + 3y^2 = 20$$

$$3y^2 - 11y - 20 = 0$$

Aplique Bhaskara:

$$a = 3 \quad ; \quad b = -11 \quad ; \quad c = -20$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-20)$$

$$\Delta = 121 - 12 \cdot (-20)$$

$$\Delta = 121 + 240$$

$$\Delta = 361$$

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-11) + \sqrt{361}}{2 \cdot 3} = \frac{11 + 19}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-11) - \sqrt{361}}{2 \cdot 3} = \frac{11 - 19}{6} = \frac{-8}{6} = \frac{-8 : 2}{6 : 2} = \frac{-4}{3}$$

- Para $y_1 = 5$, encontre o x_1 substituindo o valor do y_1 :

$$x = -11 + 3y$$

$$x_1 = -11 + 3 \cdot y_1$$

$$x_1 = -11 + 3 \cdot 5 = -11 + 15 = 4$$

- Para $y_2 = \frac{-4}{3}$, encontre o x_2 substituindo o valor do y_2 :

$$x = -11 + 3y$$

$$x_2 = -11 + 3 \cdot y_2$$

$$x_2 = -11 + 3 \cdot \frac{-4}{3} = -11 + \frac{3 \cdot -4}{3} = -11 + \frac{-12}{3} = -11 + (-4) = -11 - 4 = -15$$

Assim:

$$(x_1, y_1) = (4, 5) \text{ e } (x_2, y_2) = (-15, \frac{-4}{3})$$

$$f) \begin{cases} x = -1 - y \\ xy - y = 1 \end{cases}$$

Note que na primeira equação o x já está isolado. Faça pelo método da substituição.

Substitua o valor do x ($x = -1 - y$) na segunda equação:

$$xy - y = 1$$

$$x \cdot y - y = 1$$

$$(-1 - y) \cdot y - y = 1$$

$$-1 \cdot y - y \cdot y - y = 1$$

$$-y - y^2 - y - 1 = 0$$

$$-y^2 - 2y - 1 = 0$$

Aplique Bhaskara:

$$a = -1 \quad ; \quad b = -2 \quad ; \quad c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)$$

$$\Delta = 4 + 4 \cdot (-1) = 4 - 4 = 0$$

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 + 0}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 - 0}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Ou seja, não há dois valores para y. Há apenas um valor: $y = -1$.

Então, para $y = -1$, o x vale:

$$x = -1 - y$$

$$x = -1 - (-1)$$

$$x = -1 + 1$$

$$x = 0$$

Assim:

$$(x, y) = (0, -1)$$

$$g) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y^2 + 3x = 7 \end{cases}$$

Faça pelo método da substituição. Isole o x da primeira equação (é melhor isolar uma variável que não esteja acompanhada de uma multiplicação ou de um quadrado):

$$x = 5 - 2y$$

Substitua o “valor” do x (a expressão acima) na segunda equação:

$$y^2 + 3x = 7$$

$$y^2 + 3 \cdot x = 7$$

$$y^2 + 3 \cdot (5 - 2y) = 7$$

$$y^2 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot (-2y) = 7$$

$$y^2 + 15 - 6y = 7$$

$$y^2 - 6y + 15 - 7 = 0$$

$$y^2 - 6y + 8 = 0$$

Aplique Bhaskara:

$$a = 1 \quad ; \quad b = -6 \quad ; \quad c = 8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8$$

$$\Delta = 36 - 4 \cdot 8$$

$$\Delta = 36 - 32$$

$$\Delta = 4$$

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{6 + 2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{6 - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

- Para $y_1 = 4$, encontre o x_1 substituindo o valor do y_1 :

$$x = 5 - 2y$$

$$x_1 = 5 - 2y_1$$

$$x_1 = 5 - 2 \cdot y_1$$

$$x_1 = 5 - 2 \cdot 4$$

$$x_1 = 5 - 8 = -3$$

- Para $y_2 = 2$, encontre o x_2 substituindo o valor do y_2 :

$$x = 5 - 2y$$

$$x_2 = 5 - 2y_2 = 5 - 2 \cdot y_2$$

$$x_1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1$$

Assim:

$$(x_1, y_1) = (-3, 4) \text{ e } (x_2, y_2) = (1, 2)$$

$$h) \begin{cases} x - 2y = -17 \\ y^2 + 5x = -29 \end{cases}$$

Faça pelo método da substituição. Isole o x da primeira equação (é melhor isolar uma variável que não esteja acompanhada de uma multiplicação ou de um quadrado):

$$x = -17 + 2y$$

Substitua o “valor” do x (a expressão acima) na segunda equação:

$$y^2 + 5x = -29$$

$$y^2 + 5 \cdot x = -29$$

$$y^2 + 5 \cdot (-17 + 2y) = -29$$

$$y^2 + 5 \cdot (-17) + 5 \cdot 2y = -29$$

$$y^2 - 85 + 10y + 29 = 0$$

$$y^2 + 10y + 29 - 85 = 0$$

$$y^2 + 10y - 56 = 0$$

Aplique Bhaskara:

$$a = 1 \quad ; \quad b = 10 \quad ; \quad c = -56$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-56)$$

$$\Delta = 100 - 4 \cdot (-56)$$

$$\Delta = 100 + 224 = 324$$

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + \sqrt{324}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 + 18}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - \sqrt{324}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 - 18}{2} = \frac{-28}{2} = -14$$

- Para $y_1 = 4$, encontre o x_1 substituindo o valor do y_1 :

$$x = -17 + 2y$$

$$x_1 = -17 + 2y_1$$

$$x_1 = -17 + 2 \cdot y_1$$

$$x_1 = -17 + 2 \cdot 4$$

$$x_1 = -17 + 8$$

$$x_1 = -9$$

- Para $y_2 = -14$, encontre o x_2 substituindo o valor do y_2 :

$$x = -17 + 2y$$

$$x_2 = -17 + 2y_2 = -17 + 2 \cdot y_2$$

$$x_2 = -17 + 2 \cdot (-14)$$

$$x_2 = -17 - 28$$

$$x_2 = -45$$

Assim:

$$(x_1, y_1) = (-9, 4) \text{ e } (x_2, y_2) = (-45, -14)$$

$$\text{i)} \begin{cases} x - 2y = 10 \\ x^2 - y^2 = -33 \end{cases}$$

Faça pelo método da substituição. Isole o x da primeira equação (é melhor isolar uma variável que não esteja acompanhada de uma multiplicação ou de um quadrado):

$$x = 10 + 2y$$

Substitua o “valor” do x (a expressão acima) na segunda equação:

$$x^2 - y^2 = -33$$

$$(10 + 2y)^2 - y^2 = -33$$

Lembre-se do produto notável: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 2y + (2y)^2 - y^2 = -33$$

$$100 + 40y + 2^2 \cdot y^2 - y^2 = -33$$

$$100 + 40y + 4 \cdot y^2 - y^2 = -33$$

$$100 + 40y + 4y^2 - y^2 = -33$$

$$100 + 40y + 3y^2 = -33$$

$$3y^2 + 40y + 100 = -33$$

$$3y^2 + 40y + 100 + 33 = 0$$

$$3y^2 + 40y + 133 = 0$$

Aplique Bhaskara:

$$a = 3 \quad ; \quad b = 40 \quad ; \quad c = 133$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (40)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 133$$

$$\Delta = 1600 - 12 \cdot 133$$

$$\Delta = 1600 - 1596$$

$$\Delta = 4$$

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-40 + \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{-40 + 2}{6} = \frac{-38}{6} = \frac{-38 : 2}{6 : 2} = \frac{-19}{3}$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-40 - \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{-40 - 2}{6} = \frac{-42}{6} = -7$$

- Para $y_1 = \frac{-19}{3}$, encontre o x_1 substituindo o valor do y_1 :

$$x = 10 + 2y$$

$$x_1 = 10 + 2 \cdot y_1$$

$$x_1 = 10 + 2 \cdot \frac{-19}{3}$$

$$x_1 = 10 + 2 \cdot \frac{-19}{3}$$

$$x_1 = 10 + \frac{2 \cdot -19}{3} = 10 + \left(-\frac{38}{3} \right) = 10 - \frac{38}{3} = \frac{10}{1} - \frac{38}{3}$$

É preciso que os denominadores sejam iguais para somar duas frações. Assim, transforme $\frac{10}{1}$ em uma fração com denominador 3 (você está apenas encontrando uma fração equivalente):

$$x_1 = \frac{10}{1} - \frac{38}{3} = \frac{10 \cdot 3}{1 \cdot 3} - \frac{38}{3} = \frac{30}{3} - \frac{38}{3} = \frac{30-38}{3} = \frac{-8}{3}$$

- Para $y_2 = -7$, encontre o x_2 substituindo o valor do y_2 :

$$x = 10 + 2y$$

$$x_2 = 10 + 2 \cdot y_2$$

$$x_2 = 10 + 2 \cdot -7 = 10 + (-14)$$

$$x_2 = 10 - 14 = -4$$

Assim:

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{-8}{3}, \frac{-19}{3} \right) \text{ e } (x_2, y_2) = (-4, -7)$$

$$j) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

Faça pelo método da soma:

$$x^2 + y^2 + x^2 - y^2 = 5 + 1$$

$$x^2 + x^2 + y^2 - y^2 = 6$$

$$2x^2 + 0 = 6$$

$$2x^2 = 6$$

$$x^2 = \frac{6}{2}$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Escolha qualquer uma das equações e substitua os valores de x encontrados para encontrar o valor de y:

- Para $x_1 = \sqrt{3}$

$$x^2 + y^2 = 5$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 5$$

$$(\sqrt{3})^2 + y_1^2 = 5$$

$$3 + y_1^2 = 5$$

$$y_1^2 = 5 - 3$$

$$y_1^2 = 2$$

$$y_1 = \pm\sqrt{2}$$

Ou seja, se $x = \sqrt{3}$, y pode ser $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$. Os pares ordenados são: $(\sqrt{3}, \sqrt{2}), (\sqrt{3}, -\sqrt{2})$

- Para $x_2 = -\sqrt{3}$

$$x^2 + y^2 = 5$$

$$x_2^2 + y_2^2 = 5$$

$$(-\sqrt{3})^2 + y_2^2 = 5$$

$$3 + y_2^2 = 5$$

$$y_2^2 = 5 - 3$$

$$y_2^2 = 2$$

$$y_2 = \pm\sqrt{2}$$

Ou seja, se $x = -\sqrt{3}$, y pode ser $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$. Os pares ordenados são: $(-\sqrt{3}, \sqrt{2}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{2})$.

Portanto:

$$(x_1, y_1) = (\sqrt{3}, \sqrt{2}) \text{ e } (x_2, y_2) = (\sqrt{3}, -\sqrt{2}) \text{ e } (x_3, y_3) = (-\sqrt{3}, \sqrt{2}) \text{ e } (x_4, y_4) = (-\sqrt{3}, -\sqrt{2})$$

$$k) \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Faça pelo método da substituição. Isole o x da segunda equação:

$$x \cdot y = 6$$

$$x = \frac{6}{y}$$

Substitua o “valor” do x (a expressão acima) na primeira equação:

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$\left(\frac{6}{y}\right)^2 + y^2 = 13$$

$$\frac{6^2}{y^2} + y^2 = 13$$

$$\frac{36}{y^2} + y^2 - 13 = 0$$

$$y^2 + \frac{36}{y^2} + -13 = 0$$

Multiplique toda equação por y^2 (para “sumir” com o denominador y^2):

$$y^2 \cdot y^2 + y^2 \cdot \frac{36}{y^2} + y^2 \cdot -13 = y^2 \cdot 0$$

$$y^4 + \frac{y^2 \cdot 36}{y^2} - 13y^2 = 0$$

$$y^4 + \frac{y^2}{y^2} \cdot 36 - 13y^2 = 0$$

$$y^4 + 1 \cdot 36 - 13y^2 = 0$$

$$y^4 + 36 - 13y^2 = 0$$

$$y^4 - 13y^2 + 36 = 0$$

Encontramos uma equação biquadrada, portanto devemos fazer uma troca de variáveis.

$$(y^2)^2 - 13y^2 + 36 = 0$$

$$y^2 = p$$

$$p^2 - 13p + 36 = 0$$

Aplique Bhaskara.

$$a = 1 \quad ; \quad b = -13 \quad ; \quad c = 36$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36$$

$$\Delta = 169 - 4 \cdot 36$$

$$\Delta = 169 - 144$$

$$\Delta = 25$$

$$p_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{13 + 5}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$p_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{13 - 5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Volte para variável y :

- Para $p = 9$

$$y^2 = p$$

$$y^2 = 9$$

$$y = \pm\sqrt{9}$$

$$y = \pm 3$$

Encontramos dois valores de y:

$$y_1 = 3$$

$$y_2 = -3$$

- Para $p = 4$

$$y^2 = p$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm\sqrt{4}$$

$$y = \pm 2$$

Encontramos MAIS dois valores de y:

$$y_3 = 2$$

$$y_4 = -2$$

Agora, escolha qualquer uma das equações do sistema e substitua os valores de y para encontrar os valores de x correspondentes:

- Para $y_1 = 3$

$$xy = 6$$

$$x_1 \cdot y_1 = 6$$

$$x_1 \cdot 3 = 6$$

$$x_1 = \frac{6}{3}$$

$$x_1 = 2$$

- Para $y_2 = -3$

$$xy = 6$$

$$x_2 \cdot y_2 = 6$$

$$x_2 \cdot -3 = 6$$

$$x_2 = \frac{6}{-3}$$

$$x_2 = -2$$

- Para $y_3 = 2$

$$xy = 6$$

$$x_3 \cdot y_3 = 6$$

$$x_3 \cdot 2 = 6$$

$$x_3 = \frac{6}{2}$$

$$x_3 = 3$$

- Para $y_4 = -2$

$$xy = 6$$

$$x_4 \cdot y_4 = 6$$

$$x_4 \cdot -2 = 6$$

$$x_4 = \frac{6}{-2}$$

$$x_4 = -3$$

$$(x_1, y_1) = (2, 3) \quad , \quad (x_2, y_2) = (-2, -3) \quad , \quad (x_3, y_3) = (3, 2) \quad \text{e} \quad (x_4, y_4) = (-3, -2)$$

Gabarito de Matemática

Etapa 9, Volume 4

Lição 49 – Inequações

1. O que enuncia a Lei da Tricotomia?

R: Definição → sejam dados dois números quaisquer, a e b . Eles podem ser comparados de três formas:

$$a > b \text{ (lê-se “} a \text{ maior que } b \text{”)}$$

$$a < b \text{ (lê-se “} a \text{ menor que } b \text{”)}$$

$$a = b \text{ (lê-se “} a \text{ igual a } b \text{”)}$$

2. Compare com os sinais de $=$, $>$ e $<$ os números a seguir:

a) $-3 > -5$

b) $\frac{3}{5} < \frac{7}{5}$

c) $-\frac{2}{7} > -\frac{3}{7}$

d) $0,75 = 0,75$

e) $2,98 > 2,957$

f) $0,71 < \frac{71}{99}$

g) $-0,833333 < 0,83411$

h) $1,25 > 1,2345672$

i) $-0,333... = -\frac{1}{3}$

3. Qual é a definição de inequações? Dê exemplos de inequações.

R: Inequações são as sentenças matemáticas que são expressas por uma desigualdade e que contêm incógnitas. Exemplos:

- $5 + x > 7$
- $3x > -2$
- $2x + 1 < 5x - 1$

4. Quais são os quatro sinais que indicam desigualdade? como cada um deles é lido?

R: $>$, $\geq$, $<$ e $\leq$.

- $a > b$ lê-se “a maior que b”
- $a \geq b$ lê-se “a maior que ou igual b”
- $a < b$ lê-se “a menor que b”
- $a \leq b$ lê-se “a menor que ou igual b”

5. Qual é a diferença entre conjunto-universo e conjunto-solução? Quais são os símbolos que utilizamos para representar cada um deles?

R: O conjunto-universo reúne todos os valores que aquela incógnita poderia assumir. Ele é representado pela letra U. O conjunto-solução reúne aqueles valores que de fato solucionam a inequação. Ele é representado pela letra S.

6. Verifique se os números abaixo fazem parte do conjunto-solução de $2x + 5 < 11$:

a) $x = 4$

Para saber se 4 faz parte do conjunto solução devemos substituir o “x” pelo “4”. Caso a desigualdade permaneça verdadeira, dizemos que 4 é uma solução para $2x + 5 > 11$.

$$2x + 5 < 11$$

$$2 \cdot x + 5 < 11$$

$$2 \cdot 4 + 5 < 11$$

$$8 + 5 < 11$$

$$8 + 5 < 11$$

$$13 < 11$$

13 não é menor que 11, isto é falso. 13 é MAIOR que 11.

Portanto, 4 NÃO faz parte do conjunto solução.

b) $x = 3$

Para saber se 3 faz parte do conjunto solução devemos substituir o “x” pelo “3”. Caso a desigualdade permaneça verdadeira, dizemos que 3 é uma solução para $2x + 5 > 11$.

$$2x + 5 < 11$$

$$2 \cdot x + 5 < 11$$

$$2 \cdot 3 + 5 < 11$$

$$6 + 5 < 11$$

$$11 < 11$$

11 não é menor que 11, isto é falso. 11 é igual a 11.

Portanto, 3 NÃO faz parte do conjunto solução.

c) $x = 2$

Para saber se 2 faz parte do conjunto solução devemos substituir o “x” pelo “2” . Caso a desigualdade permaneça verdadeira, dizemos que 2 é uma solução para $2x + 5 > 11$.

$$2x + 5 < 11$$

$$2 \cdot x + 5 < 11$$

$$2 \cdot 2 + 5 < 11$$

$$4 + 5 < 11$$

$$9 < 11$$

9 é menor que 11, isto é uma verdade.

Portanto, 2 faz parte do conjunto solução.

d) $x = 0$

Para saber se 0 faz parte do conjunto solução devemos substituir o “x” pelo “0” . Caso a desigualdade permaneça verdadeira, dizemos que 0 é uma solução para $2x + 5 > 11$.

$$2x + 5 < 11$$

$$2 \cdot x + 5 < 11$$

$$2 \cdot 0 + 5 < 11$$

$$0 + 5 < 11$$

$$5 < 11$$

5 é menor que 11, isto é uma verdade.

Portanto, 0 faz parte do conjunto solução.

7. Verifique se os números abaixo fazem parte do conjunto-solução de $3x + 5 > 2x - 3$:

a) $x = -10$

Para saber se -10 faz parte do conjunto solução devemos substituir o “x” pelo “-10” . Caso a desigualdade permaneça verdadeira, dizemos que -10 é uma solução para $3x + 5 > 2x - 3$

$$3x + 5 > 2x - 3$$

$$3 \cdot (-10) + 5 > 2 \cdot (-10) - 3$$

$$-30 + 5 > 2 \cdot (-10) - 3$$

$$-30 + 5 > -20 - 3$$

$$-25 > -20 - 3$$

$$-25 > -23$$

-25 não é maior que -23, isto é falso. -25 é MENOR que -23.

Portanto, -10 NÃO faz parte do conjunto solução.

b) $x = -8$

Para saber se -8 faz parte do conjunto solução devemos substituir o “x” pelo “ -8 ”. Caso a desigualdade permaneça verdadeira, dizemos que -8 é uma solução para $3x + 5 > 2x - 3$

$$3x + 5 > 2x - 3$$

$$3 \cdot (-8) + 5 > 2 \cdot (-8) - 3$$

$$-24 + 5 > 2 \cdot (-8) - 3$$

$$-24 + 5 > -16 - 3$$

$$-24 + 5 > -16 - 3$$

$$-19 > -19$$

-19 não é menor que -19 , isto é falso. -19 é igual a -19 .

Portanto, -8 NÃO faz parte do conjunto solução.

$$c) x = -7$$

Para saber se -7 faz parte do conjunto solução devemos substituir o “x” pelo “ -7 ”. Caso a desigualdade permaneça verdadeira, dizemos que -7 é uma solução para $3x + 5 > 2x - 3$

$$3x + 5 > 2x - 3$$

$$3 \cdot x + 5 > 2 \cdot x - 3$$

$$3 \cdot (-7) + 5 > 2 \cdot (-7) - 3$$

$$-21 + 5 > 2 \cdot (-7) - 3$$

$$-21 + 5 > -14 - 3$$

$$-16 > -14 - 3$$

$$-16 > -17$$

De fato, -16 é MAIOR que -17 . Isso é verdadeiro.

Portanto, -7 faz parte do conjunto solução.

$$d) x = 0$$

Para saber se 0 faz parte do conjunto solução devemos substituir o “x” pelo “ 0 ”. Caso a desigualdade permaneça verdadeira, dizemos que 0 é uma solução para $3x + 5 > 2x - 3$

$$3x + 5 > 2x - 3$$

$$3 \cdot x + 5 > 2 \cdot x - 3$$

$$3 \cdot 0 + 5 > 2 \cdot 0 - 3$$

$$0 + 5 > 2 \cdot 0 - 3$$

$$0 + 5 > 0 - 3$$

$$5 > 0 - 3$$

$$5 > -3$$

De fato, 5 é MAIOR que -3 . Isso é verdadeiro.

Portanto, o faz parte do conjunto solução.

Lição 50 – Resolvendo inequações

1. Resolva as inequações e escreva a resposta utilizando a notação matemática:

a) $x + 7 > 7$

$$x > 7 - 7$$

$$x > 0$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

b) $2x - 4 < 2$

$$2x < 2 + 4$$

$$2x < 6$$

$$x < \frac{6}{2}$$

$$x < 3$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$$

c) $x - \frac{3}{2} \leq 1$

$$x \leq 1 + \frac{3}{2}$$

Transforme o 1 em uma fração com denominador “2” para poder somar com $\frac{3}{2}$.

$$x \leq \frac{1}{1} + \frac{3}{2}$$

$$x \leq \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{3}{2}$$

$$x \leq \frac{2}{2} + \frac{3}{2}$$

$$x \leq \frac{2+3}{2}$$

$$x \leq \frac{5}{2}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{5}{2}\right\}$$

d) $10x < 50$

$$x < \frac{50}{10}$$

$$x < 5$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$$

$$e) 3x + 1 > 19$$

$$3x > 19 - 1$$

$$3x > 18$$

$$x > \frac{18}{3}$$

$$x > 6$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$$

$$f) -7 \leq x + \frac{3}{5}$$

$$-7 - \frac{3}{5} \leq x$$

Transforme o -7 em uma fração com denominador “5” para poder subtrair o $\frac{3}{5}$.

$$-\frac{7}{1} - \frac{3}{5} \leq x$$

$$-\frac{7 \cdot 5}{1 \cdot 5} - \frac{3}{5} \leq x$$

$$-\frac{35}{5} - \frac{3}{5} \leq x$$

$$\frac{-35-3}{5} \leq x$$

$$\frac{-38}{5} \leq x$$

Se $\frac{-38}{5}$ é menor que x , x é maior que $\frac{-38}{5}$, ou seja: $x \geq \frac{-38}{5}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{38}{5}\right\}$$

$$g) -29 \leq -5x$$

$$-29 \leq -5x$$

Atenção. O “ x ” está negativo. Multiplique toda a inequação por -1 para que o “ x ” fique positivo. Lembre-se que ao multiplicar por -1 , o sinal se inverte (de maior passa para menor e vice-versa).

$$-29 \leq -5x \cdot (-1)$$

$$29 \geq 5x$$

$$\frac{29}{5} \geq x$$

Se $\frac{29}{5}$ é maior que x , x é menor que $\frac{29}{5}$, ou seja: $x \leq \frac{29}{5}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{29}{5} \right\}$$

$$h) 2x + 2 \leq x - 1$$

$$2x + 2 - x \leq -1$$

$$2x - x + 2 \leq -1$$

$$x + 2 \leq -1$$

$$x \leq -1 - 2$$

$$x \leq -3$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \}$$

$$i) 3x + 12 > 2x - 4$$

$$3x + 12 - 2x > -4$$

$$3x - 2x + 12 > -4$$

$$x + 12 > -4$$

$$x > -4 - 12$$

$$x > -16$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > -16 \}$$

$$j) 2 - 2x \geq 3 - 3x$$

$$2 - 2x + 3x \geq 3$$

$$2 + x \geq 3$$

$$x \geq 3 - 2$$

$$x \geq 1$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \}$$

$$k) 5(3 - x) - 3(7 - x) \geq 4 - (x - 13)$$

Faça as distributivas.

$$5 \cdot 3 + 5 \cdot (-x) - 3 \cdot (7 - x) \geq 4 - (x - 13)$$

$$15 - 5x - 3 \cdot (7 - x) \geq 4 - (x - 13)$$

$$15 - 5x - 3 \cdot 7 - 3 \cdot (-x) \geq 4 - (x - 13)$$

$$15 - 5x - 21 + 3x \geq 4 - (x - 13)$$

$$15 - 5x - 21 + 3x \geq 4 - x - (-13)$$

$$15 - 5x - 21 + 3x \geq 4 - x + 13$$

$$-5x + 3x + 15 - 21 \geq 4 - x + 13$$

$$-2x - 6 \geq 4 - x + 13$$

$$-2x - 6 \geq 4 + 13 - x$$

$$-2x - 6 \geq 17 - x$$

$$-2x + x \geq 17 + 6$$

$$-x \geq 23$$

Atenção. O “x” está negativo. Multiplique toda a inequação por -1 para que o “x” fique positivo. Lembre-se que ao multiplicar por -1 , o sinal se inverte (de maior passa para menor e vice-versa).

$$-x \geq 23 \cdot (-1)$$

$$x \leq -23$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -23\}$$

$$l) 4(x + 2) > 2(x - 1) + 3(x + 1)$$

Faça as distributivas.

$$4 \cdot x + 4 \cdot 2 > 2(x - 1) + 3(x + 1)$$

$$4x + 8 > 2(x - 1) + 3(x + 1)$$

$$4x + 8 > 2 \cdot x + 2 \cdot (-1) + 3(x + 1)$$

$$4x + 8 > 2x - 2 + 3(x + 1)$$

$$4x + 8 > 2x - 2 + 3 \cdot x + 3 \cdot 1$$

$$4x + 8 > 2x - 2 + 3x + 3$$

$$4x + 8 > 2x + 3x - 2 + 3$$

$$4x + 8 > 5x - 2 + 3$$

$$4x + 8 > 5x + 1$$

$$4x + 8 - 5x > 1$$

$$4x - 5x > 1 - 8$$

$$-x > 1 - 8$$

$$-x > -7$$

Atenção. O “x” está negativo. Multiplique toda a inequação por -1 para que o “x” fique positivo. Lembre-se que ao multiplicar por -1 , o sinal se inverte (de maior passa para menor e vice-versa).

$$-x > -7 \cdot (-1)$$

$$x < 7$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\}$$

$$m) 5(1 - x) - 3(4 - 2x) \leq 7 - x$$

Faça as distributivas.

$$5 \cdot 1 + 5 \cdot (-x) - 3(4 - 2x) \leq 7 - x$$

$$5 - 5x - 3(4 - 2x) \leq 7 - x$$

$$5 - 5x - 3 \cdot 4 - 3 \cdot (-2x) \leq 7 - x$$

$$5 - 5x - 12 + 6x \leq 7 - x$$

$$-5x + 6x + 5 - 12 \leq 7 - x$$

$$x - 7 \leq 7 - x$$

$$x \leq 7 - x + 7$$

$$x \leq 7 + 7 - x$$

$$x \leq 14 - x$$

$$x + x \leq 14$$

$$2x \leq 14$$

$$x \leq \frac{14}{2}$$

$$x \leq 7$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 7\}$$

$$n) 7 < \frac{x}{5} + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{79}{20}$$

Elimine todos os denominadores multiplicando toda a inequação por 20.

$$20 \cdot 7 < 20 \cdot \left(\frac{x}{5} + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{79}{20} \right)$$

$$140 < 20 \cdot \left(\frac{x}{5} + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{79}{20} \right)$$

$$140 < 20 \cdot \frac{x}{5} + 20 \cdot \frac{x}{2} + 20 \cdot \frac{x}{4} - 20 \cdot \frac{79}{20}$$

$$140 < \frac{20}{5} \cdot x + \frac{20}{2} \cdot x + \frac{20}{4} \cdot x - \frac{20}{20} \cdot 79$$

$$140 < 4 \cdot x + 10 \cdot x + 5 \cdot x - 1 \cdot 79$$

$$140 < 4x + 10x + 5x - 79$$

$$140 + 79 < 4x + 10x + 5x$$

$$219 < 14x + 5x$$

$$219 < 19x$$

$$\frac{219}{19} < x$$

Se $\frac{219}{19}$ é menor que x , x é maior que $\frac{219}{19}$, ou seja: $x > \frac{219}{19}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{219}{19} \right\}$$

2. Qual é o maior valor inteiro para x na inequação $\frac{2x-1}{5} \leq 2$?

R: Primeiro, resolva a inequação. Passe o 5 multiplicando:

$$2x - 1 \leq 2 \cdot 5$$

$$2x - 1 \leq 10$$

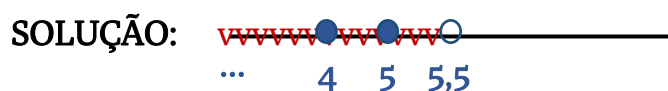
$$2x \leq 10 + 1$$

$$2x \leq 11$$

$$x \leq \frac{11}{2}$$

O conjunto solução da inequação é $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{11}{2} \right\}$. Ou seja, todos os números menores que $\frac{11}{2}$.

$\frac{11}{2}$ não é um número inteiro $\left(\frac{11}{2} = 5,5 \right)$:



O número inteiro que vem imediatamente antes é 5.

Portanto, o maior valor inteiro que x pode assumir nesta inequação é 5.

3. Quantas soluções inteiras e positivas tem a inequação $2x + 7 \leq x + 12$?

R: Primeiro, resolva a inequação.

$$2x \leq x + 12 - 7$$

$$2x \leq x + 5$$

$$2x - x \leq 5$$

$$x \leq 5$$

O conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$.



Os números inteiros e positivos que estão nesse conjunto solução são 5, 4, 3, 2, 1 e 0. Portanto, há 6 soluções inteiras e positivas para esta inequação.

4. Quantas soluções pares e positivas tem a inequação $\frac{1-3x}{2} - x > \frac{x+1}{3} - 10$?

R: Primeiro, resolva a inequação. Para eliminar todos os denominadores, multiplique toda a inequação por 6.

$$6 \cdot \left(\frac{1-3x}{2} - x \right) > 6 \cdot \left(\frac{x+1}{3} - 10 \right)$$

$$6 \cdot \frac{1-3x}{2} - 6 \cdot x > 6 \cdot \frac{x+1}{3} + 6 \cdot (-10)$$

$$\frac{6}{2} \cdot (1-3x) - 6x > \frac{6}{3} \cdot (x+1) - 60$$

$$3 \cdot (1-3x) - 6x > \frac{6}{3} \cdot (x+1) - 60$$

$$3 \cdot (1-3x) - 6x > 2 \cdot (x+1) - 60$$

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot (-3x) - 6x > 2 \cdot (x+1) - 60$$

$$3 - 9x - 6x > 2 \cdot (x+1) - 60$$

$$3 - 9x - 6x > 2 \cdot x + 2 \cdot 1 - 60$$

$$3 - 9x - 6x > 2x + 2 - 60$$

$$3 - 15x > 2x + 2 - 60$$

$$3 - 15x > 2x - 58$$

$$-15x > 2x - 58 - 3$$

$$-15x > 2x - 61$$

$$-15x - 2x > -61$$

$$-17x > -61$$

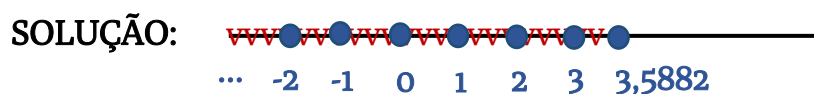
Atenção. O “x” está negativo. Multiplique toda a inequação por -1 para que o “x” fique positivo. Lembre-se que ao multiplicar por -1 , o sinal se inverte (de maior passa para menor e vice-versa).

$$-17x > -61 \cdot (-1)$$

$$17x < 61$$

$$x < \frac{61}{17}$$

O conjunto solução da inequação é $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{61}{17} \right\}$. $\frac{61}{17} = 3,5882$.



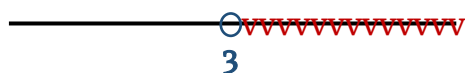
O único par positivo que está nesse conjunto solução ($x < 3,5882$) é o 2.

Note que o “0” é par, mas não podemos dizer que o zero é positivo ou negativo. Ele não tem sinal.

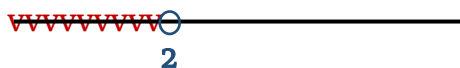
Portanto, só há uma solução par e positiva para esta inequação (o 2).

5. Represente na reta (na forma geométrica) os seguintes conjuntos:

a) $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \}$



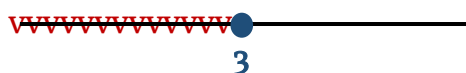
b) $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \}$



c) $C = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \}$



d) $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3 \}$



6. Qual é a diferença entre um círculo e uma circunferência?

R: Geometricamente a diferença entre um círculo e uma circunferência é que a circunferência é vazada, ao passo que um círculo é preenchido.

Lição 51 – Sistema de inequações

1. Responda:

a) Qual é a interseção entre o Conjunto dos Naturais e o Conjunto dos Inteiros?

R: Os Naturais são todos os números positivos (0, 1, 2, 3...). Os Inteiros são os números negativos e positivos (...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...). Portanto, os números que estão ao mesmo tempo nos Naturais e nos Inteiros são os números positivos (os próprios Naturais). Logo, $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}$.

b) Qual é a intersecção entre o Conjunto dos Racionais e o Conjunto dos Irracionais?

R: O conjunto dos Racionais é definido pela divisão de dois inteiros, ou seja, engloba todos os números que PODEM ser escritos na forma de fração. Já o conjunto dos Irracionais engloba os números que NÃO PODEM ser escritos na forma de fração. Ou seja, não há números em comum entre esses dois conjuntos. Portanto, a intersecção é vazia, ou seja, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \{ \}$.

c) Qual é a intersecção entre o Conjunto dos Naturais, Inteiros e Racionais?

R: Os únicos números que os três tem em comum são os números positivos inteiros (sem vírgula), ou seja, os próprios Naturais. Ou seja, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}$.

2. Encontre $A \cap B$ dos itens abaixo:

a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{1, 2, 3, 5, 8, 11\}$

R: Queremos os números que estão nos dois conjuntos ao mesmo tempo. Portanto, $A \cap B = \{1, 3, 5\}$.

b) $A = \{\mathbb{Z} - \mathbb{N}\}$ e $B = \{\mathbb{Q}\}$

R: Em primeiro lugar, precisamos definir quem é o conjunto $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$. Estamos retirando os Naturais, ou seja, os números positivos inteiros (1, 2, 3, 4, 5...). Resta-nos, então, apenas os negativos. Logo, $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots - 3, -2, -1, 0\}$, ou seja, representa os números negativos inteiros (sem vírgula).

Portanto, os números que este conjunto $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ tem em comum com os racionais são os próprios inteiros negativos ($\mathbb{Z}_-$), ou seja, $A \cap B = \{-4, -3, -2, \dots\} = \mathbb{Z}_-$.

3. Resolva os sistemas de inequações a seguir:

a)
$$\begin{cases} 2x + 12 \leq x - 4 \\ 3x - 2 \leq 2x \end{cases}$$

Resolva cada inequação separadamente.

$$2x + 12 \leq x - 4$$

$$2x \leq x - 4 - 12$$

$$2x - x \leq -16$$

$$x \leq -16$$

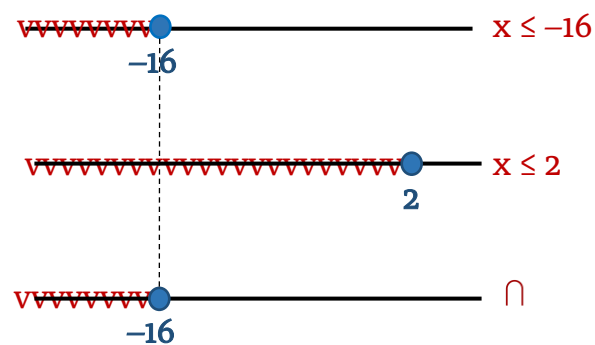
$$3x - 2 \leq 2x$$

$$3x \leq 2x + 2$$

$$3x - 2x \leq 2$$

$$x \leq 2$$

Represente os resultados na notação geométrica e faça a intersecção entre eles.



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -16\}$.

$$b) \begin{cases} 0 < 4x - 20 \\ 3 > 6x - 33 \end{cases}$$

Resolva cada inequação separadamente.

$$0 < 4x - 20$$

$$3 > 6x - 33$$

$$-4x < -20$$

$$3 - 6x > -33$$

$$-4x < -20 \cdot (-1)$$

$$-6x > -33 - 3$$

$$4x > 20$$

$$-6x > -36$$

$$x > \frac{20}{4}$$

$$-6x > -36 \cdot (-1)$$

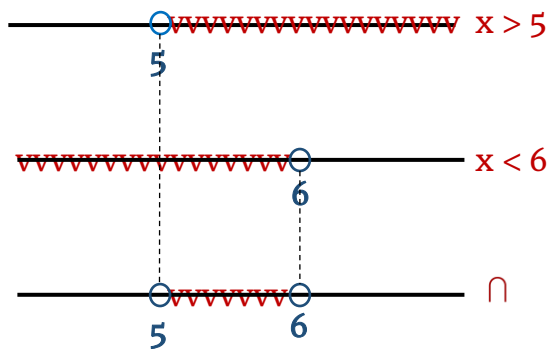
$$x > 5$$

$$6x < 36$$

$$x < \frac{36}{6}$$

$$x < 6$$

Represente os resultados na notação geométrica e faça a intersecção entre eles.



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 6\}$

$$c) \begin{cases} \frac{x-1}{2} > \frac{3x-5}{4} \\ x \geq 2x-5 \end{cases}$$

Resolva cada inequação separadamente.

Comece multiplicando por 4 para “sumir” com os denominadores (na primeira inequação):

$$4 \cdot \frac{x-1}{2} > 4 \cdot \frac{3x-5}{4}$$

$$\frac{4}{2} \cdot x - 1 > \frac{4}{4} \cdot 3x - 5$$

$$2 \cdot (x-1) > 1 \cdot (3x-5)$$

$$2 \cdot x - 2 \cdot 1 > 1 \cdot 3x - 1 \cdot 5$$

$$2x - 2 > 3x - 5$$

$$2x > 3x - 5 + 2$$

$$2x > 3x - 3$$

$$2x - 3x > -3$$

$$-x > -3$$

$$-x > -3 \cdot (-1)$$

$$x < 3$$

$$x \geq 2x - 5$$

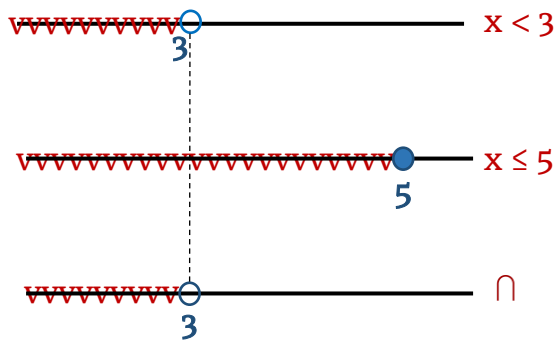
$$x - 2x \geq -5$$

$$-x \geq -5$$

$$-x \geq -5 \cdot (-1)$$

$$x \leq 5$$

Represente os resultados na notação geométrica e faça a intersecção entre eles.



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$.

$$d) \begin{cases} 5x \geq 0 \\ 6x + 21 \geq 9x + 12 \\ \frac{x}{3} > \frac{2}{3} \end{cases}$$

Resolva cada inequação separadamente.

$$5x \geq 0$$

$$x \geq \frac{0}{5}$$

$$x \geq 0$$

$$6x + 21 \geq 9x + 12$$

$$6x \geq 9x + 12 - 21$$

$$6x - 9x \geq -9$$

$$-3x \geq -9$$

$$-3x \geq -9 \cdot (-1)$$

$$3x \leq 9$$

$$x \leq \frac{9}{3}$$

$$x \leq 3$$

$$\frac{x}{3} > \frac{2}{3}$$

Multiplique em cruz.

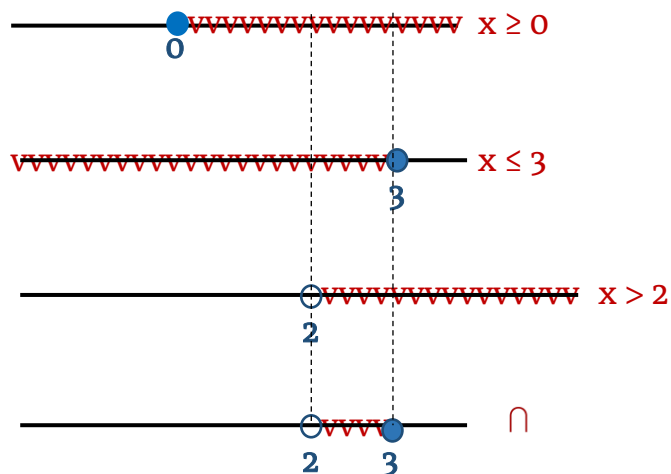
$$x \cdot 3 > 2 \cdot 3$$

$$3x > 6$$

$$x > \frac{6}{3}$$

$$x > 2$$

Represente os resultados na notação geométrica e faça a intersecção entre eles.



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3\}$

4. Qual é o menor número natural tal que seu dobro seja menor que seu quádruplo menos 17?

R: Queremos que o dobro do número seja menor que seu quádruplo menos 17, ou seja:

$$2x < 4x - 17$$

$$2x - 4x < -17$$

$$-2x < -17$$

Multiplique por -1 (lembre-se que o sinal é alterado)

$$-2x \cdot (-1) < -17 \cdot (-1)$$

$$2x > 17$$

$$x > \frac{17}{2}$$

$$x > 8,5$$

Ou seja, todos os números maiores que 8,5 satisfazem a condição. Lembre-se que os naturais são números inteiros (sem vírgula).

Queremos o menor natural possível, portanto precisamos pegar o natural mais próximo, o 9 (o menor natural maior que 8).

Portanto, o menor número natural é 9.

5. Qual é o maior inteiro que satisfaz a inequação $\frac{x}{3} + \frac{5}{6} < 2$?

R: Resolva a inequação. Comece multiplicando a equação inteira por 6, para “sumir” com os denominadores.

$$6 \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{5}{6} \right) < 6 \cdot 2$$

$$6 \cdot \frac{x}{3} + 6 \cdot \frac{5}{6} < 12$$

$$\frac{6}{3} \cdot x + \frac{6}{6} \cdot 5 < 12$$

$$2 \cdot x + 1 \cdot 5 < 12$$

$$2x + 5 < 12$$

$$2x < 12 - 5$$

$$2x < 7$$

$$x < \frac{7}{2}$$

Portanto, que o x deve ser menor que $\frac{7}{2}$. Ou seja, x deve ser menor que 3,5 $\left(\frac{7}{2} = 3,5 \right)$.

O maior inteiro possível é o mais próximo de 3,5, isto é, o 3 (*precisa ser o maior número que seja menor que 3,5*).

Portanto, o maior inteiro que satisfaz a inequação é o número 3.

6. Resolva: $x(\sqrt{9}-1) < 2^{-1}$.

Comece pela raiz e pela potência.

$$x(3-1) < 2^{-1}$$

$$x(3-1) < \frac{1}{2}$$

$$x \cdot (2) < \frac{1}{2}$$

$$2x < \frac{1}{2}$$

$$x < \frac{\left(\frac{1}{2} \right)}{2}$$

$$x < \frac{\left(\frac{1}{2} \right)}{\frac{2}{1}}$$

$$x < \frac{1}{2} : \frac{2}{1}$$

$$x < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$x < \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2}$$

$$x < \frac{1}{4}$$

$$\text{Portanto, } S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{4} \right\}$$

7. Quantos são os números inteiros e negativos que satisfazem a seguinte inequação:

$$6 \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} \right) \leq \frac{3x+9}{4}$$

Comece fazendo a distributiva.

$$6 \cdot \frac{x}{3} - 6 \cdot \frac{x+1}{2} \leq \frac{3x+9}{4}$$

$$\frac{6}{3} \cdot x - \frac{6}{2} \cdot x + 1 \leq \frac{3x+9}{4}$$

$$2 \cdot (x) - 3 \cdot (x+1) \leq \frac{3x+9}{4}$$

$$2x - 3 \cdot x - 3 \cdot 1 \leq \frac{3x+9}{4}$$

$$2x - 3x - 3 \leq \frac{3x+9}{4}$$

$$-x - 3 \leq \frac{3x+9}{4}$$

Multiplique a inequação inteira por 4 para “sumir” com o denominador.

$$4 \cdot (-x - 3) \leq 4 \cdot \frac{3x+9}{4}$$

$$4 \cdot (-x) + 4 \cdot (-3) \leq \frac{4}{4} \cdot (3x+9)$$

$$-4x - 12 \leq \frac{4}{4} \cdot (3x+9)$$

$$-4x - 12 \leq 1 \cdot (3x+9)$$

$$-4x - 12 \leq 3x + 9$$

$$-4x \leq 3x + 9 + 12$$

$$-4x \leq 3x + 21$$

$$-4x - 3x \leq 21$$

$$-7x \leq 21$$

Atenção. O “x” está negativo. Multiplique por -1 .

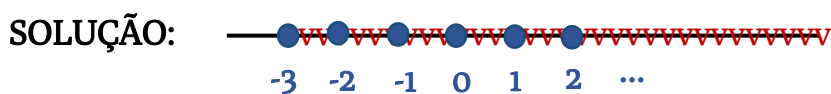
$$-7x \leq 21 \cdot (-1)$$

$$7x \geq -21$$

$$x \geq \frac{-21}{7}$$

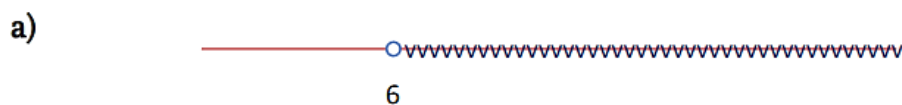
$$x \geq -3$$

Portanto, a solução é:



O x deve ser maior ou igual a -3 . Assim, os únicos inteiros negativos que estão no conjunto solução são: -3 , -2 e -1 .

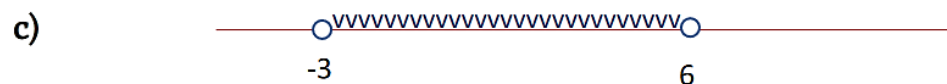
8. Descreva, utilizando a notação matemática, o conjunto-solução apresentado em cada item:



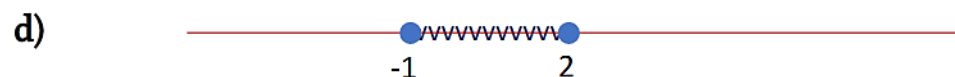
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$$



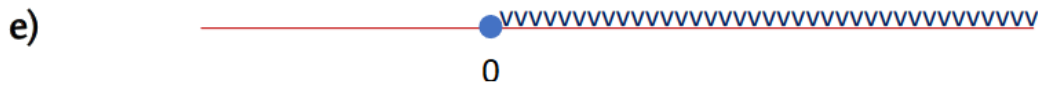
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$$



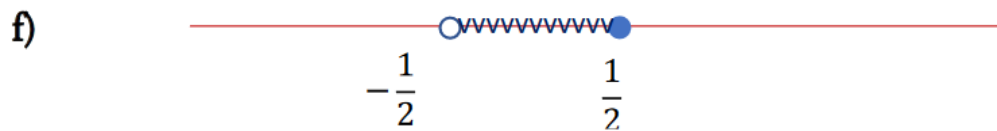
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 6\}$$



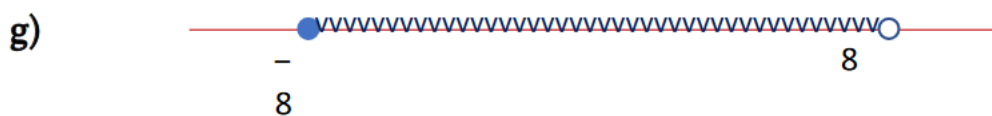
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$$



$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$$



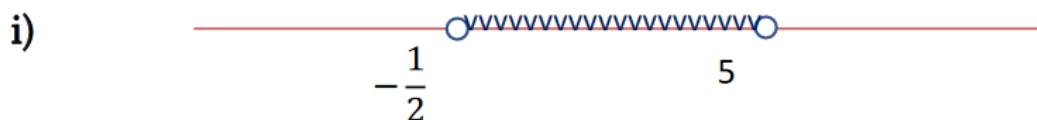
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} \right\}$$



$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x < 8 \}$$



$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \}$$



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < 5 \right\}$$

Lição 52 – Inequações simultâneas e problemas com inequações

1. Resolva as inequações simultâneas:

a) $2x - 7 < x + 1 < 1 - 2x$

R: Monte o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 7 < x + 1 \\ x + 1 < 1 - 2x \end{cases}$$

Resolva cada inequação separadamente:

$$2x - 7 < x + 1$$

$$x + 1 < 1 - 2x$$

$$2x < x + 1 + 7$$

$$x + 1 + 2x < 1$$

$$2x < x + 8$$

$$x + 2x + 1 < 1$$

$$2x - x < 8$$

$$3x + 1 < 1$$

$$x < 8$$

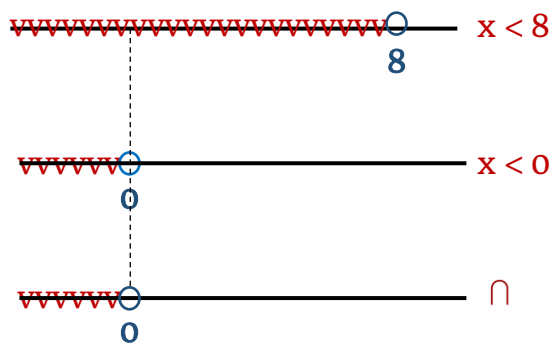
$$3x < 1 - 1$$

$$3x < 0$$

$$x < \frac{0}{3}$$

$$x < 0$$

Represente os resultados na notação geométrica e encontre a intersecção entre eles.



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

b) $2x + 3 > x + 1 > 5 - x$

R: Monte o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3 > x + 1 \\ x + 1 > 5 - x \end{cases}$$

Resolva cada inequação separadamente:

$$2x + 3 > x + 1$$

$$x + 1 > 5 - x$$

$$2x > x + 1 - 3$$

$$x + 1 + x > 5$$

$$2x > x - 2$$

$$x + x + 1 > 5$$

$$2x - x > -2$$

$$2x > 5 - 1$$

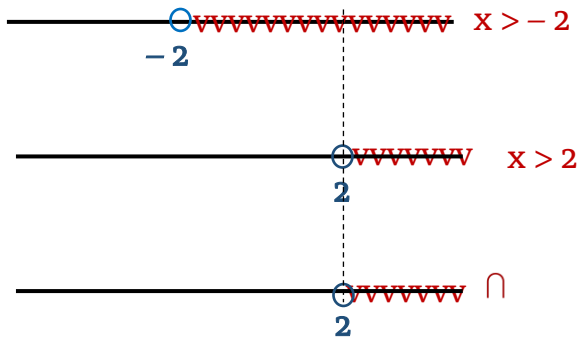
$$x > -2$$

$$2x > 4$$

$$x > \frac{4}{2}$$

$$x > 2$$

Represente os resultados na notação geométrica e encontre a intersecção entre eles:



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

c) $1 - 2x \geq 2(x + 1) \geq 5x$

R: Monte o sistema:

$$\begin{cases} 1 - 2x \geq 2(x + 1) \\ 2(x + 1) \geq 5x \end{cases}$$

Resolva cada inequação separadamente.

$$1 - 2x \geq 2(x + 1)$$

$$2(x + 1) \geq 5x$$

$$1 - 2x \geq 2 \cdot x + 2 \cdot 1$$

$$2 \cdot x + 2 \cdot 1 \geq 5x$$

$$1 - 2x \geq 2x + 2$$

$$2x + 2 \geq 5x$$

$$1 - 2x - 2x \geq 2$$

$$2x \geq 5x - 2$$

$$1 - 4x \geq 2$$

$$2x - 5x \geq -2$$

$$-4x \geq 2 - 1$$

$$-3x \geq -2$$

$$-4x \geq 1 \cdot (-1)$$

$$-3x \geq -2 \cdot (-1)$$

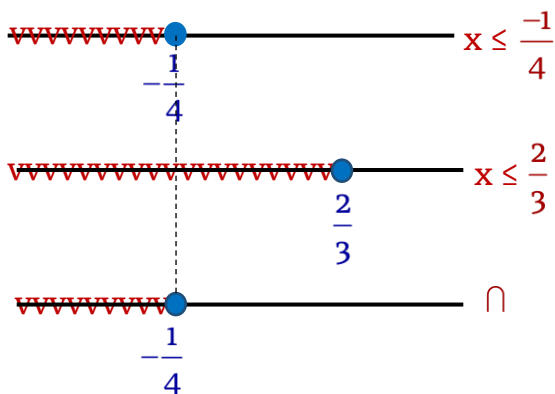
$$4x \leq -1$$

$$3x \leq 2$$

$$x \leq \frac{-1}{4}$$

$$x \leq \frac{2}{3}$$

Represente os resultados na notação geométrica e encontre a intersecção entre eles:



Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{4}\right\}$

$$d) 2(1 - x) < 3(1 + x) \leq -(x + 2)$$

R: Monte o sistema:

$$\begin{cases} 2 \cdot (1 - x) < 3(1 + x) \\ 3(1 + x) \leq -(x + 2) \end{cases}$$

Resolva cada inequação separadamente.

$$2(1 - x) < 3(1 + x)$$

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot (-x) < 3 \cdot 1 + 3 \cdot x$$

$$2 - 2x < 3 + 3x$$

$$2 - 2x - 3x < 3$$

$$2 - 5x < 3$$

$$-5x < 3 - 2$$

$$-5x < 1$$

$$-5x < 1 \quad (-1)$$

$$5x > -1$$

$$x > -\frac{1}{5}$$

$$x > -0,2$$

$$3(1 + x) \leq -(x + 2)$$

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot x \leq -x - 2$$

$$3 + 3x \leq -x - 2$$

$$3 + 3x + x \leq -2$$

$$3 + 4x \leq -2$$

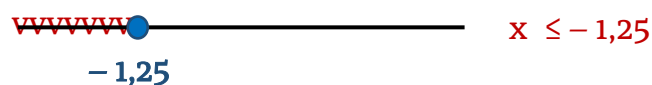
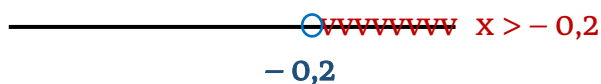
$$4x \leq -2 - 3$$

$$4x \leq -5$$

$$x \leq -\frac{5}{4}$$

$$x \leq -1,25$$

Represente os resultados na notação geométrica e encontre a intersecção entre eles:



_____ $\cap$

Não há intersecção, portanto, não há solução. $S = \{ \}$

2. Quantos números inteiros satisfazem a inequação simultânea $4x - 6 \leq 2x \leq 2 + 6x$?

R: Primeiro, monte o sistema para resolver a inequação simultânea:

$$\begin{cases} 4x - 6 \leq 2x \\ 2x \leq 2 + 6x \end{cases}$$

Resolva cada inequação separadamente.

$$4x - 6 \leq 2x$$

$$4x \leq 2x + 6$$

$$4x - 2x \leq 6$$

$$2x \leq 6$$

$$x \leq \frac{6}{2}$$

$$x \leq 3$$

$$2x \leq 2 + 6x$$

$$2x - 6x \leq 2$$

$$-4x \leq 2$$

$$-4x \leq 2 \cdot (-1)$$

$$4x \geq -2$$

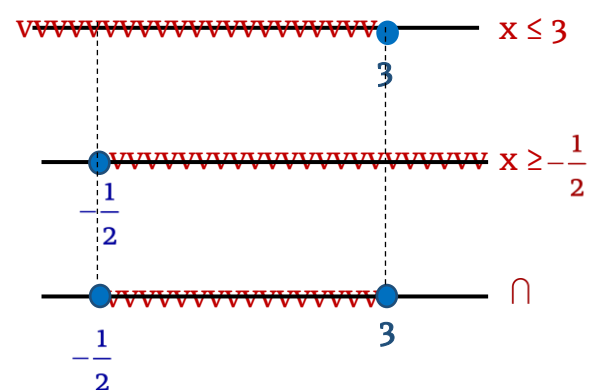
$$x \geq -\frac{2}{4}$$

Simplifique a fração.

$$-\frac{2}{4} = \frac{-2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{-1}{2}$$

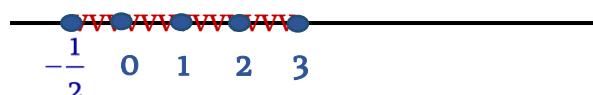
Portanto, a solução da 2ª inequação é $x \geq -\frac{1}{2}$.

Represente os resultados na notação geométrica e encontre a intersecção entre eles:



Portanto, a solução da inequação simultânea é $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 3 \right\}$.

SOLUÇÃO:



Os números inteiros que estão nesse intervalo são 0, 1, 2 e 3. Portanto, apenas 4 números inteiros satisfazem essa inequação simultânea.

3. Quantos números inteiros satisfazem a inequação simultânea $3x - 2 \leq 2(x + 3) < 3(4x - 1)$?

R: Primeiro, monte o sistema para resolver a inequação simultânea:

$$\begin{cases} 3x - 2 \leq 2(x + 3) \\ 2(x + 3) < 3(4x - 1) \end{cases}$$

Resolva cada inequação separadamente.

$$3x - 2 \leq 2(x + 3)$$

$$3x - 2 \leq 2 \cdot x + 2 \cdot 3$$

$$3x - 2 \leq 2x + 6$$

$$3x \leq 2x + 6 + 2$$

$$3x \leq 2x + 8$$

$$3x - 2x \leq 8$$

$$x \leq 8$$

$$2(x + 3) < 3(4x - 1)$$

$$2 \cdot x + 2 \cdot 3 < 3 \cdot 4x + 3 \cdot (-1)$$

$$2x + 6 < 12x - 3$$

$$2x < 12x - 3 - 6$$

$$2x - 12x < -9$$

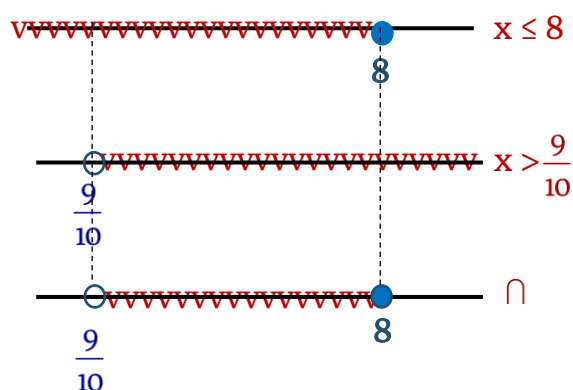
$$-10x < -9$$

$$-10x < -9 \cdot (-1)$$

$$10x > 9$$

$$x > \frac{9}{10}$$

Represente os resultados na notação geométrica e encontre a intersecção entre eles:



Portanto, a solução da inequação simultânea é $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{9}{10} < x \leq 8 \right\}$.

Note que $\frac{9}{10} = 0,9$.



Logo, os números inteiros que estão nesse intervalo são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. Portanto, apenas 8 números inteiros satisfazem essa inequação simultânea.

4. Quantos valores naturais são solução para a inequação: $2 < 4x - 5 \leq 25$?

R: Primeiro, monte o sistema para resolver a inequação simultânea:

$$\begin{cases} 2 < 4x - 5 \\ 4x - 5 \leq 25 \end{cases}$$

Resolva cada inequação separadamente.

$$2 < 4x - 5$$

$$2 - 4x < -5$$

$$-4x < -5 - 2$$

$$-4x < -7$$

$$-4x < -7 \cdot (-1)$$

$$4x > 7$$

$$x > \frac{7}{4}$$

$$4x - 5 \leq 25$$

$$4x \leq 25 + 5$$

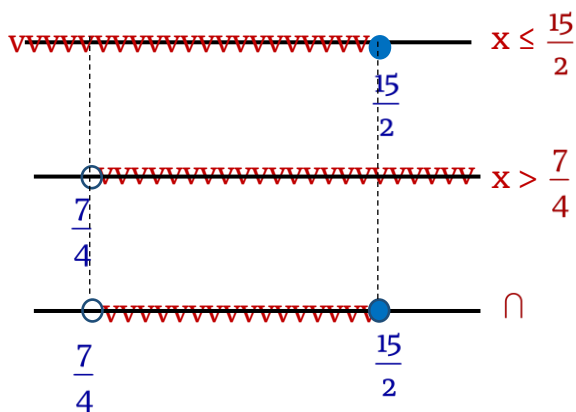
$$4x \leq 30$$

$$x \leq \frac{30}{4}$$

$$\text{Simplifique a fração} \rightarrow \frac{30}{4} = \frac{30:2}{4:2} = \frac{15}{2}$$

Portanto, a solução da 2ª inequação é $x \leq \frac{15}{2}$.

Represente os resultados na notação geométrica e encontre a intersecção entre eles:



Portanto, a solução da inequação simultânea é $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{7}{4} < x \leq \frac{15}{2} \right\}$ ou, trocando as frações por seus valores decimais, $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid 1,75 < x \leq 7,5 \}$.

Note que $\frac{7}{4} = 7 : 4 = 1,75$ e que $\frac{15}{2} = 15 : 2 = 7,5$.



Os números NATURAIS (sem vírgula, positivos) que estão nesse intervalo (entre 1,75 e 7,5) são 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Portanto, apenas 6 números naturais satisfazem essa inequação simultânea.

5. Paulo vende dois tipos de dezenas do rosário: de madeira a R\$ 3,00 cada uma e de metal a R\$ 4,00. Se em um dia ele vendeu 11 dezenas de madeira, qual deve ser a menor quantidade de dezenas de metal que ele tem de vender para que seu faturamento seja pelo menos R\$ 100,00?

R: Se Paulo vendeu 11 dezenas de madeira a R\$ 3,00 cada uma, ele já faturou R\$ 33,00 (3 x 11).

- Chame a quantidade de dezenas de metal que ele deve vender de “x”.
- O quanto ele faturará com as dezenas de metal, que custam R\$ 4,00 cada uma, será 4x (4 vezes a quantidade de dezenas vendidas).
- O que queremos é que a soma dessas duas vendas (dezenas de madeira + dezenas de metal) seja pelo menos 100 reais, ou seja, que seja igual ou maior que 100:

$$\text{Dezenas de madeira} + \text{dezenas de metal} \geq 100$$

$$33 + 4x \geq 100$$

$$4x \geq 100 - 33$$

$$4x \geq 67$$

$$x \geq \frac{67}{4}$$

$$x \geq 16,75$$

Como ninguém vende uma dezena e meia (só se vendem números inteiros), podemos dizer que o x deve ser maior que 17 (o próximo número inteiro depois de 16,75):

$$x \geq 17$$

Portanto, Paulo deve vender no mínimo 17 dezenas de metal para faturar ao menos 100 reais.

Lição 53 – Equações literais e grandezas

1. Dada a equação $(a + 1)x = 2$:

a) resolva-a no caso $a = 1$.

Se a vale 1, substitua “1” no lugar de “a”:

$$(a + 1)x = 2$$

$$(1 + 1)x = 2$$

$$2 \cdot x = 2$$

$$2x = 2$$

$$x = \frac{2}{2}$$

$$x = 1$$

b) resolva-a no caso $a = -1$.

Se a vale -1, substitua “-1” no lugar de “a”:

$$(a + 1)x = 2$$

$$(-1 + 1)x = 2$$

$$0 \cdot x = 2$$

Note que qualquer número vezes zero resulta em zero ($0 \cdot x = 0$)

$$0 = 2$$

Chegamos num absurdo, o nunca poderá ser igual a 2. São números diferentes. Por causa disso, dizemos que a equação é impossível.

c) encontre x em função de a .

$$(a + 1)x = 2$$

$$(a + 1) \cdot x = 2$$

Passe o $(a + 1)$ dividindo o 2.

$$x = \frac{2}{(a + 1)}$$

2. Determine a solução geral de cada equação em x .

a) $x - a = b - x$

$$x - a + x = b$$

$$x + x - a = b$$

$$2x - a = b$$

$$2x = b + a$$

$$x = \frac{b+a}{2}$$

$$b) x + m = -m - x$$

$$x + m + x = -m$$

$$x + x + m = -m$$

$$2x + m = -m$$

$$2x = -m - m$$

$$2x = -2m$$

$$x = -\frac{2m}{2}$$

$$x = -\frac{2}{2} \cdot m$$

$$x = -1 \cdot m$$

$$x = -m$$

$$c) a - 2x = 2x - a$$

$$a - 2x - 2x = -a$$

$$a - 4x = -a$$

$$-4x = -a - a$$

$$-4x = -2a$$

$$4x = 2a$$

$$x = \frac{2a}{4}$$

$$x = \frac{2}{4} \cdot a$$

Simplifique a fração $\frac{2}{4}$.

$$x = \frac{2:2}{4:2} \cdot a$$

$$x = \frac{1}{2} a$$

3. Dada a equação $mx + 1 = 2x + m$ na incógnita x , responda:

a) Qual é a raiz no caso $m = 1\ 002$?

R: Se m vale $1\ 002$ substitua “ $1\ 002$ ” no lugar de “ m ”:

$$mx + 1 = 2x + m$$

$$1002x + 1 = 2x + 1002$$

$$1002x = 2x + 1002 - 1$$

$$1002x - 2x = 1002 - 1$$

$$1000x = 1002 - 1$$

$$1000x = 1001$$

$$x = \frac{1001}{1000}$$

b) Se a raiz é 2, qual é o valor de m?

R: Se 2 é raiz, podemos substituir “2” no lugar de “x” e a igualdade permanecerá verdadeira.

$$mx + 1 = 2x + m$$

$$m \cdot 2 + 1 = 2 \cdot 2 + m$$

$$2m + 1 = 4 + m$$

$$2m + 1 - m = 4$$

$$2m - m = 4 - 1$$

$$m = 4 - 1$$

$$m = 3$$

c) Se a raiz é 1 001, qual é o valor de m?

R: Se 1 001 é raiz, podemos substituir “1001” no lugar de “x” e a igualdade permanecerá verdadeira.

$$mx + 1 = 2x + m$$

$$m \cdot 1001 + 1 = 2 \cdot 100 + m$$

$$1001m + 1 = 2002 + m$$

$$1001m + 1 - m = 2002$$

$$1001m - m = 2002 - 1$$

$$1000m = 2002 - 1$$

$$1000m = 2001$$

$$m = \frac{2001}{1000}$$

4. Classifique a relação entre as grandezas como Diretamente Proporcionais, Inversamente Proporcionais ou Não Proporcionais:

a)

Volume do combustível (litros)	1	2	5	10	20
Preço do combustível (R\$)	0,60	1,20	3,00	6,00	12,00

R: Diretamente proporcionais, pois a razão entre todas é $\frac{1}{0,6}$:

$$\frac{\text{volume}}{\text{preço}} = \frac{1}{0,6} = \frac{2}{1,20} = \frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{20}{12}$$

Note que: $\frac{2}{1,2} = \frac{2:2}{1,2:2} = \frac{1}{0,6}$

E que: $\frac{5}{3} = \frac{5:5}{3:5} = \frac{1}{0,6}$

E que: $\frac{10}{6} = \frac{10:10}{6:10} = \frac{1}{0,6}$

E que: $\frac{20}{12} = \frac{20:20}{12:20} = \frac{1}{0,6}$

b)

Altura do prédio (m)	10,5	14	17,5	21	24,5
Número de Andares	3	4	56	7	8

ATENÇÃO. A TABELA ESTÁ ERRADA. A CORREÇÃO ESTÁ A SEGUIR:

Altura do prédio (m)	10,5	14	17,5	21	24,5
Número de Andares	3	4	56 5	7 6	8 7

R: Diretamente proporcionais, pois a razão entre todas é: $\frac{1}{3,5}$:

$$\frac{\text{andares}}{\text{altura}} = \frac{3}{10,5} = \frac{4}{14} = \frac{5}{17,5} = \frac{6}{21} = \frac{7}{24,5}$$

Note que: $\frac{3}{10,5} = \frac{3:3}{10,5:3} = \frac{1}{3,5}$

E que: $\frac{4}{14} = \frac{4:4}{14:4} = \frac{1}{3,5}$

$$\text{E que: } \frac{5}{17,5} = \frac{5:5}{17,5:5} = \frac{1}{3,5}$$

$$\text{E que: } \frac{6}{21} = \frac{6:6}{21:6} = \frac{1}{3,5}$$

$$\text{E que: } \frac{7}{24,5} = \frac{7:7}{24,5:7} = \frac{1}{3,5}$$

c)

Hora do dia	0	4	8	12	16
Temperatura (°C)	10	5	10	15	17

R: Não proporcionais, pois não se encontra uma razão.

d) Numa caminhada de 6 km (= 600.000 cm)

Metros por minuto	60	75	80	100	120
Tempo de caminhada (min)	100	80	75	60	50
Comprimento do passo (cm)	50	60	75	80	100
Número de passos	12 000	10 000	8.000	7.500	6.000

R: Metros por minuto e tempo de caminhada → são inversamente proporcionais, pois a razão entre todos é 6000:

$$(\text{metros/minuto}) \cdot (\text{tempo}) = 60 \cdot 100 = 75 \cdot 80 = 80 \cdot 75 = 100 \cdot 60 = 120 \cdot 50 = 6000$$

Metros por minuto e comprimento do passo → não são proporcionais (não há uma razão entre eles).

Metros por minuto e número de passos → não são proporcionais (não há uma razão entre eles).

Tempo de caminhada e comprimento do passo → não são proporcionais (não há uma razão entre eles).

Tempo de caminhada e número de passos → não são proporcionais (não há uma razão entre eles).

Lição 54 – Funções

1. Em certa cidade, uma corrida de táxi custa R\$ 4,80 a bandeirada, mais R\$ 0,40 por quilômetro rodado. Quanto custa uma corrida de 50 quilômetros?

R: Uma corrida custa:

$$\text{Custo da corrida} = \text{custo fixo} + \text{quilômetros andados}$$

$$\text{Custo da corrida} = 4,80 + (0,40 \text{ por quilômetro})$$

Dizer “0,40 por quilômetro” significa que devemos multiplicar os quilômetros rodados pelo preço (0,40) para obter quanto custará o total de quilômetros andados.

$$\text{Custo da corrida} = 4,80 + 0,40 \cdot (\text{quilômetro})$$

Assim, andar 50 quilômetros custará:

$$\text{Custo da corrida} = 4,80 + 0,40 \cdot 50$$

$$\text{Custo da corrida} = 4,80 + 20$$

$$\text{Custo da corrida} = 24,80$$

Portanto, a corrida custará R\$ 24,80.

2. Numa prova de 20 testes, cada um valendo 5 pontos, que nota vai tirar um aluno que acertar:

a) 11 testes?

R: Se cada teste vale 5 pontos, acertar 11 testes somará 55 pontos (5×11).

b) 14 testes?

R: Se cada teste vale 5 pontos, acertar 14 testes somará 70 pontos (5×14).

c) x testes?

R: Note que nos itens anteriores, para saber a nota do aluno, multiplicamos a quantidade de acertos por quanto vale cada acerto (5 pontos). Então, se o aluno acertar “ x ” testes, sua nota será: $5 \cdot x = 5x$.

A nota y depende do número x de testes acertados. y é função de x ? Por quê?

R: Sim, porque a nota y está em função (depende) do número x de testes acertados.

3. Um carro está viajando a 100 km por hora.

a) Que distância ele percorre em 2 horas?

R: Se ele percorre 100 km por hora, em 1 hora são percorridos 100 km.

Em 2 horas são percorridos:

$$2 \cdot 100 \text{ km} = 200 \text{ km.}$$

b) Se y representa o número de quilômetros que ele percorre em x horas, qual é a fórmula para calcular y ?

R: No item anterior nós multiplicamos “100 km por hora” (a velocidade) pelo tempo (2 horas).

Sempre que quisermos saber qual é a distância, devemos multiplicar a 100 km por hora pelo tempo EM HORAS. Portanto:

$$y = 100 \cdot x = 100x$$

c) Que distância ele percorre em 90 minutos?

R: Sabemos a expressão para calcular a distância:

$$y = 100x$$

Note que “ x ” está em horas (definimos x como “horas”). Para substituir QUALQUER valor na função, este valor deve estar em HORAS.

90 minutos deve ser convertido para horas.

- 1 hora tem 60 minutos.
- Meia hora (0,5 h) tem 30 minutos.
- 90 minutos = 60 minutos + 30 minutos = 1 hora + 0,5 hora = 1,5 h

Portanto, 90 minutos corresponde à 1,5 h (uma hora e meia).

Substitua 1,5 na função:

$$y = 100x =$$

$$y = 100 \cdot 1,5$$

$$y = 150 \text{ km}$$

Portanto, em 90 minutos serão percorridos 150 km.

4. Um padre fez um desafio a quarenta acólitos comprometendo-se a dividir um prêmio de cerca de 120 relíquias entre aqueles que decifrassem o desafio.

a) Preencha a tabela abaixo:

Quantidade de acólitos que decifram	1	2	5	8	20	40
Prêmio para cada um	120	60	24	15	6	3

R: Se apenas 1 pessoa decifrar o desafio, ela receberá as 120 relíquias sozinha. Então, 120 completa a lacuna embaixo do número 1.

- Se 2 pessoas decifrarem o desafio, terão de *DIVIDIR* as relíquias entre si. Ou seja 120 deve ser dividido em 2 e $\rightarrow 120 : 2 = 60$. Logo, cada uma delas receberá 60 relíquias. Portanto, 60 completa a lacuna embaixo do número 2.

- Se 5 pessoas decifrarem o desafio, terão de *DIVIDIR* as relíquias entre si. Ou seja 120 deve ser dividido em 5 e $\rightarrow 120 : 5 = 24$. Logo, cada uma delas receberá 24 relíquias. Portanto, 24 completa a lacuna embaixo do número 5.
- Se cada pessoa recebeu 15 relíquias devemos descobrir em quantas pessoas foi dividido as 120 relíquias. Devemos fazer a seguinte pergunta: o 15 cabe quantas vezes dentro do 120?
Para descobrir quantas vezes o 15 cabe dentro do 120, devemos realizar a seguinte conta $\rightarrow 120 : 15 = 8$.
Ou seja, o 15 cabe 8 vezes dentro do 120. Logo, oito pessoas dividiram o prêmio. Portanto, o 8 preenche a lacuna acima do número 15.
- Se cada pessoa recebeu 6 relíquias devemos descobrir em quantas pessoas foi dividido as 120 relíquias. Devemos fazer a seguinte pergunta: o 6 cabe quantas vezes dentro do 120?
Para descobrir quantas vezes o 6 cabe dentro do 120, devemos realizar a seguinte conta $\rightarrow 120 : 6 = 20$.
Ou seja, o 6 cabe 20 vezes dentro do 120. Logo, vinte pessoas dividiram o prêmio. Portanto, o 20 preenche a lacuna acima do número 6.
- Se 40 pessoas decifrarem o desafio, terão de *DIVIDIR* as relíquias entre si. Ou seja 120 deve ser dividido em 40 e $\rightarrow 120 : 40 = 3$. Logo, cada uma delas receberá 3 relíquias. Portanto, 3 completa a lacuna embaixo do número 40.

b) O prêmio que cada acólito que decifrou o desafio vai receber é função de que variável?

R: Da quantidade de acólitos que decifraram (*ou seja, o prêmio recebido depende da quantidade de pessoas que acertaram*).

c) Utilizando letras, represente a função do item anterior por uma fórmula.

R: A variável dependente é o prêmio que cada um receberá. Chame o prêmio de “y”. O prêmio depende da quantidade de pessoas que acertaram. Chame a quantidade de pessoas que acertaram de “x”.

No item a), para descobrir qual seria o prêmio, dividiu-se o número total de relíquias (120) pela quantidade de pessoas que acertaram. Portanto, a lei da função é:

$$\text{Prêmio} = 120 \text{ relíquias} : \text{pessoas que acertaram}$$

$$y = 120 : x$$

5. Duas variáveis x e y estão relacionadas pela fórmula $5x + 3y = 20$.

a) Se $x = 10$, calcule y.

R: Se x vale 10, substitua “10” no lugar de “x”:

$$5x + 3y = 20$$

$$5 \cdot x + 3y = 20$$

$$5 \cdot 10 + 3y = 20$$

$$50 + 3y = 20$$

$$3y = 20 - 50$$

$$3y = -30$$

$$y = \frac{-30}{3}$$

$$y = -10$$

b) se $y = 15$, calcule x .

R: Se y vale 15, substitua "15" no lugar de " y ":

$$5x + 3y = 20$$

$$5x + 3 \cdot y = 20$$

$$5x + 3 \cdot 15 = 20$$

$$5x + 45 = 20$$

$$5x = 20 - 45$$

$$5x = -25$$

$$x = \frac{-25}{5}$$

$$x = -5$$

c) Expresse x em função de y .

$$5x + 3y = 20$$

$$5x = 20 - 3y$$

$$x = \frac{20 - 3y}{5}$$

d) Expresse y em função de x .

$$5x + 3y = 20$$

$$3y = 20 - 5x$$

$$y = \frac{20 - 5x}{3}$$

6. Se x e y estão relacionados por $x^2 - y = 0$, podemos concluir que:

a) y é função de x ? Por quê?

R: Sim, pois y depende dos valores de x , ou seja, y é o valor dependente.

b) x é função de y ? Por quê?

R: Não, pois os valores de x independem de y , ou seja, x é o valor independente.

7. Contando a partir de certo instante, a distância percorrida por um carro é função do tempo decorrido. Em x minutos ele percorre a distância $f(x)$ metros, dada pela fórmula $f(x) = 10x^2 + 100x$.

a) Calcule a distância percorrida em 10 minutos.

R: A função é definida com o “ x ” em minutos (x representa o tempo decorrido). Então, substitua “10 minutos” no lugar de “ x ” para saber a distância percorrida:

$$f(x) = 10x^2 + 100x$$

$$f(10) = 10 \cdot x^2 + 100 \cdot x$$

$$f(10) = 10 \cdot 10^2 + 100 \cdot 10$$

$$f(10) = 10 \cdot 100 + 100 \cdot 10$$

$$f(10) = 1000 + 100 \cdot 10$$

$$f(10) = 1000 + 1000$$

$$f(10) = 2000$$

Portanto, em 10 minutos, ele percorre 2 000 metros.

b) Calcule $f(60)$. A quem tempo equivale essa distância percorrida?

R: Para calcular $f(60)$ substitua “60” no lugar de “ x ”:

$$f(x) = 10x^2 + 100x$$

$$f(60) = 10 \cdot 60^2 + 100 \cdot 60$$

$$f(60) = 10 \cdot 3600 + 100 \cdot 60$$

$$f(60) = 36\,000 + 100 \cdot 60$$

$$f(60) = 36\,000 + 6\,000$$

$$f(60) = 42\,000$$

Dizemos que $f(60)$ é a distância percorrida em 60 minutos.

c) Em quanto tempo o carro terá percorrido 200 quilômetros?

R: Em primeiro lugar, qualquer valor obtido no cálculo da distância $f(x)$ deve ser em METROS (é o que foi definido na função) $\rightarrow f(x)$ está em metros e x em minutos.

Portanto, não podemos substituir 200 km. É preciso converter esse valor para metros.

200 km equivale a 200 000 metros (1 km tem 1000 metros). *Para converter quilômetros em metros, basta multiplicar o valor por 1000.*

Então, substitua 200 000 e não 200 no lugar de $f(x)$, a distância percorrida:

$$f(x) = 10x^2 + 100x$$

$$200\,000 = 10x^2 + 100x$$

Passe o 200 000 para o outro lado.

$$0 = 10x^2 + 100x - 200\,000$$

$$10x^2 + 100x - 200\,000 = 0$$

Aplique Bhaskara.

$$a = 10 \quad b = 100 \quad c = -200\,000$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (100)^2 - 4 \cdot 10 \cdot -200\,000$$

$$\Delta = 10\,000 - 4 \cdot 10 \cdot -200\,000$$

$$\Delta = 10\,000 - 40 \cdot -200\,000$$

$$\Delta = 10\,000 + 8\,000\,000$$

$$\Delta = 8\,010\,000$$

Utilize o valor aproximado da raiz de 8.010.000 no cálculo da raiz $\rightarrow \sqrt{8.010.000} \cong 2830,19$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-100 + \sqrt{8.010.000}}{2 \cdot 10} = \frac{-100 + 2830,19}{20} = \frac{2730,19}{20} = 136,5095 \cong 136,51$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-100 - \sqrt{8.010.000}}{2 \cdot 10} = \frac{-100 - 2830,19}{20} = \frac{-2930,19}{20} = -146,5095 \cong -146,51$$

O tempo é sempre um valor POSITIVO. Descarte valores negativos.

Portanto, quando $f(x) = 200\,000$, $x = 136,51$.

Ou seja, o carro percorre 200 000 metros em 136,51 minutos.

8. Dada a função $f(x) = \frac{1}{x+1}$, calcule, se existir:

a) $f(-2)$

Substitua “-2” no lugar de x:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f(-2) = \frac{1}{-2+1}$$

$$f(-2) = \frac{1}{-1}$$

$$f(-2) = -1$$

b) $f\left(\frac{3}{5}\right)$

Substitua “ $\frac{3}{5}$ ” no lugar de x:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{\frac{3}{5}+1}$$

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{\frac{3}{5} + \frac{1}{1}}$$

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{\frac{3}{5} + \frac{1 \cdot 5}{1 \cdot 5}}$$

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{\frac{3}{5} + \frac{5}{5}}$$

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{\frac{3+5}{5}}$$

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{\left(\frac{8}{5}\right)}$$

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = 1 : \frac{8}{5}$$

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{1} : \frac{8}{5}$$

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{1} \cdot \frac{5}{8}$$

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1 \cdot 5}{1 \cdot 8} = \frac{5}{8}$$

c) $f(-1)$

Substitua “-1” no lugar de x:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f(-1) = \frac{1}{-1+1}$$

$$f(-1) = \frac{1}{0}$$

A conta $1 \div 0$ não é definida na matemática. Portanto, $f(-1)$ não existe (não está definida).

9. Dada a função $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$, calcule qual seria o valor de $f\left(\frac{2}{5}\right) - f\left(-\frac{1}{10}\right)$.

R: Primeiro, calcule $f\left(\frac{2}{5}\right)$ e $f\left(-\frac{1}{10}\right)$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{5}\right) &= \frac{\left(\frac{2}{5}\right)}{2} - \frac{2}{\left(\frac{2}{5}\right)} = \left(\frac{2}{5} : 2\right) - \left(2 : \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5} : \frac{2}{1}\right) - \left(\frac{2}{1} : \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 2}\right) - \left(\frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 2}\right) = \left(\frac{2}{10}\right) - \frac{10}{2} = \left(\frac{2}{10}\right) - 5 \\ &= \frac{2}{10} - \frac{5}{1} = \frac{2}{10} - \frac{5 \cdot 10}{1 \cdot 10} = \frac{2}{10} - \frac{50}{10} = \frac{2-50}{10} = \frac{-48}{10} \end{aligned}$$

Simplifique a fração.

$$-\frac{48:2}{10:2} = -\frac{24}{5}$$

$$\text{Portanto, } f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{24}{5}$$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{10}\right) &= \frac{\left(-\frac{1}{10}\right)}{2} - \frac{2}{\left(-\frac{1}{10}\right)} = \left(-\frac{1}{10} : 2\right) - \left(2 : -\frac{1}{10}\right) = \left(-\frac{1}{10} : \frac{2}{1}\right) - \left(\frac{2}{1} : -\frac{1}{10}\right) = \left(-\frac{1 \cdot 1}{10 \cdot 2}\right) - \left(\frac{2 \cdot -10}{1 \cdot 1}\right) = \\ &= \left(-\frac{1}{20}\right) - \left(\frac{-20}{1}\right) = \left(-\frac{1}{20}\right) + \frac{20}{1} = \left(-\frac{1}{20}\right) + \frac{20 \cdot 20}{1 \cdot 20} = \left(-\frac{1}{20}\right) + \frac{400}{20} = \frac{-1+400}{20} = \frac{399}{20} \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } f\left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{399}{20}$$

$$\text{Agora faça } f\left(\frac{2}{5}\right) - f\left(-\frac{1}{10}\right):$$

$$f\left(\frac{2}{5}\right) - f\left(-\frac{1}{10}\right) = \left(-\frac{24}{5}\right) - \left(\frac{399}{20}\right) = \left(-\frac{24}{5}\right) - \frac{399}{20} = \left(-\frac{24 \cdot 4}{5 \cdot 4}\right) - \frac{399}{20} = \left(\frac{-96}{20}\right) - \frac{399}{20} = \frac{-96-399}{20} = \frac{-495}{20}$$

Simplifique a fração.

$$\frac{-495:5}{20:5} = \frac{-99}{4}$$

10. Dada a função $f(x) = 3x + 4$, atribua 5 valores aleatórios para x, encontre os valores de $f(x)$ e organize-os em uma tabela.

(Resposta pessoal)

11. Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de

transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra.” A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período, é:

a) $f(x) = 3x$.

b) $f(x) = 24$.

c) $f(x) = 27$.

d) $f(x) = 3x + 24$.

e) $f(x) = 24x + 3$.

O valor pago é uma taxa fixa **mais** um valor pelas horas extras utilizando a bicicleta.

$$\text{Valor pago} = \text{taxa fixa} + \text{valor pelas horas extras}$$

- Chame valor pago de $f(x)$, pois ele é a variável dependente (*ele depende das horas extras utilizadas*).
- A taxa fixa é 24 reais (que permite utilizar a bicicleta 30 minutos ao dia).
- Cada hora extra custa 3,00 reais. Então, se houver “ x ” horas extras, o valor pago pelas horas extras é $3 \cdot x = 3x$.

Portanto:

$$\text{Valor pago} = \text{taxa fixa} + \text{valor pelas horas extras}$$

$$f(x) = 24 + 3x$$

Note que a adição é comutativa, ou seja $24 + 3x = 3x + 24$.

Portanto, a alternativa correta é a **d)**.

12. Dada a função $f(x) = 5x - 1$, preencha a tabela abaixo:

x	$f(x)$
0	-1
1	4
5	24
$\frac{3}{5}$	2
$-\frac{3}{5}$	-4

- Queremos saber $f(x)$ quando $x = 0$, ou seja, queremos saber $f(0) \rightarrow$ substitua o “0” no lugar de “ x ”:

$$f(x) = 5x - 1$$

$$f(x) = 5 \cdot x - 1$$

$$f(0) = 5 \cdot 0 - 1$$

$$f(0) = 0 - 1$$

$$f(0) = -1$$

- Queremos saber $f(x)$ quando $x = 1$, ou seja, queremos saber $f(1) \rightarrow$ substitua o “1” no lugar de “x”:

$$f(x) = 5x - 1$$

$$f(x) = 5 \cdot x - 1$$

$$f(1) = 5 \cdot 1 - 1$$

$$f(1) = 5 - 1$$

$$f(1) = 4$$

- Queremos saber $f(x)$ quando $x = 2$, ou seja, queremos saber $f(5) \rightarrow$ substitua o “5” no lugar de “x”:

$$f(x) = 5x - 1$$

$$f(x) = 5 \cdot x - 1$$

$$f(5) = 5 \cdot 5 - 1$$

$$f(5) = 25 - 1$$

$$f(5) = 24$$

- Queremos saber o valor do “x” quando $f(x) = 2 \rightarrow$ substitua o “2” no lugar de $f(x)$:

$$f(x) = 5x - 1$$

$$2 = 5x - 1$$

$$2 + 1 = 5x$$

$$3 = 5x$$

$$\frac{3}{5} = x$$

- Queremos saber o valor do “x” quando $f(x) = -4 \rightarrow$ substitua o “-4” no lugar de $f(x)$:

$$f(x) = 5x - 1$$

$$-4 = 5x - 1$$

$$-4 + 1 = 5x$$

$$-3 = 5x$$

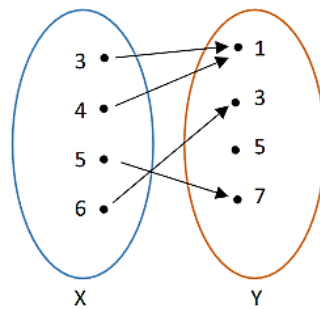
$$\frac{-3}{5} = x$$

Lição 55 – Domínio, imagem e contradomínio de uma função

1. Três amigos conversavam sobre suas matérias preferidas entre quatro: matemática (M), português (P), história (H) e geografia (G), sendo que Alberto (A) prefere matemática, Beto (B) prefere português e Carlos (C) prefere geografia (G). Sejam os conjuntos $T = \{A, B, C\}$, formado pelos três amigos, e $Q = \{M, P, G, H\}$, formado pelas matérias em discussão, determine qual é o domínio, o contradomínio e a imagem da função $f: T \rightarrow Q$.

R: Domínio: {A, B, C} ; Contradomínio: {M, P, G, H}; Imagem: {M, P, G}.

2. Considere a função $f : X \rightarrow Y$ pelo diagrama e determine:



a) Domínio da função

R: Domínio: {3, 4, 5, 6}.

b) Imagem da função

R: Imagem: {1, 3, 7}.

c) $f(4)$

R: Queremos $f(4)$, ou seja, qual o valor do “y” quando x é “4”. Pelo diagrama, $f(4) = 1$.

d) y, quando $x = 5$

R: $y = 7$

e) x, quando $y = 3$

R: $x = 6$

f) x, quando $f(x) = 1$

R: $x = 3$ ou $x = 4$

g) $f(x)$, quando $x = 6$

R: Perguntar qual é o $f(x)$ quando $x = 6$, equivale a perguntar qual é o “y” quando $x = 6$. O “y” quando $x = 6$ é $y = 3$. Portanto, $f(6) = 3$.

h) y, quando $x = 3$

R: $y = 1$

i) x, quando $y = 7$

R: $x = 5$

Lição 56 – Função injetora, sobrejetora e bijetora

1. Três amigos conversavam sobre suas matérias preferidas entre quatro: matemática (M), português (P), história (H) e geografia (G), sendo que Alberto (A) prefere matemática, Beto (B) prefere português e Carlos (C) prefere geografia (G). Sejam o conjunto $T = \{A, B, C\}$,

formado pelos três amigos, e $Q = \{M, P, G, H\}$, formado pelas matérias em discussão, pode-se dizer que a função $f : T \rightarrow Q$ é:

a) injetiva.

b) sobrejetiva.

c) bijetiva.

d) nem injetiva nem sobrejetiva.

Ela é injetiva porque os elementos do seu domínio estão associados a elementos diferentes do contradomínio (pessoas diferentes gostam de matérias diferentes).

Ela não é sobrejetiva porque seu contradomínio não é igual sua imagem. Sobra H no contradomínio (que não é imagem de ninguém).

Se ela não é sobrejetiva, não pode ser bijetiva.

Portanto, ela é apenas *injetiva*.

2. O armário de João possui 4 gavetas: uma de meias M, outra de calças C, outra de bermudas B e uma última de sapatos S. Neste armário, João guarda duas meias M₁ e M₂, três calças C₁, C₂ e C₃, quatro bermudas B₁, B₂, B₃ e B₄, e dois sapatos S₁ e S₂. Seja a função $f : R \rightarrow G$, onde $R = \{M_1, M_2, C_1, C_2, C_3, B_1, B_2, B_3, B_4, S_1, S_2\}$ e $G = \{M, C, B\}$, podemos afirmar que f é:

a) injetiva.

b) sobrejetiva.

c) bijetiva.

d) nem injetiva nem sobrejetiva.

Ela não é injetiva porque elementos diferentes do seu domínio estão associados a um mesmo elemento do contradomínio (por exemplo B₁ e B₂ estão associados a B). *Para ser injetiva é preciso que elementos diferentes tenham imagens diferentes.*

Ela é sobrejetiva porque o seu contradomínio é igual a sua imagem.

Se ela é sobrejetiva e não é injetiva não pode ser bijetiva.

Portanto, ela é apenas sobrejetiva.

3. Seja dada a função $f(x) = 2x$, cujo domínio é $\{1, 2, 3\}$ e cujo contradomínio é $\{2, 4, 6\}$. Podemos afirmar que essa função é:

a) injetiva.

b) sobrejetiva.

c) bijetiva.

d) nem injetiva nem sobrejetiva.

c) bijetiva

Ela é injetiva porque os elementos do seu domínio estão associados a elementos diferentes do contradomínio:

$$f(1) = 1 \cdot 2 = 2$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

Portanto:

- $1 \rightarrow 2$
- $2 \rightarrow 4$
- $3 \rightarrow 6$

O domínio é $(1,2,3)$. O contradomínio é $(2, 4, 6)$ e a imagem é $(2, 4, 6)$.

Ela é sobrejetiva porque o seu contradomínio é igual a sua imagem.

Portanto, se ela é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo, a função é bijetiva.

4. Dados $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1, 3, 4\}$ e a correspondência entre A e B dada por $y = x^2$, com $x \in A$ e $y \in B$, faça um diagrama e diga se f é uma função de A em B. Caso seja uma função, indique o domínio, o contradomínio e a imagem e classifique-a como injetora, sobrejetora ou bijetora.

R: Comece encontrando os $f(x)$.

$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$

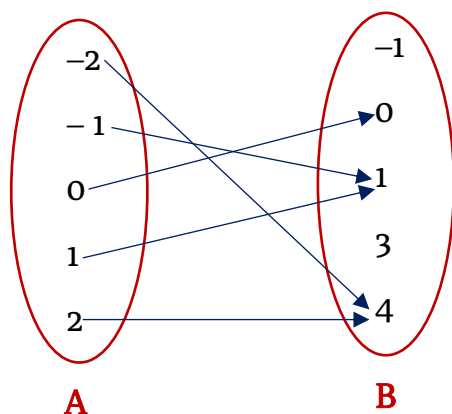
$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$f(0) = 0^2 = 0$$

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$f(2) = 2^2 = 4$$

Portanto, o diagrama $f: A \rightarrow B$ é:



Como notamos pelo diagrama, $f: A \rightarrow B$ é uma função, pois cada elemento do domínio tem apenas uma imagem (e todos os elementos do domínio tem imagem).

Domínio = $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Contradomínio: $\{-1, 0, 1, 3, 4\}$

Imagem: $\{0, 1, 4\}$

A função não é injetora porque elementos diferentes do domínio tem a mesma imagem. Por exemplo, 2 e -2 têm a mesma imagem: 4. Também, 1 e -1 têm mesma imagem: 1. Para que a função fosse injetora elementos diferentes do domínio devem ter imagens diferentes.

A função não é sobrejetora porque seu contradomínio é diferente de sua imagem.

Como função não é nem injetora, nem sobrejetora, também não é bijetora.

5. Na função definida $y = x^2$, calcule $f(1)$ e $f(-1)$ para justificar o fato de que tal função não é injetiva.

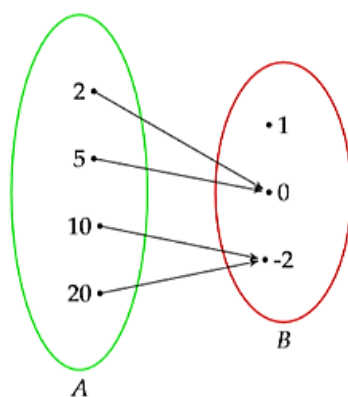
R: Calcule:

$$f(1) = 1^2 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$f(-1) = (-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

Como para diferentes elementos do domínio (-1 e 1) temos a mesma imagem (1), esta função não é injetora.

6. Sobre a função $f: A \rightarrow B$, cuja relação está representada na figura, podemos afirmar que a função f é:



a) injetiva.

b) sobrejetiva.

c) bijetiva.

d) nem injetiva nem sobrejetiva.

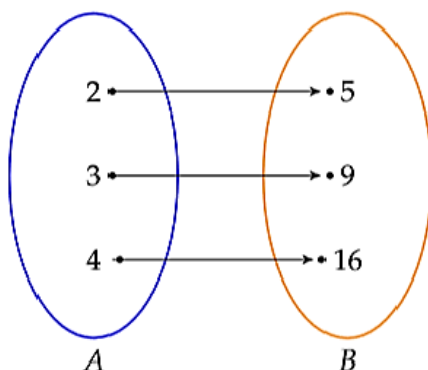
Ela não é injetiva porque elementos diferentes do seu domínio estão associados a um mesmo elemento do contradomínio (por exemplo 2 e 5 estão associados a 0).

Para ser injetiva, elementos diferentes de seu domínio devem ter imagens diferentes.

Ela não é sobrejetiva porque seu contradomínio não é igual sua imagem. “Sobra” o elemento “1” no contradomínio (que não é imagem de ninguém).

Como ela não é nem injetiva nem sobrejetiva, não pode ser bijetiva.

7. Sobre a função $f: A \rightarrow B$, cuja relação está representada na figura, podemos afirmar que a função f é:



a) injetiva.

b) sobrejetiva.

c) bijetiva.

d) nem injetiva nem sobrejetiva.

Ela é injetiva porque os elementos do seu domínio estão associados a elementos diferentes do contradomínio.

Ela é sobrejetiva porque o seu contradomínio é igual a sua imagem (não “sobra” nenhum elemento no conjunto B, todos estão ligados a algum elemento de A).

Portanto, se ela é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo, a função é bijetiva.

8. Uma professora resolve distribuir uma pesquisa, colocando no quadro três basílicas:

Basílica de Notre-Dame, Basílica de São Pedro e Basílica de São Paulo Fora dos Muros. Em seguida, pediu a cada um dos 30 alunos que escolhesse a basílica que achou mais bela. Seja A o conjunto formado pelos alunos e B o conjunto formado pelas três basílicas, determine, em cada situação abaixo, se a relação $f: A \rightarrow B$ é uma função e, caso seja, classifique-a como injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

a) todos os alunos escolheram a basílica de Notre-Dame.

R: Em primeiro lugar:

O domínio é $D = \{\text{Aluno 1, Aluno 2, , Aluno 30}\}$

O contradomínio é $CD = \{\text{Notre-Dame, São Pedro, São Paulo Fora dos Muros}\}$

Neste caso, a imagem é $I = \{\text{Notre-Dame}\}$.

É uma função, pois nenhum dos elementos do domínio tem duas imagens (nenhum aluno escolheu 2 basílicas). Também, nenhum aluno deixou de escolher, ou seja, todos têm imagem (estão associados a um elemento do contradomínio).

Não é injetora porque todos os elementos do domínio têm a mesma imagem (a basílica de Notre-Dame). *Para ser injetora seria necessário que cada aluno tivesse associado a uma basílica diferente (no caso, precisaria haver 30 basílicas).*

Não é sobrejetora porque “sobram” elementos do contradomínio que não são imagem de ninguém (Basílica de São Pedro e Basílica de São Paulo Fora dos Muros não são escolhidas, portanto, não estão “associadas” a nenhum dos 30 alunos).

Portanto é uma função, mas não é nem injetora nem sobrejetora.

b) dez alunos escolheram Notre-Dame, dez alunos escolheram São Pedro, e dez alunos escolheram São Paulo.

R: Em primeiro lugar:

O domínio é $D = \{\text{Aluno 1, Aluno 2, , Aluno 30}\}$

O contradomínio é $CD = \{\text{Notre-Dame, São Pedro, São Paulo Fora dos Muros}\}$

Neste caso, a imagem é $I = \{\text{Notre-Dame, São Pedro, São Paulo Fora dos Muros}\}$.

É uma função, pois nenhum dos elementos do domínio tem duas imagens (nenhum aluno escolheu 2 basílicas). Também, nenhum aluno deixou de escolher, ou seja, todos têm imagem (estão associados a um elemento do contradomínio).

Não é injetora porque alguns elementos do domínio têm a mesma imagem (os 10 alunos que gostam de Notre-Dame, por exemplo, têm a mesma imagem). *Para ser injetora seria necessário que cada aluno tivesse associado a uma basílica diferente (no caso, precisaria haver 30 basílicas).*

É sobrejetora porque não sobra nenhum elemento do contradomínio (todo elemento do contradomínio é imagem de alguém).

Portanto, é uma função sobrejetora.

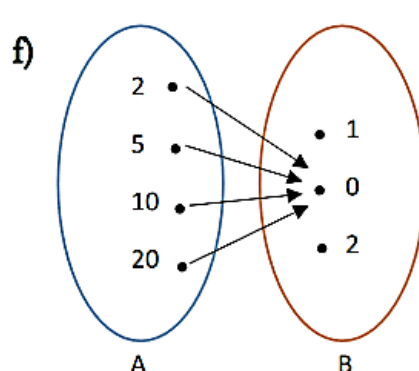
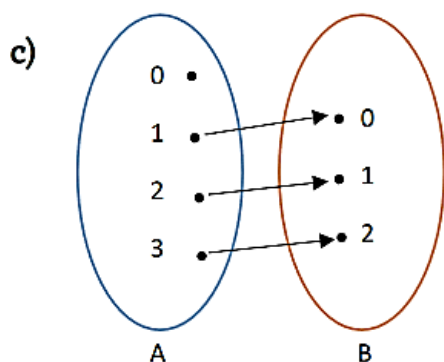
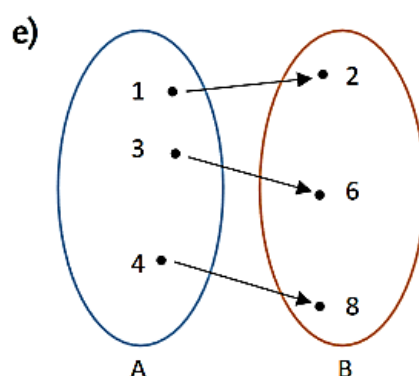
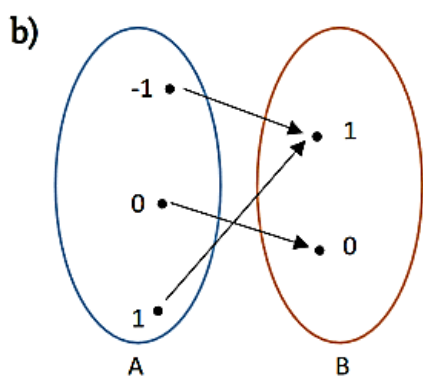
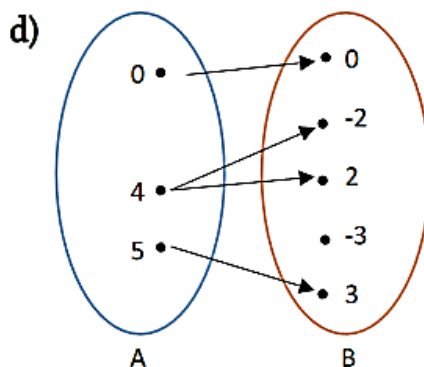
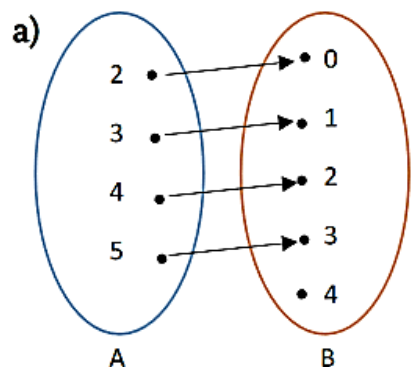
c) todos os alunos escolheram sua basílica preferida, com exceção de Joãozinho, que disse não gostar de nenhuma.

R: Não é função, pois um dos elementos do domínio não possui imagem (Joãozinho não escolheu nenhuma).

d) todos os alunos escolheram sua basílica preferida, com exceção de Joãozinho, que disse gostar das três igualmente.

R: Não é função, pois um dos elementos do domínio possui 3 imagens (Joãozinho escolheu 3 basílicas).

9. Quais dos seguintes diagramas representam uma função de A em B. Identifique o domínio, o contradomínio e a imagem, e classifique-os como injetora, sobrejetora e bijetora.



a) É função, pois todos os elementos do domínio têm apenas uma imagem.

O domínio é $D = \{2, 3, 4, 5\}$.

O contradomínio é $CD = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

A imagem é $I = \{0, 1, 2, 3\}$.

É injetora, pois elementos diferentes do domínio estão associados a imagens diferentes.

Não é sobrejetora porque “sobra” o elemento “4” no contradomínio, que não é imagem de ninguém.

Portanto, é função injetora.

b) É função, pois todos os elementos do domínio têm apenas uma imagem.

O domínio é $D = \{-1, 0, 1\}$.

O contradomínio é $CD = \{1, 0\}$.

A imagem é $I = \{1, 0\}$.

Não é injetora porque elementos diferentes do domínio tem a mesma imagem: -1 e 1 estão associados a 1 . *Para ser injetora é preciso que elementos diferentes do domínio possuam imagens diferentes.*

É sobrejetora porque seu contradomínio é igual à sua imagem (não “sobra ninguém” no contradomínio).

Portanto, é uma função sobrejetora.

c) Não é uma função, pois há elementos do domínio que não possuem imagem (0 não possui imagem). *Para ser função, todos os elementos do domínio devem possuir imagem.*

d) Não é uma função, pois um dos elementos do domínio (4) possui duas imagens. *Para ser função, cada elemento do domínio deve ter apenas uma imagem.*

e) É função, pois todos os elementos do domínio têm apenas uma imagem.

Seu domínio é $D = \{1, 3, 4\}$.

O contradomínio é $CD = \{2, 6, 8\}$.

A imagem é $I = \{2, 6, 8\}$.

É injetora pois elementos diferentes do domínio estão associados a imagens diferentes.

É sobrejetora porque seu contradomínio é igual à sua imagem (não “sobra ninguém” no contradomínio).

Portanto, é uma função bijetora (sobrejetora e injetora ao mesmo tempo).

f) É uma função, pois todos os elementos do domínio têm apenas uma única imagem (ainda que seja a mesma imagem).

Seu domínio é $D = \{2, 5, 10, 20\}$.

O contradomínio é $CD = \{1, 0, 2\}$.

A sua imagem é $I = \{2\}$.

Essa função não é injetora, pois os diferentes elementos do domínio têm a mesma imagem (2). *Para ser injetora é preciso que elementos diferentes do domínio possuam imagens diferentes.*

Também não é sobrejetora, pois o contradomínio não é igual à imagem (“sobram” elementos no contradomínio: 1 e 0).

Portanto, é uma função, mas não é nem injetora nem sobrejetora.

10. Dados $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ e a correspondência entre A e B dada por $y = x - 2$, com $x \in A$ e $y \in B$, faça um diagrama e diga se f é uma função de A em B . Caso seja uma

função, indique o domínio, o contradomínio e a imagem e classifique- a como injetora, sobrejetora ou bijetora.

R: Comece encontrando os $f(x)$:

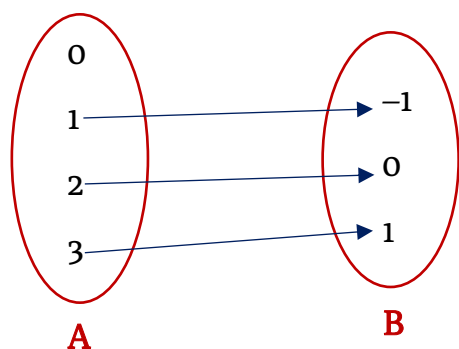
$$f(0) = x - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$f(1) = 1 - 2 = -1$$

$$f(2) = 2 - 2 = 0$$

$$f(3) = 3 - 2 = 1$$

Portanto, o diagrama $f : A \rightarrow B$ é:



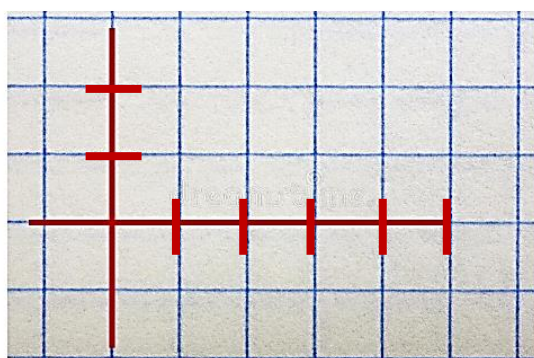
Pelo diagrama, percebemos que a relação $f : A \rightarrow B$ NÃO é uma função, pois um elemento de A, o zero (0) não tem uma imagem em B.

Lição 57 - Plano cartesiano

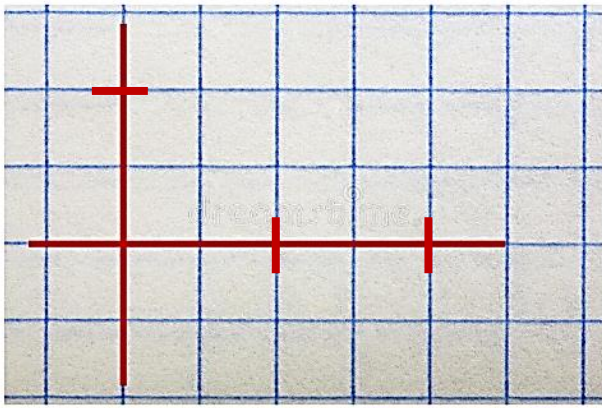
1. Quais são os nomes dados ao eixo X e ao eixo Y?

R: Eixo x $\rightarrow$ eixo das abscissas. Eixo y $\rightarrow$ eixo das ordenadas.

2. Em papel quadriculado construa um plano cartesiano, com o eixo X de - 10 a 10, e o eixo Y de - 10 a 10. Lembre-se de que a distância entre os números do eixo precisa ser sempre igual, e a distância entre os valores do eixo Y também precisa ser sempre igual. Como o papel é quadriculado, você pode utilizar cada quadradinho como medida: veja os exemplos abaixo:



Neste caso, cada quadradinho representa 1 unidade.

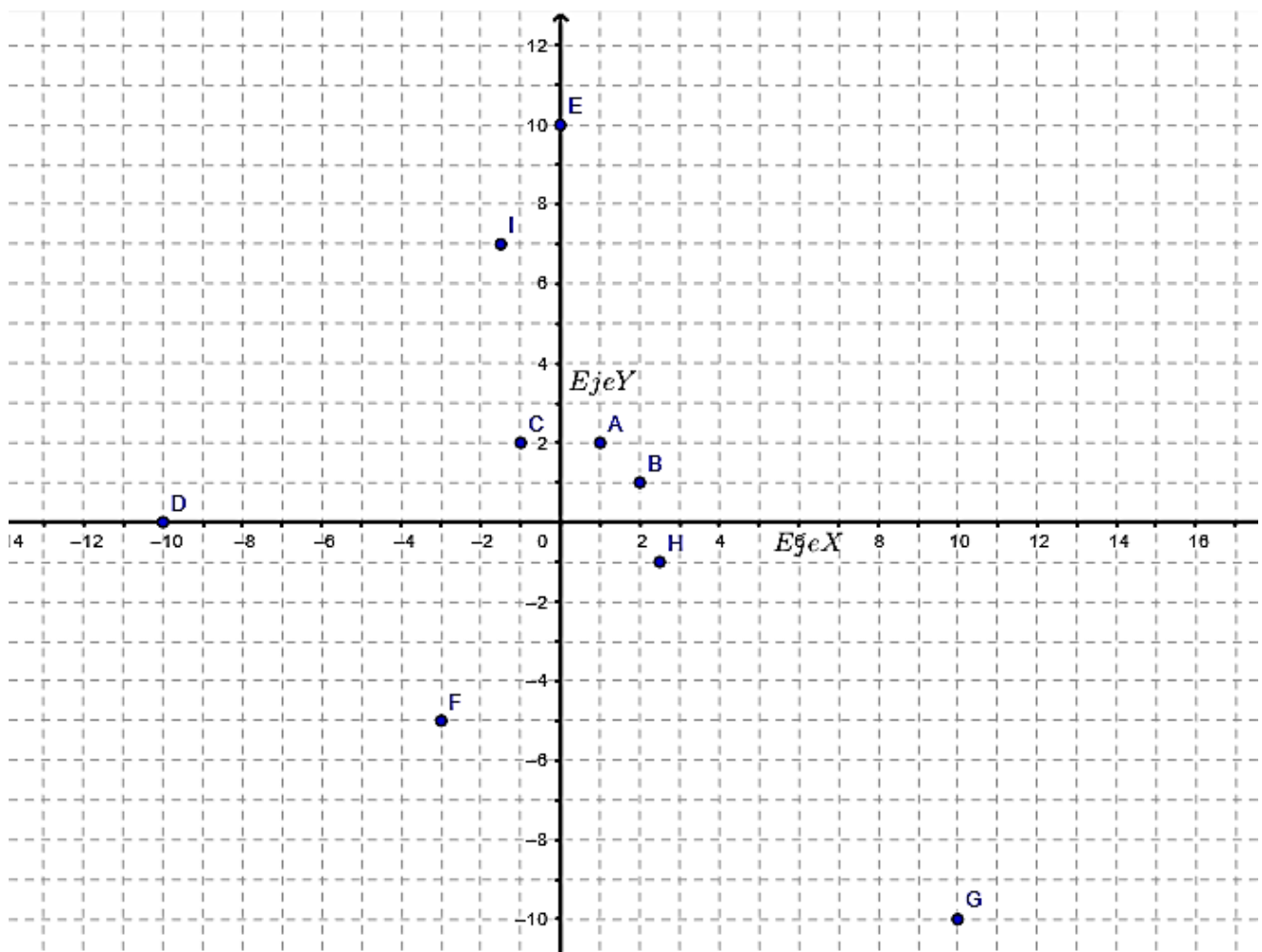


Neste caso, a cada dois quadradinhos representam 1 unidade.

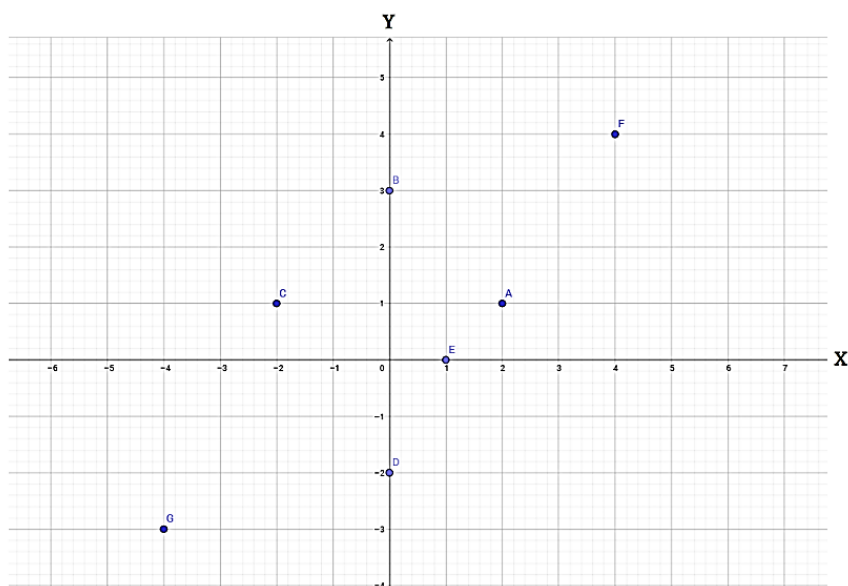
O importante é que em cada eixo se siga o padrão em que se começou a colocar os valores na reta.

Depois marque os seguintes pontos:

- a) $A = (1, 2)$
- b) $B = (2, 1)$
- c) $C = (-1, 2)$
- d) $D = (-10, 0)$
- e) $E = (0, 10)$
- f) $F = (-3, -5)$
- g) $G = (10, -10)$
- h) $H = (\frac{5}{2}, -1)$
- i) $I = (-1,5; 7)$



3. Dados os pontos abaixo, indique quais são suas coordenadas:



Lembre-se: as coordenadas de um ponto são sempre dadas por (x, y).

$$A = (2, 1)$$

$$B = (0, 3)$$

$$C = (-2, 1)$$

$$D = (0, -2)$$

$$E = (1, 0)$$

$$F = (4, 4)$$

$$G = (-4, -3)$$

4. Sem construir o plano cartesiano, analise os pontos a seguir e indique em que quadrante o ponto está localizado:

Sabemos que um ponto estará localizado no:

- 1º quadrante → se x e y forem valores positivos
- 2º quadrante → se x for negativo e y for positivo.
- 3º quadrante → se x e y forem valores negativos.
- 4º quadrante → se x for positivo e y for negativo.

a) $A = (4, 2)$

R: Primeiro quadrante (x e y são positivos).

b) $B = (5, -2)$

R: Quarto quadrante (x positivo e y negativo).

c) $C = (-1, 4)$

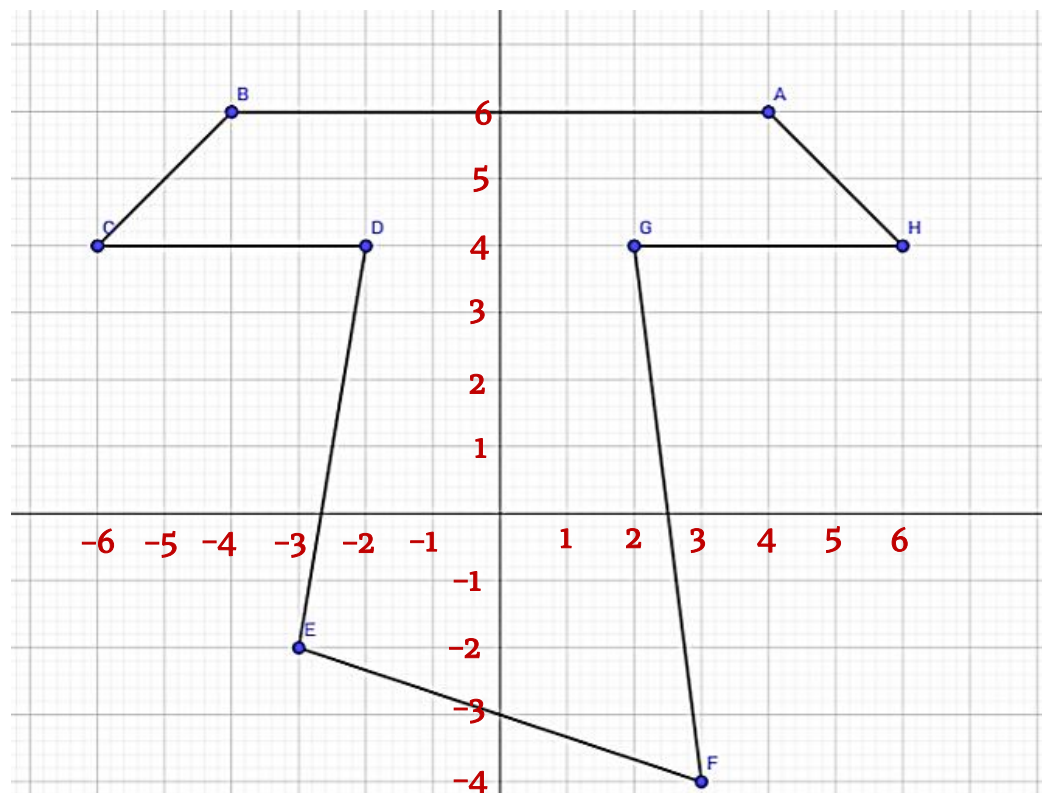
R: Segundo quadrante (x negativo e y positivo).

d) $D = (-4, -2)$

R: Terceiro quadrante (x e y são negativos).

5. No livro de Ezequiel está escrito “O Senhor disse: passa em meio à cidade, em meio a Jerusalém e marca um Tau na fronte dos homens que suspiram e choram...” (Ez 9, 4). O tau é uma letra hebraica que se parece muito com uma cruz, e é muito utilizado pelos

franciscanos por ser um sinal de predileção. Um professor decidiu colocar alguns pontos num plano cartesiano de tal forma que a figura formada se parecesse com um tau:



Analisando a figura, indique:

a) A coordenada dos pontos A, B, C, D, E, F, G, H.

R: Comece enumerando os quadradinhos de 1 em 1 (como está na figura). Agora, escreva os pontos (pares ordenados) lembrando que são indicados por (x, y).

A = (4, 6)

B = (-4, 6)

C = (-6, 4)

D = (-2, 4)

E = (-3, -2)

F = (3, -4)

G = (2, 4)

H = (6, 4)

b) Que ponto tem a maior ordenada?

R: Os pontos que têm maior ordenada são A e B.

Note que o eixo das ordenadas é o eixo y. A maior ordenada significa o maior valor para y.

O maior valor de y é 6, que é justamente os valores de y nos pontos A e B.

c) Que ponto(s) possui(em) a mesma ordenada que H?

R: A ordenada de H é o valor de y do ponto H.

O valor de “ y ” de H é 4.

Os pontos que também possuem $y = 4$ são o C, D e o G.

d) Os pontos de ordenada positiva.

R: “Pontos com coordenada positiva” significa pontos com valores de y positivos. Portanto, os pontos são: A, B, C, D, G e H.

e) Os pontos de abscissa negativa.

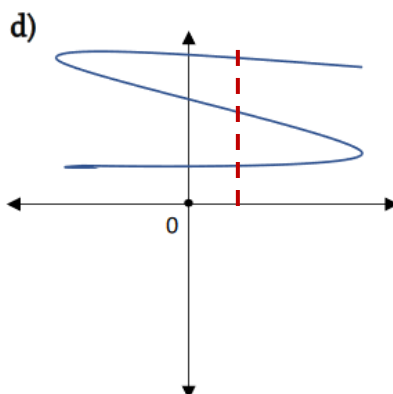
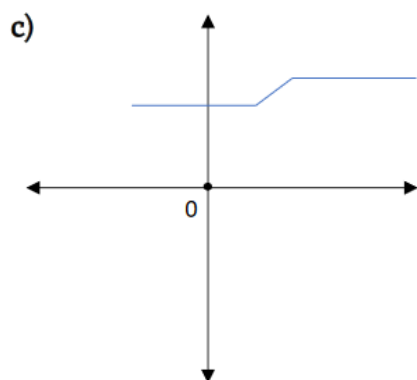
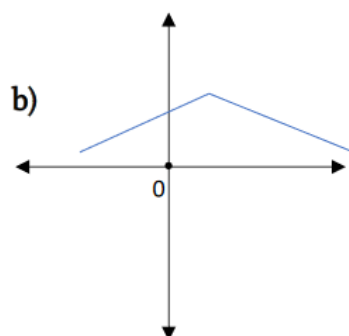
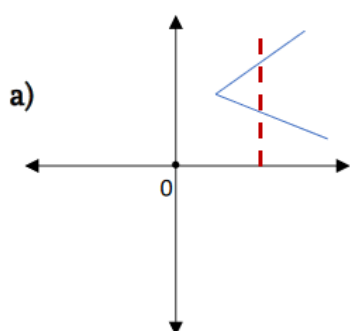
R: *Note que o eixo das abscissas é o eixo x .*

“Pontos com abscissa negativa” significa pontos com valores de x negativos.

Portanto, os pontos são: B, C, D e E.

Lição 58 – As funções e o plano cartesiano

1. Observe os gráficos abaixo e indique quais deles representam uma função:



R: No gráfico “a)”, um mesmo valor de x , possui dois valores de y . A linha pontilhada na figura o demonstra.

No gráfico “d)”, um mesmo valor de x , possui três valores de “ y ”, como a linha pontilhada na imagem demonstra.

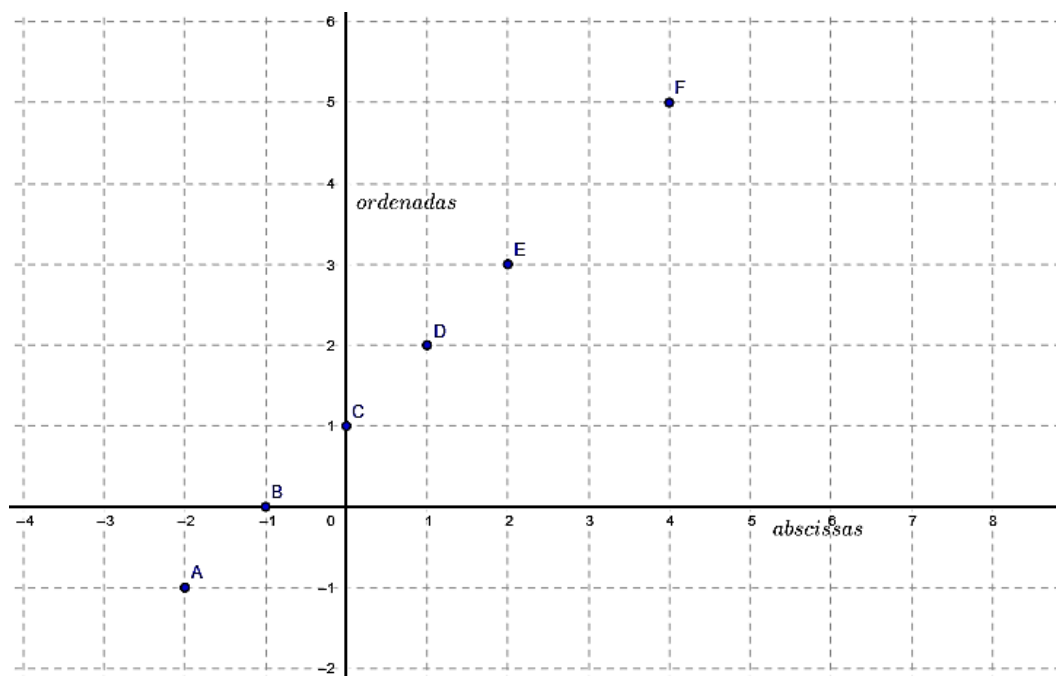
Como vimos, para ser função, cada valor de x deve ter apenas um valor de y associado.

Portanto, apenas os gráficos b) e c) representam funções.

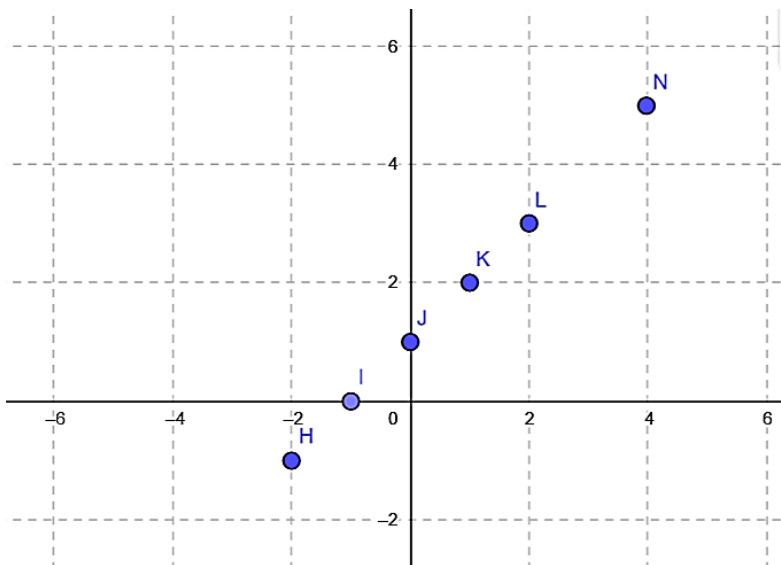
2. Em uma folha de papel sulfite construa um plano cartesiano com as características dadas abaixo. Em todos eles marque os pontos de -5 a 5 , tanto no eixo x como no eixo y . Depois, marque os seguintes pontos e una esses pontos através de uma linha contínua.

x	y
-2	-1
-1	0
0	1
1	2
2	3
4	5

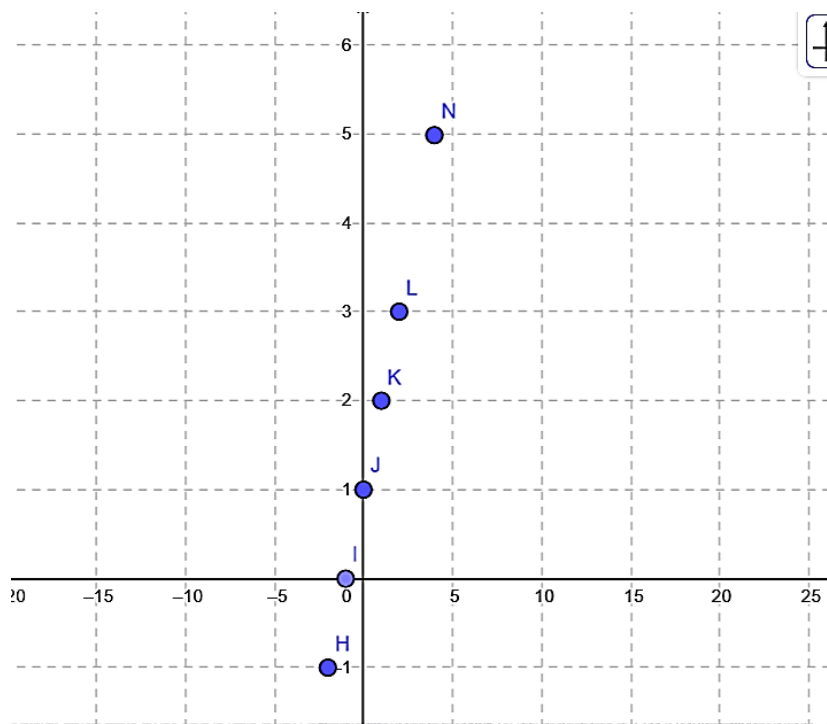
a) O espaço entre os valores no eixo das abscissas e ordenadas é de 1 cm.



b) O espaço entre os valores no eixo das abscissas e ordenadas é de 2 cm.



c) O espaço entre os valores no eixo das abscissas de 5 cm e ordenadas é de 1 cm.



d) Analise os três gráficos e escreva o que você observou ao mudar a escala de cada eixo.

R: Utilize o gráfico construído no item a) como referência.

Em b), quando aumentamos a escala dos eixos, os pontos ficam mais “juntinhos” do que na escala 1:1 (a escala utilizada no item “a”).

Em c), quando aumentamos apenas a escala das abscissas, percebemos que a distância horizontal entre os pontos diminui bastante e a distância vertical entre os pontos permanece a mesma.

Lição 59 – Funções lineares

1. Construa o gráfico das seguintes funções e classifique-as como injetivas, sobrejetivas ou bijetivas:

a) $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow f(x) = 3x - 4$

R: Comece descobrindo os $f(x)$:

$f(1) = 3 \cdot 1 - 4 = 3 - 4 = -1$

$f(2) = 3 \cdot 2 - 4 = 6 - 4 = 2$

$f(3) = 3 \cdot 3 - 4 = 9 - 4 = 5$

$f(4) = 3 \cdot 4 - 4 = 12 - 4 = 8$

-1, 2, 5 e 8 pertencem ao contradomínio $\mathbb{R}$.

O domínio é $\{1, 2, 3, 4\}$.

O contradomínio é $\mathbb{R}$.

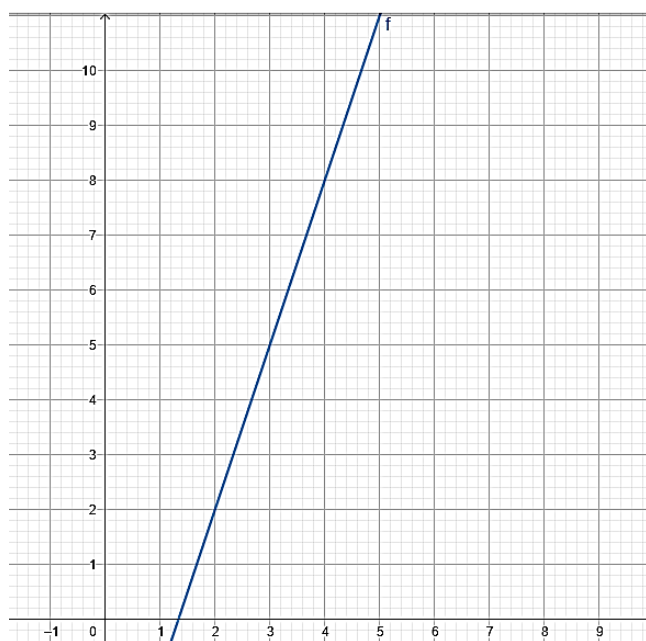
E a imagem é $\{-1, 2, 5, 8\}$

Note que a função é injetora, pois nenhum elemento do domínio fica sem imagem e todos têm apenas uma imagem só.

Ela não é sobrejetora pois o contradomínio não é igual a imagem.

Se ela é injetora, mas não é sobrejetora, não pode ser bijetora.

Portanto, a função é injetiva (injetora). O esboço de seu gráfico é:



$$b) f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{-1, 2, 5, 8\}$$

$$x \rightarrow f(x) = 3x - 4$$

Comece descobrindo os $f(x)$:

$$f(1) = 3 \cdot 1 - 4 = 3 - 4 = -1$$

$$f(2) = 3 \cdot 2 - 4 = 6 - 4 = 2$$

$$f(3) = 3 \cdot 3 - 4 = 9 - 4 = 5$$

$$f(4) = 3 \cdot 4 - 4 = 12 - 4 = 8$$

O domínio é $\{1, 2, 3, 4\}$.

O contradomínio é $\{-1, 2, 5, 8\}$.

E a imagem é $\{-1, 2, 5, 8\}$

Note que a função é injetora, pois nenhum elemento do domínio fica sem imagem e todos têm apenas uma imagem só.

Ela é sobrejetora pois o contradomínio é igual a imagem.

Se ela é injetora e sobrejetora, é bijetora.

Portanto, a função é bijetora. O esboço de seu gráfico é o mesmo do item anterior.

2. Uma fábrica de canetas tem um custo diário de produção de R\$ 120,00, mais R\$ 0,40 por caneta. Cada caneta é vendida por R\$ 1,20. Determine:

a) a lei de associação da quantidade x de canetas e do custo diário de produção $C(x)$ dessas x canetas.

R: O custo diário de produção ($C(x)$) é um valor fixo *somado* ao custo da produção de canetas, ou seja:

$$C(x) = \text{valor fixo} + 0,40 \text{ centavos por caneta}$$

- O custo fixo é 120 reais.
- “0,40” centavos por caneta significa que devemos multiplicar a quantidade de canetas produzidas por 0,40. Ou seja, se foram produzidas x canetas, o custo é: $0,40 \cdot x = 0,40x$

Então:

$$C(x) = \text{valor fixo} + 0,40 \text{ centavos por caneta}$$

$$C(x) = 120 + 0,40x$$

b) o custo diário de produção de 80 canetas.

R: A lei da função é:

$$C(x) = 120 + 0,40x$$

sendo “ $C(x)$ ” o custo de produção e “ x ” o número de canetas produzidas.

Se queremos saber o custo de 80 canetas, basta substituir “ x ” por “80”:

$$C(80) = 120 + 0,40 \cdot 80$$

$$C(80) = 120 + 32$$

$$C(80) = 152$$

Portanto, o custo de produção de 80 canetas é R\$ 152,00.

c) a lei de associação do lucro diário $L(x)$ após a venda de x canetas e essa quantidade de canetas.

R: O lucro de uma empresa é dado por:

$$\text{Lucro}(x) = \text{quanto eu ganho na venda de canetas} - \text{quanto gastei para produzir}$$

A empresa vende cada caneta por R\$ 1,20.

Se forem vendidas x canetas, a empresa ganhará $(1,20 \cdot x)$ reais → ou seja, basta multiplicar a quantidade de canetas vendidas pelo preço de cada uma.

O gasto para produção de x canetas é o próprio $C(x)$ definido no item a.

Portanto, o lucro é:

Lucro(x) = quanto eu ganho na venda de canetas – quanto gastei para produzir

$$\text{Lucro}(x) = 1,20x - C(x)$$

Troque $C(x)$ pela sua expressão ($120 + 0,40x$):

$$\text{Lucro}(x) = 1,20x - (120 + 0,40x)$$

$$\text{Lucro}(x) = 1,20x - 120 - 0,40x$$

$$\text{Lucro}(x) = 1,20x - 0,40x - 120$$

$$\text{Lucro}(x) = 0,8x - 120$$

d) o lucro da empresa com a venda de 200 canetas.

R: A lei da função é:

$$\text{Lucro}(x) = 0,8x - 120$$

sendo “ $L(x)$ ” o lucro da empresa e “ x ” o número de canetas.

Se queremos saber o lucro com a venda de 200 canetas, basta substituir “ x ” por “200”:

$$L(200) = 0,8 \cdot 200 - 120$$

$$L(200) = 160 - 120$$

$$L(200) = 40.$$

Portanto, o lucro obtido com a venda de 200 canetas é R\$ 40,00.

3. João vende jornal. Ele recebe um valor fixo de R\$ 500,00 mais R\$ 1,50 por cada unidade vendida. Determine:

a) o salário de João f , em função da quantidade x de jornais vendidos por mês.

R: O salário de João ($f(x)$) é definido por um valor fixo *mais* 1,50 por cada unidade de jornal vendida por ele, ou seja:

$$f(x) = \text{valor fixo} + 1,50 \text{ por cada jornal}$$

- O valor fixo do salário de João é 500 reais.
- “1,50 por jornal” significa que devemos multiplicar a quantidade de jornais vendidos por 1,50. Ou seja, se foram vendidos x jornais, o valor é: $1,50 \cdot x = 1,50x$

Portanto:

$$f(x) = \text{valor fixo} + 1,50 \text{ por cada jornal}$$

$$f(x) = 500 + 1,50x$$

b) quantos jornais ele deverá vender para ter um salário de R\$ 1.400,00.

R: A lei da função que representa o salário de João é:

$$f(x) = 500 + 1,50x$$

sendo “ $f(x)$ ” o salário e “ x ” a quantidade de jornais vendidos.

Se o salário de João foi 1400 reais, substitua “ $f(x)$ ” por “1400”:

$$1400 = 500 + 1,50x$$

$$1400 - 500 = 1,50x$$

$$900 = 1,50x$$

$$\frac{900}{1,50} = x$$

$$600 = x$$

Logo, $f(x) = 1400$ se $x = 600$, ou seja, ele ganhará 1400 reais se vender 600 jornais.

4. Qual é o significado dos coeficientes a e b de uma função? Dê exemplos de como podemos utilizá-los para determinar como será o gráfico de uma função.

R: O coeficiente “ a ” da função é chamado de coeficiente angular; ele está relacionado com a inclinação da reta em relação ao eixo x e também indica se a função será crescente ou decrescente. Se “ a ” for negativo, a função é decrescente e se “ a ” for positivo, a função é crescente. O coeficiente “ b ” da função é chamado de coeficiente linear e indica onde a função cortará o eixo y (das ordenadas. Ou seja, se $b = 4$, a função corta o eixo y (das ordenadas) em 4. Exemplos:

- $y = 5x + 1$

$$a = 5 \text{ e } b = 1.$$

A função é crescente ($a > 0$) e corta o eixo y no ponto $(0, 1)$ (pois $b = 1$).

- $y = -2x + 4$

$$a = -2 \text{ e } b = 4$$

A função é decrescente ($a < 0$) e corta o eixo y no ponto $(0, 4)$ (pois $b = 4$).

5. Dada a função $f(x) = -4x + 20$ calcule o valor de $f\left(\frac{11}{2}\right)$.

R: Se queremos saber $f\left(\frac{11}{2}\right)$ basta substituir “ x ” por “ $\frac{11}{2}$ ”.

$$f\left(\frac{11}{2}\right) = -4 \cdot \left(\frac{11}{2}\right) + 20$$

$$f\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{-4 \cdot 11}{2} + 20$$

$$f\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{-44}{2} + 20$$

$$f\left(\frac{11}{2}\right) = (-44 : 2) + 20$$

$$f\left(\frac{11}{2}\right) = (-22) + 20$$

$$f\left(\frac{11}{2}\right) = -2$$

6. Classifique cada função como crescente, decrescente ou constante. Indique também qual é a taxa de variação, o valor em que a reta intercepta o eixo Y e o eixo X. Depois, trace o gráfico de cada uma.

Lembre-se: a taxa de variação corresponde ao coeficiente “a”; onde a função cortará o eixo y corresponde ao coeficiente “b”; e onde a função cortará o eixo x corresponde à raiz da função (quando y = 0).

a) $f(x) = 3x + 2$

Função crescente (pois, $a > 0$).

Taxa de variação (a): 3

Onde intercepta o eixo y (b): 2

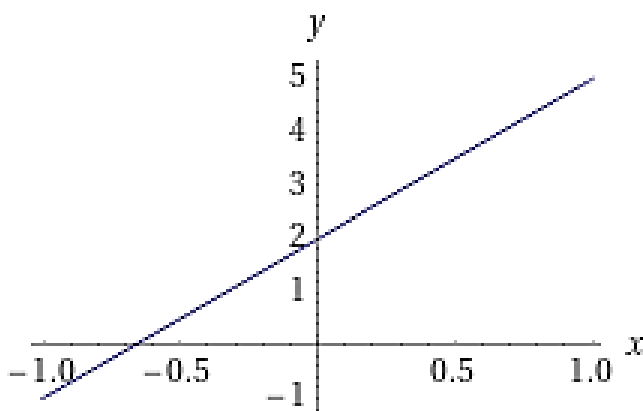
Onde intercepta o eixo x: $-\frac{2}{3}$, pois quando $y = 0$, o x vale $-\frac{2}{3}$:

$$0 = 3x + 2$$

$$0 - 2 = 3x$$

$$-2 = 3x$$

$$-\frac{2}{3} = x$$



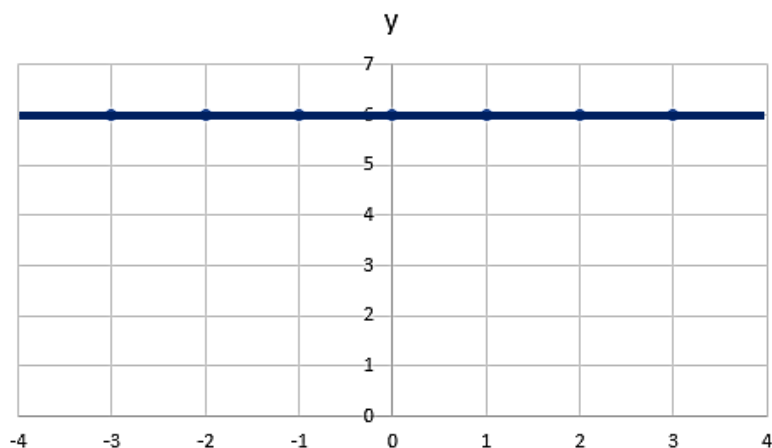
b) $f(x) = 6$

Função constante, pois $a = 0$.

Taxa de variação (a): 0

Onde intercepta o eixo y (b): 6

Onde intercepta o eixo x: não intercepta (é uma reta paralela à x, portanto, nunca interceptará esse eixo)



c) $f(x) = -2x + 1$

Função decrescente (pois, $a < 0$).

Taxa de variação (a): -2

Onde intercepta o eixo y (b): 1

Onde intercepta o eixo x: $\frac{1}{2}$, pois quando $y = 0$, o x vale $\frac{1}{2}$:

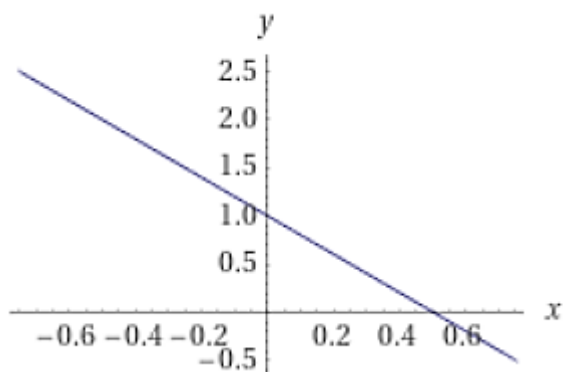
$$0 = -2x + 1$$

$$0 - 1 = -2x$$

$$-1 = -2x$$

$$1 = 2x$$

$$\frac{1}{2} = x$$



Note que $\frac{1}{2} = 0,5$.

d) $f(x) = 6 - 3x$

Função decrescente (pois, $a < 0$).

Taxa de variação (a): -3

Onde intercepta o eixo y (b): 6

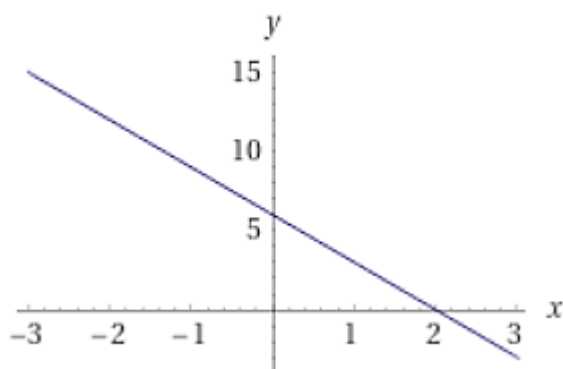
Onde intercepta o eixo x: 2, pois quando $y = 0$, o x vale 2:

$$0 = 6 - 3x$$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$



e) $f(x) = -4 + 2x$

Função crescente (pois, $a > 0$).

Taxa de variação (a): 2

Onde intercepta o eixo y (b): -4

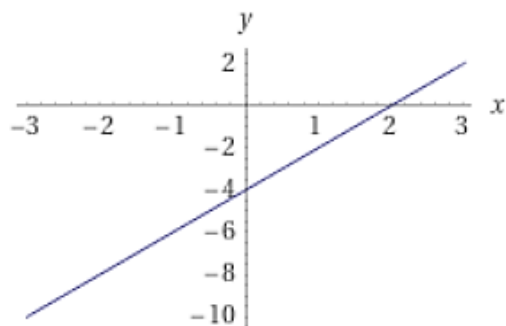
Onde intercepta o eixo x: 2, pois quando $y = 0$, o x vale 2:

$$0 = -4 + 2x$$

$$4 = 2x$$

$$\frac{4}{2} = x$$

$$2 = x$$



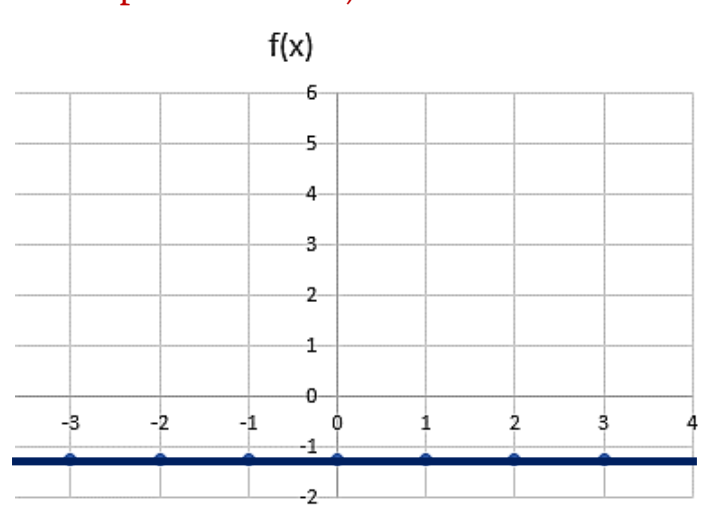
f) $f(x) = 1 - \sqrt{5}$

Função constante ($a = 0$).

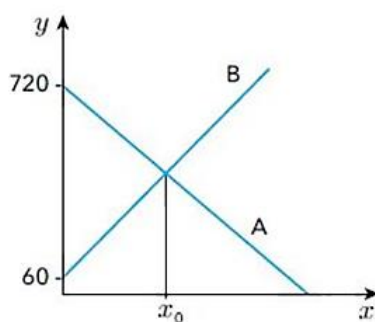
Taxa de variação (a): 0

Onde intercepta o eixo y (b): $1 - \sqrt{5}$

Onde intercepta o eixo x: não intercepta (é uma reta paralela à x, portanto, nunca interceptará esse eixo)



7. O reservatório A perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. No gráfico, estão representados, no eixo y, os volumes, em litros, da água contida em cada um dos reservatórios, em função do tempo, em horas, representado no eixo x. Determine o tempo x_0 , em horas, indicado no gráfico.



R: Queremos saber em qual valor de x as funções se encontram (x_0).

Primeiro, precisamos saber qual a expressão de cada função a partir do gráfico.

A função A é do reservatório A.

A função B é do reservatório B.

- Função A: qual sua expressão?

Ela toca o eixo y em 720, portanto seu $b = 720$.

O problema nos diz que ela perde água numa *taxa constante* de 10 litros por hora. Essa *taxa constante* é o índice de *variação da função*, ou seja, é o próprio *coeficiente a*.

Como ela está perdendo, o índice é negativo. Portanto, $a = -10$.

Logo, a expressão para a função A é:

$$A(x) = -10x + 720$$

- Função B: qual sua expressão?

Ela toca o eixo y em 60, portanto seu $b = 60$.

O problema nos diz que ela ganha água numa *taxa constante* de 12 litros por hora. Essa *taxa constante* é o índice de *variação da função*, ou seja, é o próprio *coeficiente a*. Como ela está ganhando, o índice é positivo. Portanto, $a = 12$.

Logo, a expressão para a função B é:

$$B(x) = 12x + 60$$

Agora, queremos saber quando é que $A(x) = B(x)$, ou seja, quando elas se encontram. Basta igualar as duas expressões:

$$A(x) = B(x)$$

$$-10x + 720 = 12x + 60$$

$$-10x + 720 - 60 = 12x$$

$$-10x + 660 = 12x$$

$$660 = 12x + 10x$$

$$660 = 22x$$

$$22x = 660$$

$$x = \frac{660}{22}$$

$$x = 30$$

Portanto, elas se encontram quando $x = 0$. Logo, o ponto de encontro marcado no gráfico, $x_0 = 30$.

Lição 60 – Funções quadráticas

1. Quais são as principais diferenças entre uma equação e uma função?

R: Uma equação é uma igualdade entre expressões algébricas, e apresenta no mínimo uma incógnita (um valor desconhecido). Resolver uma equação é encontrar o valor dessa incógnita. Já uma função é uma regra que relaciona cada elemento de um conjunto a um único elemento de um outro conjunto. Os valores desconhecidos das funções se denominam variáveis, pois podem mudar, diferentemente dos valores de uma equação,

por exemplo. Na realidade uma função faz uso das equações para relacionar elementos de diferentes conjuntos.

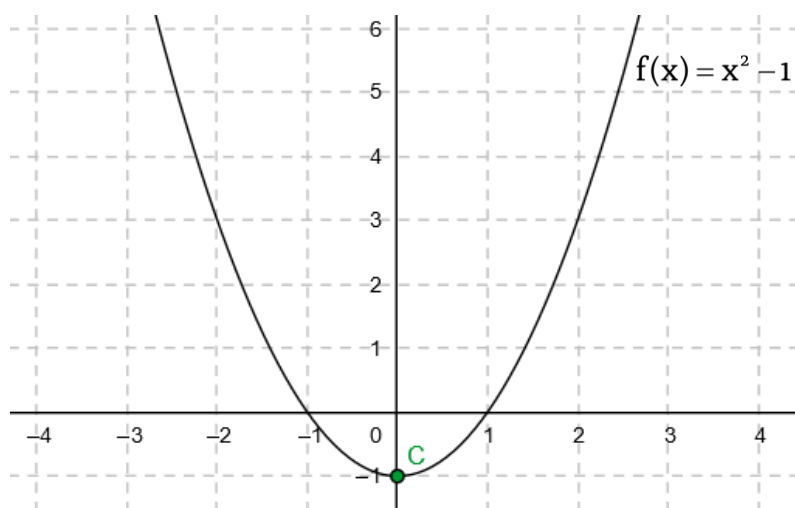
2. Explique o motivo de o nome parábola ter sido atribuído ao gráfico das funções quadráticas.

R: Porque a palavra “parábola” deriva do latim “Parabola” ou do grego “Parábole” e significa “comparação”, formada por PARA “ao lado” + BALLEIN “jogar, atirar”. No gráfico os pontos parecem ser espelhados (simétricos) e por serem espelhados podem ser comparados, postos lado a lado. Além disso, a maioria dos objetos que são lançados ou atirados descrevem no ar uma figura muito parecida com a deste gráfico.

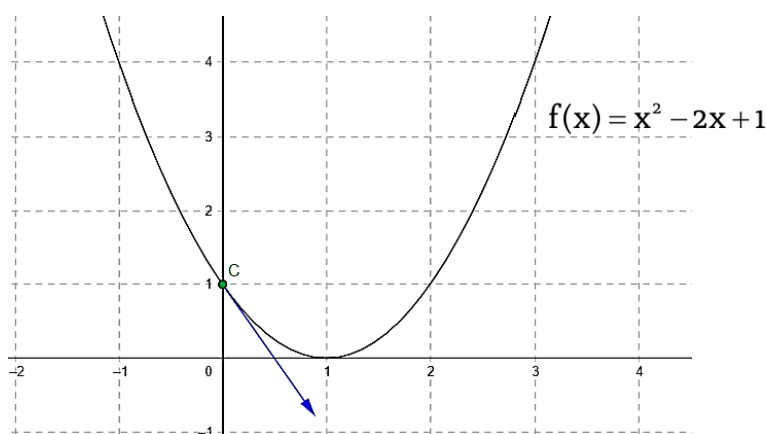
2. Faça o esboço do gráfico das seguintes funções:

Basta atribuir alguns valores a x , anotá-los em uma tabela e encontrar $f(x)$, ou seja, a imagem de cada elemento. Depois, plote o gráfico no plano cartesiano (os valores escolhidos são aleatórios).

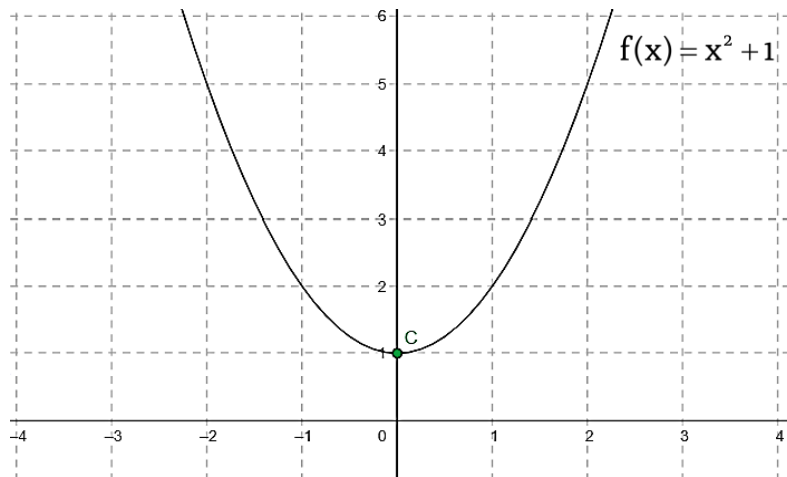
a) $f(x) = x^2 - 1$



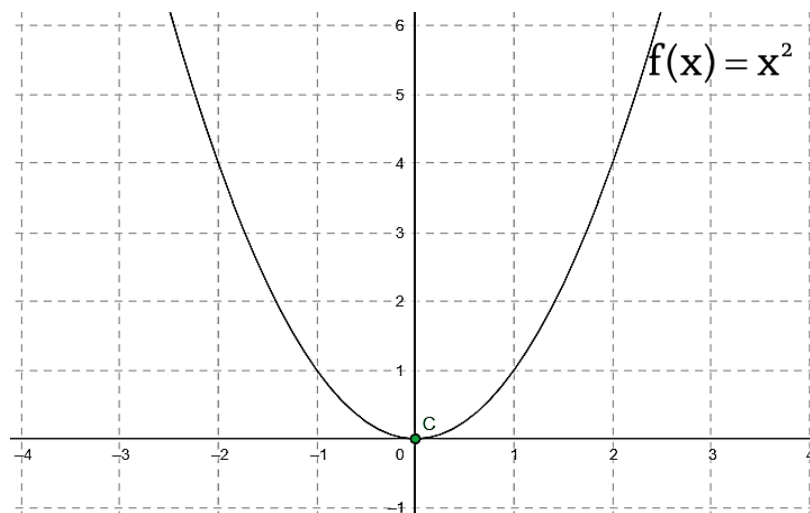
b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$



c) $f(x) = x^2 + 1$



d) $f(x) = x^2$



Lição 61 – Raízes da função quadrática

1. O que são os zeros ou raízes das funções quadráticas?

R: São os pontos em que a função passa pelo eixo x.

2. Encontre os zeros das funções abaixo e trace os gráficos (utilize papel quadriculado):

a) $f(x) = x^2 - 2x$

R: Encontre os zeros da função:

$$0 = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

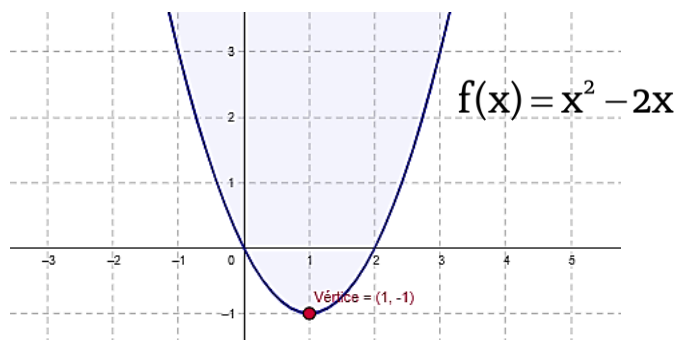
Evidencie o x.

$$x \cdot (x - 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Portanto, as raízes são 0 e 2, ou seja, o gráfico cortará o eixo x nos pontos (0,0) e (2,0). Deixe claro isto no seu esboço:



b) $f(x) = 4x^2 - 5x$

R: Encontre os zeros da função:

$$0 = 4x^2 - 5x$$

$$4x^2 - 5x = 0$$

Evidencie o x.

$$x \cdot (4x - 5) = 0$$

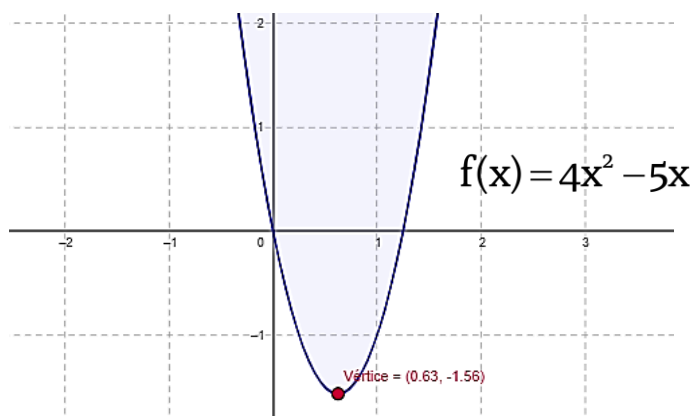
$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 4x - 5 = 0$$

$$4x = 5$$

$$x = \frac{5}{4}$$

Portanto, as raízes são 0 e $\frac{5}{4}$, ou seja, o gráfico cortará o eixo x nos pontos $(0,0)$ e $(\frac{5}{4}, 0)$.

Deixe claro isto no seu esboço:



Note que $\frac{5}{4} = 5 : 4 = 1,25$

c) $f(x) = 2x^2 + 7x + 3$

R: Encontre os zeros da função:

$$0 = 2x^2 + 7x + 3$$

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

Aplique Bhaskara.

$$a = 2 \quad b = 7 \quad c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3$$

$$\Delta = 49 - 8 \cdot 3$$

$$\Delta = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 3$$

$$\Delta = 49 - 24$$

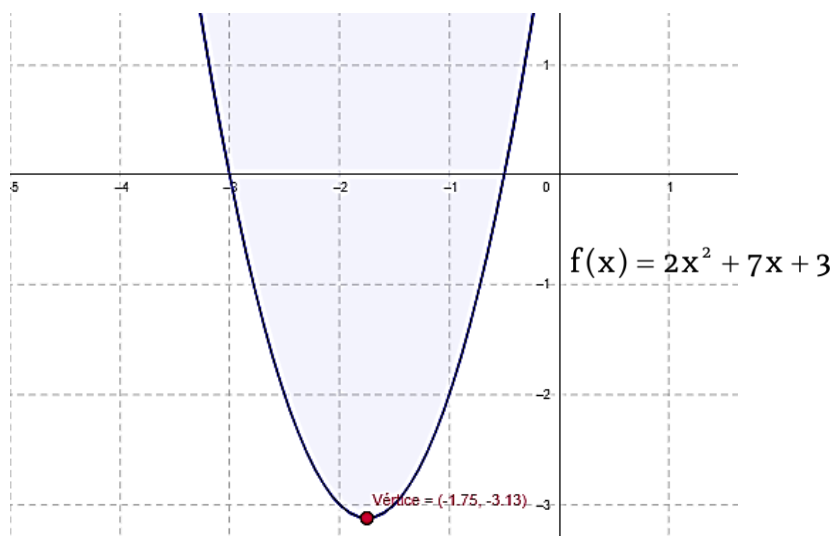
$$\Delta = 25$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 + 5}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-2 : 2}{4 : 2} = \frac{-1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 - 5}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

Portanto, as raízes são $\frac{-1}{2}$ e -3 , ou seja, o gráfico cortará o eixo x nos pontos $(-3, 0)$ e

$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Deixe claro isto no seu esboço:



Note que $\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0,5$

d) $f(x) = 8x^2 - 10x + 3$

R: Encontre os zeros da função:

$$0 = 8x^2 - 10x + 3$$

$$8x^2 - 10x + 3 = 0$$

Aplique Bhaskara.

$$a = 8 \quad b = -10 \quad c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3$$

$$\Delta = 100 - 4 \cdot 8 \cdot 3$$

$$\Delta = 100 - 32 \cdot 3$$

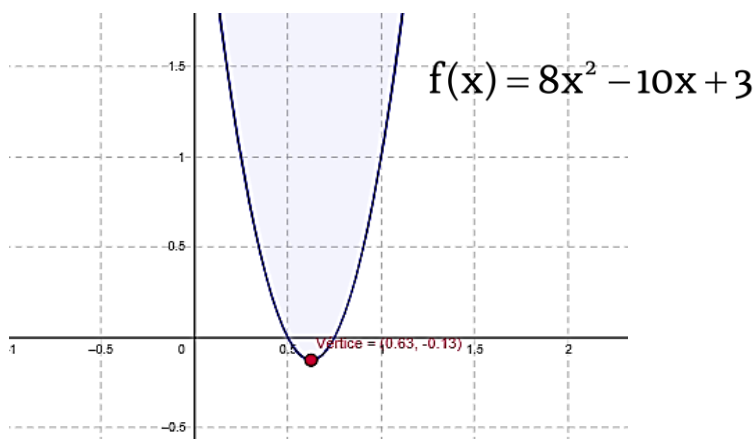
$$\Delta = 100 - 96$$

$$\Delta = 4$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) + \sqrt{4}}{2 \cdot 8} = \frac{10 + \sqrt{4}}{16} = \frac{10 + 2}{16} = \frac{12}{16} = \frac{12 : 4}{16 : 4} = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) - \sqrt{4}}{2 \cdot 8} = \frac{10 - \sqrt{4}}{16} = \frac{10 - 2}{16} = \frac{8}{16} = \frac{8 : 8}{16 : 8} = \frac{1}{2}$$

Portanto, as raízes são $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$, ou seja, o gráfico cortará o eixo x nos pontos $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$. Deixe claro isto no seu esboço:



Note que $\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0,5$ e que $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75$

e) $f(x) = x^2 + 5x - 6$

R: Encontre os zeros da função:

$$0 = x^2 + 5x - 6$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

Aplique Bhaskara.

$$a = 1 \quad b = 5 \quad c = -6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot (-6)$$

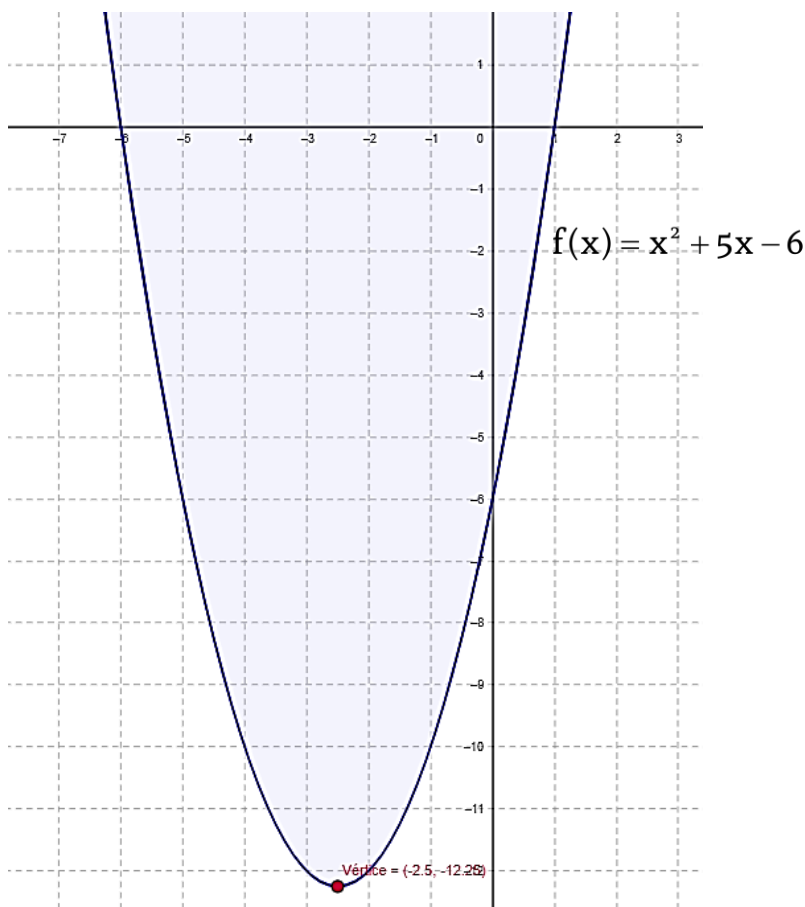
$$\Delta = 25 + 24$$

$$\Delta = 49$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 + 7}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 - 7}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

Portanto, as raízes são -6 e 1 , ou seja, o gráfico cortará o eixo x nos pontos $(-6,0)$ e $(1,0)$.
Deixe claro isto no seu esboço:



3. Para que valores reais de m a função $f(x) = (m - 1)x^2 - 4x - 1$ não admite zeros reais?

R: Lembre-se do conteúdo que vimos sobre o determinante (Δ). Podemos, pelo Δ , dizer se a função tem dois zeros reais, um zero real ou nenhum.

Neste caso, queremos que tal função não tenha zeros reais, ou seja que seu determinante seja negativo: $\Delta < 0$.

Vamos escrever a expressão de seu determinante:

$$\Delta < 0$$

$$b^2 - 4ac < 0$$

Os coeficientes desta função são:

$$a = (m - 1) \quad b = -4 \quad c = -1$$

Substitua-os:

$$(-4)^2 - 4 \cdot (m - 1) \cdot (-1) < 0$$

$$16 - 4 \cdot (m - 1) \cdot (-1) < 0$$

$$16 + [-4 \cdot m \cdot -4 \cdot (-1)] \cdot (-1) < 0$$

$$16 + [-4m + 4] \cdot (-1) < 0$$

$$16 + -4m \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) < 0$$

$$16 + 4m - 4 < 0$$

$$4m + 16 - 4 < 0$$

$$4m + 12 < 0$$

$$4m < -12$$

$$m < \frac{-12}{4}$$

$$m < -3$$

Então, para $m < -3$, o discriminante é menor que zero e, portanto, a função não tem zeros reais quando $m < -3$.

4. Para que valores reais de k a função $f(x) = kx^2 - 6x + 1$ admite zeros reais e diferentes?

R: Lembre-se do conteúdo que vimos sobre o determinante (Δ). Podemos, pelo Δ , dizer se a função tem dois zeros reais, um zero real ou nenhum.

Neste caso, queremos que tal função tenha 2 zeros reais (“zeros reais e diferentes”), ou seja que seu determinante seja positivo: $\Delta > 0$.

Vamos escrever a expressão de seu determinante:

$$\Delta > 0$$

$$b^2 - 4ac > 0$$

Os coeficientes desta função são:

$$a = k \quad b = -6 \quad c = 1$$

Substitua-os:

$$(-6)^2 - 4 \cdot k \cdot 1 > 0$$

$$36 - 4 \cdot k \cdot 1 > 0$$

$$36 - 4k \cdot 1 > 0$$

$$36 - 4k > 0$$

$$-4k > 0 - 36$$

$$-4k > -36$$

$$-4k > -36 \cdot (-1)$$

$$4k < 36$$

$$k < \frac{36}{4}$$

$$k < 9$$

Então, para $k < 9$, o discriminante é maior que zero e, portanto, a função tem zeros reais e diferentes quando $k < 9$.

Lição 62 – Os coeficientes da função quadrática

1. Explique, de maneira breve, o significado de cada um dos coeficientes na construção do gráfico das funções quadráticas.

R: O coeficiente “a” indica se a concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo. Se $a > 0$, a concavidade é voltada para cima. Se $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo. Já “b” indica como a parábola corta o eixo y. Se $b > 0$, a parábola corta o eixo y crescendo. Se $b < 0$, a parábola corta o eixo y decrescendo. E “c” indica onde a parábola corta o eixo y.

2. Determine o valor de m na função real $f(x) = 3x^2 - 2x + m$ para que o valor mínimo seja $\frac{5}{3}$.

R: O valor mínimo de uma função é o y_v (y “vértice”).

O valor mínimo (y_v) está associado ao ponto mínimo, isto é, ao x_v (x “vértice”). Calculamos o x_v de qualquer função pela expressão:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Calcule o x_v desta função (note que $a = 3$ e $b = -2$):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{2:2}{6:2} = \frac{1}{3}$$

Também sabemos que y_v é imagem do x_v , ou seja: $f(x_v) = y_v$.

Na lei da função, substitua os valores de y_v e x_v :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + m$$

$$f(x_v) = 3x_v^2 - 2x_v + m$$

$$y_v = 3x_v^2 - 2x_v + m$$

$$\frac{5}{3} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} + m$$

$$\frac{5}{3} = 3 \cdot \frac{1^2}{3^2} - 2 \cdot \frac{1}{3} + m$$

$$\frac{5}{3} = 3 \cdot \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} + m$$

$$\frac{5}{3} = \frac{3 \cdot 1}{9} - \frac{2 \cdot 1}{3} + m$$

$$\frac{5}{3} = \frac{3}{9} - \frac{2}{3} + m$$

Simplifique $\frac{3}{9}$:

$$\frac{5}{3} = \frac{3:3}{9:3} - \frac{2}{3} + m$$

$$\frac{5}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + m$$

$$\frac{5}{3} = \frac{1-2}{3} + m$$

$$\frac{5}{3} = \frac{-1}{3} + m$$

$$\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = m$$

$$\frac{5+1}{3} = m$$

$$\frac{6}{3} = m$$

$$2 = m$$

Então, quando $m = 2$, o y_v vale $\frac{5}{3}$.

3. Dada a função $f(x) = 2x^2 + 7x - 15$, para que valor de x a função atinge um valor mínimo?

R: O valor mínimo de uma função é o y_v (y “vértice”).

O valor mínimo (y_v) está associado ao ponto mínimo, isto é, ao x_v (x “vértice”). Calculamos o x_v de qualquer função pela expressão:

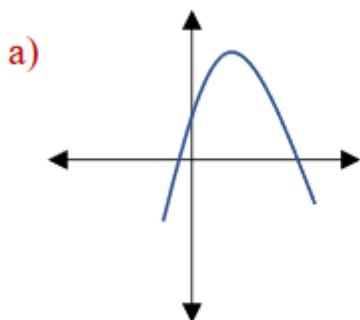
$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Calcule o x_v desta função (note que $a = 2$ e $b = 7$):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-7}{2 \cdot 2} = \frac{-7}{4}$$

Também sabemos que y_v (VALOR MÍNIMO) é imagem do x_v , ou seja: $f(x_v) = y_v$. Portanto, para $x = \frac{-7}{4}$ a função atinge o valor mínimo.

4. Em cada gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ comente os valores a , b , c e Δ .

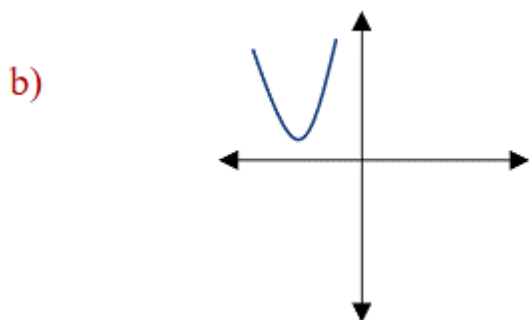


$a < 0 \rightarrow$ pois, a concavidade da parábola está para baixo.

$b > 0 \rightarrow$ pois, a parábola intercepta o eixo das ordenadas crescendo

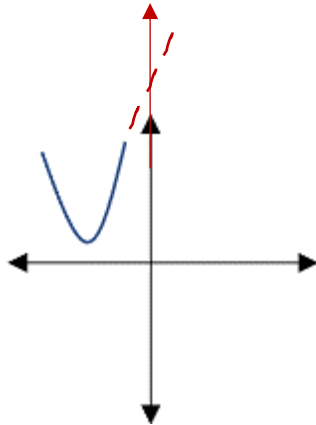
$c > 0 \rightarrow$ pois, a parábola corta o eixo das ordenadas em sua parte positiva.

$\Delta > 0 \rightarrow$ pois, a parábola possui duas raízes reais e distintas (corta o eixo das abscissas em DOIS pontos distintos).



$a > 0 \rightarrow$ pois, a concavidade da parábola está para cima.

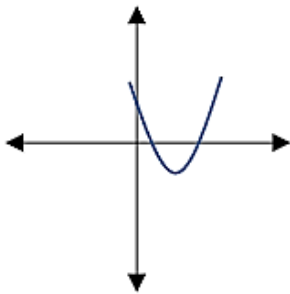
$b > 0 \rightarrow$ pois, a parábola intercepta o eixo das ordenadas crescendo (se continuarmos uma parte imaginária isso acontecerá):



$c > 0 \rightarrow$ pois, a parábola corta o eixo das ordenadas em sua parte positiva (se continuarmos uma parte imaginária isso acontecerá).

$\Delta < 0 \rightarrow$ pois, a parábola não possui raízes reais (NÃO corta o eixo das abscissas).

c)



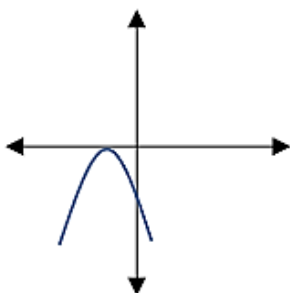
$a > 0 \rightarrow$ pois, a concavidade da parábola está para cima.

$b < 0 \rightarrow$ pois, a parábola intercepta o eixo das ordenadas decrescendo.

$c > 0 \rightarrow$ pois, a parábola corta o eixo das ordenadas em sua parte positiva.

$\Delta > 0 \rightarrow$ pois, a parábola possui duas raízes reais e distintas (corta o eixo das abscissas em DOIS pontos distintos).

d)



$a < 0 \rightarrow$ pois, a concavidade da parábola está para baixo.

$b < 0 \rightarrow$ pois, a parábola intercepta o eixo das ordenadas decrescendo.

$c < 0 \rightarrow$ pois, a parábola corta o eixo das ordenadas em sua parte negativa.

$\Delta = 0$, pois a parábola possui *apenas uma* raiz real (ela corta o eixo das abcissas em apenas UM ponto).

5. Analise as funções a seguir e descreva como o gráfico irá se comportar. Após essa análise, construa o gráfico:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

R: A concavidade da parábola será para cima ($a > 0$, pois $a = 1$).

Ela interceptará o eixo y em $(0, -3) \rightarrow$ pois $c = -3$

Ela interceptará o eixo y DECRESCENDO $\rightarrow$ pois, $b = -2$ ($b < 0$)

Como $\Delta > 0$, a função possui duas raízes reais e distintas.

Calcule as raízes da função (Aplique Bhaskara.):

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-3)$$

$$\Delta = 4 + 12$$

$$\Delta = 16$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Portanto, a função tem 3 e -1 como raiz, ou seja, cortará o eixo x em $(3, 0)$ e $(-1, 0)$.

Descubra X_v (note que $a = 1$ e $b = -2$).

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Encontre y_v substituindo x_v na lei da função:

$$y_v = x_v^2 - 2x_v - 3$$

$$y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3$$

$$y_v = 1 - 2 \cdot 1 - 3$$

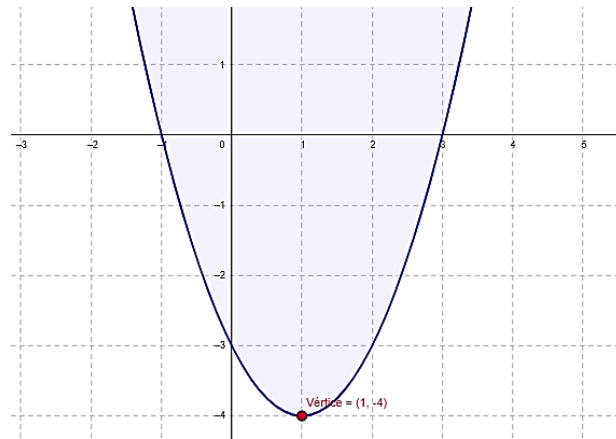
$$y_v = 1 - 2 - 3$$

$$y_v = 1 - 5$$

$$y_v = -4$$

Portanto, o vértice da parábola é $(x_v, y_v) = (1, -4)$

Note que você já tem 4 pontos do gráfico: $(0, -3)$, $(3, 0)$, $(-1, 0)$ e $(1, -4) \rightarrow$ ou seja, a intersecção com o eixo y, as raízes e o vértice. Faça o esboço deixando esses pontos claros:



b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

R: A concavidade da parábola será para baixo ($a < 0$, pois $a = -1$).

Ela interceptará o eixo y em $(0, 3) \rightarrow$ pois $c = 3$

Ela interceptará o eixo x CRESCENDO $\rightarrow$ pois, $b = 2$ ($b > 0$)

Como $\Delta > 0$, a função possui duas raízes reais e distintas.

Calcule as raízes da função (Aplique Bhaskara.):

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$a = -1 \quad b = 2 \quad c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-1) \cdot 3$$

$$\Delta = 4 + 4 \cdot 3$$

$$\Delta = 4 + 12$$

$$\Delta = 16$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 + 4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 - 4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Portanto, a função tem 3 e -1 como raiz, ou seja, cortará o eixo x em (3, 0) e (-1, 0).

Descubra x_v (note que $a = -1$ e $b = 2$).

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Encontre y_v substituindo x_v na lei da função:

$$y_v = -x_v^2 + 2x_v + 3$$

$$y_v = -(1)^2 + 2 \cdot 1 + 3$$

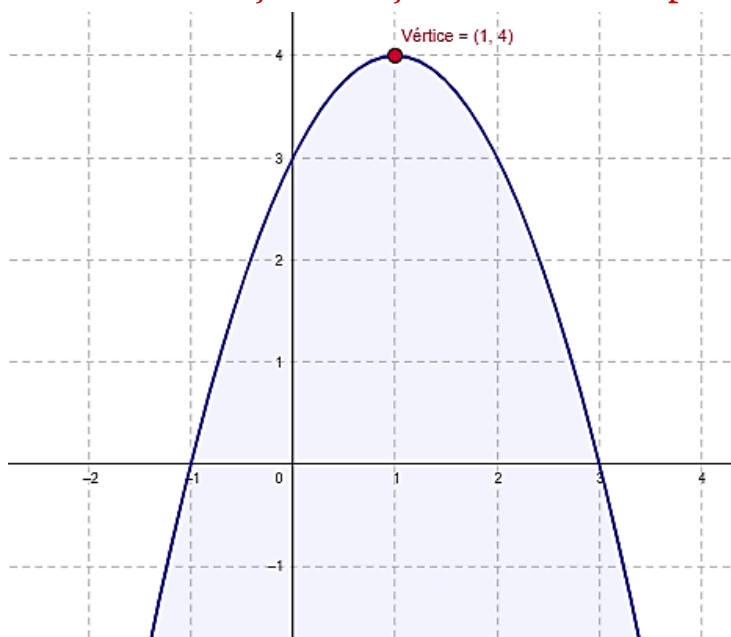
$$y_v = -1 + 2 \cdot 1 + 3$$

$$y_v = -1 + 2 + 3$$

$$y_v = 4$$

Portanto, o vértice da parábola é $(x_v, y_v) = (1, 4)$

Note que você já tem 4 pontos do gráfico: (0, 3), (3, 0), (-1, 0) e (1, 4) → ou seja, a intersecção com o eixo y, as raízes e o vértice. Faça o esboço deixando esses pontos claros:



c) $f(x) = x^2 - 2x + 4$

R: A concavidade da parábola será para cima ($a > 0$, pois $a = 1$).

Ela interceptará o eixo y em $(0, 4) \rightarrow$ pois $c = 4$

Ela interceptará o eixo y DECRESCENDO $\rightarrow$ pois, $b = -2$ ($b < 0$)

Como $\Delta < 0$, a função NÃO terá raízes reais:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 4$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 4$$

$$\Delta = 4 - 16$$

$$\Delta = -12$$

Descubra X_v (note que $a = 1$ e $b = -2$).

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Encontre y_v substituindo x_v na lei da função:

$$f(x) = x^2 - 2x + 4$$

$$f(x_v) = x_v^2 - 2x_v + 4$$

$$y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 + 4$$

$$y_v = 1 - 2 \cdot 1 + 4$$

$$y_v = 1 - 2 + 4$$

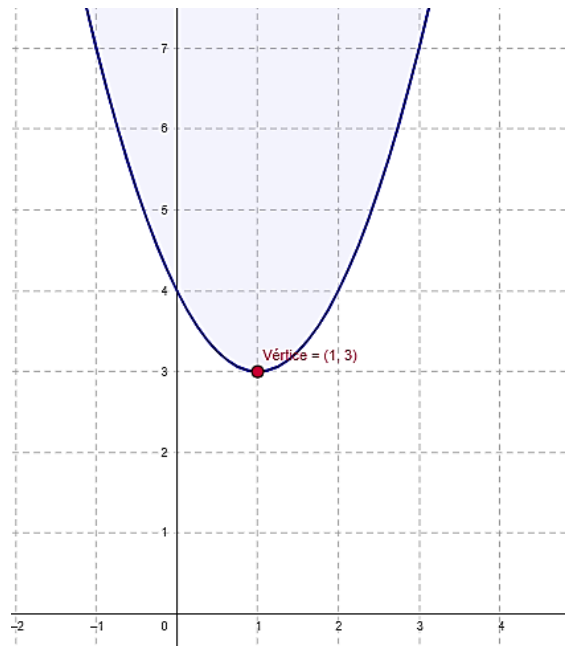
$$y_v = 1 - 2 + 4$$

$$y_v = -1 + 4$$

$$y_v = 3$$

Portanto, o vértice da parábola é $(x_v, y_v) = (1, 3)$

Note que você já tem 2 pontos do gráfico: $(0, 4)$ e $(1, 3) \rightarrow$ ou seja, a intersecção com o eixo y e o vértice. Faça o esboço deixando esses pontos claros:



d) $f(x) = -2x^2 - 4x$

R: A concavidade da parábola será para baixo ($a < 0$, pois $a = -2$).

Ela interceptará o eixo y em $(0, 0) \rightarrow$ pois $c = 0$

Ela interceptará o eixo y DECRESCENDO $\rightarrow$ pois, $b = -4$ ($b < 0$)

Como $\Delta > 0$, a função possui duas raízes reais e distintas.

Calcule as raízes da função (Aplique Bhaskara.):

$$-2x^2 - 4x = 0$$

$$a = -2 \quad b = -4 \quad c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0$$

$$\Delta = 16 + 8 \cdot 0$$

$$\Delta = 16 + 0$$

$$\Delta = 16$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{16}}{2 \cdot (-2)} = \frac{4 + 4}{-4} = \frac{8}{-4} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{16}}{2 \cdot (-2)} = \frac{4 - 4}{-4} = \frac{0}{-4} = 0$$

Portanto, a função tem -2 e 0 como raiz, ou seja, cortará o eixo x em $(-2, 0)$ e $(0, 0)$.

Descubra X_v (note que $a = -2$ e $b = -4$) .

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot (-2)} = \frac{4}{-4} = -1$$

Encontre y_v substituindo x_v na lei da função:

$$f(x) = -2x^2 - 4x$$

$$f(x_v) = -2x_v^2 - 4x_v$$

$$y_v = -2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1)$$

$$y_v = -2 \cdot 1 - 4 \cdot (-1)$$

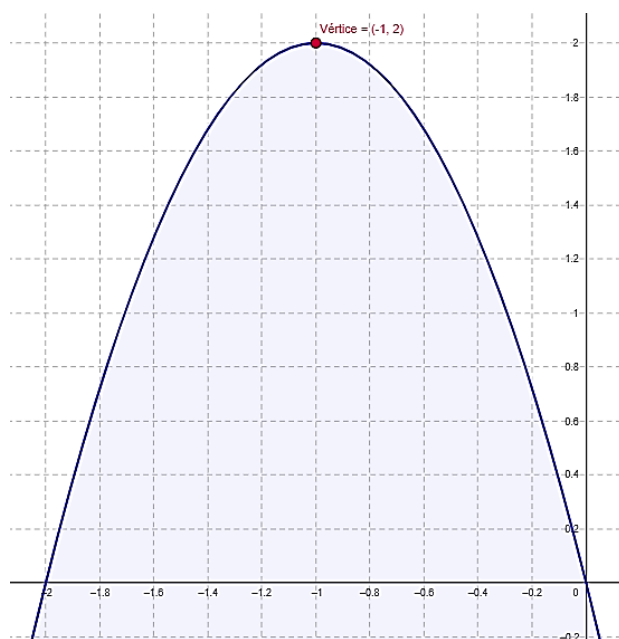
$$y_v = -2 - 4 \cdot (-1)$$

$$y_v = -2 + 4$$

$$y_v = 2$$

Portanto, o vértice da parábola é $(x_v, y_v) = (-1, 2)$

Note que você já tem 3 pontos do gráfico: $(0, 0)$, $(-2, 0)$, $(-1, 2)$. Faça o esboço deixando esses pontos claros:



6. O que são o ponto e o valor máximo ou o ponto e valor mínimo de uma função? Em que situações cada um aparece?

R: O ponto de valor máximo ou mínimo de uma parábola é o vértice da parábola, ou seja, o ponto em que ela muda de sentido, onde se localiza seu eixo de simetria.

O valor máximo de uma função é o maior “y” que ela atinge, ou seja, ela cresce até determinado y e depois começa a decrescer. O valor máximo ocorre em parábolas com concavidade voltada para baixo ($a < 0$). O valor máximo de uma função é y_v .

O valor mínimo é o menor “y” que a função atinge, ou seja, ela decresce até esse y e depois começa a crescer. O valor mínimo ocorre em parábolas com concavidade voltada para cima ($a > 0$). O valor mínimo de uma função é também y_v .

7. Em funções cujo discriminante é maior do que zero, como pode ser encontrado o vértice da parábola?

R: O vértice da parábola é formado por um par ordenado que será identificado como (x_v, y_v) . Nas funções que possuem duas raízes reais, para encontrar o ponto x_v , basta fazer a média aritmética entre as raízes da função, ou seja:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Ou ainda, é possível determiná-lo pela seguinte expressão:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Encontrado o ponto x_v , basta substituí-lo na função para encontrar o ponto y_v :

$$f(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c$$

8. Determine os vértices das parábolas:

a) $y = x^2 - 4$

R: Descubra x_v (note que $a = 1$ e $b = 0$):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2 \cdot 1} = \frac{0}{2} = 0$$

Encontre y_v substituindo x_v na lei da função:

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$f(x_v) = x_v^2 - 4$$

$$y_v = 0^2 - 4$$

$$y_v = 0 - 4$$

$$y_v = -4$$

Portanto, o vértice da parábola é $(x_v, y_v) = (0, -4)$.

b) $y = 2x^2 - 5x + 2$

R: Descubra X_v (note que $a = 2$ e $b = -5$):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$$

Encontre y_v substituindo x_v na lei da função:

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 2$$

$$f(x_v) = 2x_v^2 - 5x_v + 2$$

$$y_v = 2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{4} + 2$$

$$y_v = 2 \cdot \frac{5^2}{4^2} - 5 \cdot \frac{5}{4} + 2$$

$$y_v = 2 \cdot \frac{25}{16} - 5 \cdot \frac{5}{4} + 2$$

$$y_v = 2 \cdot \frac{25}{16} - 5 \cdot \frac{5}{4} + 2$$

$$y_v = \frac{2 \cdot 25}{16} - \frac{5 \cdot 5}{4} + 2$$

$$y_v = \frac{50}{16} - \frac{25}{4} + 2$$

$$y_v = \frac{50}{16} - \frac{25}{4} + \frac{2}{1}$$

$$y_v = \frac{50}{16} - \frac{25 \cdot 4}{4 \cdot 4} + \frac{2 \cdot 16}{1 \cdot 16}$$

$$y_v = \frac{50}{16} - \frac{100}{16} + \frac{32}{16}$$

$$y_v = \frac{50 - 100 + 32}{16}$$

$$y_v = \frac{-18}{16}$$

Simplifique a fração.

$$y_v = \frac{-18 : 2}{16 : 2} = \frac{-9}{8}$$

Portanto, o vértice da parábola é $(x_v, y_v) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$

$$c) y = -x^2 + x - \frac{2}{9}$$

R: Descubra X_v (note que $a = -1$ e $b = 1$):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Encontre y_v substituindo x_v na lei da função:

$$f(x) = -x^2 + x - \frac{2}{9}$$

$$f(x_v) = -x_v^2 + x_v - \frac{2}{9}$$

$$y_v = -x_v^2 + x_v - \frac{2}{9}$$

$$y_v = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{2}{9}$$

$$y_v = -\frac{1^2}{2^2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{9}$$

$$y_v = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{9}$$

$$y_v = -\frac{1 \cdot 9}{4 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 18}{2 \cdot 18} - \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4}$$

$$y_v = -\frac{9}{36} + \frac{18}{36} - \frac{8}{36}$$

$$y_v = \frac{-9 + 18 - 8}{36}$$

$$y_v = \frac{1}{36}$$

Portanto, o vértice da parábola é $(x_v, y_v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{36}\right)$

9. Determine o valor máximo ou o valor mínimo e o ponto de máximo ou ponto de mínimo das funções abaixo:

O valor máximo ou mínimo é y_v .

O ponto de máximo ou ponto de mínimo é x_v .

Então, precisamos descobrir x_v e y_v .

a) $f(x) = -3x^2 + 12x$

R: A parábola possui a concavidade para baixo, pois $a < 0$. Portanto, ela possui ponto de máxima e valor máximo.

Descubra X_v , isto é, o ponto de máxima (note que $a = -3$ e $b = 12$):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2 \cdot (-3)} = \frac{-12}{-6} = 2$$

Encontre y_v (valor máximo) substituindo x_v na lei da função:

$$f(x) = -3x^2 + 12x$$

$$f(x_v) = -3x_v^2 + 12x_v$$

$$y_v = -3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2$$

$$y_v = -3 \cdot 4 + 12 \cdot 2$$

$$y_v = -12 + 12 \cdot 2$$

$$y_v = -12 + 24$$

$$y_v = 12$$

Portanto, o valor máximo da função é 12. O ponto de máximo é 2.

b) $f(x) = 4x^2 - 8x + 4$

R: A parábola possui a concavidade para cima, pois $a > 0$. Portanto, ela possui ponto de mínima e valor mínimo.

Descubra X_v , isto é, o ponto de mínimo (note que $a = 4$ e $b = -8$):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2 \cdot 4} = \frac{8}{8} = 1$$

Encontre y_v (valor máximo) substituindo x_v na lei da função:

$$f(x) = 4x^2 - 8x + 4$$

$$f(x_v) = 4x_v^2 - 8x_v + 4$$

$$y_v = 4 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 4$$

$$y_v = 4 \cdot 1 - 8 \cdot 1 + 4$$

$$y_v = 4 - 8 \cdot 1 + 4$$

$$y_v = 4 - 8 + 4$$

$$y_v = -4 + 4$$

$$y_v = 0$$

Portanto, o valor mínimo da função é 0. O ponto de mínimo é 1.

$$c) f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}$$

R: A parábola possui a concavidade para baixo, pois $a < 0$. Portanto, ela possui ponto de máxima e valor máximo.

Descubra X_v , isto é, o ponto de mínimo (note que $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{4}{3}$):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-\left(\frac{4}{3}\right)}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{2 \cdot -1}{2}} = \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{-2}{2}} = \frac{-\frac{4}{3}}{-1} = \frac{-4}{3} : -1 = \frac{4}{3} : 1 = \frac{4}{3}$$

Encontre y_v (valor máximo) substituindo x_v na lei da função:

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}$$

$$f(x_v) = -\frac{x_v^2}{2} + \frac{4}{3}x_v - \frac{1}{2}$$

$$f(x_v) = -\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{2}$$

$$f(x_v) = -\frac{\left(\frac{4^2}{3^2}\right)}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{2}$$

$$f(x_v) = -\frac{\left(\frac{16}{9}\right)}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{2}$$

$$f(x_v) = -\frac{\left(\frac{16}{9}\right)}{2} + \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 3} - \frac{1}{2}$$

$$f(x_v) = -\frac{\left(\frac{16}{9}\right)}{2} + \frac{16}{9} - \frac{1}{2}$$

$$f(x_v) = \left(-\frac{16}{9} : 2\right) + \frac{16}{9} - \frac{1}{2}$$

$$f(x_v) = \left(-\frac{16}{9} : \frac{2}{1}\right) + \frac{16}{9} - \frac{1}{2}$$

$$f(x_v) = \left(-\frac{16}{9} \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{16}{9} - \frac{1}{2}$$

$$f(x_v) = \frac{-16 \cdot 1}{9 \cdot 2} + \frac{16}{9} - \frac{1}{2}$$

$$f(x_v) = \frac{-16}{18} + \frac{16}{9} - \frac{1}{2}$$

Simplifique $\frac{-16}{18}$:

$$f(x_v) = \frac{-16 : 2}{18 : 2} + \frac{16}{9} - \frac{1}{2}$$

$$f(x_v) = \frac{-8}{9} + \frac{16}{9} - \frac{1}{2}$$

$$f(x_v) = \frac{-8 + 16}{9} - \frac{1}{2}$$

$$f(x_v) = \frac{8}{9} - \frac{1}{2}$$

$$f(x_v) = \frac{8 \cdot 2}{9 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 9}{2 \cdot 9}$$

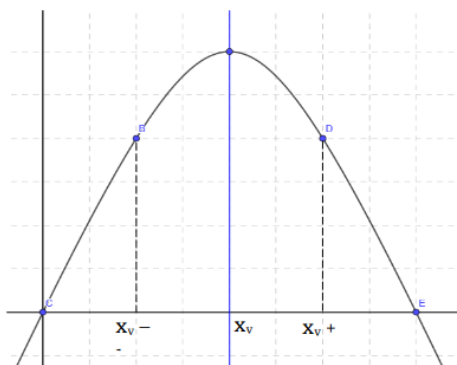
$$f(x_v) = \frac{16}{18} - \frac{9}{18}$$

$$f(x_v) = \frac{16 - 9}{18}$$

$$f(x_v) = \frac{7}{18}$$

Portanto, o valor máximo da função é $y_v = \frac{7}{18}$. O ponto de máximo é $\frac{4}{3}$.

10. Demonstre como encontrar x_v de qualquer parábola através do gráfico a seguir:



O aluno deve tentar demonstrar sozinho. A demonstração está na própria lição:

11. Determine os zeros, o vértice, o valor máximo/mínimo e o ponto máximo/mínimo da parábola dada pela função $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Construa o gráfico.

R: Encontre os zeros da função. Aplique Bhaskara.

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -3 \quad c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 2$$

$$\Delta = 9 - 8$$

$$\Delta = 1$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Portanto, a função tem 1 e 2 como raiz, ou seja, cortará o eixo x em (1, 0) e (2, 0).

Descubra x_v (note que $a = 1$ e $b = -3$).

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

Encontre y_v (valor máximo) substituindo x_v na lei da função:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$f(x_v) = x_v^2 - 3x_v + 2$$

$$y_v = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2$$

$$y_v = \frac{3^2}{2^2} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2$$

$$y_v = \frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2$$

$$y_v = \frac{9}{4} - \frac{3 \cdot 3}{2} + 2$$

$$y_v = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2$$

$$y_v = \frac{9}{4} - \frac{9 \cdot 2}{2 \cdot 2} + 2$$

$$y_v = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + 2$$

$$y_v = \frac{9 - 18}{4} + 2$$

$$y_v = \frac{-9}{4} + 2$$

$$y_v = \frac{-9}{4} + \frac{2}{1}$$

$$y_v = \frac{-9}{4} + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 4}$$

$$y_v = \frac{-9}{4} + \frac{8}{4}$$

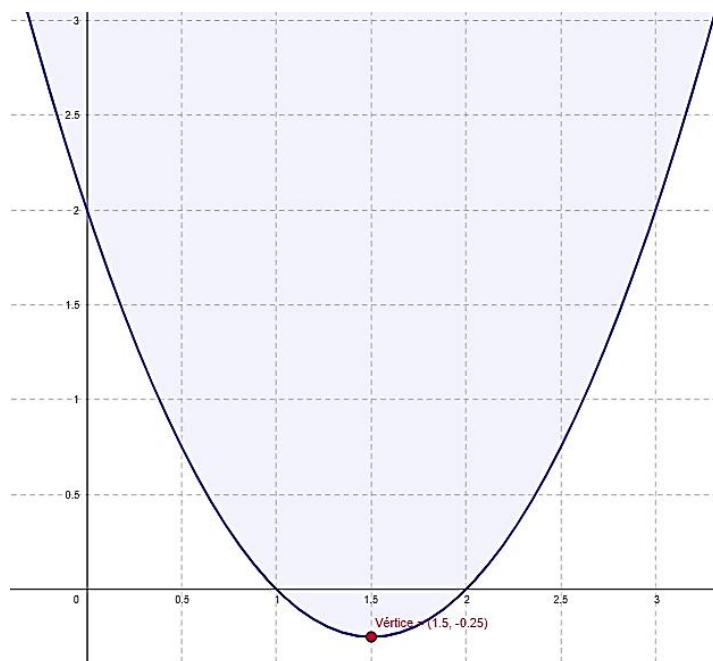
$$y_v = \frac{-9 + 8}{4}$$

$$y_v = \frac{-1}{4}$$

Portanto, o vértice da parábola é $(x_v, y_v) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

Como $c = 2$, também sabemos que a função corta o eixo y em $(0, 2)$.

Note que você já tem 4 pontos do gráfico: $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$ e $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right) \rightarrow$ ou seja, a intersecção com o eixo y, as raízes e o vértice. Faça o esboço deixando esses pontos claros:



12. A parábola da equação $f(x) = -2x^2 + bx + c$ passa pelo ponto $(1, 0)$ e seu vértice é o ponto de coordenadas $(3, v)$. Determine v .

R: Com alguns dados do problema conseguimos descobrir quanto vale o coeficiente b da função.

Sabemos que vértice é dado pelos ponto: (x_v, y_v) . O vértice da função é $(3, v)$.

Portanto, $x_v = 3$ e $y_v = v$.

Sabemos calcular x_v pela expressão:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Note que:

- $b = b$ (o coeficiente b vale " b ") ;
- $a = -2$;
- $x_v = 3$.

Substitua esses valores na expressão do x_v :

$$3 = \frac{-b}{2 \cdot (-2)}$$

$$3 = \frac{-b}{-4}$$

$$3 \cdot (-4) = -b$$

$$-12 = -b$$

$$12 = b$$

$$b = 12$$

Assim, descobrimos que o coeficiente “b” vale 12. A lei da função fica:

$$f(x) = -2x^2 + bx + c \rightarrow f(x) = -2x^2 + 12x + c$$

Resta descobrir quanto vale o coeficiente c.

Se a função passa pelo ponto $(x, y) = (1, 0)$, substitua “1” no lugar do x e “0” no lugar do y na lei da função:

$$f(x) = -2x^2 + 12x + c$$

$$y = -2x^2 + 12x + c$$

$$0 = -2 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + c$$

$$0 = -2 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + c$$

$$0 = -2 + 12 \cdot 1 + c$$

$$0 = -2 + 12 + c$$

$$0 = 10 + c$$

$$0 - 10 = c$$

$$-10 = c$$

$$c = -10$$

Assim, descobrimos que o coeficiente “c” vale -10. A lei da função fica:

$$f(x) = -2x^2 + 12x + c \rightarrow f(x) = -2x^2 + 12x - 10$$

Agora, precisamos descobrir “v” que, como definimos nas primeiras linhas da resolução deste exercício, é o y_v .

Sabendo a lei da função, basta substituir o valor do x_v no lugar de x, para descobrir o nosso y_v :

Observação → no início do exercício também definimos que $x_v = 3$.

$$f(x) = -2x^2 + 12x - 10$$

$$f(x_v) = -2x_v^2 + 12x_v - 10$$

$$y_v = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 10$$

$$y_v = -2 \cdot 9 + 12 \cdot 3 - 10$$

$$y_v = -18 + 12 \cdot 3 - 10$$

$$y_v = -18 + 36 - 10$$

$$y_v = 18 - 10$$

$$y_v = 8$$

Portanto, $v = 8$.

13. Determine a lei da função quadrática f , sabendo que $f(1) = 2$; $f(0) = 3$; e $f(-1) = 6$.

R: Queremos saber a lei de uma função quadrática f :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Note que o exercício nos dá $f(0)$.

$F(0)$ é quanto vale o “ y ” quando o $x = 0$, ou seja, é onde a função corta o eixo y . A função corta o eixo y em $(0, 3)$.

O coeficiente “ c ” é justamente o valor do y quando $x = 0$.

Portanto, $c = 3$.

Assim, sabemos uma parte da lei da função:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow f(x) = ax^2 + bx + 3$$

Resta-nos descobrir quanto vale “ a ” e quanto vale “ b ”.

Temos os valores de $f(1)$ e $f(-1)$.

Se $f(1) = 2$, substitua “1” no lugar de “ x ” e “2” no lugar de “ $f(1)$ ”:

$$f(x) = ax^2 + bx + 3$$

$$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 3$$

$$2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 3$$

$$2 = a \cdot 1 + b \cdot 1 + 3$$

$$2 = a + b + 3$$

$$2 - 3 = a + b$$

$$-1 = a + b$$

$$a + b = -1$$

Reserve esta equação em amarelo.

Se $f(-1) = 6$, substitua “-1” no lugar de “ x ” e “6” no lugar de “ $f(-1)$ ”:

$$f(x) = ax^2 + bx + 3$$

$$f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 3$$

$$6 = a \cdot 1 + b \cdot (-1) + 3$$

$$6 = a + b \cdot (-1) + 3$$

$$6 = a - b + 3$$

$$6 - 3 = a - b$$

$$3 = a - b$$

$$a - b = 3$$

Junte a equação amarela com a equação verde acima em um sistema e resolva-o:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = 3 \end{cases}$$

Pelo método da soma:

$$a + b + a - b = -1 + 3$$

$$a + a + b - b = 2$$

$$2a + b - b = 2$$

$$2a + 0 = 2$$

$$2a = 2$$

$$a = \frac{2}{2}$$

$$a = 1$$

Substitua o valor de “a” em qualquer uma das equações do sistema.

$$a + b = -1$$

$$1 + b = -1$$

$$b = -1 - 1$$

$$b = -2$$

Portanto, $a = 1$, $b = -2$ e $c = 3$. Logo a lei da função f é:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 3.$$

14. Determine o valor de m na função real $f(x) = -3x^2 - 2(m - 1)x + (m + 1)$ para que o valor máximo seja 2.

R: O valor máximo de uma função é o y_v .

Conforme a dica do próprio exercício, y_v pode ser calculado por:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

Sabemos que:

- $a = -3$
- $b = -2(m - 1) = -2 \cdot m - 2 \cdot (-1) = -2m + 2 = 2 - 2m$
- $c = m + 1$
- $y_v = 2$ (o valor máximo deve ser 2).

Substitua esses valores na expressão:

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$2 = \frac{-\left((2 - 2m)^2 - 4 \cdot -3 \cdot (m + 1)\right)}{4 \cdot -3}$$

Note que:

$(2 - 2m)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2m + (2m)^2$, POIS É UM QUADRADO DE UMA DIFERENÇA.

Lembre-se do produto notável do quadrado da diferença: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$(2 - 2m)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2m + (2m)^2 = 4 - 8m + 4m^2$$

$$2 = \frac{-\left[4 - 8m + 4m^2 - 4 \cdot 3 \cdot (m + 1)\right]}{4 \cdot -3}$$

$$2 = \frac{-\left[4 - 8m + 4m^2 + 12 \cdot (m + 1)\right]}{4 \cdot -3}$$

$$2 = \frac{-\left[4 - 8m + 4m^2 + 12 \cdot m + 12 \cdot 1\right]}{4 \cdot -3}$$

$$2 = \frac{-\left[4 - 8m + 4m^2 + 12m + 12\right]}{4 \cdot -3}$$

$$2 = \frac{-\left[4 + 12 - 8m + 4m^2 + 12m\right]}{4 \cdot -3}$$

$$2 = \frac{-\left[16 - 8m + 4m^2 + 12m\right]}{4 \cdot -3}$$

$$2 = \frac{-\left[16 - 8m + 12m + 4m^2\right]}{4 \cdot -3}$$

$$2 = \frac{-\left[16 + 4m + 4m^2\right]}{4 \cdot -3}$$

$$2 = \frac{-\left[16 + 4m + 4m^2\right]}{-12}$$

$$2 \cdot (-12) = -\left[16 + 4m + 4m^2\right]$$

$$-24 = -\left[16 + 4m + 4m^2\right]$$

$$-24 = -16 - 4m - 4m^2$$

$$-24 + 16 + 4m + 4m^2 = 0$$

$$-8 + 4m + 4m^2 = 0$$

$$4m^2 + 4m - 8 = 0$$

Aplique Bhaskara para descobrir m.

$$a = 4 \quad b = 4 \quad c = -8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-8)$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 4 \cdot (-8)$$

$$\Delta = 16 - 16 \cdot (-8)$$

$$\Delta = 16 + 128$$

$$\Delta = 144$$

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{144}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 + 12}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

$$m_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{144}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 - 12}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

Portanto, para que o valor máximo seja 2 ($y_v = 2$) o m deve ser igual - 2 ou igual 1.

Lição 63 – Sinal da função quadrática e inequações

1. Estude o sinal de todos os gráficos que foram feitos na lição anterior.

- Gráfico da questão 5)a): $f(x) < 0$, se $-1 < x < 3$ e $f(x) \geq 0$, se $x \geq 3$ ou $x \leq -1$
- Gráfico da questão 5)b): $f(x) < 0$, se $x < -1$ ou $x > 3$ e $f(x) \geq 0$, se $-1 \leq x \leq 3$
- Gráfico da questão 5)c): $f(x) > 0$, para qualquer x pertencente ao domínio da função (ela não possui raízes reais e os valores de y são sempre negativos).
- Gráfico da questão 5)d): $f(x) < 0$, se $x < -2$ ou $x > 0$ e $f(x) \geq 0$, se $-2 \leq x \leq 0$
- Gráfico da questão 11): $f(x) < 0$, se $1 < x < 2$ e $f(x) \geq 0$, se $x \geq 2$ ou $x \leq 1$

2. Resolva as inequações abaixo:

a) $x^2 - 3x + 2 > 0$

R: Estamos procurando para quais valores a função $f(x) = x^2 - 3x + 2$ será positiva. Comece analisando o coeficiente a e o discriminante.

$a = 1$, ou seja, $a > 0$ e, portanto, a função terá concavidade para cima.

Analise o delta (discriminante):

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2$$

$$\Delta = 9 - 8$$

$$\Delta = 1$$

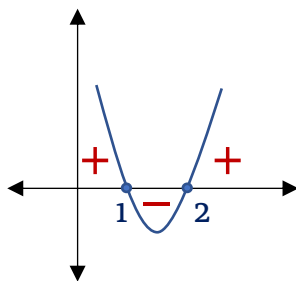
Encontre as raízes através da fórmula de Bhaskara (como $\Delta > 0$, há duas raízes reais):

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Portanto, as raízes da função $f(x) = x^2 - 3x + 2$ são (1, 0) e (2,0).

Somente com estas duas informações, isto é, que concavidade da parábola é voltada para cima e que existem duas raízes distintas, é possível fazer um esboço do gráfico:



A função é positiva quando $x < 1$ ou $x > 2$. Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ e } x > 2\}$

$$b) -x^2 + x + 6 > 0$$

R: Estamos procurando para quais valores a função $f(x) = -x^2 + x + 6$ será positiva. Comece analisando o coeficiente a e o discriminante.

$a = -1$, ou seja, $a < 0$ e, portanto, a função terá concavidade para baixo.

Analise o delta (discriminante):

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 6$$

$$\Delta = 1 + 24$$

$$\Delta = 25$$

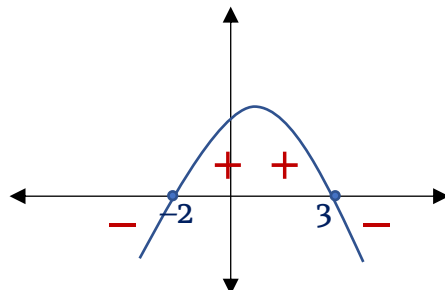
Encontre as raízes através da fórmula de Bhaskara (como $\Delta > 0$, há duas raízes reais):

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1+5}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 - 5}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Portanto, as raízes da função $f(x) = -x^2 + x + 6$ são $(-2, 0)$ e $(3, 0)$.

Somente com estas duas informações, isto é, que concavidade da parábola é voltada para baixo e que existem duas raízes distintas, é possível fazer um esboço do gráfico:



A função é positiva quando x está entre -2 e 3 , ou seja, $-2 < x < 3$. Portanto, $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \}$

$$c) -3x^2 - 8x + 3 \leq 0$$

R: Estamos procurando para quais valores a função $f(x) = -3x^2 - 8x + 3$ será negativa ou igual a zero. Comece analisando o coeficiente a e o discriminante.

$a = -3$, ou seja, $a < 0$ e, portanto, a função terá concavidade para baixo.

Analise o delta (discriminante):

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 3$$

$$\Delta = 64 + 12 \cdot 3$$

$$\Delta = 64 + 36$$

$$\Delta = 100$$

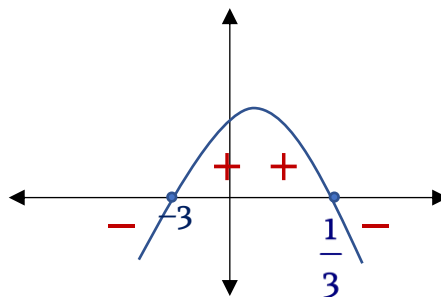
Encontre as raízes através da fórmula de Bhaskara (como $\Delta > 0$, há duas raízes reais):

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) + \sqrt{100}}{2 \cdot (-3)} = \frac{8 + 10}{-6} = \frac{18}{-6} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) - \sqrt{100}}{2 \cdot (-3)} = \frac{8 - 10}{-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{2}{6} = \frac{2 : 2}{6 : 2} = \frac{1}{3}$$

Portanto, as raízes da função $f(x) = -3x^2 - 8x + 3$ são $(-3, 0)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

Somente com estas duas informações, isto é, que concavidade da parábola é voltada para baixo e que existem duas raízes distintas, é possível fazer um esboço do gráfico:



A função é negativa quando $x < -3$ ou $x > \frac{1}{3}$.

A função é igual a zero quando $x = -3$ e $x = \frac{1}{3}$.

Então, a função será negativa ou igual a zero quando $x \leq -3$ ou $x \geq \frac{1}{3}$.

Portanto, $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x \geq \frac{1}{3} \right\}$

$$\text{d) } -x^2 + \frac{3}{2}x + 10 \geq 0$$

R: Estamos procurando para quais valores a função $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 10$ será positiva ou igual a zero. Comece analisando o coeficiente a e o discriminante.

$a = -1$, ou seja, $a < 0$ e, portanto, a função terá concavidade para baixo.

Analise o delta (discriminante):

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 10$$

$$\Delta = \frac{3^2}{2^2} + 4 \cdot 10$$

$$\Delta = \frac{9}{4} + 40$$

$$\Delta = \frac{9}{4} + \frac{40}{1}$$

$$\Delta = \frac{9}{4} + \frac{40 \cdot 4}{1 \cdot 4}$$

$$\Delta = \frac{9}{4} + \frac{160}{4} = \frac{9+160}{4} = \frac{169}{4}$$

Encontre as raízes através da fórmula de Bhaskara (como $\Delta > 0$, há duas raízes reais):

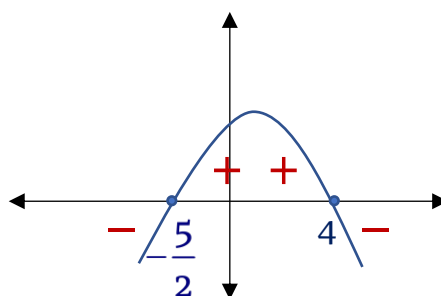
Note que $\sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{4}} = \frac{13}{2}$.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\left(\frac{-3}{2} + \sqrt{\frac{169}{4}}\right)}{2 \cdot (-1)} = \frac{\left(\frac{-3}{2} + \frac{13}{2}\right)}{-2} = \frac{\left(\frac{-3+13}{2}\right)}{-2} = \frac{\left(\frac{10}{2}\right)}{-2} = \frac{(5)}{-2} = -\frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\left(\frac{-3}{2} - \sqrt{\frac{169}{4}}\right)}{2 \cdot (-1)} = \frac{\left(\frac{-3}{2} - \frac{13}{2}\right)}{-2} = \frac{\left(\frac{-3-13}{2}\right)}{-2} = \frac{\left(\frac{-16}{2}\right)}{-2} = \frac{(-8)}{-2} = 4$$

Portanto, as raízes da função $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 10$ são $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ e $(4, 0)$.

Somente com estas duas informações, isto é, que concavidade da parábola é voltada para baixo e que existem duas raízes distintas, é possível fazer um esboço do gráfico:



A função é positiva quando x está entre $-\frac{5}{2}$ e 4 , ou seja, $-\frac{5}{2} < x < 4$.

A função é igual a zero quando $x = -\frac{5}{2}$ e $x = 4$.

Então, a função será positiva ou igual a zero quando $-\frac{5}{2} \leq x \leq 4$.

Portanto, $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leq x \leq 4 \right\}$

e) $8x^2 - 14x + 3 \leq 0$

R: Estamos procurando para quais valores a função $f(x) = -3x^2 - 8x + 3$ será negativa ou igual a zero. Comece analisando o coeficiente a e o discriminante.

$a = 8$, ou seja, $a > 0$ e, portanto, a função terá concavidade para cima.

Analise o delta (discriminante):

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3$$

$$\Delta = 196 - 32 \cdot 3$$

$$\Delta = 196 - 96$$

$$\Delta = 100$$

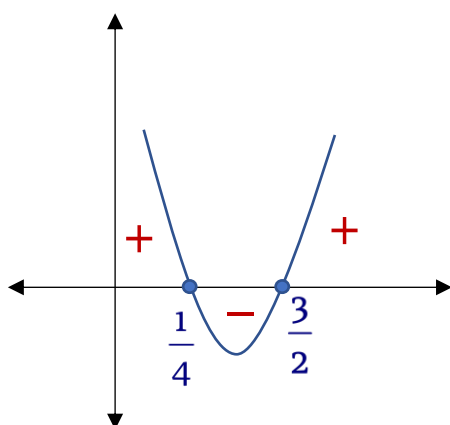
Encontre as raízes através da fórmula de Bhaskara (como $\Delta > 0$, há duas raízes reais):

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-14) + \sqrt{100}}{2 \cdot 8} = \frac{14 + 10}{16} = \frac{24}{16} = \frac{24 : 8}{16 : 8} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-14) - \sqrt{100}}{2 \cdot 8} = \frac{14 - 10}{16} = \frac{4}{16} = \frac{4 : 4}{16 : 4} = \frac{1}{4}$$

Portanto, as raízes da função $f(x) = -3x^2 - 8x + 3$ são $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

Somente com estas duas informações, isto é, que concavidade da parábola é voltada para cima e que existem duas raízes distintas, é possível fazer um esboço do gráfico:



A função é negativa quando x estiver entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{2}$, ou seja, $\frac{1}{4} < x < \frac{3}{2}$

A função é igual a zero quando $x = \frac{1}{4}$ e $x = \frac{3}{2}$.

Então, a função será negativa ou igual a zero quando $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

$$\text{Portanto, } S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{2} \right\}$$

3. Qual deve ser o valor de k para que a parábola que representa graficamente a função $f(x) = x^2 - 2x + k$ passe pelo ponto $P(2, 5)$.

R: Se a parábola passa pelo ponto $(x, y) = (2, 5)$ substitua “2” no lugar de “x” e “5” no lugar de “y” na lei da função:

$$f(x) = x^2 - 2x + k$$

$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + k$$

$$y = 2^2 - 2 \cdot 2 + k$$

$$5 = 4 - 4 + k$$

$$5 = 0 + k$$

$$5 = k$$

$$k = 5$$

Portanto, para que a parábola passe pelo ponto $P(2,5)$ o k deve ser igual a 5.

4. Com relação à função $f(x) = 3x^2 - 5x + m^2 - 9$, sabe-se que $f(0) = 0$. Calcule o valor de m .

R: Calcule $f(0)$, ou seja, coloque “0” no lugar de “x” na lei da função:

$$f(x) = 3x^2 - 5x + m^2 - 9$$

$$f(0) = 3 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + m^2 - 9$$

$$f(0) = 3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + m^2 - 9$$

$$f(0) = 0 - 5 \cdot 0 + m^2 - 9$$

$$f(0) = 0 - 0 + m^2 - 9$$

$$f(0) = m^2 - 9$$

Note que $f(0) = 0$. Substitua “ $f(0)$ ” por “0”:

$$0 = m^2 - 9$$

$$m^2 - 9 = 0$$

$$m^2 = 9$$

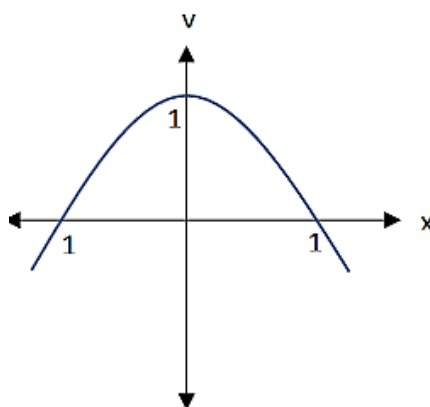
$$m = \pm\sqrt{9}$$

$$m = \pm 3$$

ou seja, $m = 3$ ou $m = -3$

Portanto, se $f(0) = 0$, m só pode valer -3 ou 3 .

5. Examinando o gráfico da função quadrática ao lado, classifique em verdadeiras ou falsas as afirmações:



a) Se $x > 0$, então $f(x) > 0$

A função é positiva SOMENTE entre -1 e 1 .

Se $x > 1$, a função será sempre negativa (note que esses números são maiores que 0).

Então a afirmação é FALSA.

b) Se $x > 1$, então $f(x) < 0$

A afirmação é VERDADEIRA, pois a função será sempre negativa quando x for maior que 1.

c) Tem-se que $f(x) < 0$ se $x < -1$ ou $x > 1$

A afirmação é VERDADEIRA, pois a função será sempre negativa quando x for maior que 1 OU quando x for menor que -1 .

d) Se $-1 < x$, então $f(x) > 0$

A função será sempre negativa quando x for maior que 1 (note que esses números são maiores que -1).

Portanto, a afirmação é FALSA.

e) Tem-se $f(x) \geq 0$ se $-1 \leq x \leq 1$

A afirmação é VERDADEIRA, pois a função é positiva quando o x está entre -1 e 1 .

f) Para todo x tem-se $f(x) \leq 1$

A afirmação é VERDADEIRA, pois o valor máximo da função é 1.

Lição 64 – Avaliação

1. Um padre fez um desafio a quarenta acólitos, e comprometeu-se a dividir um prêmio de cerca de 120 relíquias entre aqueles que decifrassem o desafio.

a) Preencha a tabela abaixo

Quantidade de acólitos que decifraram	1	2	5	8	20	40
Prêmio para cada um	120	60	24	15	6	3

R: Se apenas 1 pessoa decifrar o desafio, ela receberá as 120 relíquias sozinha. Então, 120 completa a lacuna embaixo do número 1.

- Se 2 pessoas decifrarem o desafio, terão de *DIVIDIR* as relíquias entre si. Ou seja 120 deve ser dividido em 2 e $\rightarrow 120 : 2 = 60$. Logo, cada uma delas receberá 60 relíquias. Portanto, 60 completa a lacuna embaixo do número 2.
- Se 5 pessoas decifrarem o desafio, terão de *DIVIDIR* as relíquias entre si. Ou seja 120 deve ser dividido em 5 e $\rightarrow 120 : 5 = 24$. Logo, cada uma delas receberá 24 relíquias. Portanto, 24 completa a lacuna embaixo do número 5.

- Se cada pessoa recebeu 15 relíquias devemos descobrir em quantas pessoas foi dividido as 120 relíquias. Devemos fazer a seguinte pergunta: o 15 cabe quantas vezes dentro do 120?

Para descobrir quantas vezes o 15 cabe dentro do 120, devemos realizar a seguinte conta $\rightarrow 120 : 15 = 8$.

Ou seja, o 15 cabe 8 vezes dentro do 120. Logo, oito pessoas dividiram o prêmio.

Portanto, o 8 preenche a lacuna acima do número 15.

- Se cada pessoa recebeu 6 relíquias devemos descobrir em quantas pessoas foi dividido as 120 relíquias. Devemos fazer a seguinte pergunta: o 6 cabe quantas vezes dentro do 120?

Para descobrir quantas vezes o 6 cabe dentro do 120, devemos realizar a seguinte conta $\rightarrow 120 : 6 = 20$.

Ou seja, o 6 cabe 20 vezes dentro do 120. Logo, vinte pessoas dividiram o prêmio.

Portanto, o 20 preenche a lacuna acima do número 6.

- Se 40 pessoas decifrarem o desafio, terão de *DIVIDIR* as relíquias entre si. Ou seja 120 deve ser dividido em 40 e $\rightarrow 120 : 40 = 3$. Logo, cada uma delas receberá 3 relíquias. Portanto, 3 completa a lacuna embaixo do número 40.

b) O prêmio que cada acólito que decifrou o desafio vai receber é função de que variável?

R: Da quantidade de acólitos que decifraram (ou seja, o prêmio recebido depende da quantidade de pessoas que acertaram).

c) Utilizando letras, represente a função do item anterior por uma fórmula.

R: A variável dependente é o prêmio que cada um receberá. Chame o prêmio de “y”. O prêmio depende da quantidade de pessoas que acertaram. Chame a quantidade de pessoas que acertaram de “x”.

No item a), para descobrir qual seria o prêmio, dividiu-se o número total de relíquias (120) pela quantidade de pessoas que acertaram. Portanto, a lei da função é:

Prêmio = 120 relíquias : pessoas que acertaram

$$y = 120 : x$$

2. Duas variáveis x e y estão relacionadas pela fórmula $5x + 3y = 20$.

a) Se $x = 10$, calcule y .

R: Se x vale 10, substitua “10” no lugar de “ x ”:

$$5x + 3y = 20$$

$$5 \cdot x + 3y = 20$$

$$5 \cdot 10 + 3y = 20$$

$$50 + 3y = 20$$

$$3y = 20 - 50$$

$$3y = -30$$

$$y = \frac{-30}{3}$$

$$y = -10$$

b) se $y = 15$, calcule x .

R: Se y vale 15, substitua “15” no lugar de “ y ”:

$$5x + 3y = 20$$

$$5x + 3 \cdot y = 20$$

$$5x + 3 \cdot 15 = 20$$

$$5x + 45 = 20$$

$$5x = 20 - 45$$

$$5x = -25$$

$$x = \frac{-25}{5}$$

$$x = -5$$

c) Expresse x em função de y .

$$5x + 3y = 20$$

$$5x = 20 - 3y$$

$$x = \frac{20 - 3y}{5}$$

d) Expresse y em função de x .

$$5x + 3y = 20$$

$$3y = 20 - 5x$$

$$y = \frac{20 - 5x}{3}$$

3. Dada a função $f(x) = 5x - 1$, preencha a tabela abaixo:

x	$f(x)$
0	-1
1	4
5	24
$\frac{3}{5}$	2
$-\frac{3}{5}$	-4

- Queremos saber $f(x)$ quando $x = 0$, ou seja, queremos saber $f(0) \rightarrow$ substitua o “0” no lugar de “x”:
 $f(x) = 5x - 1$
 $f(x) = 5 \cdot x - 1$
 $f(0) = 5 \cdot 0 - 1$
 $f(0) = 0 - 1$
 $f(0) = -1$
- Queremos saber $f(x)$ quando $x = 1$, ou seja, queremos saber $f(1) \rightarrow$ substitua o “1” no lugar de “x”:
 $f(x) = 5x - 1$
 $f(x) = 5 \cdot x - 1$
 $f(1) = 5 \cdot 1 - 1$
 $f(1) = 5 - 1$
 $f(1) = 4$
- Queremos saber $f(x)$ quando $x = 5$, ou seja, queremos saber $f(5) \rightarrow$ substitua o “5” no lugar de “x”:
 $f(x) = 5x - 1$
 $f(x) = 5 \cdot x - 1$
 $f(5) = 5 \cdot 5 - 1$
 $f(5) = 25 - 1$
 $f(5) = 24$
- Queremos saber o valor do “x” quando $f(x) = 2 \rightarrow$ substitua o “2” no lugar de $f(x)$:
 $f(x) = 5x - 1$
 $2 = 5x - 1$

$$2 + 1 = 5x$$

$$3 = 5x$$

$$\frac{3}{5} = x$$

- Queremos saber o valor do “x” quando $f(x) = -4 \rightarrow$ substitua o “-4” no lugar de $f(x)$:

$$f(x) = 5x - 1$$

$$-4 = 5x - 1$$

$$-4 + 1 = 5x$$

$$-3 = 5x$$

$$\frac{-3}{5} = x$$

4. Três amigos conversavam sobre suas matérias preferidas entre quatro: matemática (M), português (P), história (H) e geografia (G), sendo que Alberto (A) prefere matemática, Beto (B) prefere português e Carlos (C) prefere geografia (G). Sejam o conjunto $T = \{A, B, C\}$, formado pelos três amigos, e $Q = \{M, P, G, H\}$, formado pelas matérias em discussão, pode-se dizer que a função $f : T \rightarrow Q$ é:

a) **injetiva**.

b) sobrejetiva.

c) bijetiva.

d) nem injetiva nem sobrejetiva.

Ela é injetiva porque os elementos do seu domínio estão associados a elementos diferentes do contradomínio (pessoas diferentes gostam de matérias diferentes).

Ela não é sobrejetiva porque seu contradomínio não é igual sua imagem. Sobra H no contradomínio (que não é imagem de ninguém).

Se ela não é sobrejetiva, não pode ser bijetiva.

Portanto, ela é apenas *injetiva*.

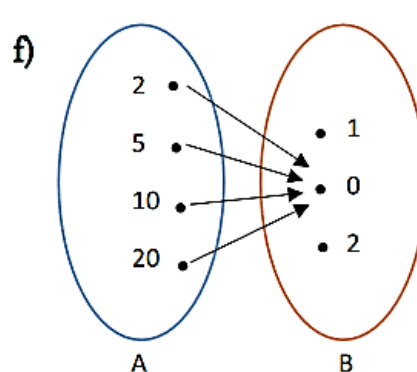
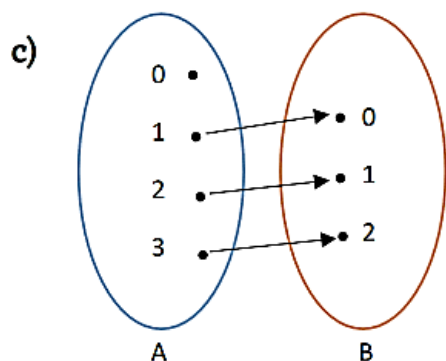
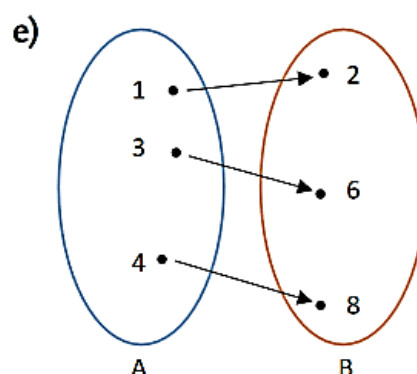
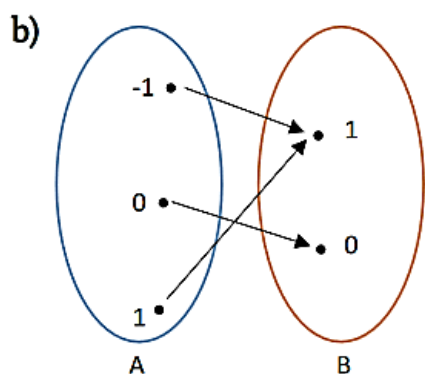
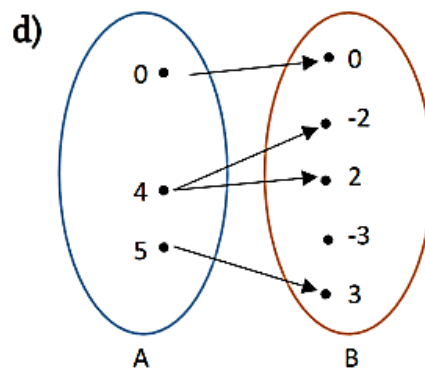
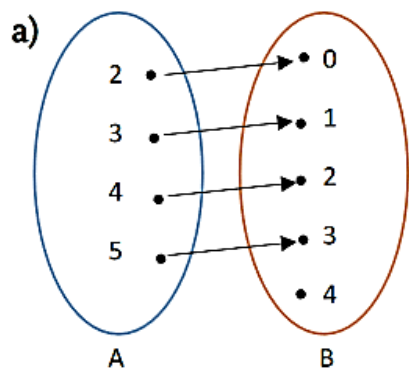
Determine qual é o domínio, qual é o contradomínio e qual é a imagem.

$$\text{Domínio} = \{A, B, C\}$$

$$\text{Contradomínio} = \{M, P, G, H\}$$

$$\text{Imagem} = \{M, P, G\}$$

5. Quais dos seguintes diagramas representam uma função de A em B. Identifique o domínio, o contradomínio e a imagem, e classifique-os como injetora, sobrejetora e bijetora.



a) É função, pois todos os elementos do domínio têm apenas uma imagem.

O domínio é $D = \{2, 3, 4, 5\}$.

O contradomínio é $CD = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

A imagem é $I = \{0, 1, 2, 3\}$.

É injetora, pois elementos diferentes do domínio estão associados a imagens diferentes.

Não é sobrejetora porque “sobra” o elemento “4” no contradomínio, que não é imagem de ninguém.

Portanto, é função injetora.

b) É função, pois todos os elementos do domínio têm apenas uma imagem.

O domínio é $D = \{-1, 0, 1\}$.

O contradomínio é $CD = \{1, 0\}$.

A imagem é $I = \{1, 0\}$.

Não é injetora porque elementos diferentes do domínio tem a mesma imagem: -1 e 1 estão associados a 1 . *Para ser injetora é preciso que elementos diferentes do domínio possuam imagens diferentes.*

É sobrejetora porque seu contradomínio é igual à sua imagem (não “sobra ninguém” no contradomínio).

Portanto, é uma função sobrejetora.

c) Não é uma função, pois há elementos do domínio que não possuem imagem (0 não possui imagem). *Para ser função, todos os elementos do domínio devem possuir imagem.*

d) Não é uma função, pois um dos elementos do domínio (4) possui duas imagens. *Para ser função, cada elemento do domínio deve ter apenas uma imagem.*

e) É função, pois todos os elementos do domínio têm apenas uma imagem.

Seu domínio é $D = \{1, 3, 4\}$.

O contradomínio é $CD = \{2, 6, 8\}$.

A imagem é $I = \{2, 6, 8\}$.

É injetora pois elementos diferentes do domínio estão associados a imagens diferentes.

É sobrejetora porque seu contradomínio é igual à sua imagem (não “sobra ninguém” no contradomínio).

Portanto, é uma função bijetora (sobrejetora e injetora ao mesmo tempo).

f) É uma função, pois todos os elementos do domínio têm apenas uma única imagem (ainda que seja a mesma imagem).

Seu domínio é $D = \{2, 5, 10, 20\}$.

O contradomínio é $CD = \{1, 0, 2\}$.

A sua imagem é $I = \{2\}$.

Essa função não é injetora, pois os diferentes elementos do domínio têm a mesma imagem (2). *Para ser injetora é preciso que elementos diferentes do domínio possuam imagens diferentes.*

Também não é sobrejetora, pois o contradomínio não é igual à imagem (“sobram” elementos no contradomínio: 1 e 0).

Portanto, é uma função, mas não é nem injetora nem sobrejetora.

6. Sobre o plano cartesiano responda:

a) Quais são os nomes dados ao eixo X e ao eixo Y ?

R: Eixo x : eixo das abscissas. Eixo y : eixo das ordenadas.

b) Quais os sinais de x e y no 1º quadrante? e no 2º quadrante? e no 3º quadrante? e no 4º quadrante?

R: 1º quadrante: x e y positivos.

2º quadrante: x negativo e y positivo.

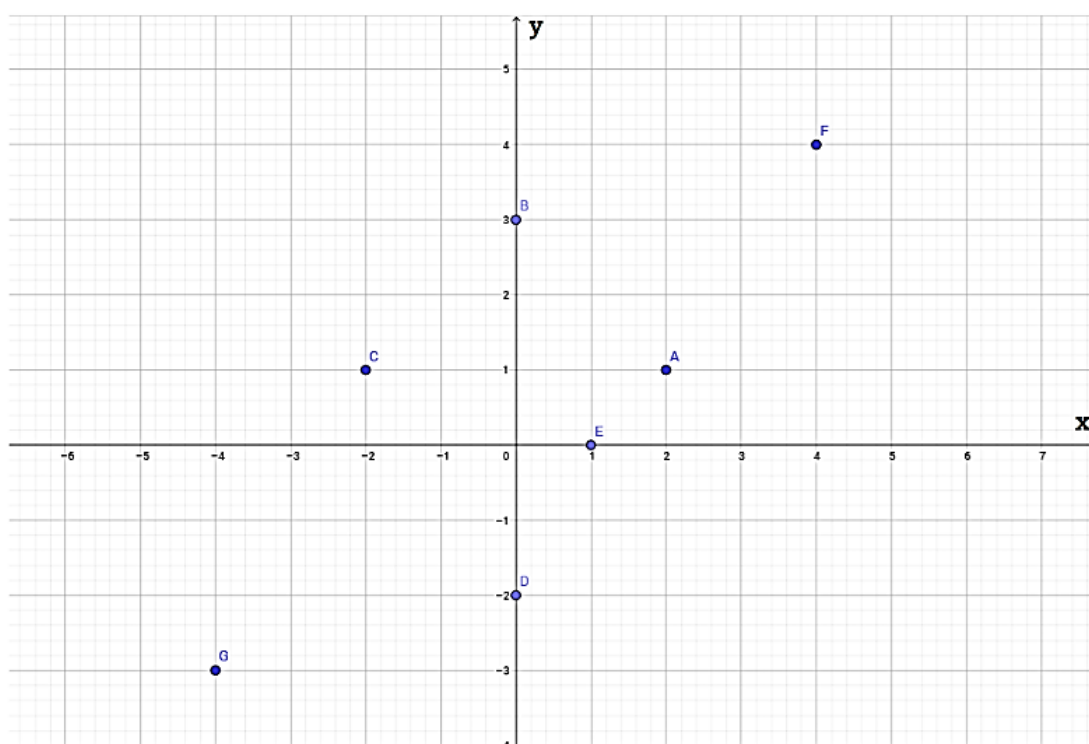
3º quadrante: x e y negativos.

4º quadrante: x positivo e y negativo.

c) Por convenção, como os números do eixo X estão dispostos? e os do eixo Y?

R: Por convenção, x está orientado da esquerda para a direita e y de baixo para cima. Isso quer dizer que em x os números positivos estão à direita do ponto zero, e em y os números positivos estão acima do zero. O espaço entre os números precisa ser sempre igual na escala x, e precisa ser sempre igual na escala y, embora não precise ser igual entre as retas (o espaço entre os números em X pode ser de 2 cm e entre os números de Y podem ser de 3cm; o importante é que em cada reta o padrão seja obedecido)

7. Dados os pontos abaixo, indique quais são suas coordenadas:



$$A = (2, 1)$$

$$B = (0, 3)$$

$$C = (-2, 1)$$

$$D = (0, -2)$$

$$E = (1, 0)$$

$$F = (4, 4)$$

$$G = (-4, -3)$$

8. Construa o gráfico das seguintes funções e classifique-as em injetiva, sobrejetiva ou bijetiva:

a) $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = 3x - 4$$

R: Comece descobrindo os $f(x)$:

$$f(1) = 3 \cdot 1 - 4 = 3 - 4 = -1$$

$$f(2) = 3 \cdot 2 - 4 = 6 - 4 = 2$$

$$f(3) = 3 \cdot 3 - 4 = 9 - 4 = 5$$

$$f(4) = 3 \cdot 4 - 4 = 12 - 4 = 8$$

-1, 2, 5 e 8 pertencem ao contradomínio $\mathbb{R}$.

O domínio é $\{1, 2, 3, 4\}$.

O contradomínio é $\mathbb{R}$.

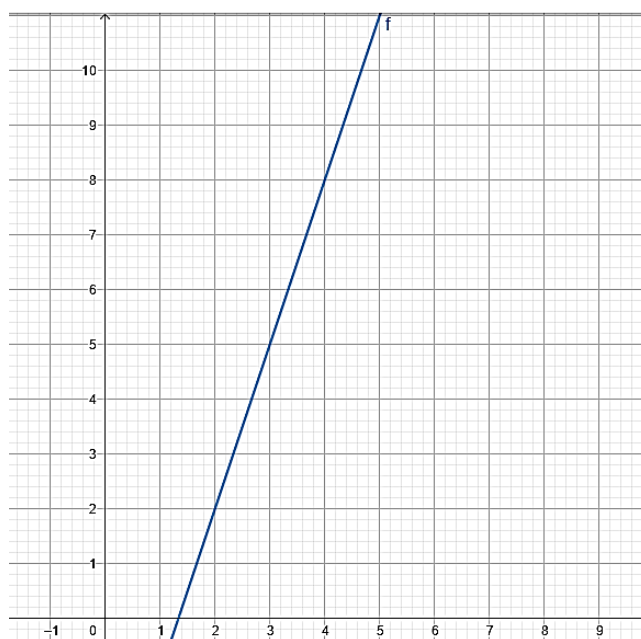
E a imagem é $\{-1, 2, 5, 8\}$

Note que a função é injetora, pois nenhum elemento do domínio fica sem imagem e todos têm apenas uma imagem só.

Ela não é sobrejetora pois o contradomínio não é igual a imagem.

Se ela é injetora, mas não é sobrejetora, não pode ser bijetora.

Portanto, a função é injetiva (injetora). O esboço de seu gráfico é:



b) $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{-1, 2, 5, 8\}$

$$x \rightarrow f(x) = 3x - 4$$

Comece descobrindo os $f(x)$:

$$f(1) = 3 \cdot 1 - 4 = 3 - 4 = -1$$

$$f(2) = 3 \cdot 2 - 4 = 6 - 4 = 2$$

$$f(3) = 3 \cdot 3 - 4 = 9 - 4 = 5$$

$$f(4) = 3 \cdot 4 - 4 = 12 - 4 = 8$$

O domínio é $\{1, 2, 3, 4\}$.

O contradomínio é $\{-1, 2, 5, 8\}$.

E a imagem é $\{-1, 2, 5, 8\}$

Note que a função é injetora, pois nenhum elemento do domínio fica sem imagem e todos têm apenas uma imagem só.

Ela é sobrejetora pois o contradomínio é igual a imagem.

Se ela é injetora e sobrejetora, é bijetora.

Portanto, a função é bijetora. O esboço de seu gráfico é o mesmo do item anterior.

9. Classifique cada função como crescente, decrescente ou constante. Indique também qual é a taxa de variação, e o valor em que a reta intercepta o eixo Y e o eixo X. Depois, trace o gráfico de cada uma.

Lembre-se: a taxa de variação corresponde ao coeficiente “a”; onde a função cortará o eixo y corresponde ao coeficiente “b”; e onde a função cortará o eixo x corresponde à raiz da função (quando $y = 0$).

a) $f(x) = 3x + 2$

Função crescente (pois, $a > 0$).

Taxa de variação (a): 3

Onde intercepta o eixo y (b): 2

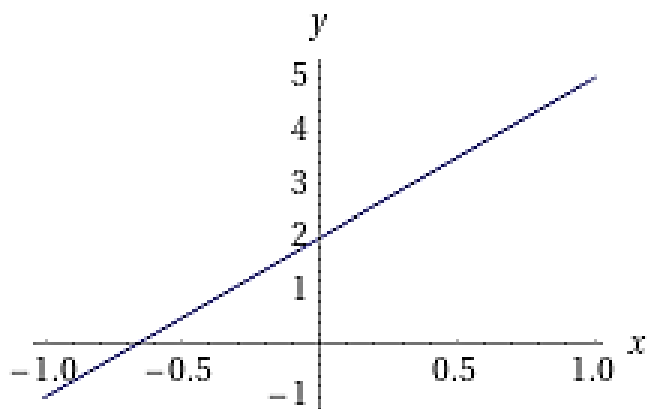
Onde intercepta o eixo x: $-\frac{2}{3}$, pois quando $y = 0$, o x vale $-\frac{2}{3}$:

$$0 = 3x + 2$$

$$0 - 2 = 3x$$

$$-2 = 3x$$

$$-\frac{2}{3} = x$$



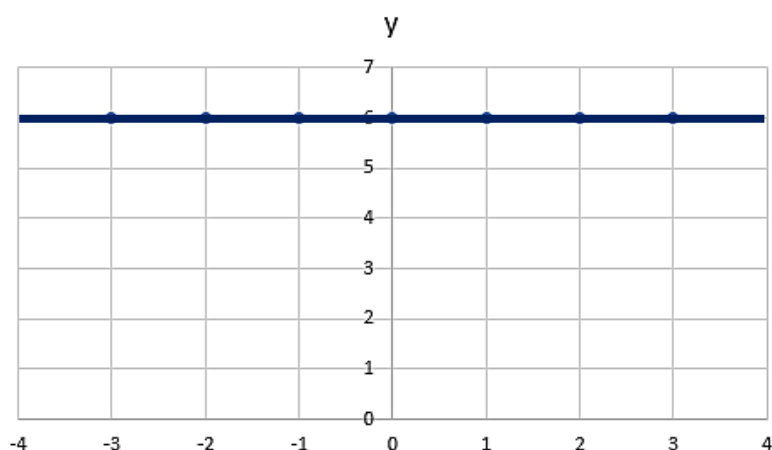
b) $f(x) = 6$

Função constante, pois $a = 0$.

Taxa de variação (a): 0

Onde intercepta o eixo y (b): 6

Onde intercepta o eixo x: não intercepta (é uma reta paralela à x, portanto, nunca interceptará esse eixo)



c) $f(x) = -2x + 1$

Função decrescente (pois, $a < 0$).

Taxa de variação (a): -2

Onde intercepta o eixo y (b): 1

Onde intercepta o eixo x: $\frac{1}{2}$, pois quando $y = 0$, o x vale $\frac{1}{2}$:

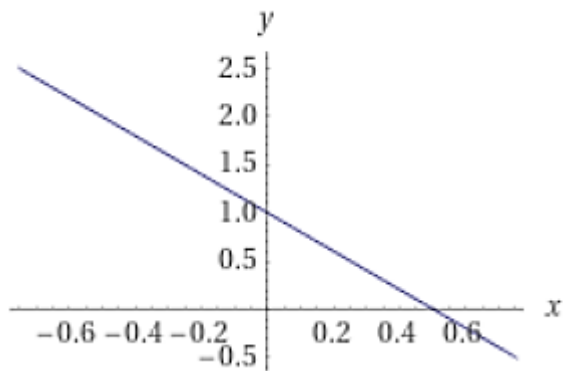
$$0 = -2x + 1$$

$$0 - 1 = -2x$$

$$-1 = -2x$$

$$1 = 2x$$

$$\frac{1}{2} = x$$



Note que $\frac{1}{2} = 0,5$.

d) $f(x) = 6 - 3x$

Função decrescente (pois, $a < 0$).

Taxa de variação (a): -3

Onde intercepta o eixo y (b): 6

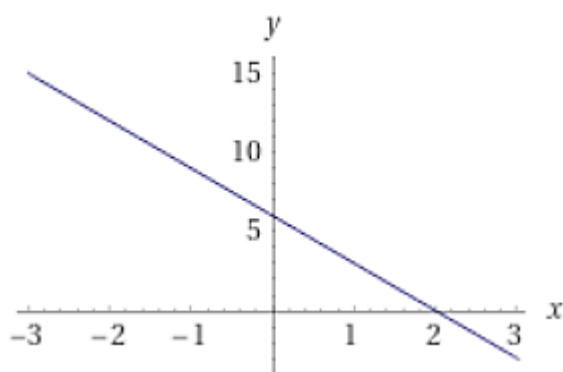
Onde intercepta o eixo x: 2, pois quando $y = 0$, o x vale 2:

$$0 = 6 - 3x$$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$



e) $f(x) = -4 + 2x$

Função crescente (pois, $a > 0$).

Taxa de variação (a): 2

Onde intercepta o eixo y (b): -4

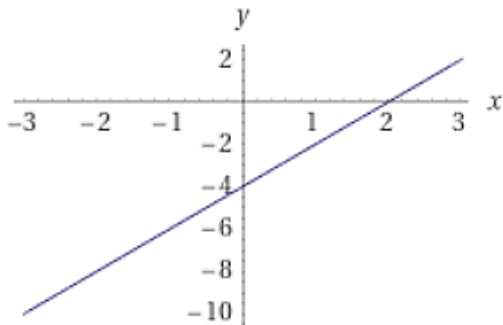
Onde intercepta o eixo x: 2, pois quando $y = 0$, o x vale 2:

$$0 = -4 + 2x$$

$$4 = 2x$$

$$\frac{4}{2} = x$$

$$2 = x$$



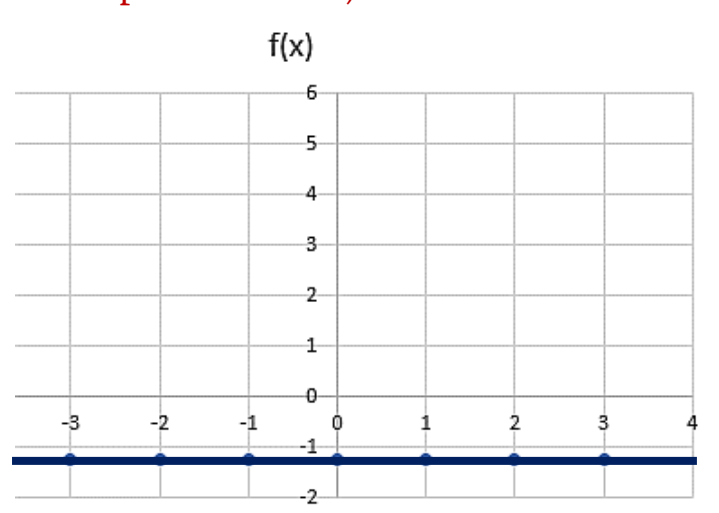
$$f) f(x) = 1 - \sqrt{5}$$

Função constante (a = 0).

Taxa de variação (a): 0

Onde intercepta o eixo y (b): $1 - \sqrt{5}$

Onde intercepta o eixo x: não intercepta (é uma reta paralela à x, portanto, nunca interceptará esse eixo)



10. Resolva as equações abaixo:

$$a) 6x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$a = 6 ; b = 5 ; c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)$$

$$\Delta = 25 - 24 \cdot (-1) = 25 + 24 = 49$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{-5 + 7}{12} = \frac{2}{12} = \frac{2:2}{12:2} = \frac{1}{6}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{-5 - 7}{12} = \frac{-12}{12} = -1$$

$$\text{Assim, } S = \left\{ -1, \frac{1}{6} \right\}$$

$$\text{b) } x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$a = 1 \quad ; \quad b = -8 \quad ; \quad c = 16$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16$$

$$\Delta = 64 - 4 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) + \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{8 + 0}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) - \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{8 - 0}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\text{Assim, } S = \{4\}$$

$$\text{c) } 9y^2 - 24y + 16 = 0$$

$$a = 9 \quad ; \quad b = -24 \quad ; \quad c = 16$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-24)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16$$

$$\Delta = 576 - 36 \cdot 16 = 576 - 576 = 0$$

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-24) + 0}{2 \cdot 9} = \frac{24 + 0}{18} = \frac{24}{18} = \frac{24:6}{18:6} = \frac{4}{3}$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-24) - 0}{2 \cdot 9} = \frac{24 - 0}{18} = \frac{24}{18} = \frac{24:6}{18:6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Assim, } S = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$$

$$\text{d) } 4x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$a = 4 \quad ; \quad b = -4 \quad ; \quad c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)$$

$$\Delta = 16 - 16 \cdot (-3) = 16 + 48 = 64$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{4 + 8}{8} = \frac{12}{8} = \frac{12 : 4}{8 : 4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{4 - 8}{8} = \frac{-4}{8} = \frac{-4 : 4}{8 : 4} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{Assim, } S = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\}$$

$$\text{e) } t^2 - t - 1 = 0$$

$$a = 1 \quad ; \quad b = -1 \quad ; \quad c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Assim, } S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$$

$$\text{f) } -x^2 + 11x - 28 = 0$$

$$a = -1 \quad ; \quad b = 11 \quad ; \quad c = -28$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (11)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-28)$$

$$\Delta = 121 + 4 \cdot (-28) = 121 - 112 = 9$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11 + \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-11 + 3}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11 - \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-11 - 3}{-2} = \frac{-14}{-2} = 7$$

$$\text{Assim, } S = \{4, 7\}$$

$$\text{g) } 4x^2 + 16x + 15 = 0$$

$$a = 4 \quad ; \quad b = 16 \quad ; \quad c = 15$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15$$

$$\Delta = 256 - 16 \cdot 15 = 256 - 240 = 16$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 + \sqrt{16}}{2 \cdot 4} = \frac{-16 + 4}{8} = \frac{-12}{8} = \frac{-12 : 4}{8 : 4} = \frac{-3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 - \sqrt{16}}{2 \cdot 4} = \frac{-16 - 4}{8} = \frac{-20}{8} = \frac{-20 : 4}{8 : 4} = \frac{-5}{2}$$

$$\text{Assim, } S = \left\{ \frac{-3}{2}; \frac{-5}{2} \right\}$$

$$\text{h) } 8x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$a = 8 \quad ; \quad b = -10 \quad ; \quad c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3$$

$$\Delta = 100 - 32 \cdot 3 = 100 - 96 = 4$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) + \sqrt{4}}{2 \cdot 8} = \frac{10 + 2}{16} = \frac{12}{16} = \frac{12 : 4}{16 : 4} = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) - \sqrt{4}}{2 \cdot 8} = \frac{10 - 2}{16} = \frac{8}{16} = \frac{8 : 8}{16 : 8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Assim, } S = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right\}$$

$$\text{i) } \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{12} = 0$$

$$a = \frac{1}{4} \quad ; \quad b = \frac{1}{3} \quad ; \quad c = \frac{1}{12}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{3} \right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{12} \right)$$

$$\Delta = \frac{1}{9} - 1 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{9} - \frac{1}{12} = \frac{1 \cdot 4}{9 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{4}{36} - \frac{3}{36} = \frac{4 - 3}{36} = \frac{1}{36}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{-1}{3} + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{-1}{3} + \sqrt{\frac{1}{36}}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-1}{3} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{36}}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-1}{3} + \frac{1}{6}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-1 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1}{6}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-2}{6} + \frac{1}{6}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-2 + 1}{6}}{\frac{2}{4}} = \frac{\left(\frac{-1}{6} \right)}{\left(\frac{2}{4} \right)}$$

$$x_1 = \frac{-1}{6} \div \frac{2}{4} = \frac{-1}{6} \cdot \frac{4}{2} = \frac{-1 \cdot 4}{6 \cdot 2} = \frac{-4}{12} = \frac{-4 : 4}{12 : 4} = \frac{-1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{-1}{3} - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{-1}{3} - \sqrt{\frac{1}{36}}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-1}{3} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{36}}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-1}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-1 \cdot 2}{3 \cdot 2} - \frac{1}{6}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-2}{6} - \frac{1}{6}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-2-1}{6}}{\frac{2}{4}} = \frac{\left(\frac{-3}{6}\right)}{\left(\frac{2}{4}\right)}$$

$$x_2 = \frac{-3}{6} \div \frac{2}{4} = \frac{-3}{6} \cdot \frac{4}{2} = \frac{-3 \cdot 4}{6 \cdot 2} = \frac{-12}{12} = -1$$

$$\text{Logo, } S = \left\{ -1; \frac{-1}{3} \right\}$$

$$\text{j) } \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{4}{9} = 0$$

$$a = \frac{1}{2} ; \quad b = -1 ; \quad c = \frac{4}{9}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} =$$

$$\Delta = 1 - \frac{4 \cdot 1}{2} \cdot \frac{4}{9} = 1 - \frac{4}{2} \cdot \frac{4}{9} = 1 - 2 \cdot \frac{4}{9} = 1 - \frac{2 \cdot 4}{9} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{1} - \frac{8}{9} = \frac{1 \cdot 9}{1 \cdot 9} - \frac{8}{9} = \frac{9}{9} - \frac{8}{9} = \frac{9-8}{9} = \frac{1}{9}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{9}}}{\frac{2 \cdot 1}{2}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}}}{\frac{2}{2}} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{9}}}{\frac{2 \cdot 1}{2}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}}}{\frac{2}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Assim, } S = \left\{ \frac{2}{3}; \frac{4}{3} \right\}$$

11. Sem resolver, dê a soma e o produto das raízes e de cada equação.

$$\text{a) } 3x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$a = 3 ; \quad b = 5 ; \quad c = 2$$

$$\text{Soma das raízes} = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{Produto das raízes} = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$$

$$\text{b) } 2x^2 + 11x - 2 = 0$$

$$a = 2 ; \quad b = 11 ; \quad c = -2$$

$$\text{Soma das raízes} = \frac{-b}{a} = \frac{-11}{2} = -\frac{11}{2}$$

$$\text{Produto das raízes} = \frac{c}{a} = \frac{-2}{2} = -2 : 2 = -1$$

$$\text{c) } 9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$a = 9 ; b = -6 ; c = 1$$

$$\text{Soma das raízes} = \frac{-b}{a} = \frac{-(-6)}{9} = \frac{6}{9}$$

Simplifique essa fração:

$$\frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Soma das raízes} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Produto das raízes} = \text{Produto} = \frac{c}{a} = \frac{1}{9}$$

$$\text{d) } 7x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$a = 7 ; b = -5 ; c = -3$$

$$\text{Soma das raízes} = \frac{-b}{a} = \frac{-(-5)}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\text{Produto das raízes} = \frac{c}{a} = \frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}$$

$$\text{e) } -2x^2 - 11x - 3 = 0$$

$$a = -2 ; b = -11 ; c = -3$$

$$\text{Soma das raízes} = \frac{-b}{a} = \frac{-(-11)}{-2} = \frac{11}{-2} = -\frac{11}{2}$$

$$\text{Produto das raízes} = \frac{c}{a} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{f) } 11x^2 - 7 = 0$$

$$a = 11 ; b = 0 ; c = -7$$

$$\text{Soma das raízes} = \frac{-b}{a} = \frac{0}{11} = 0$$

$$\text{Produto das raízes} = \frac{c}{a} = \frac{-7}{11} = -\frac{7}{11}$$

$$\text{g) } 8x^2 + 5x = 0$$

$$a = 8 ; b = 5 ; c = 0$$

$$\text{Soma das raízes} = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{8} = -\frac{5}{8}$$

$$\text{Produto das raízes} = \frac{c}{a} = \frac{0}{8} = 0$$

$$h) x + 1 = 2x^2$$

Organize na forma $ax^2 + bx + c = 0$

$$x + 1 - 2x^2 = 0$$

$$-2x^2 + x + 1 = 0$$

$$a = -2 ; b = 1 ; c = 1$$

$$\text{Soma das raízes} = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Produto das raízes} = \frac{c}{a} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Gabarito Passo a passo de Matemática

9º ano, Volume 5

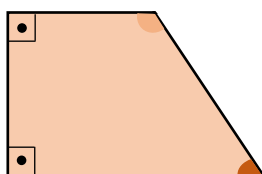
Lição 65 – Ângulos

1. Que tipo de ângulos você encontra em cada figura?

a)



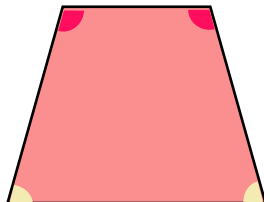
c)



b)



d)



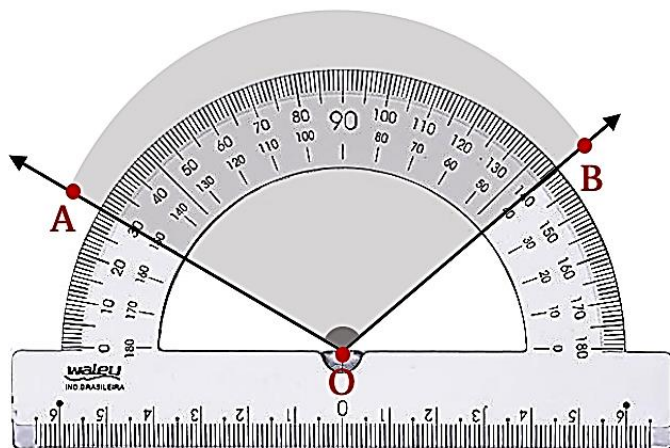
R. a) Quatro ângulos retos.

b) Dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos.

c) Dois ângulos retos, um agudo e um obtuso.

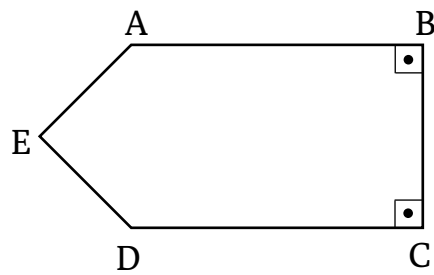
d) Dois ângulos retos, um agudo e um obtuso.

2. Qual é a medida do ângulo $\widehat{AÔB}$?



R. $\widehat{AÔB} = 140 - 30 = 110^\circ$.

3. Identifique na figura:



a) Os ângulos retos.

R. B e C.

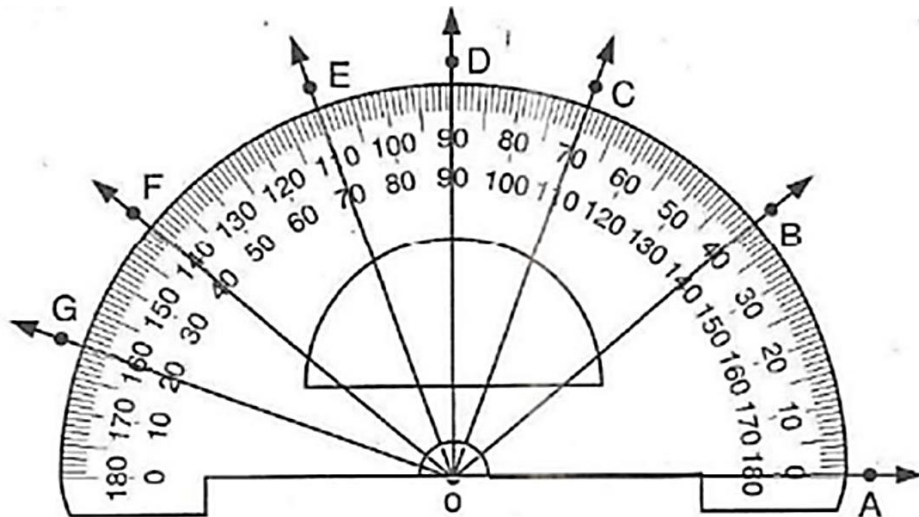
b) Os ângulos agudos.

R. E.

c) Os ângulos obtusos.

R. A e D.

4. Escreva as medidas em graus dos ângulos indicados pelo transferidor:



a) $\widehat{AOB}$

R. 40° .

b) $\widehat{AOC}$

R. 70° .

c) $\widehat{AOD}$

R. 90° .

d) $\hat{A}\hat{O}\hat{E}$

R. 110° .

e) $\hat{A}\hat{O}\hat{F}$

R. 140° .

g) $\hat{A}\hat{O}\hat{G}$

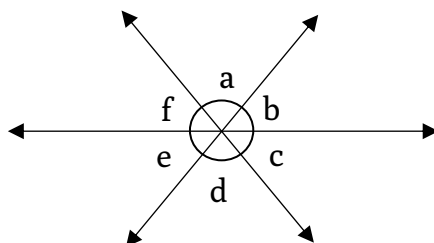
R. 160° .

Lição 66 – Ângulos opostos pelo vértice

1. Demonstre com suas palavras o teorema que diz que os ângulos OPV são congruentes.

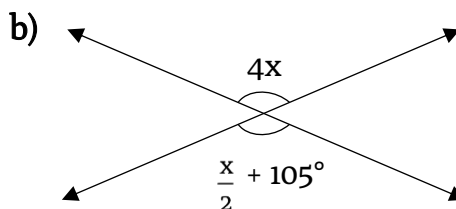
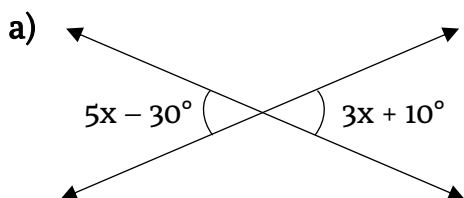
R. A resposta é pessoal, mas deve seguir a lógica da demonstração da apostila.

2. Quais são os três pares de ângulos opostos pelo vértice?



R. $\hat{a}$ é O.P.V de $\hat{d}$; $\hat{b}$ é O.P.V de $\hat{e}$; $\hat{c}$ é O.P.V de $\hat{f}$.

3. Calcule x:



R. a)

$$5x - 30 = 3x + 10$$

$$5x - 3x = 10 + 30$$

$$2x = 40$$

$$x = \frac{40}{2}$$

$$x = 20$$

a)

$$4x = \frac{x}{2} + 105$$

$$[4x = \frac{x}{2} + 105] \cdot 2$$

$$8x = x + 210$$

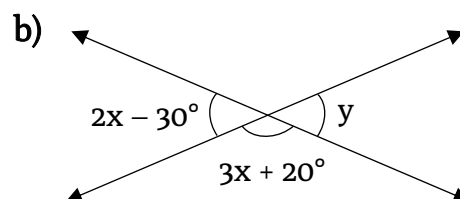
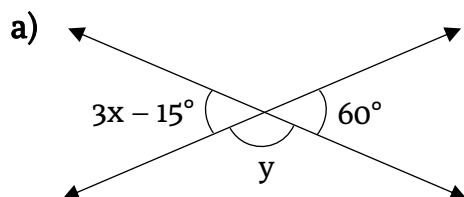
$$8x - x = 210$$

$$7x = 210$$

$$x = \frac{210}{7}$$

$$x = 30$$

4. Calcule x e y:



R. a)

$$3x - 15 = 60$$

$$3x = 60 + 15$$

$$3x = 75$$

$$x = \frac{75}{3}$$

$$x = 25$$

$$y + 60 = 180$$

$$y = 180 - 60$$

$$y = 120$$

b)

$$2x - 30 + 3x + 20 = 180$$

$$5x + 10 = 180$$

$$5x = 180 - 10$$

$$x = \frac{170}{5}$$

$$x = 34$$

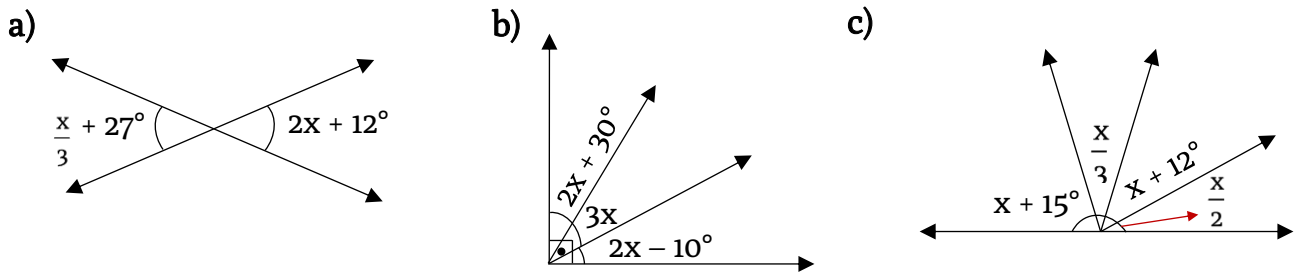
$$2x - 30 = y$$

$$2 \cdot 34 - 30 = y$$

$$68 - 30 = y$$

$$y = 38.$$

5. Calcule x:



R. a)

$$\frac{x}{3} + 27 = 2x + 12$$

$$\left[\frac{x}{3} + 27 = 2x + 12 \right] \cdot 3$$

$$x + 81 = 6x + 36$$

$$6x - x = 81 - 36$$

$$5x = 45$$

$$x = \frac{45}{5}$$

$$x = 9$$

b)

$$2x + 30 + 3x + 2x - 10 = 90$$

$$7x + 20 = 90$$

$$7x = 90 - 20$$

$$7x = 70$$

$$x = 10$$

c)

$$\left[x + 15 + \frac{x}{3} + x + 12 + \frac{x}{2} = 180 \right] \cdot 6$$

$$6x + 90 + 2x + 6x + 72 + 3x = 1080$$

$$17x + 162 = 1080$$

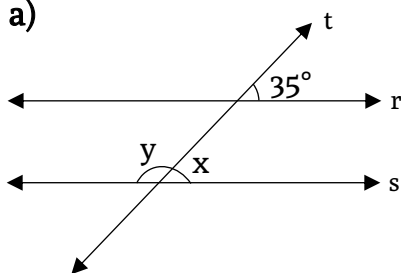
$$17x = 1080 - 162$$

$$x = \frac{918}{17}$$

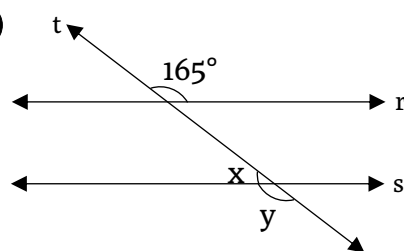
$$x = 54.$$

6. Sabendo que $r \parallel s$, determine os ângulos indicados pelas letras:

a)



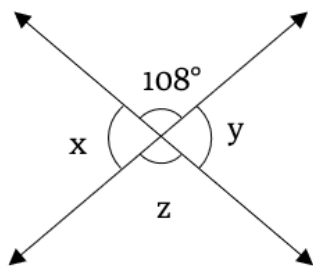
b)



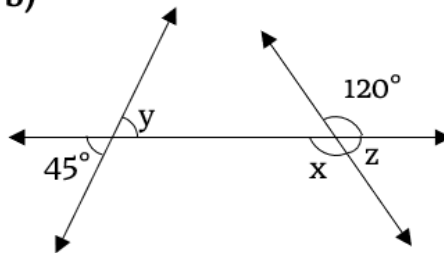
R. Resolver essa questão depois de estudar a lição de título “Ângulos alternos”.

7. Calcule os ângulos indicados pelas letras:

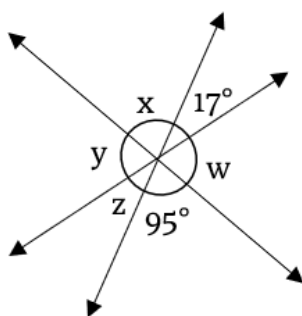
a)



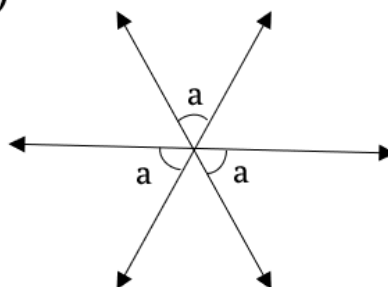
b)



c)



d)



R.

a) 108° é O.P.V de $\hat{z}$, portanto $\hat{z} = 108^\circ$

Além disso, sabemos que 108° é o ângulo suplementar de $\hat{x}$ e de $\hat{y}$. Portanto, temos:

$$\hat{x} = \hat{y} = 180 - 108$$

$$\hat{x} = \hat{y} = 72^\circ$$

b) 45° é O.P.V de $\hat{y}$, portanto $\hat{y} = 45^\circ$.

120° é O.P.V de $\hat{x}$, portanto $\hat{x} = 120^\circ$.

Além disso, sabemos que 120° é o ângulo suplementar de $\hat{z}$. Portanto, temos:

$$\hat{z} = 180 - 120$$

$$\hat{z} = 60^\circ$$

c) 17° é O.P.V de $\hat{z}$, portanto $\hat{z} = 17^\circ$.

95° é O.P.V de $\hat{x}$, portanto $\hat{x} = 95^\circ$.

Além disso, sabemos $17^\circ + w + 95^\circ$ é igual a 180. Resolvendo essa equação, temos:

$$17 + w + 95 = 180$$

$$w = 180 - 17 - 95$$

$$w = 68^\circ$$

d) Todos os ângulos dessa figura possuem a mesma medida. Basta aplicar o princípio do O.P.V para perceber. Sabemos que em um círculo, a soma de todos os ângulos é sempre 360° . Portanto, temos:

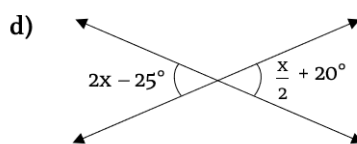
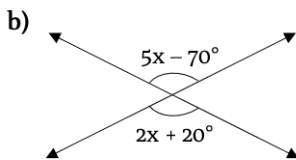
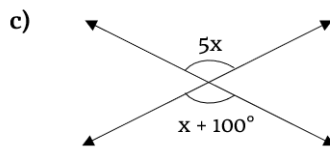
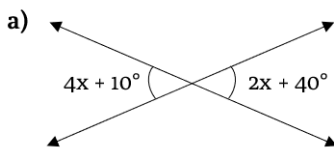
$$a + a + a + a + a + a = 360$$

$$6a = 360$$

$$a = \frac{360}{6}$$

$$a = 60^\circ$$

8. Calcule:



R. Em todos os casos, os ângulos são O.P.V. Portanto, precisamos os igualar e resolver as equações:

a)

$$4x + 10 = 2x + 40$$

$$4x - 2x = 40 - 10$$

$$2x = 30$$

$$x = \frac{30}{2}$$

$$x = 15$$

b)

$$5x - 70 = 2x + 20$$

$$5x - 2x = 20 + 70$$

$$3x = 90$$

$$x = \frac{90}{3}$$

$$x = 30.$$

c)

$$5x = x + 100$$

$$5x - x = 100$$

$$4x = 100$$

$$x = \frac{100}{4}$$

$$x = 25$$

d)

$$2x - 25 = \frac{x}{2} + 20$$

$$[2x - 25 = \frac{x}{2} + 20] \cdot 2$$

$$4x - 50 = x + 40$$

$$4x - x = 40 + 50$$

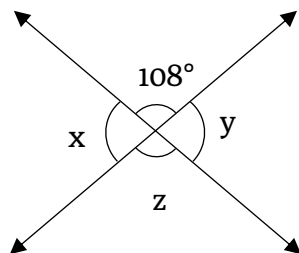
$$3x = 90$$

$$x = \frac{90}{3}$$

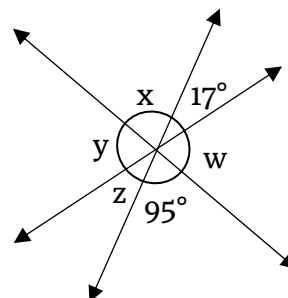
$$x = 30$$

9. Calcule os ângulos indicados pelas letras:

a)



b)

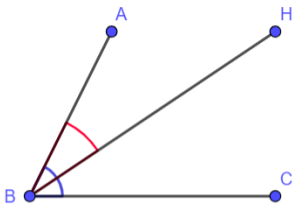


R. Exercício repetido. Ver passo a passo na questão 7.

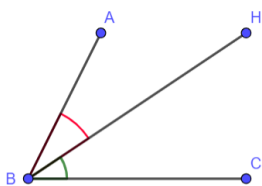
Lição 67 – Ângulos adjacentes

1. Defina o que são ângulos consecutivos e dê dois exemplos.

R. Dois ângulos são consecutivos quando possuem o mesmo vértice e um lado comum.



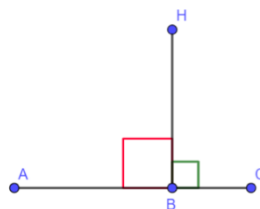
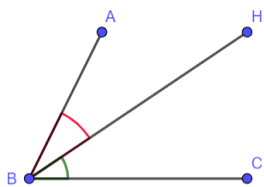
Os ângulos $A\hat{B}C$ e $C\hat{B}H$ são consecutivos pois possuem em comum o vértice B e o lado BA.



Os ângulos $A\hat{B}H$ e $C\hat{B}H$ são consecutivos pois possuem em comum o vértice B e o lado BH.

2. Defina o que são ângulos adjacentes e dê dois exemplos.

R. Dois ângulos são adjacentes quando são consecutivos e não possuem pontos internos.



3. Dois ângulos correspondentes, determinados por duas retas paralelas interceptadas por uma transversal, medem $2x + 40^\circ$ e $-3x + 90^\circ$.

a) Determine o valor de x.

b) Determine a medida de cada um dos ângulos dados.

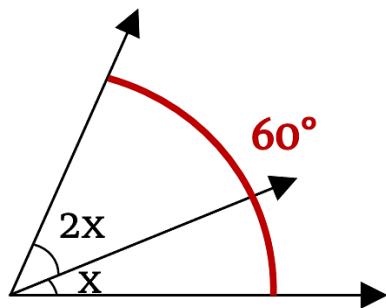
R. Isso só foi ensinado na lição 68.

4. Dois ângulos opostos pelo vértice medem $3x - 75^\circ$ e $x + 15^\circ$. Determine o valor de x ?

R. Se são O.P.V

5. Determine o valor de x :

a)



R.

a)

$$2x + x = 60$$

$$3x = 60$$

$$x = \frac{60}{3}$$

$$x = 20$$

b)

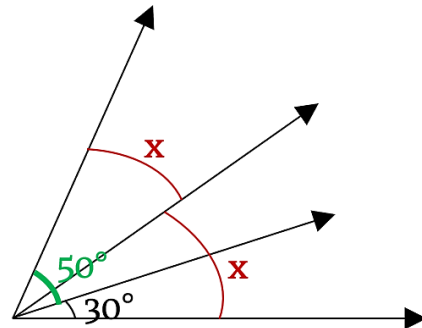
$$x + x = 50 + 30$$

$$2x = 80$$

$$x = \frac{80}{2}$$

$$x = 40^\circ$$

b)

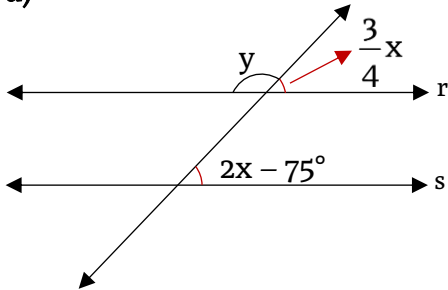


Lição 68 – Ângulos correspondentes

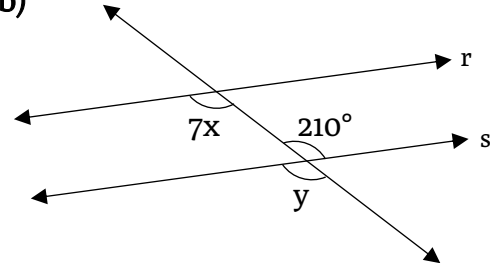
Nota: as lições 68 e 69 estão invertidas. Portanto, deve-se estudar primeiro a lição 69, para depois estudar a lição 68.

1. Em cada caso, determine o valor de x e y , sabendo que $r \parallel s$.

a)



b)



R.a) Os ângulos de medidas $2x - 75$ e $\frac{3}{4}x$ são correspondentes. Portanto:

$$2x - 75 = \frac{3}{4}x$$

$$[2x - 75 = \frac{3}{4}x] \cdot 4$$

$$8x - 300 = 3x$$

$$8x - 3x = 300$$

$$5x = 300$$

$$x = \frac{300}{5}$$

$$x = 6$$

Os ângulos de medidas y e $\frac{3}{4}x$ são suplementares. Portanto:

$$y + \frac{3}{4}x = 180$$

Como $x = 6$, temos:

$$y + \frac{3}{4} \cdot 6 = 180$$

$$y + \frac{18}{4} = 180$$

$$y = 180 - \frac{18}{4}$$

$$y = \frac{702}{4} = 175,5^\circ$$

b) Os ângulos de medidas $7x$ e 210° são correspondentes. Portanto:

$$R. 7x = 210$$

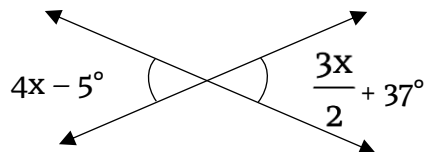
$$x = \frac{210}{7}$$

$$x = 30.$$

Os ângulos 210° e y são O.P.V. Portanto,

$$y = 210^\circ$$

2. Determine a medida de x .



R.

$$4x - 5 = \frac{3x}{2} + 37$$

$$\left[4x - 5 = \frac{3x}{2} + 37 \right] \cdot 2$$

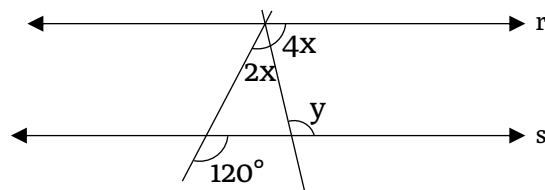
$$8x - 10 = 3x + 74$$

$$8x - 3x = 74 + 10$$

$$5x = 84$$

$$x = \frac{84}{5} = 16,8$$

3. Na figura seguinte, as retas r e s são paralelas. Qual é a medida do ângulo y ?



a) 100°

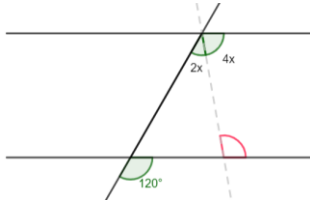
b) 110°

c) 120°

d) 130°

e) 140°

R. Observando o desenho é possível notar que o ângulo gerado pela soma de $2x$ e $4x$ é correspondente ao ângulo de medida 120° . Portanto, $2x + 4x = 120$



Sendo assim, temos que $x = 20$, pois:

$$2x + 4x = 120$$

$$6x = 120$$

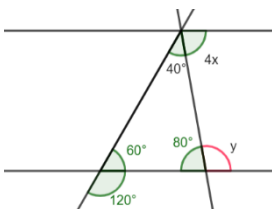
$$x = \frac{120}{6}$$

$$x = 20$$

Se $x = 20$, então $2x = 2 \cdot 20 = 40^\circ$.

Sabemos que o suplemento de 120° é 60° . Assim, sabemos a medida de dois ângulos do triângulo que foi formado pelas transversais. Portanto, para saber o valor do terceiro, basta subtrair de 180° as medidas já conhecidas. Assim, temos:

$$180 - 40 - 60 = 80^\circ$$



Sabemos ainda que 80° e y são suplementares. Assim:

$$80^\circ + y = 180^\circ$$

$$y = 180 - 80$$

$$y = 100^\circ$$

Resposta: alternativa a.

4. (UFMA) Dois ângulos opostos pelo vértice medem $(3x + 10^\circ)$ e $(x + 50^\circ)$. Um deles mede:

- a) 20°
- b) 70°
- c) 30°
- d) 80°
- e) 50°

R. Se são O.P.V, então possuem a mesma medida. Portanto, temos:

$$3x + 10 = x + 50$$

$$3x - x = 50 - 10$$

$$2x = 40$$

$$x = \frac{40}{2}$$

$$x = 20$$

Se $x = 20$, então a medida dos ângulos é:

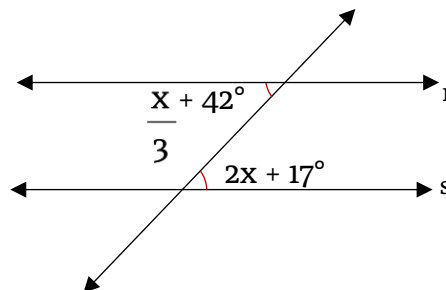
$$3x + 10 = 3 \cdot 20 + 10 = 60 + 10 = 70^\circ$$

$$x + 50 = 20 + 50 = 70^\circ$$

Portanto, a alternativa correta é a letra b.

Lição 69 – Ângulos alternos

1. Na figura ao lado, determine o valor de x , sabendo que $r \parallel s$.



R. Como r e s são paralelas, os ângulos $\frac{x}{3} + 42$ e $2x + 17$ são alternos internos, e portanto, são congruentes. Assim, temos:

$$\frac{x}{3} + 42 = 2x + 17$$

$$\left[\frac{x}{3} + 42 = 2x + 17 \right] \cdot 3$$

$$x + 126 = 6x + 51$$

$$6x - x = 126 - 51$$

$$5x = 75$$

$$x = \frac{75}{5}$$

$$x = 15$$

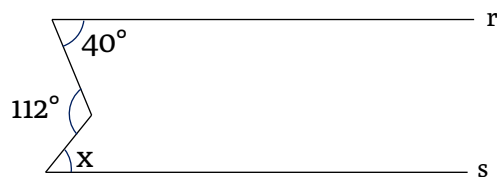
2. (Unimontes-MG) Se $r \parallel s$, então o valor de x , na figura abaixo, é: x

a) 52°

b) 68°

c) 72°

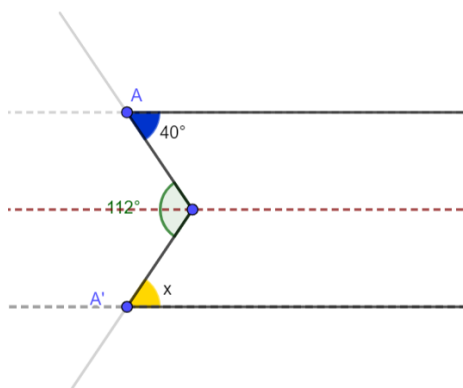
d) 58°



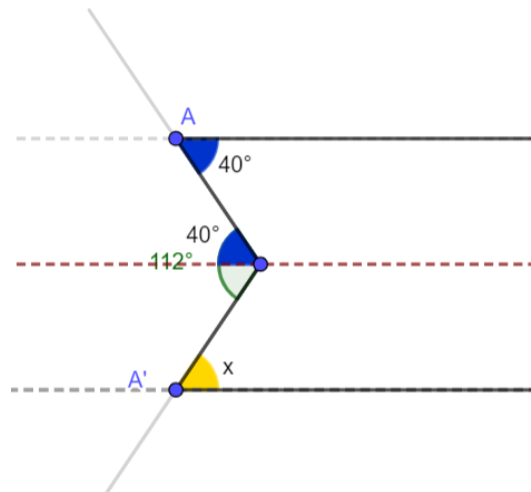
R. Vamos fazer um esquema em cores para facilitar a visualização da solução.



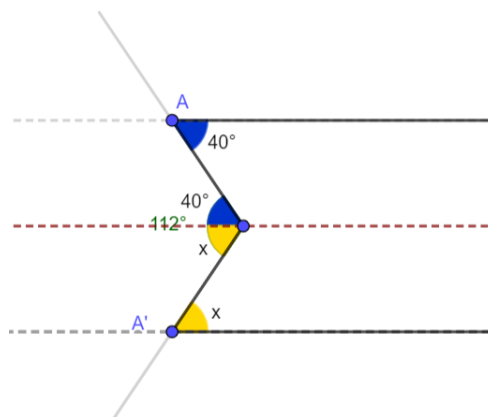
Traçando uma paralela a r e s pelo vértice do ângulo de 120° , temos:



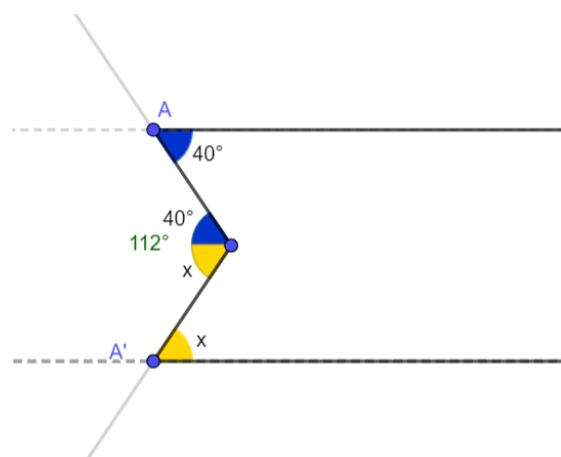
Ao traçar a paralela, é possível observar que uma parte do ângulo de 120° é um ângulo alterno ao ângulo de 40° . Assim, temos:



Da mesma forma, é possível observar que a outra parte do ângulo de 120° é um ângulo alterno ao ângulo de x° . Assim, temos:



Portanto, o ângulo de 120° é formado pela soma de 40° e x° :



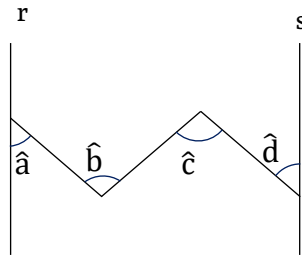
Portanto, temos:

$$40 + x = 120$$

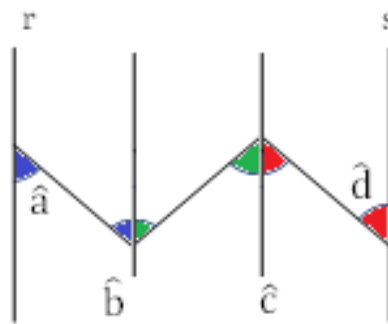
$$x = 120 - 40$$

$$x = 80^\circ$$

3. Na figura, as retas r e s são paralelas. O ângulo $\hat{a}$ mede 42° , o ângulo $\hat{b}$ mede 71° e o ângulo $\hat{d}$ mede 33° . Determine a medida do ângulo $\hat{c}$.



R. Como $\hat{a}$ mede 42° , $\hat{b} = \hat{a} + \text{ângulo pintado de verde}$ e $\hat{b}$ mede 71° então o ângulo pintado de verde é igual a 29° .

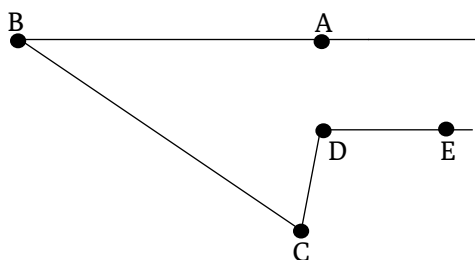


O ângulo $\hat{c} = \text{o ângulo verde} + \text{o ângulo vermelho}$. Como o ângulo vermelho é o ângulo $\hat{d}$ então, temos que:

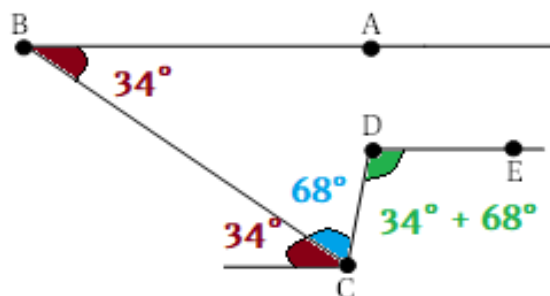
$$\hat{c} = \text{o ângulo verde} + \text{o ângulo vermelho}$$

$$\hat{c} = 29^\circ + 33^\circ = 62^\circ$$

4. Na figura, $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{DE}$. Sendo $\widehat{BCD} = 68^\circ$ e $\widehat{ABC} = 34^\circ$, calcule a medida do ângulo $\widehat{CDE}$.



R. Traçando uma paralela a $\overline{AB}$ passando por C temos a seguinte imagem:



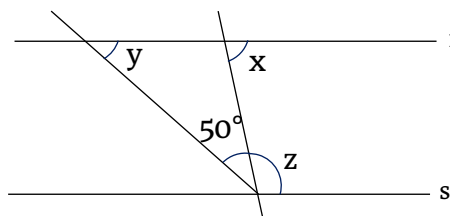
Como $\widehat{CDE}$ é alterno interno a soma do ângulo vinho e do ângulo azul, temos que:

$$\widehat{CDE} = 34^\circ + 68^\circ = 102^\circ$$

Lição 70 - Ângulos colaterais

1. As retas r e s da figura são paralelas. Sabendo que $x + 2y + 2z = 340^\circ$, qual é o valor, em graus, de y ?

- a) 30°
- b) 35°
- c) 40°
- d) 45°
- e) 50°



R.

É possível notar que, se desconsiderarmos uma das retas transversais (a que gerou os ângulos x e z), teremos que y é colateral do ângulo $50^\circ + z$. Assim, temos:

$$y + 50^\circ + z = 180^\circ$$

$$y + z = 180^\circ - 50^\circ$$

$$y + z = 130^\circ$$

$$z = 130^\circ - y$$

Além disso, os ângulos x e z são colaterais. Assim, temos:

$$x + z = 180$$

Como $z = 130 - y$, podemos substituir z na fórmula $x + z = 180$, encontrando o seguinte valor de x :

$$x + 130 - y = 180$$

$$x = 180 - 130 + y$$

$$x = y + 50$$

Substituindo x e z em $x + 2y + 2z = 340^\circ$, temos:

$$x + 2y + 2z = 340^\circ$$

$$(y + 50) + 2y + 2 \cdot (130 - y) = 340$$

$$y + 50 + 2y + 260 - 2y = 340$$

$$y + 310 = 340$$

$$y = 340 - 310$$

$$y = 30^\circ$$

Resposta: Alternativa a.

2. Na figura, ABCD é um retângulo e $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$. A medida de $\widehat{DAC}$ é a metade da medida de $\widehat{BAC}$.

Determine o valor de $a - b$.

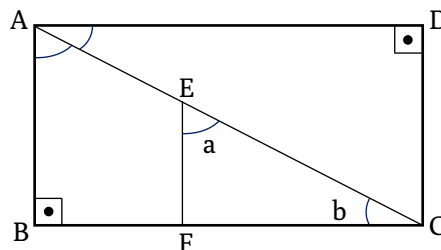
a) 10°

b) 20°

c) 30°

d) 45°

e) 50°



R. Como EF e AB são paralelas, os ângulos $\widehat{BAC}$ e $\widehat{FEC} = a$ são correspondentes. Assim:

$$a = \widehat{BAC}$$

Sabemos que o ângulo $\widehat{A}$ mede 90° , por se tratar de um retângulo. Sabemos ainda que:

$$\widehat{DAC} + \widehat{BAC} = 90^\circ$$

E que:

$$\widehat{DAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$$

Para encontrar o valor de $\widehat{BAC}$, basta substituir $\widehat{DAC}$:

$$\widehat{DAC} + \widehat{BAC} = 90^\circ$$

$$\frac{\widehat{BAC}}{2} + \widehat{BAC} = 90^\circ$$

$$\frac{3\widehat{BAC}}{2} = 90^\circ$$

$$3\widehat{BAC} = 90^\circ \cdot 2$$

$$\widehat{BAC} = \frac{180}{3}$$

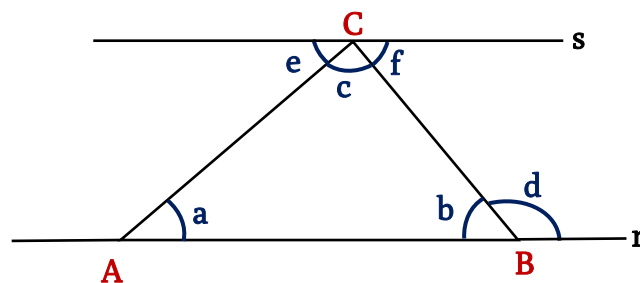
$$\widehat{BAC} = 60^\circ$$

Se $\widehat{BAC} = 60^\circ$, então $a = 60^\circ$ e $\widehat{DAC} = 30^\circ$.

Como EF e AB são paralelas, o ângulo $\widehat{EFC}$ mede 90° . Portanto, se $a = 60^\circ$ e o outro ângulo mede 90° , então $b = 30^\circ$.

Assim, o valor de $a - b = 60 - 30 = 30^\circ$.

3. Na figura, as retas r e s são paralelas.



Sabendo que $a = (2x + 5^\circ)$, $d = (9x - 10^\circ)$ e $f = (3x + 10^\circ)$, determine:

a) x

R. Sabemos que os ângulos f e d são colaterais e que, portanto, são suplementares. Assim, temos:

$$f + d = 180$$

$$(3x + 10) + (9x - 10) = 180$$

$$3x + 10 + 9x - 10 = 180$$

$$12x = 180$$

$$x = \frac{180}{12}$$

$$x = 15$$

b) a e b

R.

$$a = 2x + 5$$

$$a = 2 \cdot 15 + 5$$

$$a = 30 + 5$$

$$a = 35$$

Os ângulos b e d são suplementares. Descobrimos o valor de d, descobrimos o valor de b.

$$d = 9x - 10$$

$$d = 9 \cdot 15 - 10$$

$$d = 135 - 10$$

$$d = 125^\circ.$$

$$\text{Assim, } b = 180 - 125 = 55^\circ.$$

c) a + b + c

R. Os ângulos a, b e c são os ângulos internos do triângulo. Assim, temos que $a + b + c = 180^\circ$.

d) Como você classificaria os ângulos $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ACB}$ quanto às suas medidas?

R. Os ângulos a e b são acutângulos. O ângulo c é um ângulo reto, pois:

$$a + b + c = 180$$

$$35 + 55 + c = 180$$

$$90 + c = 180$$

$$c = 180 - 90$$

$$c = 90$$

e) De acordo com a soma de suas medidas, como são chamados os ângulos $\widehat{BAC}$ e $\widehat{ABC}$?

R. Os ângulos a e b são complementares, pois sua soma é 90° .

Lição 71 – Ângulos externos

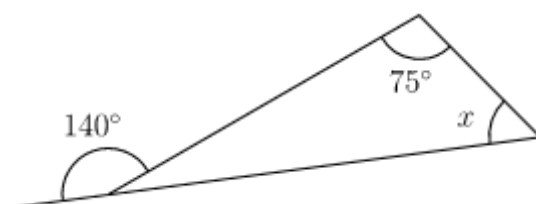
1. Defina com suas palavras o que é ângulo externo.

R. Comparar definição do aluno com a definição da apostila.

2. Defina o teorema do ângulo externo.

R. O teorema do ângulo externo enuncia que, fixado um triângulo, a medida de cada ângulo externo é igual à soma das medidas dos seus internos não adjacentes.

3. Calcule o valor x no triângulo abaixo.



R. Como 140° é um ângulo externo, temos que a soma dos ângulos internos não adjacentes a ele precisam ser iguais a 140° . Portanto, temos:

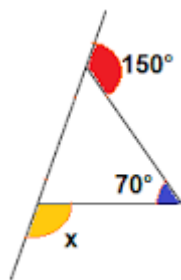
$$x + 75 = 140$$

$$x = 140 - 75$$

$$x = 65^\circ$$

4. Calcule o valor de x:

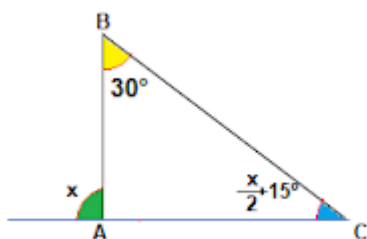
a)



R. Sabemos que o ângulo interno adjacente ao ângulo de 150° deve medir 30° , pois deve ser o suplemento de 150° . Portanto, temos a medida de dois ângulos internos: 30° e 70° . Pelo teorema do ângulo externo, temos:

$$x = 30 + 70 = 100^\circ$$

b)



R. Pelo teorema do ângulo externo, temos:

$$x = \left(\frac{x}{2} + 15\right) + 30$$

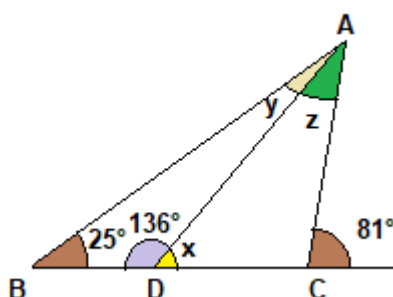
$$\left[x = \frac{x}{2} + 15 + 30 \right] \cdot 2$$

$$2x = x + 30 + 60$$

$$2x - x = 90$$

$$x = 90^\circ$$

5. Determine as medidas x, y e z indicadas na figura abaixo.



R. Os ângulos x e 136° são suplementares. Portanto, a medida de x é:

$$x + 136 = 180$$

$$x = 180 - 136$$

$$x = 44^\circ$$

A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° . Portanto, no triângulo ABD, temos:

$$y + 25 + 136 = 180$$

$$y + 161 = 180$$

$$y = 180 - 161$$

$$y = 19^\circ$$

Pelo teorema do ângulo externo, temos que a soma de x e z devem ser iguais a 81° . Como já sabemos a medida de x, temos:

$$x + z = 81^\circ$$

$$44 + z = 81$$

$$z = 81 - 44$$

$$z = 37.$$

Lição 72 – Circunferência

1. Defina:

a) Circunferência.

R. Circunferência é a figura geométrica formada por todos os pontos de um plano que distam igualmente de um ponto fixo desse plano.

b) Raio.

R. Qualquer segmento que une o centro a um ponto da circunferência se chama raio.

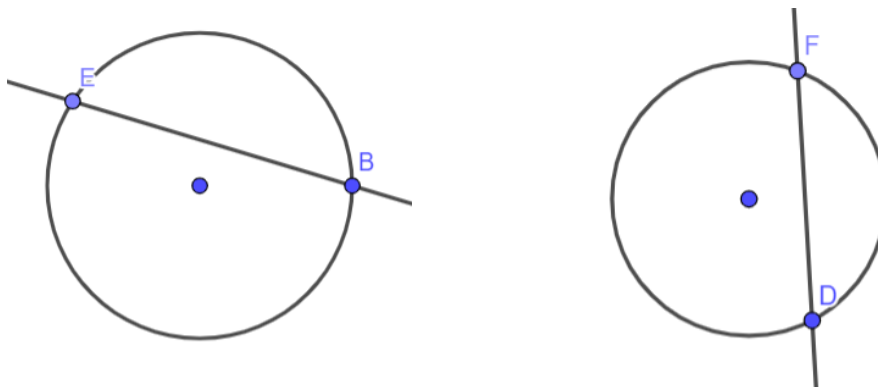
c) Diâmetro

R. A corda que passa pelo centro da circunferência chama-se diâmetro. O diâmetro é a maior corda da circunferência.

Lição 73 – Posição relativa de uma reta a uma circunferência

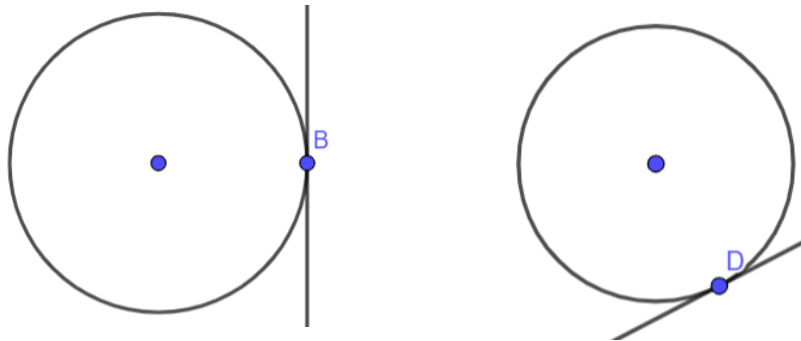
1. Defina reta secante na circunferência e dê dois exemplos.

R. Reta secante é a reta que corta a circunferência em dois pontos distintos.



2. Defina reta tangente na circunferência e dê dois exemplos.

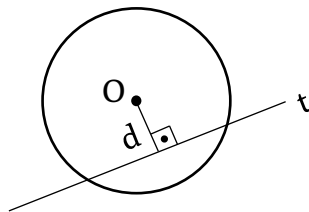
R. Reta tangente é a reta que passa por apenas um ponto da circunferência.



3. Defina reta externa na circunferência e dê dois exemplos.

R. Reta externa é toda reta que não possui ponto comum com a circunferência, isto é, não passa por ela.

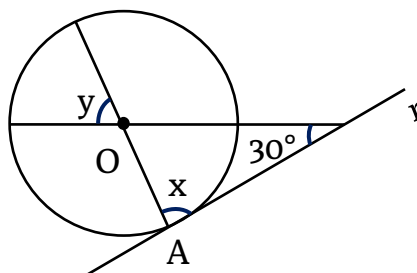
4. Uma reta t é secante a uma circunferência de centro O e 10 cm de raio. Indicando por d a distância do ponto O à reta t , qual é o maior valor inteiro que d pode assumir?



R. O maior valor inteiro que d pode assumir é 9 cm.

Lição 74 – Propriedade da reta tangente

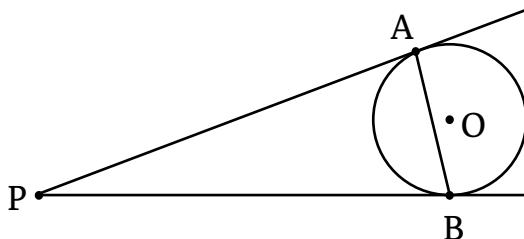
1. Na figura, a reta r é tangente à circunferência. Determine as medidas x e y .



R. A reta tangente forma um ângulo reto com o raio da circunferência. Portanto, x é um ângulo reto, isto é, $x = 90^\circ$.

No triângulo, sabemos que $x = 90^\circ$ e que o outro ângulo mede 30° . Portanto, o ângulo superior do triângulo mede $180 - 90 - 30 = 60^\circ$. Como esse ângulo é O.P.V a y, então $y = 60^\circ$

- 2.** Na figura, a medida do segmento PA é expressa por x, e a medida do segmento AB é expressa por y. Qual é o polinômio que expressa o perímetro do triângulo PAB?



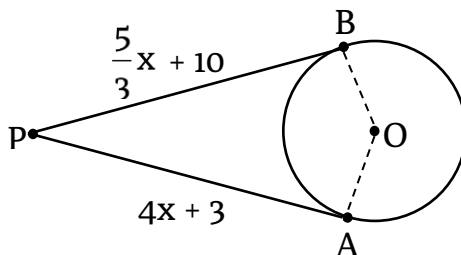
R. Sabemos que os segmentos PA e PB são congruentes. Portanto, $PA = PB = x$. O perímetro é a soma de todos os lados. Portanto, temos:

$$\text{Perímetro de PAB} = PA + PB + AB$$

$$\text{Perímetro de PAB} = x + x + y$$

$$\text{Perímetro de PAB} = 2x + y$$

- 3.** Observe a figura.



Determine:

- a) a medida x;

R. Sabemos que os segmentos PA e PB são congruentes. Portanto:

$$\frac{5}{3}x + 10 = 4x + 3$$

$$\left[\frac{5}{3}x + 10 = 4x + 3 \right] \cdot 3$$

$$5x + 30 = 12x + 9$$

$$30 - 9 = 12x - 5x$$

$$7x = 21$$

$$x = \frac{21}{7}$$

$$x = 3.$$

b) a medida do segmento PA;

$$PA = 4x + 3$$

$$PA = 4 \cdot 3 + 3$$

$$PA = 12 + 3$$

$$PA = 15$$

c) a medida do segmento PB;

R. Como $PA = PB$, então $PB = 15$.

d) o perímetro do quadrilátero PAOB, se o comprimento do raio é 7 cm.

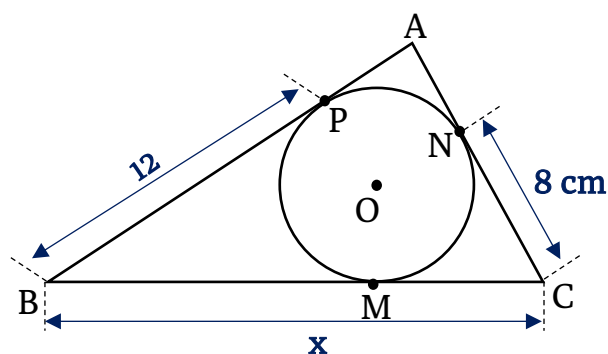
R.

$$\text{Perímetro PAOB} = PA + PB + AO + OB$$

$$\text{Perímetro PAOB} = 15 + 15 + 7 + 7$$

$$\text{Perímetro PAOB} = 44 \text{ cm.}$$

4. Observe a figura.



Determine a medida:

a) x do lado BC do triângulo ABC.

R. Os três lados tangenciam a circunferência. Pelas propriedades da tangente, temos:

$$BP \equiv BM$$

Como BP mede 12 *u.m.*, então $BM = 12$.

Da mesma maneira, temos:

$$CM \equiv CN$$

Como CN mede 8 *u.m.*, então $CM = 8$.

Assim, o lado BC mede:

$$BC = BM + CM$$

$$x = 12 + 8$$

$$x = 20.$$

b) do segmento AN, caso o perímetro do triângulo ABC seja 46 cm.

R. Chamemos AN por y . Pela propriedade da tangente, temos que $AN \equiv AP = y$. Assim, o perímetro do triângulo ficaria da seguinte maneira:

$$\text{Perímetro ABC} = AB + BC + AC$$

$$46 = (12 + y) + 20 + (8 + y)$$

$$46 = 12 + y + 20 + 8 + y$$

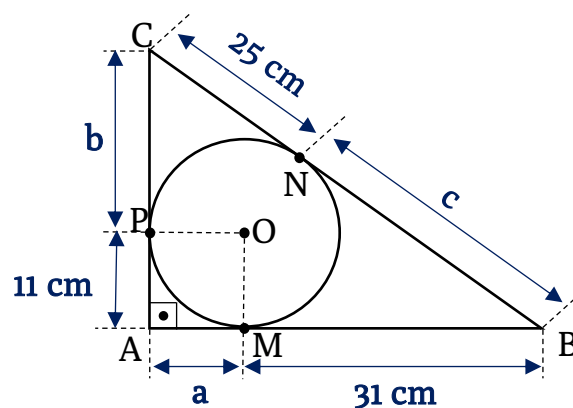
$$46 = 2y + 40$$

$$2y = 46 - 40$$

$$y = \frac{6}{2}$$

$$y = 3$$

5. Observe a figura a seguir.



Determine:

a) as medidas a , b e c indicadas na figura;

R. Pelas propriedades da tangente, temos:

$$\text{CP} \equiv \text{CN}$$

$$b = 25 \text{ cm}$$

$$AM \equiv AP$$

$$a = 11 \text{ cm}$$

$$\text{BN} \equiv \text{BM}$$

$$c = 31 \text{ cm}$$

b) o perímetro do triângulo ABC.

R.

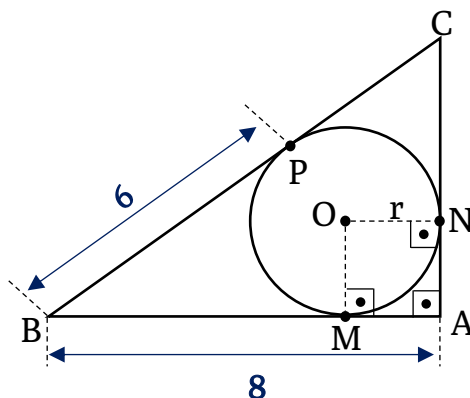
$$\text{Perímetro ABC} = \text{AB} + \text{BC} + \text{AC}$$

$$\text{Perímetro ABC} = (11 + 31) + (31 + 25) + (25 + 11)$$

$$\text{Perímetro ABC} = 42 + 56 + 36$$

Perímetro ABC = 134 cm.

6. Considerando a figura, determine:



a) o comprimento r do raio da circunferência;

R. Pelas propriedades da tangente, temos que $BP \equiv BM$. Portanto, $BM = 8$.

Como $BA = 8$, e também que $BA = BM + MA$, temos que $MA = 2$.

Se o lado do quadrado mede 2 u.m. , então o raio, que é um lado do quadrado, também mede 2 u.m.

b) o perímetro do quadrado ANOM;

R. Perímetro = $4 \cdot \text{lado} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ u.m.}$

c) a expressão algébrica que representa o perímetro do triângulo ABC, se a medida do segmento PC é a .

R. Se $PC = a$, então $PN = a$.

Sendo assim, o perímetro ABC é:

$$\text{Perímetro ABC} = BA + BC + AC$$

$$\text{Perímetro ABC} = 8 + (6 + a) + (2 + a)$$

$$\text{Perímetro ABC} = 8 + 6 + a + 2 + a$$

$$\text{Perímetro ABC} = 2a + 16$$

d) o perímetro do quadrilátero BMOP.

R.

$$\text{Perímetro BMOP} = BM + OM + OP + BP$$

$$\text{Perímetro BMOP} = 6 + 2 + 2 + 6$$

$$\text{Perímetro BMOP} = 16.$$

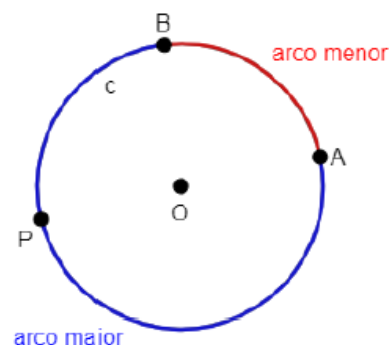
Lição 75 - Arco de circunferência

1. Defina arco em uma circunferência e dê dois exemplos.

R. Seja uma circunferência c representada abaixo com dois pontos distintos, A e B. Os pontos A e B dividem a circunferência em duas partes, e cada uma dessas partes é chamada arco de circunferência.

2. O que é o arco maior e o arco menor em uma circunferência?

R. Uma circunferência c com pontos A e B sempre delimitarão dois arcos, um maior e outro menor.



3. Defina:

a) Diâmetro

R. Ver definição dada no exercício da lição 72.

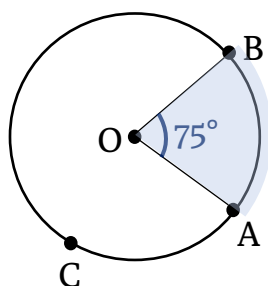
b) semicircunferência.

R. Quando as extremidades do arco são extremidades de um mesmo diâmetro, cada um dos arcos se denomina semicircunferência.

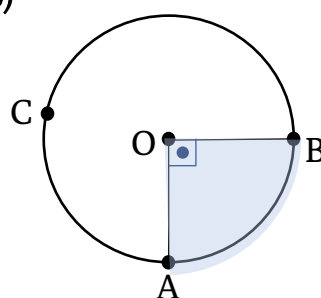
Lição 76 - Ângulo central

1. Em cada uma das figuras, dê a medida do arco AB e a do arco ACB:

a)



b)



R.

a)

$$\text{Arco AB} = 75^\circ$$

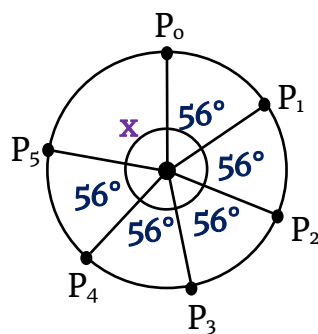
$$\text{Arco ACB} = 360^\circ - 75^\circ = 285^\circ.$$

b)

$$\text{Arco AB} = 90^\circ$$

$$\text{Arco ACB} = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ.$$

2. Observando a figura, dê o valor da medida x .



R.

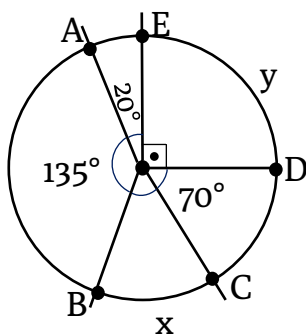
$$x + 56 + 56 + 56 + 56 + 56 = 360$$

$$x + 280 = 360$$

$$x = 360 - 280$$

$$x = 80$$

3. Na figura a seguir, calcule o valor de x (medida do arco BC) e o valor de y (medida do arco DE).



R. Percebemos que $y = 90^\circ$. Assim, temos:

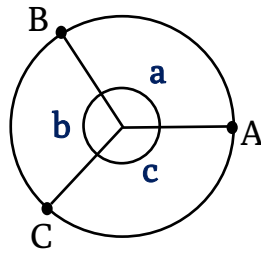
$$x + 70 + 90 + 20 + 135 = 360$$

$$x + 315 = 360$$

$$x = 360 - 315$$

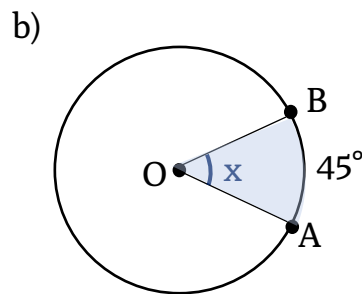
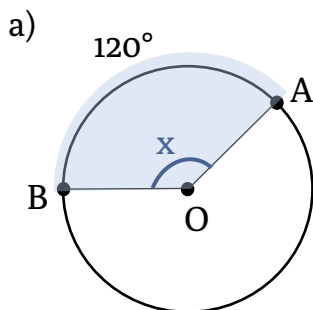
$$x = 45^\circ$$

4. Na figura, temos que $a = b = c$, em que a , b e c são as medidas dos ângulos centrais associados a cada arco. Determine a medida dos arcos AB, BC e CA.



R. Como os três ângulos são iguais, significa que a circunferência de 360° foi dividida em três partes iguais. Portanto, cada um dos ângulos, mede $360 : 3 = 60^\circ$. Portanto, essa é a medida de cada um dos ângulos.

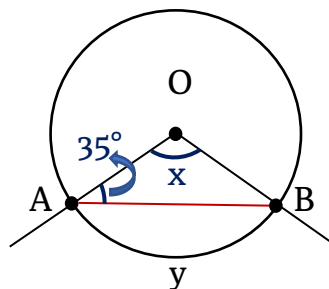
5. Em cada uma das figuras a seguir, calcule a medida x do ângulo central associado ao arco menor AB.



R. a) $x = 120^\circ$.

b) $x = 45^\circ$.

6. Sabendo que o triângulo OAB da figura é isósceles, determine a medida x do ângulo central $\widehat{AOB}$ e a medida y do arco AB associado a esse ângulo central.



R. AO e OB possuem a mesma medida. Portanto, o triângulo OAB é isósceles, e os ângulos de sua base têm a mesma medida. Assim, $\widehat{OAB} \equiv \widehat{OBA} = 35^\circ$. Agora, sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° , temos:

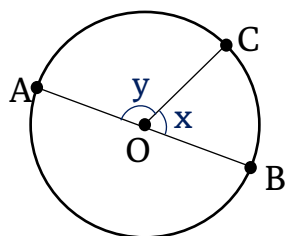
$$\widehat{OAB} + \widehat{OBA} + \widehat{AOB} = 180^\circ$$

$$35 + 35 + x = 180^\circ$$

$$x = 180 - 70$$

$$x = 110^\circ$$

7. Sabendo que o arco BC mede 80° , calcule o valor da expressão $y - x$.



R. Sabemos que o ângulo x mede 80° , pela medida de seu arco BC. Pela imagem, é possível observar que y e x são suplementares. Portanto, temos:

$$y + x = 180$$

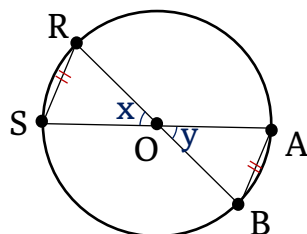
$$y + 80 = 180$$

$$y = 180 - 80$$

$$y = 100^\circ.$$

Assim, $y - x = 100 - 80 = 20^\circ$

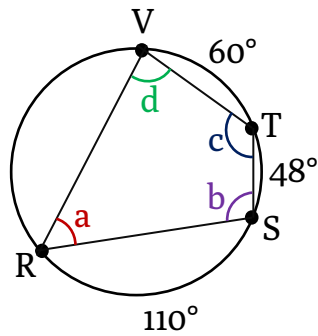
8. Na figura a seguir, as cordas AB e RS são congruentes. Você pode afirmar que os triângulos AOB e ROS são congruentes? Em caso afirmativo, que caso de congruência justifica sua resposta?



R. Sim, são congruentes pelo caso L.L.L.

Lição 77 - Ângulo inscrito

1. Determine as medidas a , b , c e d , indicadas na figura.



R. O ângulo d mede o mesmo que o arco RT.

$$d = \frac{RT}{2}$$

$$d = \frac{RS + ST}{2}$$

$$d = \frac{110 + 48}{2}$$

$$d = \frac{158}{2} = 79^\circ$$

O ângulo a mede o mesmo que o arco VS.

$$a = \frac{VS}{2}$$

$$a = \frac{VT + TS}{2}$$

$$a = \frac{60 + 48}{2}$$

$$a = \frac{108}{2} = 54^\circ$$

O arco RV mede:

$$RV + 110 + 48 + 60 = 360$$

$$RV + 218 = 360$$

$$RV = 360 - 218$$

$$RV = 142^\circ$$

O ângulo b mede o mesmo que o arco RT.

$$b = \frac{RT}{2}$$

$$b = \frac{RV + VT}{2}$$

$$b = \frac{142 + 60}{2}$$

$$b = \frac{202}{2} = 101^\circ$$

O ângulo c mede o mesmo que o arco SV.

$$c = \frac{SV}{2}$$

$$c = \frac{SR + RV}{2}$$

$$c = \frac{110 + 142}{2}$$

$$c = \frac{252}{2} = 126^\circ$$

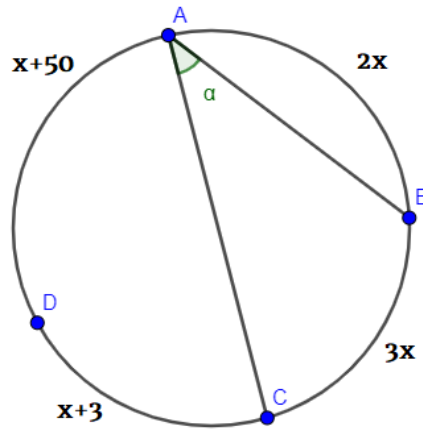
2. Em uma circunferência a medida do arco AB é $\text{med}(\text{AB}) = 2x$; a medida do arco BC é $\text{med}(\text{BC}) = 3x$; a medida do arco CD é $\text{med}(\text{CD}) = x + 3$; e a medida do arco DA é $\text{med}(\text{DA}) = x + 50^\circ$. Determine a medida do ângulo inscrito:

a) $\widehat{\text{BAC}}$;

b) $\widehat{\text{BCD}}$.

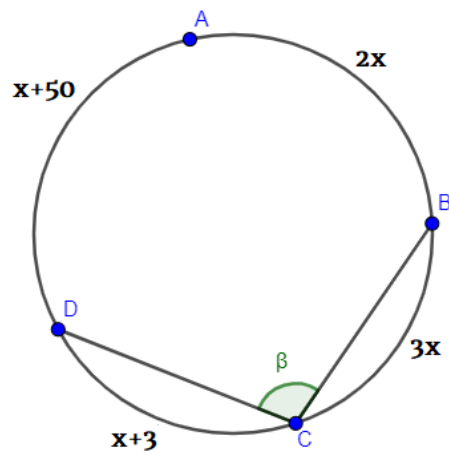
R.

a) O ângulo $\widehat{BAC}$ é da seguinte forma;



$$\widehat{BAC} = \frac{3x}{2}$$

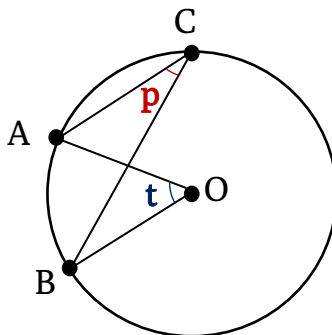
b) O ângulo $\widehat{BCD}$ é da seguinte forma;



$$\widehat{BCD} = \frac{2x + x + 50}{2} = \frac{3x}{2} + 25$$

Lição 78 – Casos de congruência – Parte II

1. Qual é a relação de igualdade entre as medidas dos ângulos p e t indicados na figura?



R. Sabemos que o arco AB mede o mesmo que o ângulo $\hat{t}$:

$$\text{Arco AB} = \hat{t}$$

Sabemos ainda que o ângulo $\hat{p}$ mede o mesmo que metade do arco AB. Assim, temos:

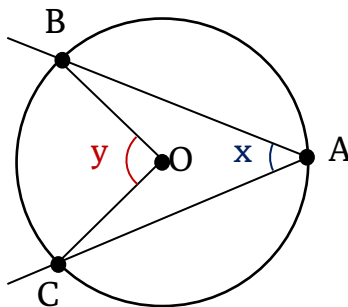
$$\hat{p} = \frac{\text{Arco AB}}{2}$$

Substituindo Arco AB, por $\hat{t}$, temos:

$$\hat{p} = \frac{\hat{t}}{2}$$

Assim, a relação entre os dois ângulos é que o ângulo $\hat{p}$ mede o mesmo que a metade do ângulo $\hat{t}$ (ou dizendo de outro modo: a medida do ângulo $\hat{t}$ é o dobro da medida do ângulo $\hat{p}$).

2. A medida do arco BC é 92° . Determine as medidas x e y indicadas na figura.

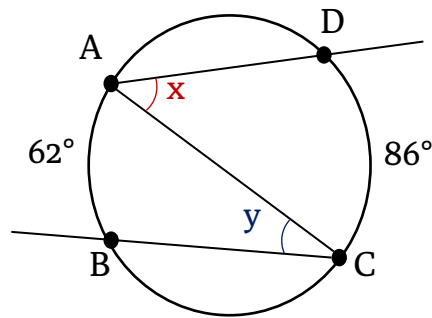


R. Se a medida do arco é 92° , então:

$$\hat{y} = 92^\circ$$

$$\hat{x} = \frac{92}{2} = 46^\circ$$

3. Considerando a figura abaixo, calcule o valor da expressão $x - y$.



R. Se a medida do arco AB é 22° , então:

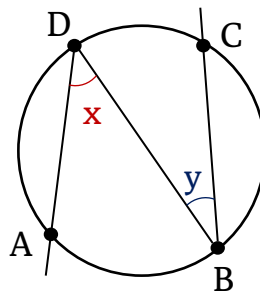
$$\hat{y} = \frac{62}{2} = 31^\circ$$

Se a medida do arco DC é 86° , então:

$$\hat{x} = \frac{86}{2} = 43^\circ$$

Portanto, $x - y = 43 - 31 = 12^\circ$

4. A medida do arco AB corresponde a $\frac{1}{5}$ da medida da circunferência (em graus), enquanto a medida do arco CD corresponde a $\frac{1}{6}$ da medida da circunferência (em graus). Determine as medidas x e y indicadas na figura.



R. Toda circunferência possui 360° . Portanto, se o arco AB corresponde a $\frac{1}{5}$ dessa circunferência, então sua medida é:

$$\text{Arco } AB = \frac{1}{5} \text{ de } 360^\circ$$

$$\text{Arco } AB = \frac{1}{5} \cdot 360^\circ$$

$$\text{Arco } AB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

Como a medida do arco é 72° , então a medida de x é:

$$\hat{x} = \frac{72}{2} = 36^\circ$$

Se o arco CD corresponde a $\frac{1}{6}$ dessa circunferência, então sua medida é:

$$\text{Arco CD} = \frac{1}{6} \text{ de } 360^\circ$$

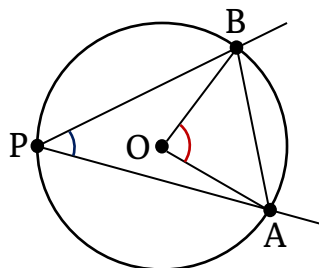
$$\text{Arco CD} = \frac{1}{6} \cdot 360^\circ$$

$$\text{Arco CD} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

Como a medida do arco é 60° , então a medida de y é:

$$\hat{y} = \frac{60}{2} = 30^\circ$$

5. Na circunferência da figura abaixo, a corda AB determina na circunferência um arco que mede 82° .



Sabendo que O é o centro e P um ponto qualquer da circunferência, determine a medida do ângulo:

a) AOB

R. Como a medida do arco é 82° , então a medida de AOB é:

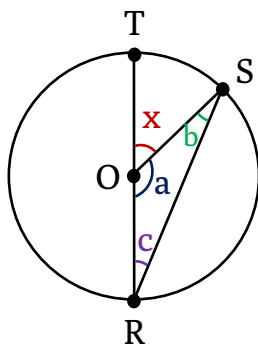
$$\widehat{AOB} = 82^\circ$$

b) APB

R. Como a medida do arco é 82° , então a medida de APB é:

$$\widehat{APB} = \frac{82}{2} = 41^\circ$$

6. Sabendo que RS mede 140° , calcule o valor de x , a , b e c .



R. O valor de a é o próprio valor do arco. Assim, $\hat{a} = 140^\circ$.

Os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{x}$ são suplementares, como podemos observar pelo desenho. Assim, temos:

$$\hat{a} + \hat{x} = 180^\circ$$

$$140^\circ + \hat{x} = 180^\circ$$

$$\hat{x} = 180^\circ - 140^\circ$$

$$\hat{x} = 40^\circ$$

Como o ângulo $\hat{x} = 40^\circ$, então o arco $ST = 40^\circ$.

Como o arco $SR = 40^\circ$, então o ângulo $\hat{c}$ mede:

$$\hat{c} = \frac{40}{2} = 20^\circ$$

Agora, como $\hat{a} = 140^\circ$ e $\hat{c} = 20^\circ$, então $\hat{b}$:

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$$

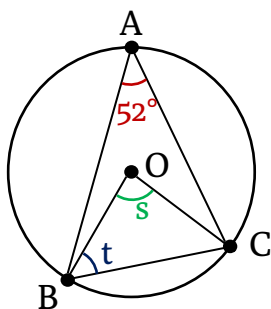
$$140 + \hat{b} + 20 = 180^\circ$$

$$160 + \hat{b} = 180^\circ$$

$$\hat{b} = 180^\circ - 160^\circ$$

$$\hat{b} = 20^\circ$$

7. Observando a circunferência da figura, determine as medidas s e t indicadas.



R. O arco BC mede o dobro do ângulo de 52° . Portanto, temos:

$$\text{Arco BC} = 2 \cdot 52^\circ$$

$$\text{Arco BC} = 104^\circ.$$

Se o arco BC mede 104° , então o ângulo s mede 104° .

$$\hat{s} = 104^\circ$$

O triângulo OBC é isósceles, pois os lados OB e OC são iguais, uma vez que ambos equivalem ao raio da circunferência. Portanto, os ângulos da base são iguais, o que significa que o ângulo que está no vértice C também mede t . Assim, a soma dos três ângulos desse triângulo é a seguinte:

$$\hat{s} + \hat{t} + \hat{t} = 180^\circ$$

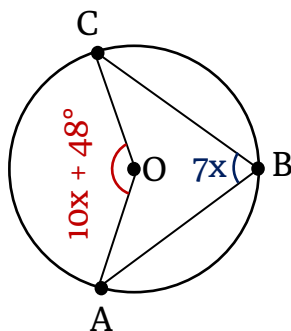
$$104 + 2\hat{t} = 180^\circ$$

$$2\hat{t} = 180^\circ - 104^\circ$$

$$\hat{t} = \frac{76}{2}$$

$$\hat{t} = 38^\circ$$

8. Dada a circunferência a seguir, determine as medidas dos ângulos AOC e ABC.



R.

$$\widehat{AOC} = 2 \cdot \widehat{ABC}$$

$$10x + 48 = 2 \cdot 7x$$

$$10x + 48 = 14x$$

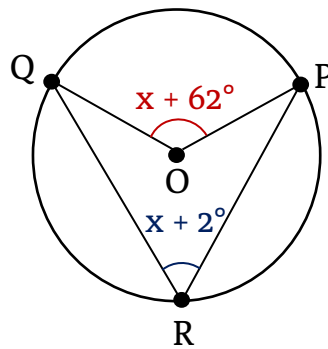
$$14x - 10x = 48$$

$$4x = 48$$

$$x = \frac{48}{4}$$

$$x = 12$$

9. Qual é a medida do ângulo inscrito na figura a seguir?



R.

$$\widehat{POQ} = 2 \cdot \widehat{PRQ}$$

$$x + 62 = 2 \cdot (x + 2)$$

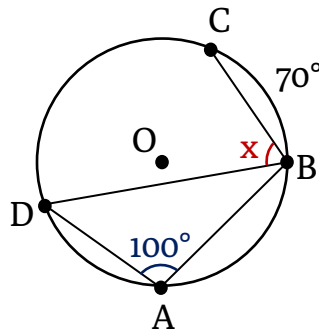
$$x + 62 = 2x + 4$$

$$2x - x = 62 - 4$$

$$x = 58$$

Portanto, o ângulo inscrito mede: $x + 2 = 58^\circ + 2^\circ = 60^\circ$.

- 10.** Observando esta figura, determine a medida do arco CD e a medida x do ângulo DBC.



R. Como o ângulo $\widehat{DAB}$ mede 100° , então o arco DB mede o dobro de 100° , isto é, 200° . Como o arco DB é composto pelos arcos DC e CB, e CB mede 70° , então o arco DC mede:

$$DB = DC + CB$$

$$200^\circ = DC + 70^\circ$$

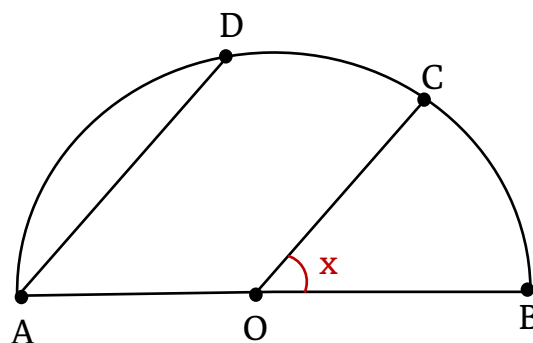
$$DC = 200^\circ - 70^\circ$$

$$DC = 130^\circ$$

Agora que sabemos o valor de DC, então x valerá metade desse valor.

$$x = \frac{130}{2} = 65^\circ$$

- 11.** Uma semicircunferência tem centro O e diâmetro $\overline{AB}$, com $\overline{OC} \parallel \overline{AD}$. A medida do arco CD é 45° . Determine a medida x indicada na figura a seguir:



R. Como $\overline{OC} \parallel \overline{AD}$, temos que o raio OA é uma transversal dos segmentos. Assim, aplicando o que aprendemos acerca das paralelas cortadas por uma transversal, é possível observar que o ângulo $\widehat{OAD}$ é congruente ao ângulo $\hat{x}$.

O ângulo $\widehat{OAD}$ tem sua medida equivalente a metade do arco DB, e o arco DB é composto por dois arcos menores: CD e BC. Assim, temos:

$$\widehat{OAD} = \frac{DB}{2} = \frac{CD + BC}{2} = \frac{45 + CB}{2}$$

Sabemos que o ângulo $\hat{x}$ tem mesma medida do arco CB. Então,

$$x = CB$$

Oras, sabemos também que o ângulo x tem a mesma medida de $\widehat{OAD}$. Portanto, temos:

$$x = \widehat{OAD}$$

$$CB = \frac{45 + CB}{2}$$

$$2 \cdot CB = 45 + CB$$

$$2CB - CB = 45$$

$$CB = 45^\circ$$

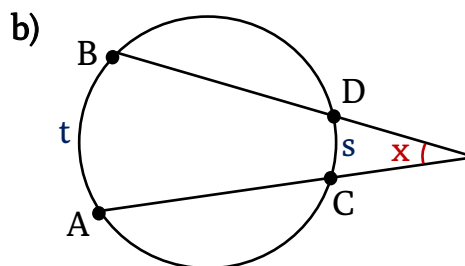
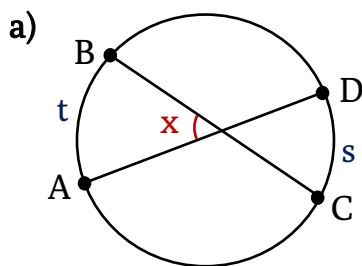
Portanto, $x = 45^\circ$

Lição 79 - Mediatriz de um segmento

1. Construa um ângulo inscrito e central no GeoGebra.

Lição 80 - Congruência em um triângulo isósceles e retângulo

1. Em cada uma das figuras, vamos indicar por t a medida do arco AB e por s a medida do arco CD. Determine a medida x em função de t e s .



R. a) x é um ângulo inscrito. Então, seus lados delimitam um arco cuja medida é o dobro da sua (ou, em outras palavras: a medida do ângulo é metade da medida do arco). Assim, temos:

$$x = \frac{t}{2}$$

Além disso, o ângulo x tem um O.P.V, cujos lados delimitam o arco de medida s . Então, podemos também associar x ao arco de medida s da mesma forma.

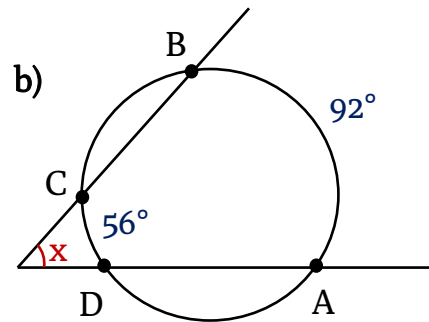
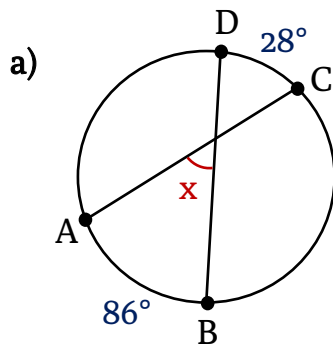
$$x = \frac{s}{2}$$

Portanto, a medida de x , em função de t e s fica:

$$x = \frac{t}{2} + \frac{s}{2} = \frac{t+s}{2}$$

$$b) x = \frac{t}{2} - \frac{s}{2} = \frac{t-s}{2}$$

2. Determine a medida x em cada uma das figuras (a medida dos arcos está indicada na cor azul):

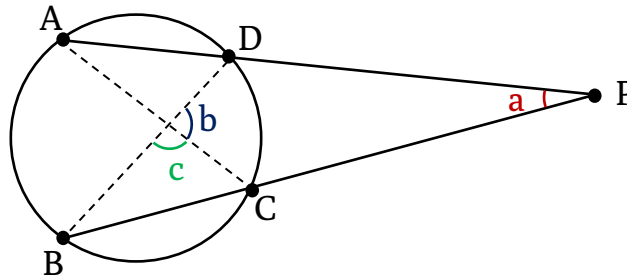


R.

$$a) x = \frac{86}{2} + \frac{28}{2} = 43 + 12 = 55^\circ$$

$$b) x = \frac{92}{2} - \frac{56}{2} = 46 - 28 = 18^\circ$$

3. Determine as medidas a , b e c indicadas na figura, sabendo que a medida do arco AB é 125° e a medida do arco CD é 65° .



R. Como os lados do ângulo b delimitam o arco CD, temos que sua medida é metade da medida do arco CD. Assim, temos:

$$b = \frac{CD}{2} + \frac{AB}{2}$$

$$b = \frac{65}{2} + \frac{125}{2}$$

$$b = 32,5^\circ + 62,5^\circ = 95^\circ$$

Pelo desenho é possível notar que os ângulos b e c são suplementares. Portanto, a medida de c é:

$$b + c = 180$$

$$95 + c = 180$$

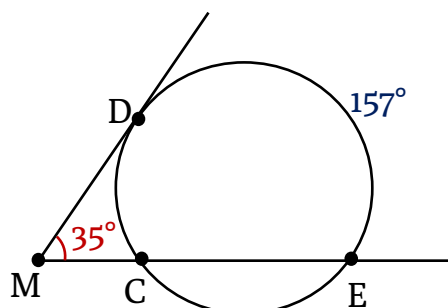
$$c = 180 - 95$$

$$c = 85^\circ$$

Como a é um ângulo externo, temos:

$$a = \frac{AB}{2} - \frac{CD}{2} = \frac{125}{2} - \frac{65}{2} = 62,5 - 32,5 = 30^\circ$$

4. Se o arco DE mede 157° , quanto mede o arco CD na figura a seguir?



R. Como $M = 35^\circ$ é um ângulo externo, temos:

$$M = \frac{DE}{2} - \frac{CD}{2}$$

$$35 = \frac{157}{2} - \frac{CD}{2}$$

$$\left[35 = \frac{157}{2} - \frac{CD}{2} \right] \cdot 2$$

$$70 = 157 - CD$$

$$CD = 157 - 70$$

$$CD = 87^\circ$$

Gabarito de Matemática

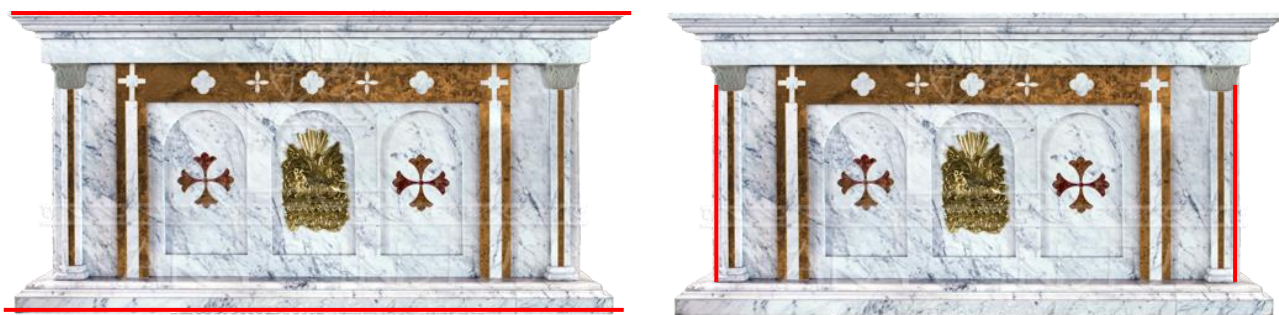
9º ano, Volume 6

Lição 81 – Posição relativa entre duas retas

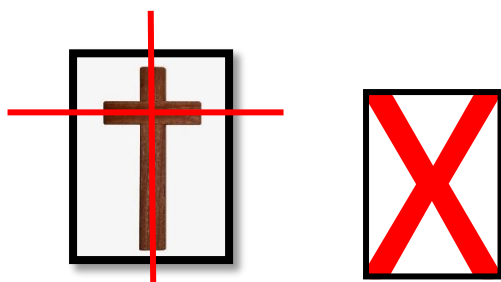
1. Quais são as posições relativas entre duas retas? Explique cada uma delas utilizando dois exemplos para cada uma.

R.

Paralelas: as retas r e s são ditas paralelas se não possuem nenhum ponto em comum, até ao infinito.



Concorrentes: r e s são ditas concorrentes se possuem um ponto em comum.



2. Dê exemplos do cotidiano onde possamos encontrar estes dois tipos de posições entre retas

R. Resposta pessoal.

Lição 82 – Feixe e transversal do feixe de paralelas

1. O que é um feixe de paralelas? O que é uma transversal a um eixo de retas paralelas? Faça um desenho em seu caderno e utilize-o para responder.

R. Um **feixe de retas paralelas** é o conjunto de retas coplanares¹ paralelas entre si.

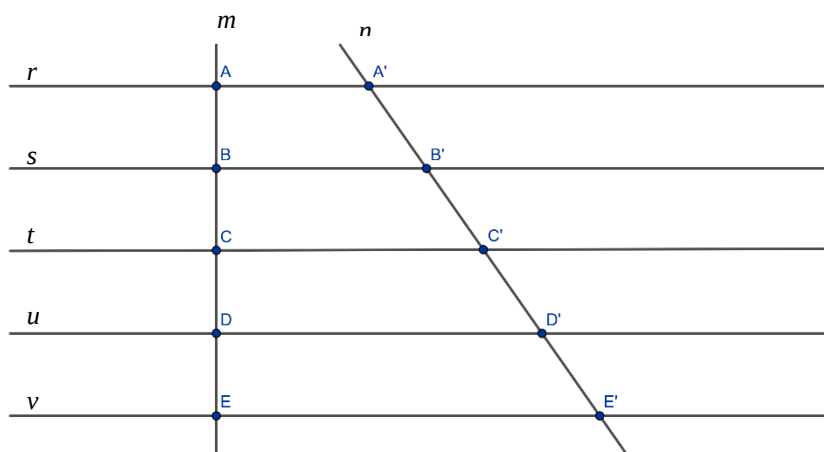
Uma reta que concorre com todas as retas do feixe de paralelas é dita **transversal do feixe de paralelas**.

Lição 83 – Segmentos correspondentes e comensuráveis

1. O que são pontos e segmentos correspondentes? Faça um desenho em seu caderno e utilize-o para responder.

R. Sejam dadas duas transversais a um feixe de paralelas. Os **pontos correspondentes** são os pontos que pertencem a uma mesma paralela e transversais diferentes.

São **segmentos correspondentes** os segmentos cujas extremidades são pontos correspondentes entre essas duas transversais.



Os pontos A e A', B e B', C e C', D e D' e E e E' são correspondentes.

Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$, $\overline{AD}$ e $\overline{A'D'}$, $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$, $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$ são correspondentes, entre outros.

¹ Coplanares: que estão no mesmo plano.

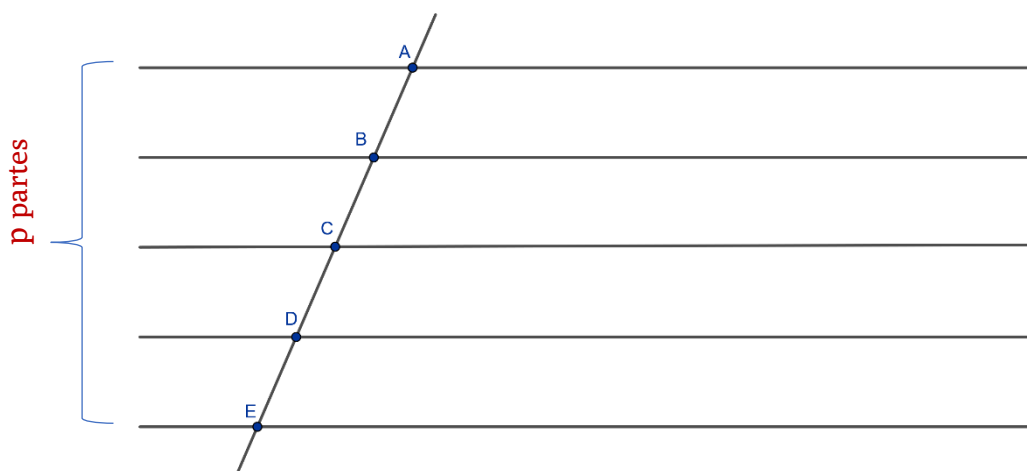
2. O que significa que um segmento seja comensurável?

R. Os segmentos de retas, diferentemente das retas que são infinitas, podem ser medidos, ou seja, comensurados. Para tanto, é preciso tomar uma unidade de medida como referência. Medir um segmento significa descobrir quantas vezes esse segmento contém a unidade de medida ou segmento unitário.

Lição 84 – Teorema

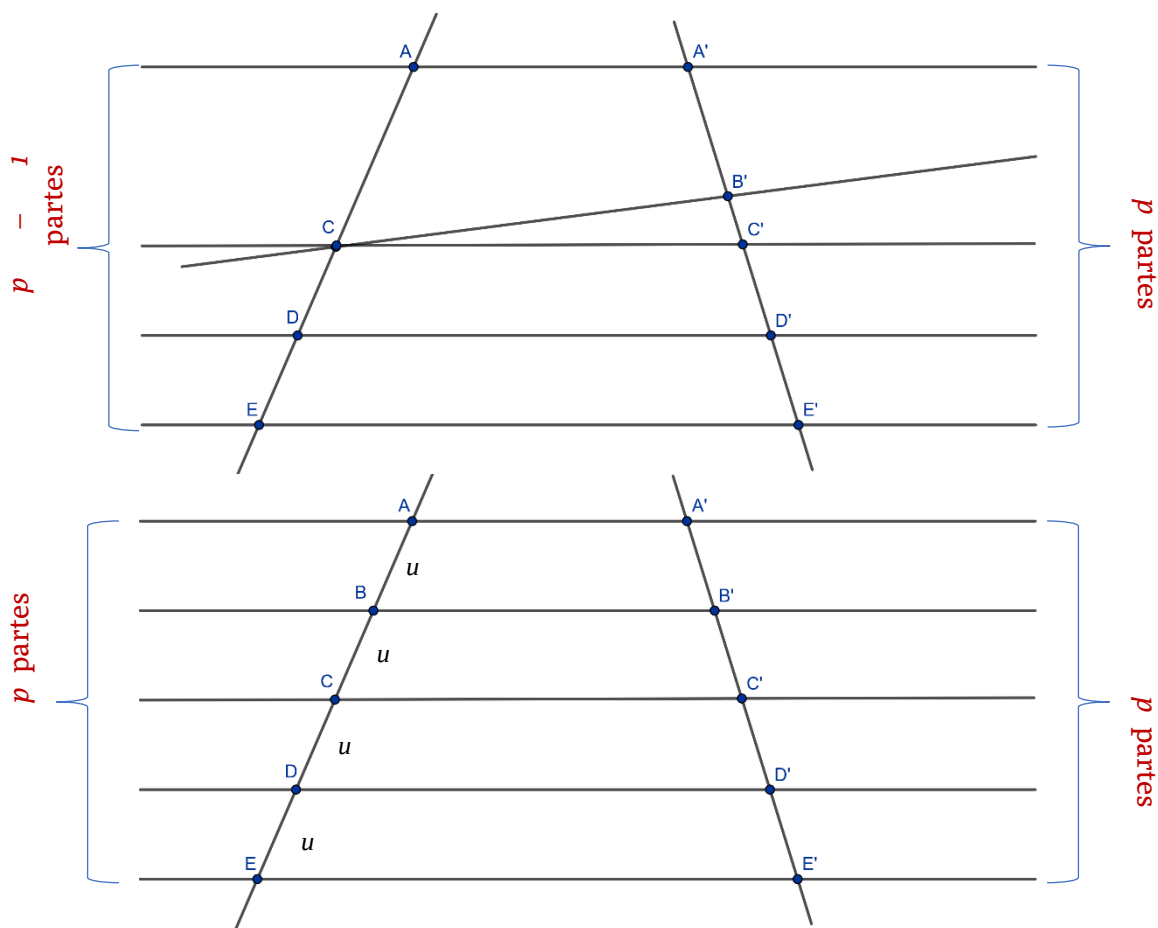
1. Demonstre que, “se o feixe determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal” em seu caderno (sem consulta).

R. Considere o seguinte feixe de paralelas e uma transversal, de tal forma que a transversal seja dividida em p partes e que todos os segmentos da transversal sejam congruentes:



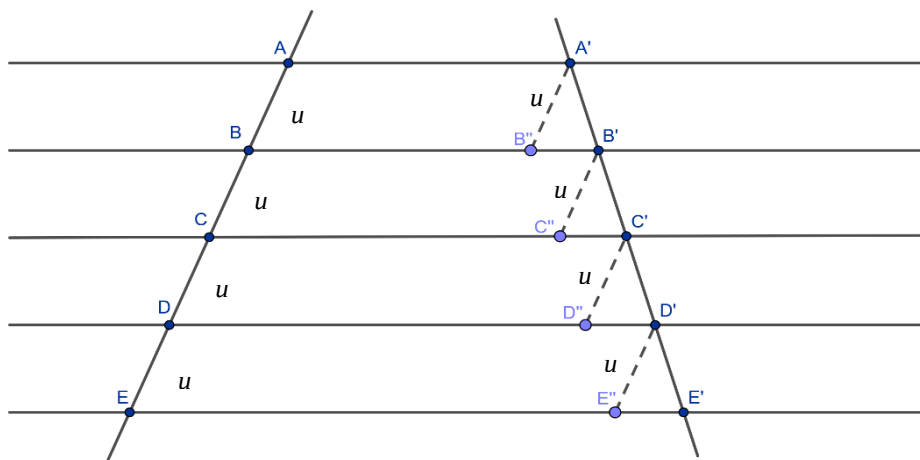
Inicialmente, fica evidente que, se todos os segmentos são congruentes, ou seja, se têm o mesmo comprimento, as paralelas estão todas à mesma distância entre si.

Seja agora traçada outra transversal. Primeiramente, é importante notar que, se a primeira transversal foi dividida em p partes, então a segunda transversal também será dividida em p partes. Caso contrário, o eixo das paralelas precisaria ter pelo menos duas retas concorrentes, o que é um absurdo, pois elas são paralelas.



Portanto, se o segmento $\overline{AE}$ é dividido em p partes e é correspondente ao segmento $\overline{A'E'}$, então o segmento $\overline{A'E'}$ também será dividido em p partes, todas também congruentes entre si.

Ora, para provar que os segmentos da segunda transversal são congruentes, imagine retas paralelas à primeira transversal, cada uma com origem num ponto correspondente a um ponto da primeira transversal.

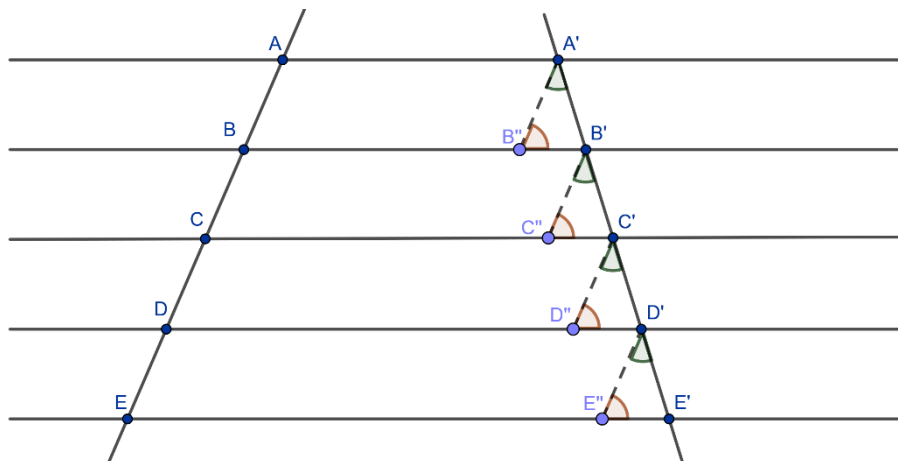


Ora, perceba que foram formados quatro paralelogramos: $AA'B''B$, $BB'C''C$, $CC'D''D$, $DD'E''E$. Como são paralelogramos, os lados paralelos são congruentes. Logo, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B''}$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C''}$, $\overline{CD} \equiv \overline{C'D''}$ e $\overline{DE} \equiv \overline{D'E''}$, todos de medida u .

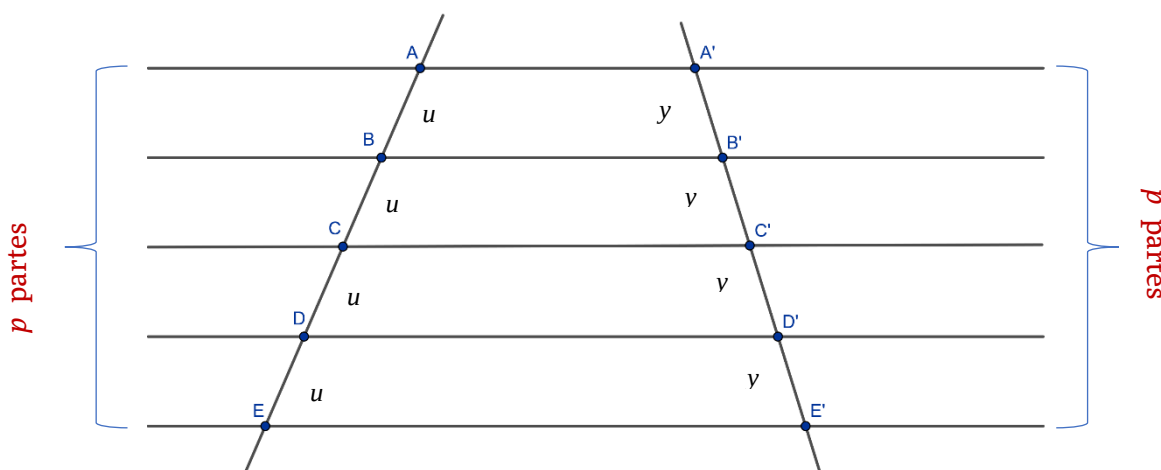
Perceba ainda que os triângulos possuem todos os seus lados dois a dois paralelos:

– Lado $A'B'' //$ Lado $B'C''$ e Lado $A'B' //$ Lado $B'C'$. Logo, os ângulos A' e B' são congruentes. O mesmo se verifica para todos os triângulos. Logo, $A' \equiv B' \equiv C' \equiv D'$.

– Lado $A'B'' //$ Lado $B'C''$ e Lado $B''B' //$ Lado $C''C'$. Logo, os ângulos B'' e C'' são congruentes. O mesmo se verifica para todos os triângulos. Logo, $B'' \equiv C'' \equiv D'' \equiv E''$.



Ora, todos os triângulos possuem dois ângulos congruentes e os lados entre eles também congruentes. Portanto, pelo caso de congruência A.L.A.², os triângulos são todos congruentes, o que significa que os lados $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ e $D'E'$ também são todos congruentes. Isso demonstra o enunciado do teorema: se o feixe determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

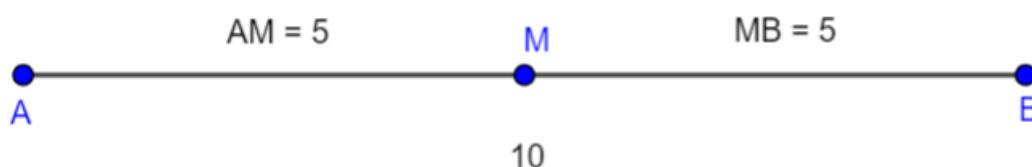


² Um triângulo é congruente a outro se, e somente se, houver correspondência entre seus vértices de tal forma que seus três lados e seus três ângulos sejam congruentes. Entretanto, existem os chamados *casos de congruência* que permitem determinar se dois triângulos são congruentes analisando somente algumas características.

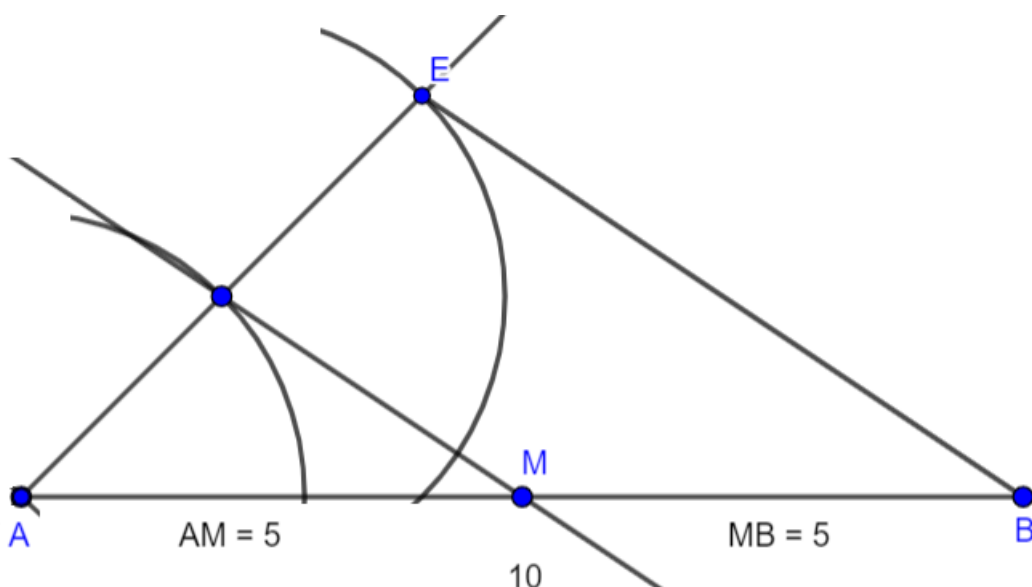
2. Construa:

- a) Um segmento de 10 cm e divida-o em duas partes congruentes com a régua. Depois, divida-o em duas partes utilizando um compasso. O que acontece? Por quê?

R. Construção com a régua



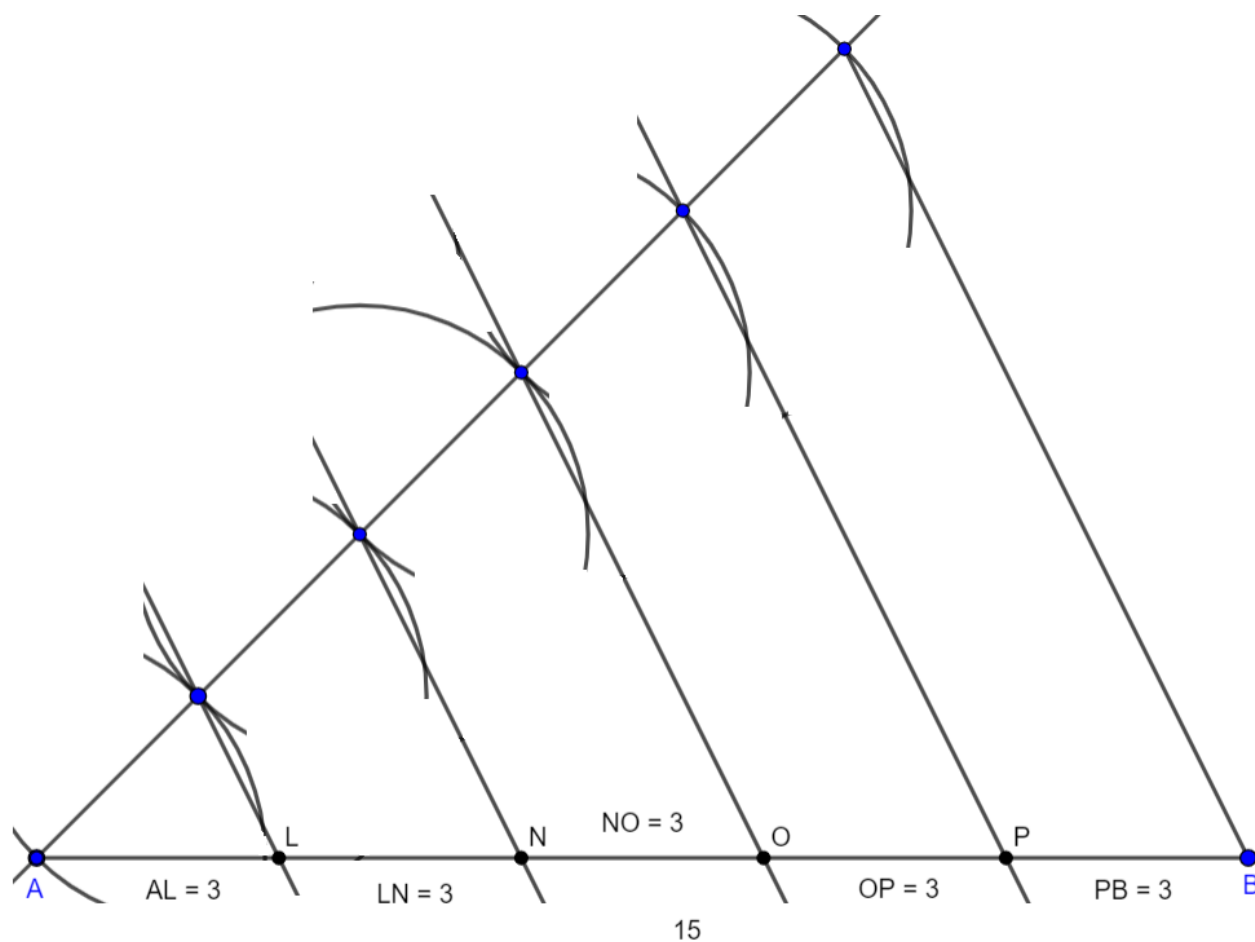
Construção com o compasso



A divisão tanto pela régua quanto pelo compasso divide o segmento $\overline{AB}$ no mesmo ponto, o ponto M , que no caso é o ponto médio de $\overline{AB}$ e isso ocorre por conta do teorema desta lição.

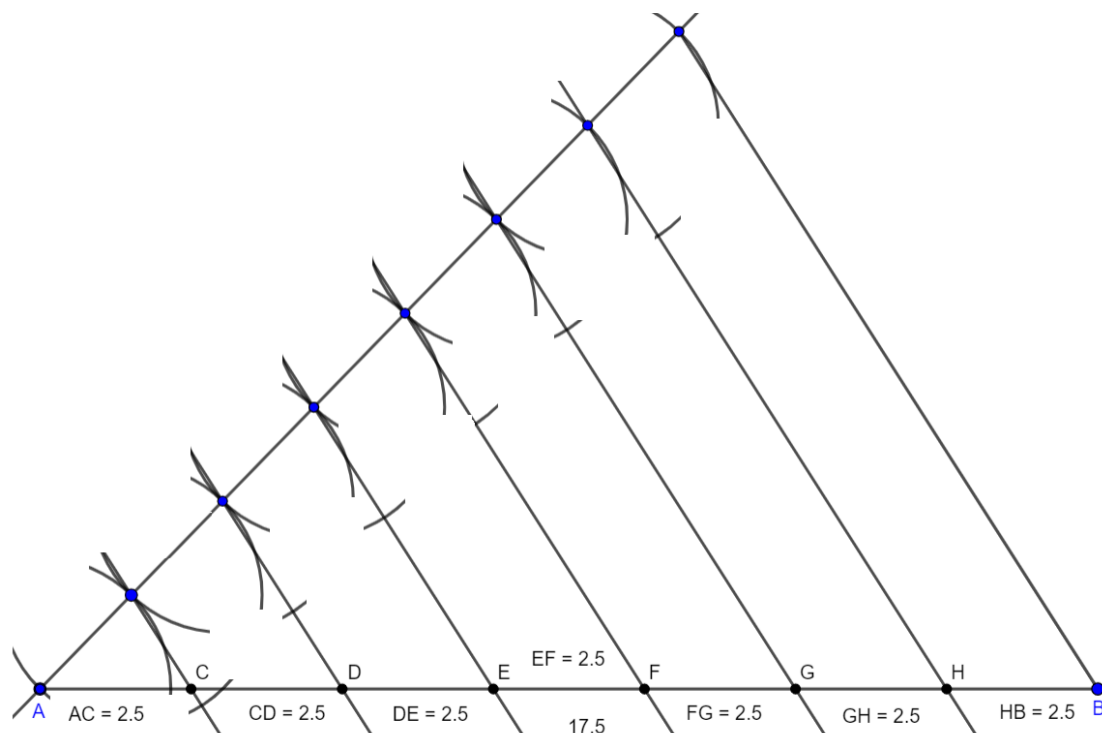
- b) Um segmento de 15 centímetros e divida-o em 5 partes congruentes utilizando compasso e régua. Quanto se espera que seja a medida de cada parte?

R. Cada parte medirá 3 centímetros.



c) Um segmento de 17,5 cm em 7 partes congruentes utilizando um compasso e régua. Quanto se espera que seja a medida de cada parte?

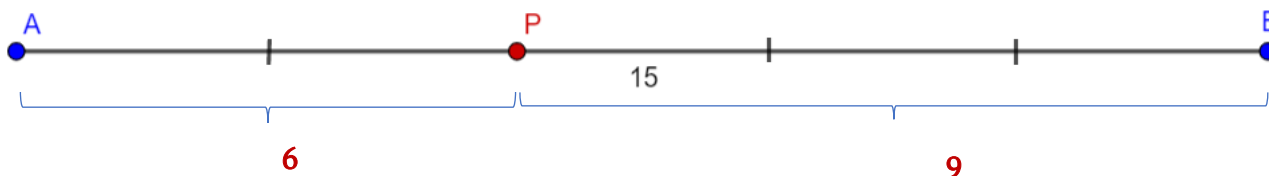
R. Cada parte medirá 2,5 centímetros.



Lição 85 – Segmentos proporcionais

1. Dado um segmento $\overline{AB}$ de 15 cm, encontre um ponto P tal que a razão entre $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ seja de 2 : 3 . Quanto deve ter cada medida?

R. Seja um segmento $\overline{AB}$, de medida 15 cm, de tal forma que se queira encontrar um ponto P nele, de tal forma que a razão entre eles seja 2 : 3. Para encontrar o ponto P, é preciso, antes de tudo, dividir o segmento em partes iguais. Como a razão que se deseja encontrar é de 2 : 3, então o segmento deve ser dividido em $2 + 3 = 5$ partes iguais, de tal forma que o ponto P terá duas partes à sua esquerda e três partes à sua direita. Ora, o que se quer então é um P de tal forma que:



Portanto, P está em um lugar de tal forma que $\overline{AP} = 6$ e $\overline{BP} = 9$, pois:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

2. Determine a razão entre dois segmentos dadas as suas medidas:

a) 10 cm e 4 cm

$$\text{R. } \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

b) $7x^3$ e $5x$

$$\text{R. } \frac{7x^3}{5x} = \frac{7x^2}{5}$$

c) $21x$ e $15x$

$$\text{R. } \frac{21x}{15x} = \frac{7}{5}$$

3. Determine a razão entre os números:

a) 28 e 40

$$\text{R. } \frac{28}{40} = \frac{7}{10} = 0,7$$

b) 700 e 1.000

$$\text{R. } \frac{700}{1000} = \frac{7}{10} = 0,7$$

4. De acordo com a definição de números proporcionais, você pode afirmar que os números 28, 40, 700 e 1000, nessa ordem, são proporcionais?

R. Os números 28, 40, 700 e 1000 são proporcionais, pois a razão dos primeiros é igual a razão dos dois últimos.

$$\frac{28}{40} = \frac{700}{1000}$$

5. Defina segmentos proporcionais e dê um exemplo.

R. Pelas definições de proporção e de razão de segmentos, podemos dizer que quatro segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$, nessa ordem, são **proporcionais** quando **a razão entre as medidas dos dois primeiros for igual à razão entre as medidas dos dois últimos**.

$$\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}, \overline{GH} \text{ são proporcionais} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$$

Lição 86 – Teorema de Tales

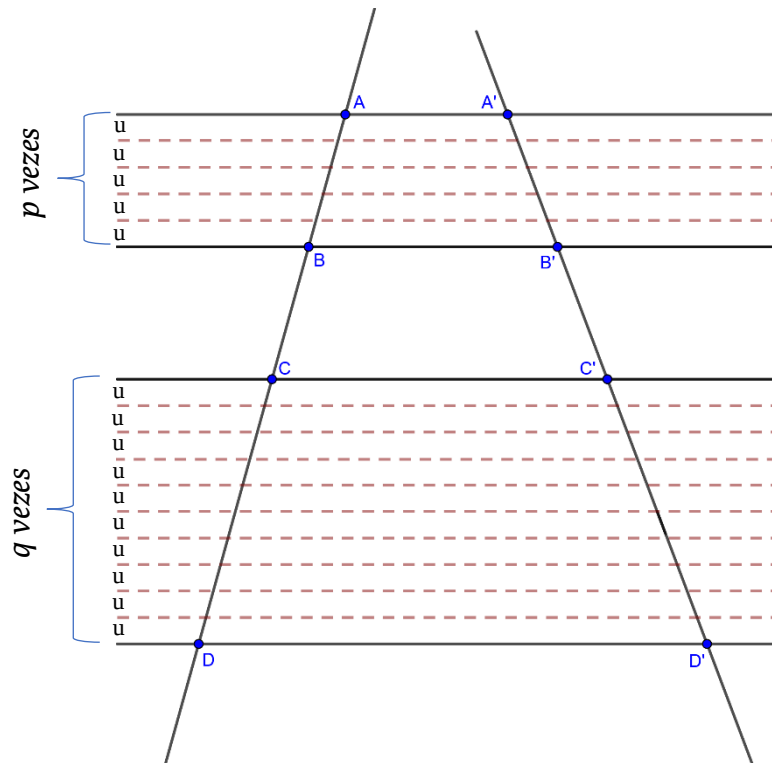
1. O que enuncia o Teorema de Tales? Demonstre-o em seu caderno (sem consulta).

R. **Teorema de Tales:** dadas duas transversais em um feixe de retas paralelas, a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os dois segmentos correspondentes da outra transversal.

Demonstração: É preciso demonstrar que a razão entre dois segmentos de uma transversal é igual à razão entre dois segmentos da outra transversal. Escrevendo na forma de razão, o que se quer provar é que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

Ora, tome o seguinte feixe de paralelas e as duas transversais:

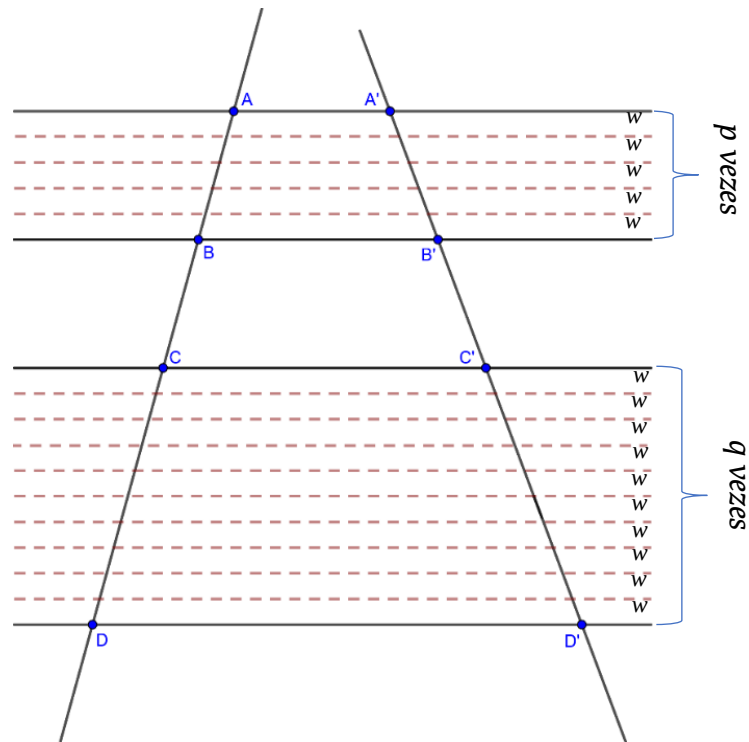


Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis, então existe um segmento de medida u contido p vezes em $\overline{AB}$ e q vezes em $\overline{CD}$. Logo, a razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p \cdot u}{q \cdot u} = \frac{p}{q}$$

Além disso, como visto anteriormente, se o feixe de paralelas divide uma das transversais em p partes, então divide também a outra em p partes. Portanto, sendo $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ comensuráveis, também são divididos em p e q partes. Então existe um segmento de medida w contido p vezes em $\overline{A'B'}$ e q vezes em $\overline{C'D'}$. Logo, a razão entre $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ é:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p \cdot w}{q \cdot w} = \frac{p}{q}$$



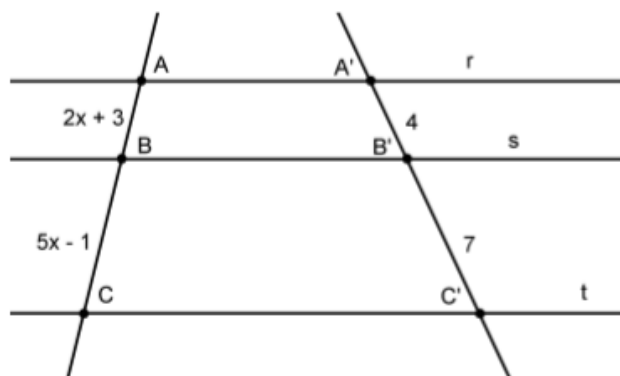
Ora, as razões entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ na primeira transversal e as razões entre os segmentos correspondentes $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ da segunda transversal são iguais. Logo,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q} \text{ e } \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p}{q} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

Sendo assim, está demonstrado que, “dadas duas transversais em um feixe de retas paralelas, a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os dois segmentos correspondentes da outra transversal”, ou seja, eles são proporcionais.

2. Determine o valor de x nas figuras abaixo sabendo que $r \parallel s \parallel t$.

a)



R. Pelo Teorema de Tales, temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

$$\frac{2x+3}{5x-1} = \frac{4}{7}$$

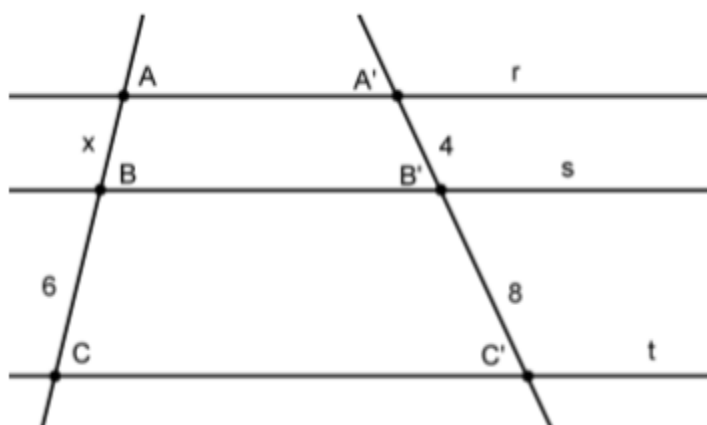
$$14x + 21 = 20x - 4$$

$$14x - 20x = -4 - 21$$

$$-6x = -25$$

$$x = \frac{25}{6}$$

b)



R. Pelo Teorema de Tales, temos que:

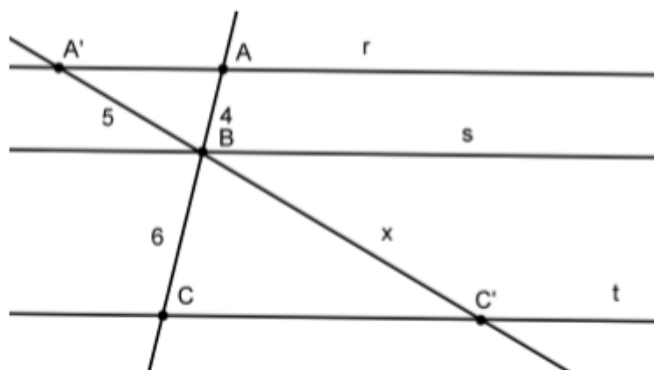
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

$$\frac{x}{6} = \frac{4}{8}$$

$$8x = 24$$

$$x = \frac{24}{8} = 3$$

c)



R. Pelo Teorema de Tales, temos que:

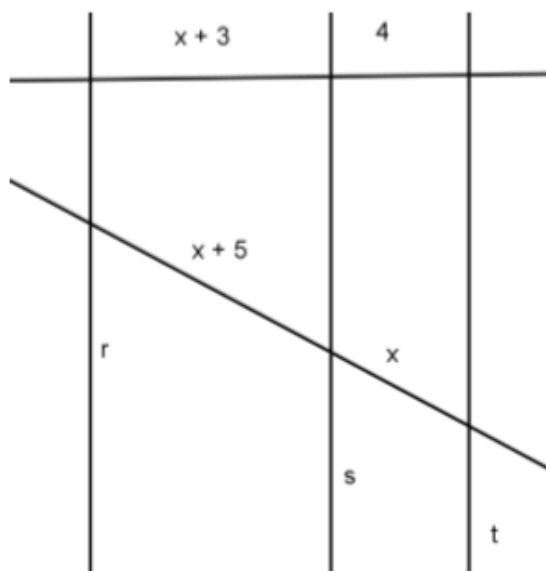
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{B'C'}}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{5}{x}$$

$$4x = 30$$

$$x = \frac{30}{4} = 7,5$$

d)



R. Pelo Teorema de Tales, temos que:

$$\frac{x+5}{x} = \frac{x+3}{4}$$

$$4x + 20 = x^2 + 3x$$

$$-x^2 + x + 20 = 0$$

Calculando o bashkara, temos que:

$$-x^2 + x + 20 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4(-1)(20)$$

$$\Delta = 1 + 80 = 81$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm 9}{-2}$$

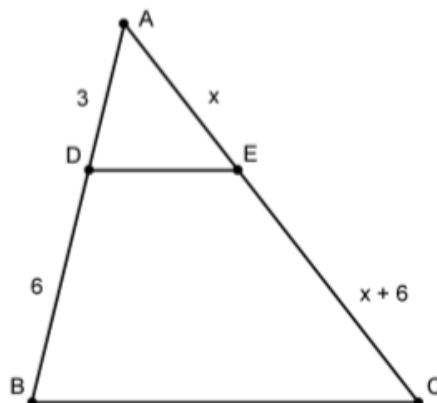
Resolvendo em duas partes, temos que:

$$x = \frac{-1+9}{-2} = \frac{+8}{-2} = -4 \quad \text{e} \quad x = \frac{-1-9}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5$$

Como não existe medidas negativas, então $x = 5$.

Lição 87 – Aplicação do teorema de Tales

1. Determine o valor de x na figura abaixo, sabendo que $\overline{DE}$ é paralelo à base $\overline{BC}$ do triângulo ABC .



R. Pelo Teorema de Tales, temos que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$$

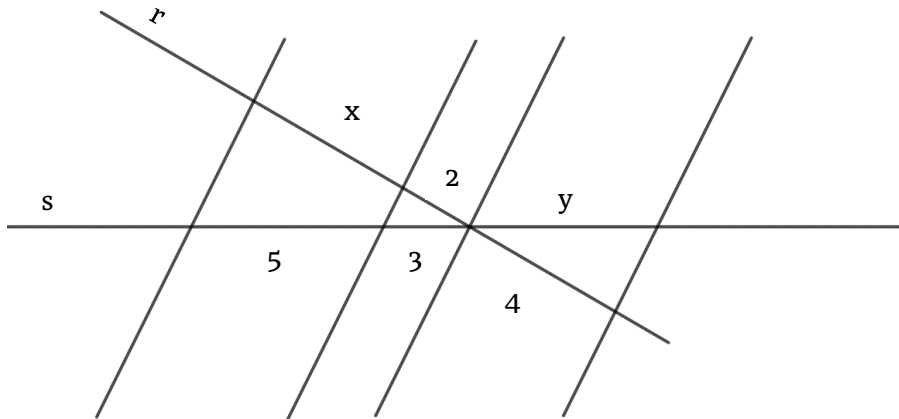
$$\frac{3}{6} = \frac{x}{x+6}$$

$$3x+18=6x$$

$$-3x=-18$$

$$x=6$$

2. Sendo r e s transversais de um feixe de paralelas, calcule x e y :



R. Vamos primeiramente calcular x . Usando teorema de Tales, temos:

$$\frac{x}{2} = \frac{5}{3}$$

$$3x=10$$

$$x = \frac{10}{3}$$

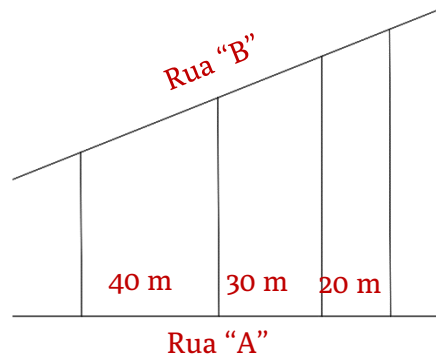
Agora, iremos calcular o y .

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{y}$$

$$2y=12$$

$$y = \frac{12}{2} = 6$$

3. Três terrenos têm frente para a rua “A” e para a rua “B”, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua “A”. Qual é a medida de frente para a rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua é de 180m?



Dica: lembre-se de que, se duas razões são proporcionais então, a razão entre as somas dos antecedentes e dos consequentes também é proporcional:

$$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ então } \frac{a + c}{b + d}$$

R. A frente para a Rua B do terreno de fundo 40 m mede x, a frente para a Rua B do terreno de fundo 30 m mede y e a frente para a Rua B do último terreno mede z. Pelo enunciado, temos que $x + y + z = 180$ m.

Pelo Teorema de Tales, temos que $\frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{z}{20}$.

Pela dica, temos que

$$\text{se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ então } \frac{a + c}{b + d}$$

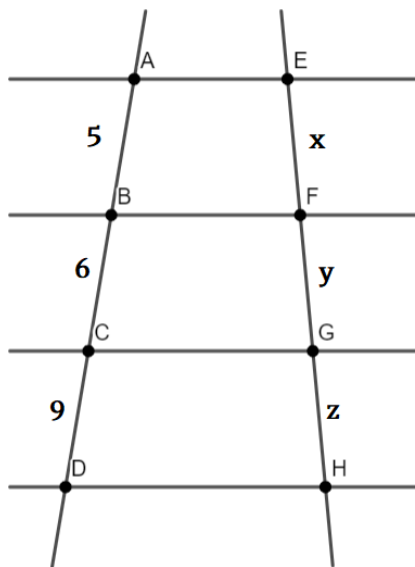
Assim, podemos utilizar essa propriedade com a proporção que já encontramos.

$$\frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{z}{20} = \frac{x + y + z}{40 + 30 + 20} = \frac{180}{90} = 2$$

Como $\frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{z}{20} = 2$ temos que $x = 80$, $y = 60$ e $z = 40$.

4. Um feixe de quatro paralelas determina, sobre uma transversal, três segmentos consecutivos, que medem 5 cm, 6 cm e 9 cm. Calcule o comprimento dos segmentos determinados pelo feixe em outra transversal, sabendo que o segmento desta, compreendido entre a primeira e a quarta paralela, mede 60 cm.

R. Primeiramente vamos desenhar o enunciado.



Pelo enunciado, temos que $x + y + z = 60$ e pelo Teorema de Tales temos que:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{9}$$

Utilizando a mesma propriedade do exercício anterior, temos que:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{9} = \frac{x+y+z}{20} = \frac{60}{20}$$

Com isso, temos $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{9} = 3$.

Logo, $x = 15$, $y = 18$ e $z = 27$.

Lição 88 - Semelhança

1. Qual é a condição para que dois objetos sejam considerados semelhantes na matemática?

R. Para a matemática, dois objetos serão *semelhantes* se, e somente se, a razão entre os segmentos homólogos³ for constante, isto é, se houver proporção entre eles, e se os ângulos homólogos forem congruentes.

³ Homólogos: *homo* = igual, *logos* = o que estão em certa relação. Que ocupam o mesmo lugar, que são correspondentes.

2. Indique cinco semelhanças encontradas no cotidiano.

R. Resposta pessoal.

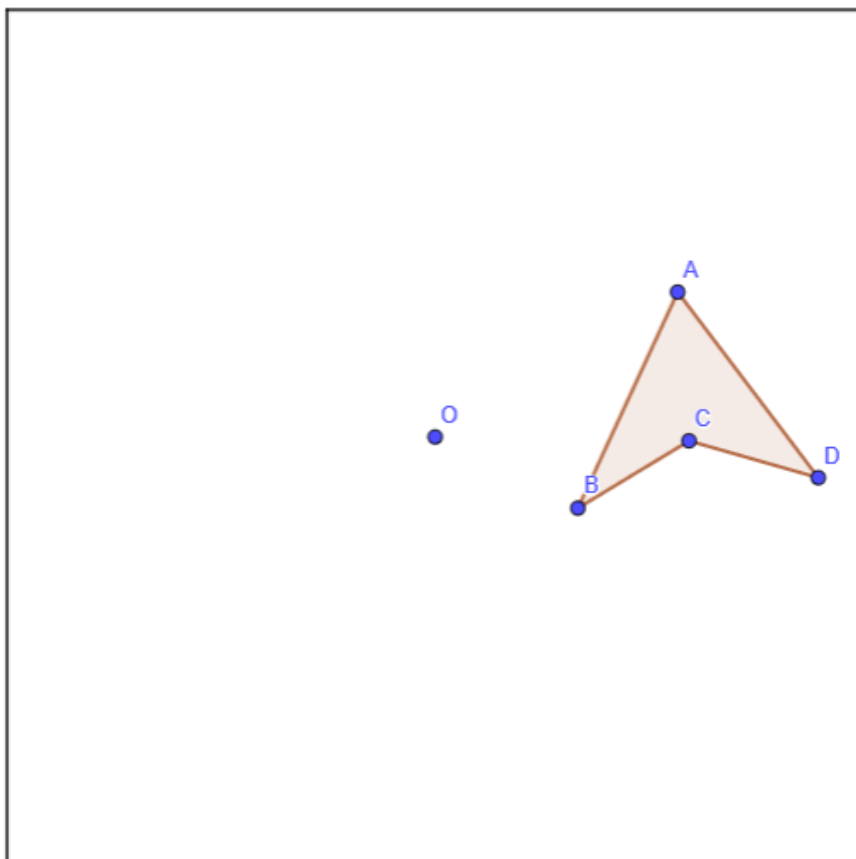
Lição 89 – Transformações de semelhança

1. O que são as transformações de semelhança? Quais são elas? Para que servem?

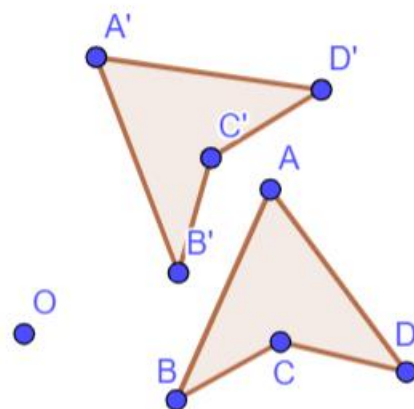
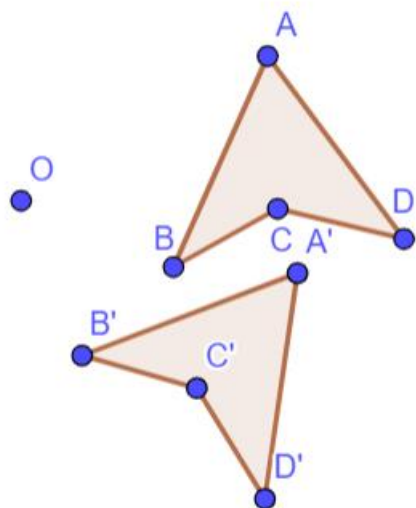
R. As figuras semelhantes não podem sobrepor-se uma à outra. Para se sobreporem, devemos transformar uma das figuras de maneira que mantenha sua forma original. Estas transformações são ditas **transformações de semelhança**, e são elas: rotação, translação, reflexão e ampliação e redução.

2. Rotacione:

a) O triângulo ABC ao redor do ponto O em 45° .

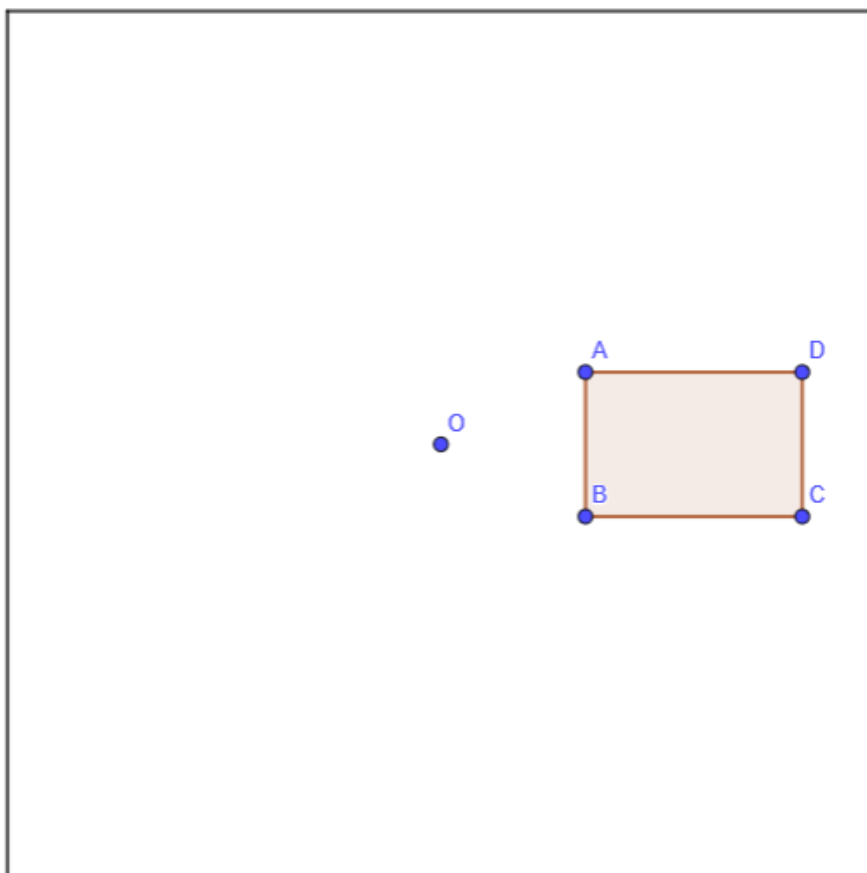


R. Rotação de 45° no sentido anti-horário

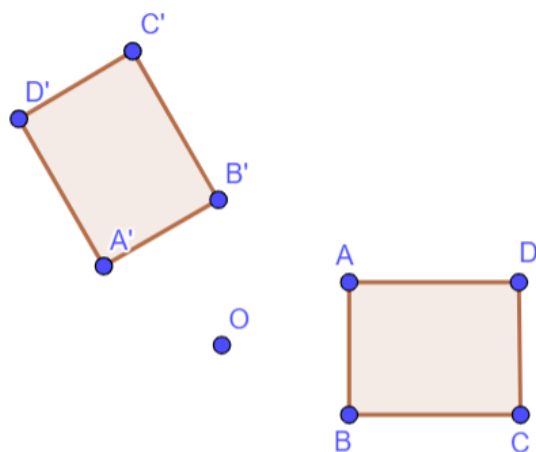


Rotação de 45° no sentido horário

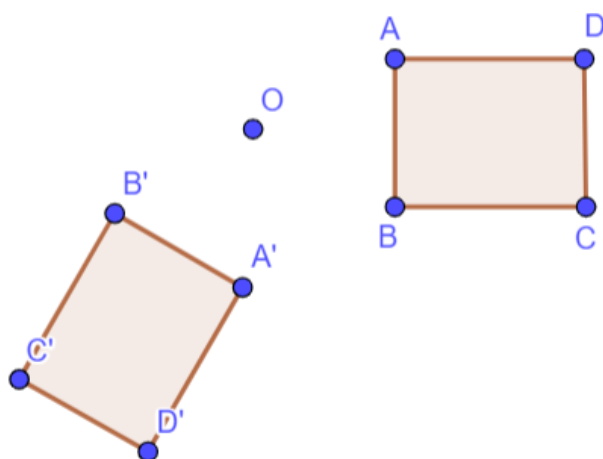
b) O retângulo ABCD ao redor do ponto O em 120° .



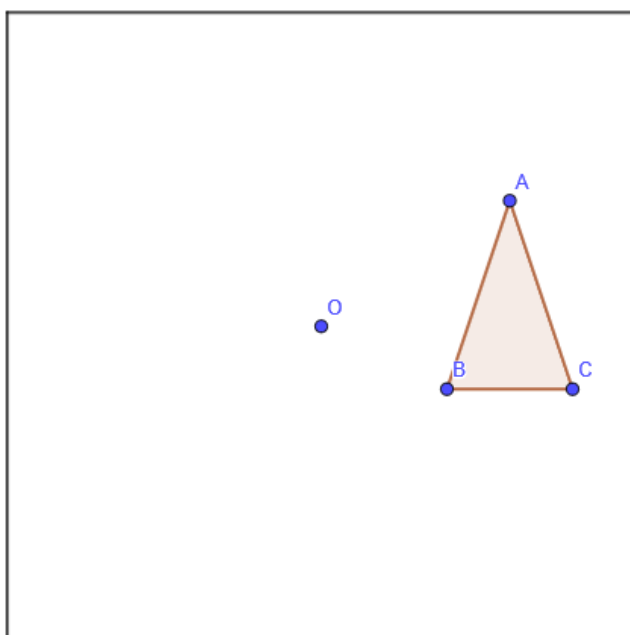
R. Rotação de 120° no sentido anti-horário



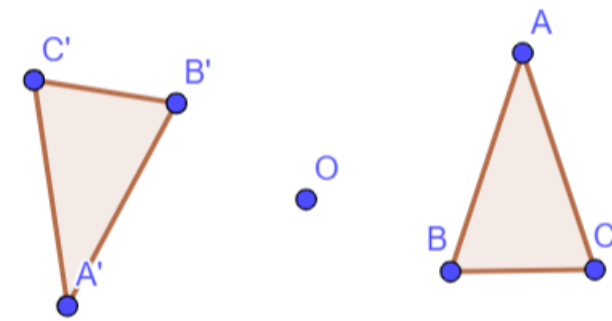
Rotação de 120° no sentido horário



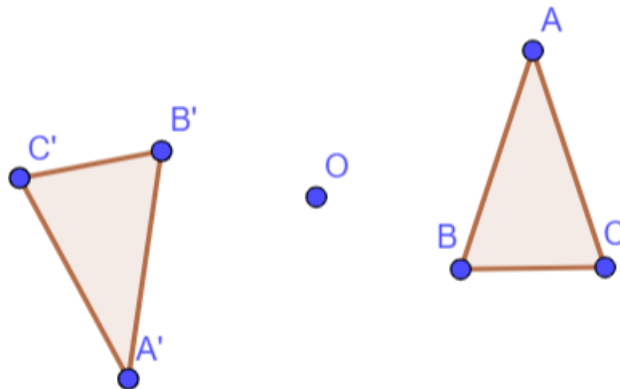
c) A figura ABCD ao redor do ponto O em 190° .



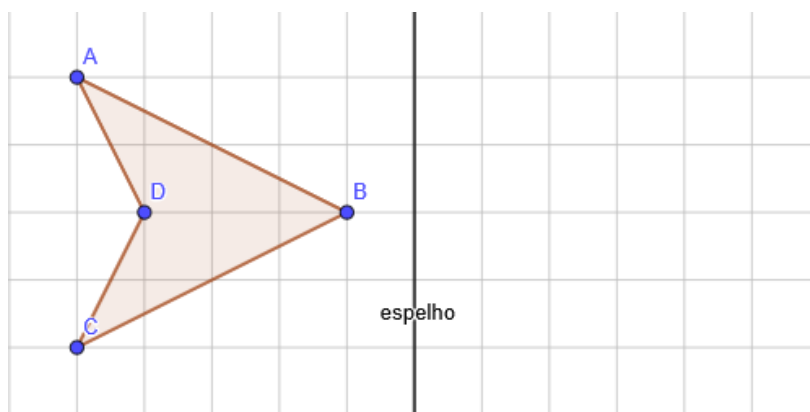
R. Rotação de 190° no sentido anti-horário



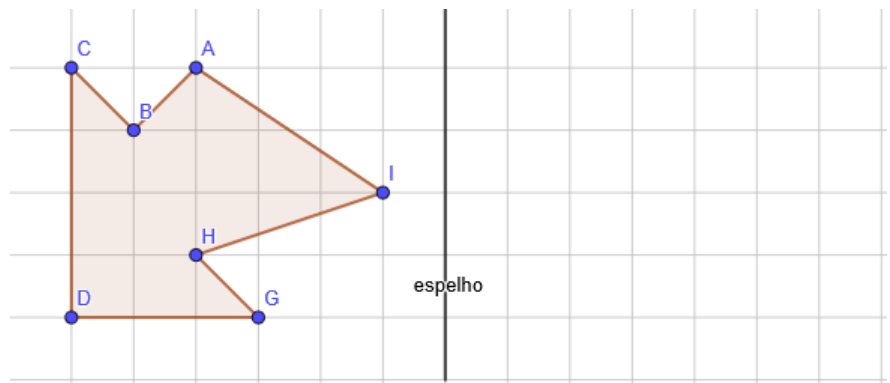
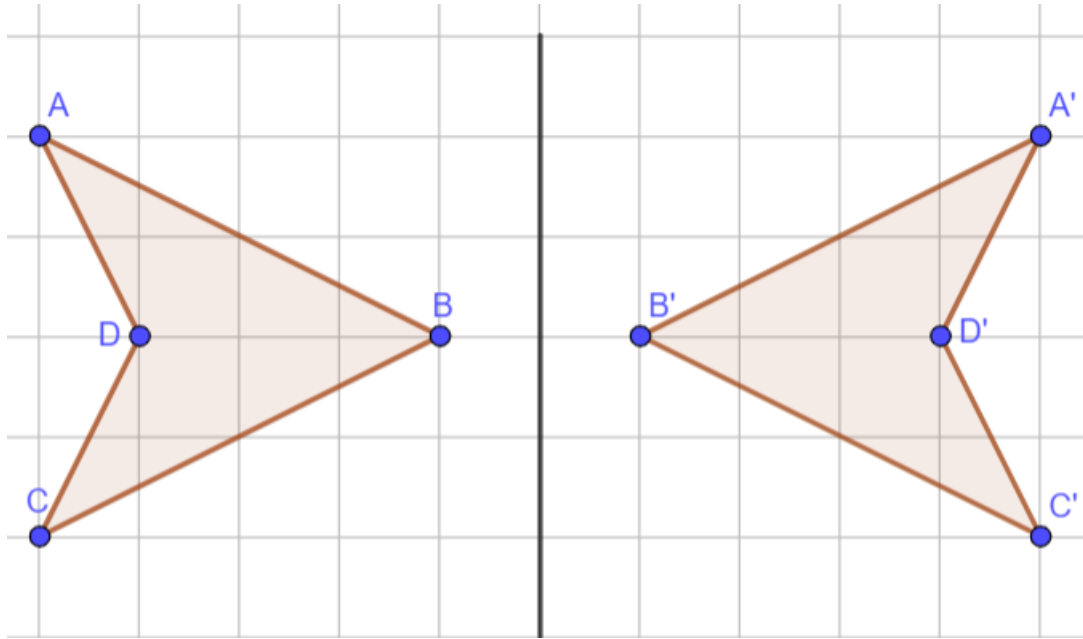
Rotação de 190° no sentido horário



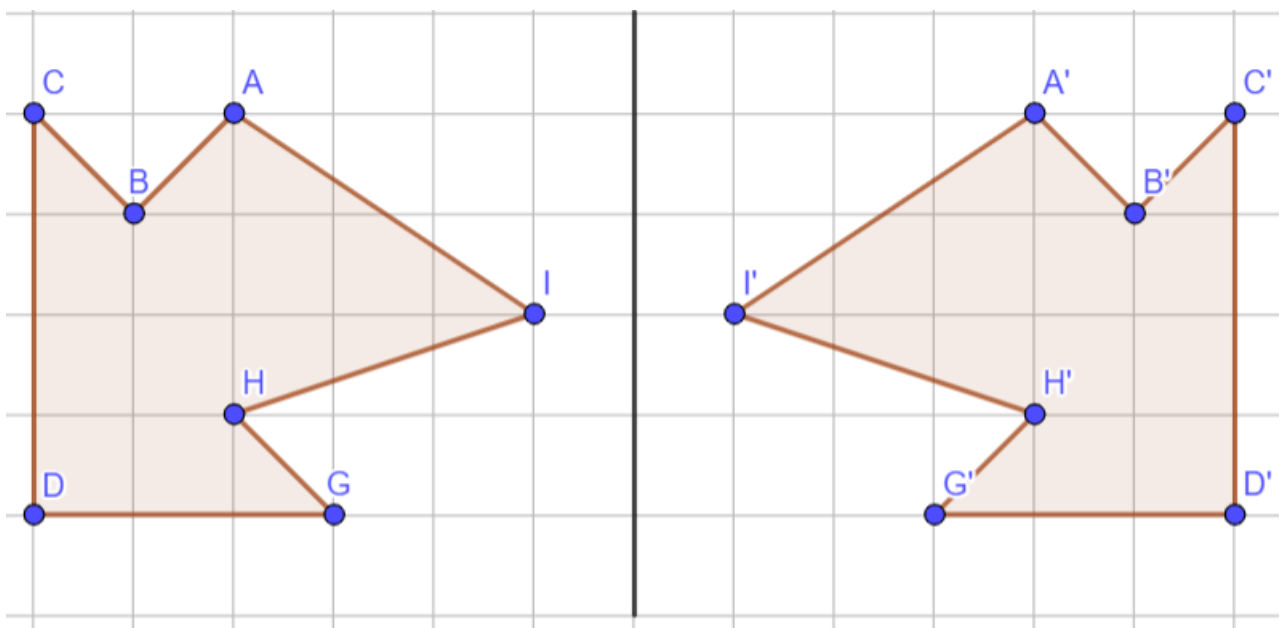
3. Aplique a transformação de reflexão nas figuras abaixo:

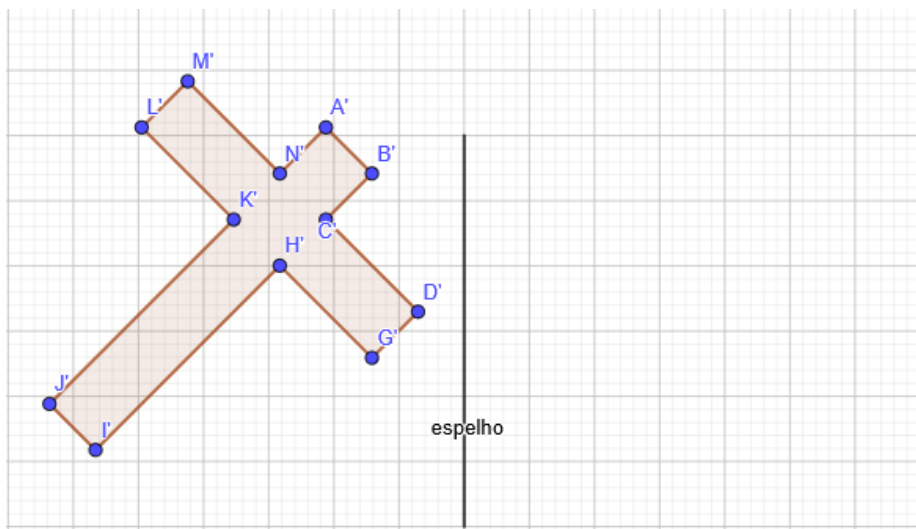


R.

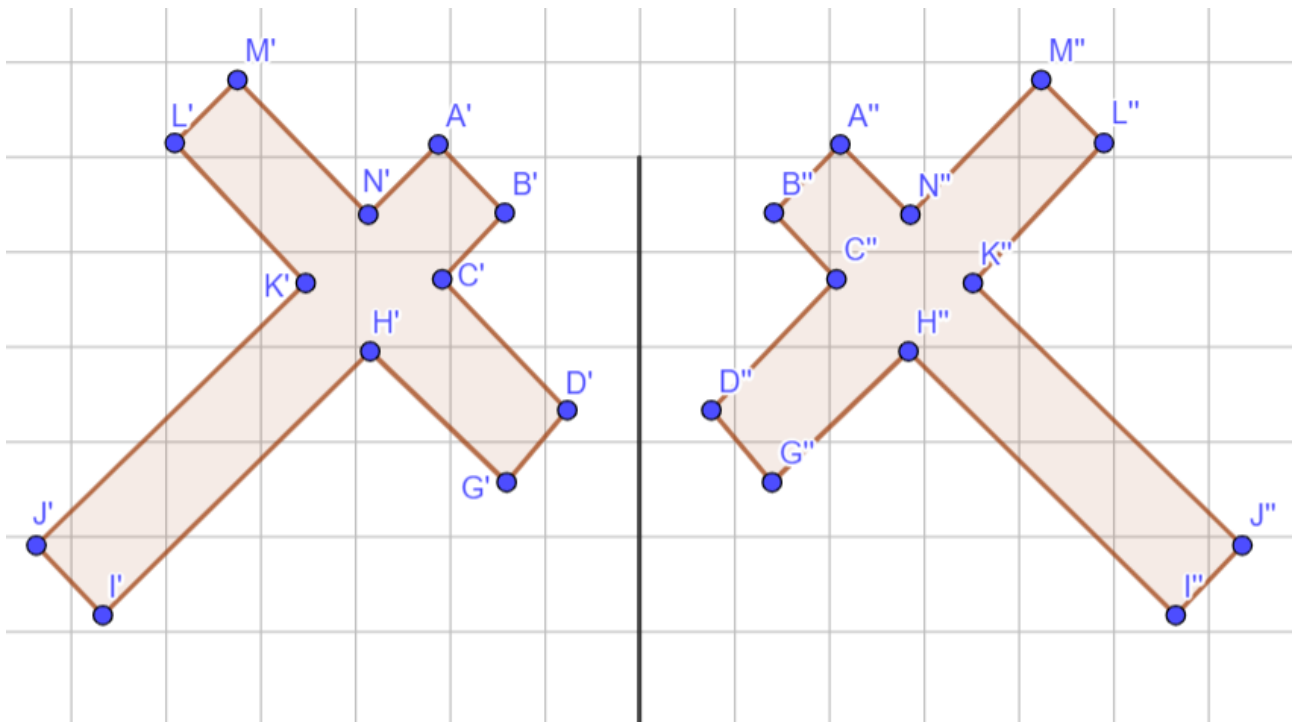


R.





R.

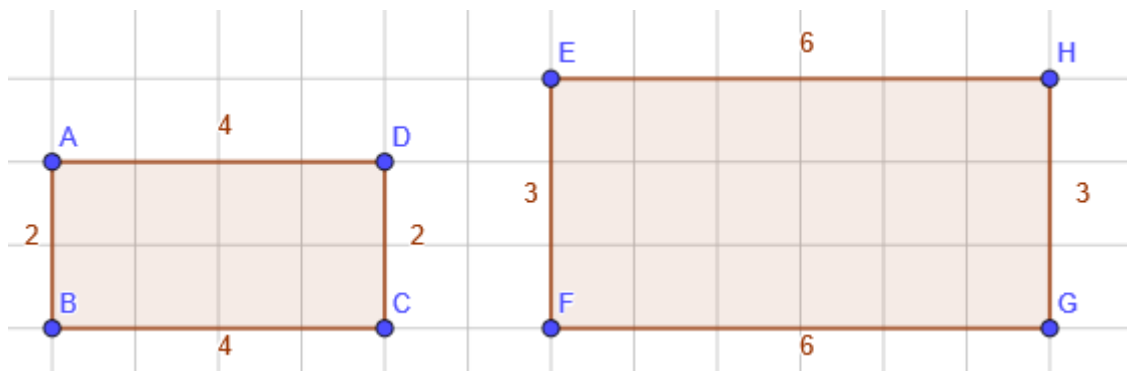


4. Observe o exemplo:

a) Para aumentar em 1,5 (uma vez e meia) um retângulo cujas base e altura medem 4 e 2 respectivamente, basta multiplicar a base e a altura por 1,5 para encontrar as medidas do retângulo aumentado:

Base do retângulo aumentado: $4 \cdot 1,5 = 6$

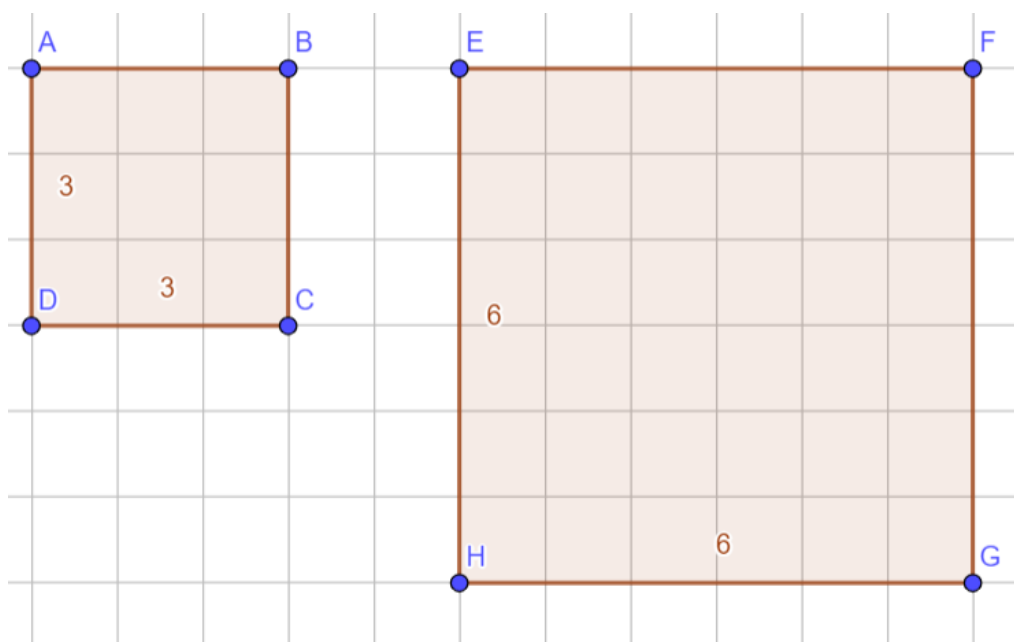
Altura do retângulo aumentado: $2 \cdot 1,5 = 3$



Agora, construa (utilizando a régua):

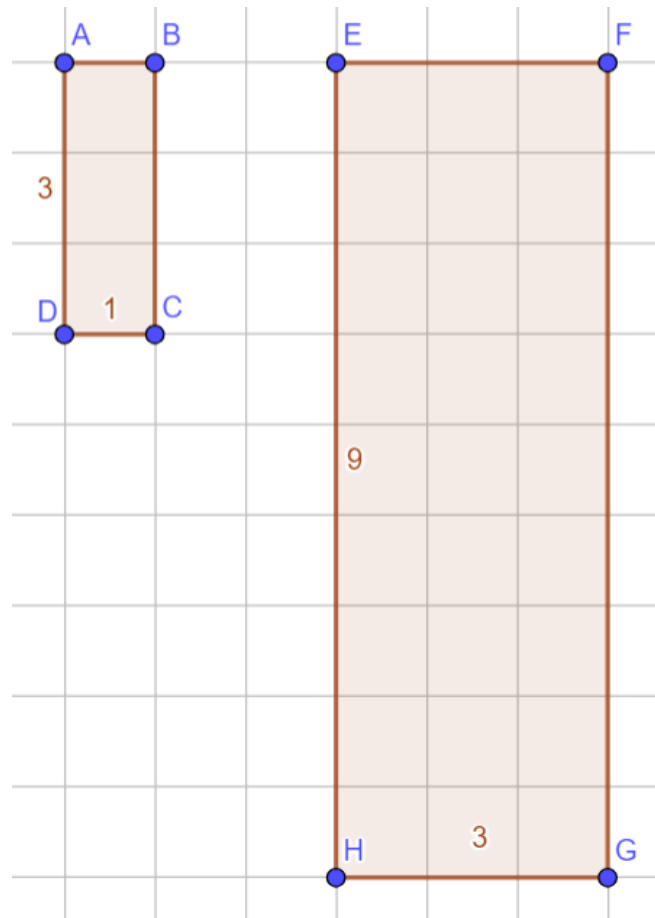
a) O dobro de quadrado de 3 cm.

R.



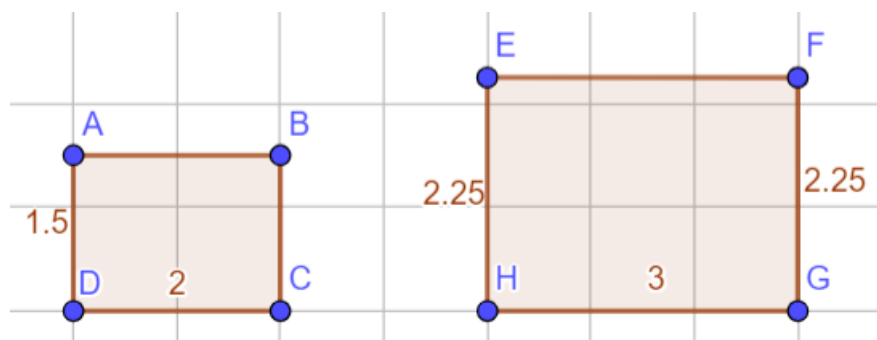
b) Um retângulo de base 1 e altura 3 aumentado 3 vezes.

R.



c) Um retângulo de base 2 e altura 1,5 aumentado 1,5 (uma vez e meia).

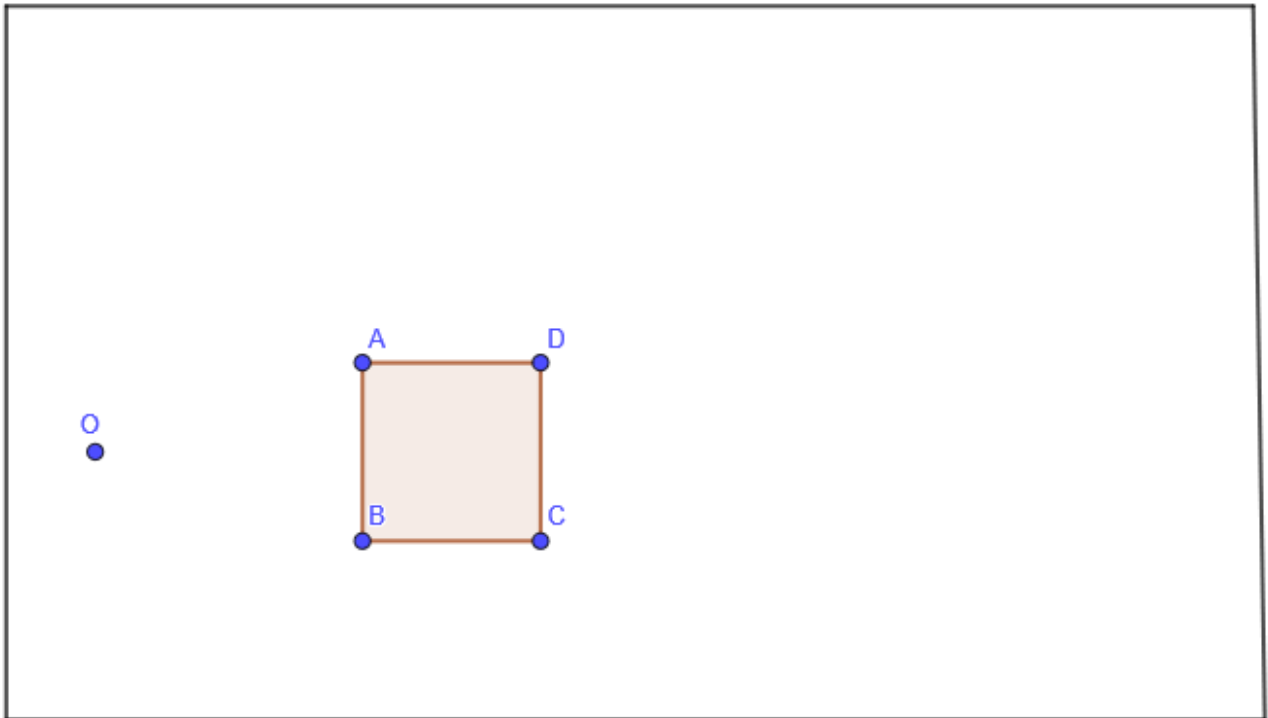
R.



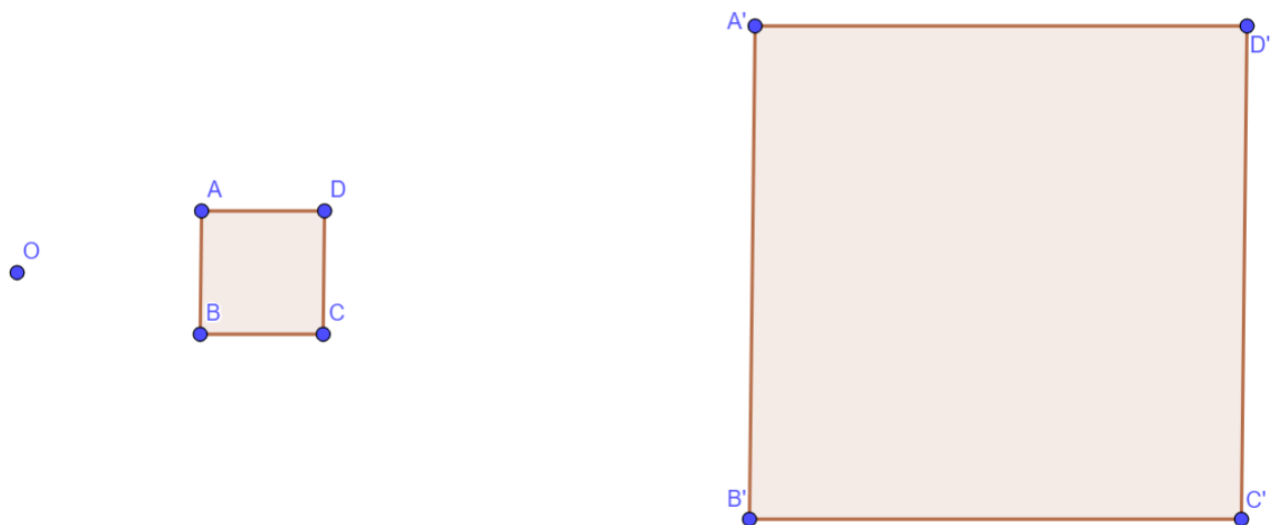
Lição 90 – Ampliação de figuras por homotetia

1. Amplie, por homotetia,

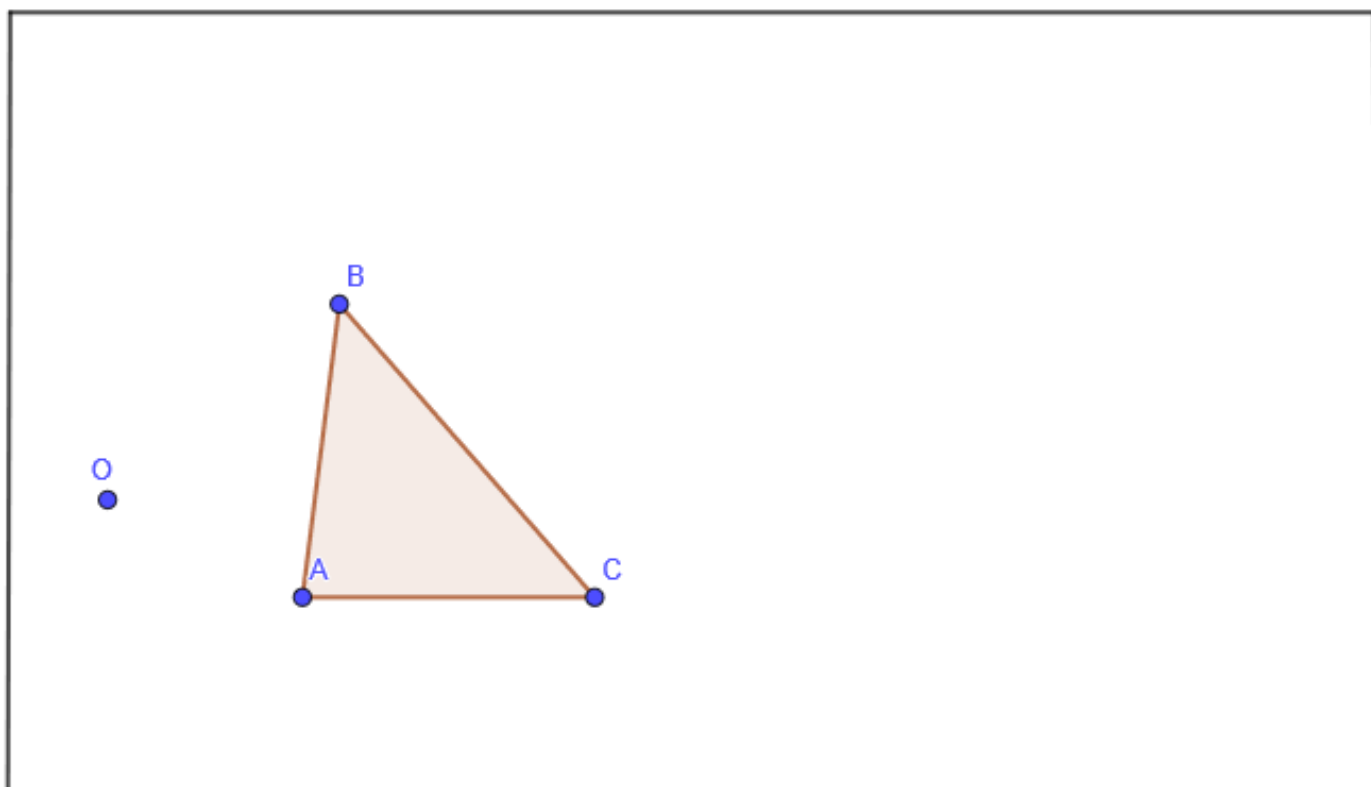
a) O quadrado ABCD 4 vezes.



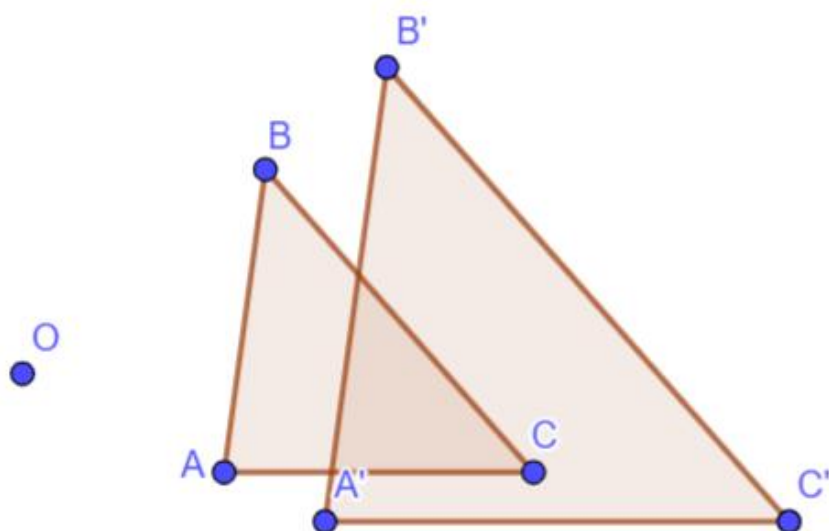
R.



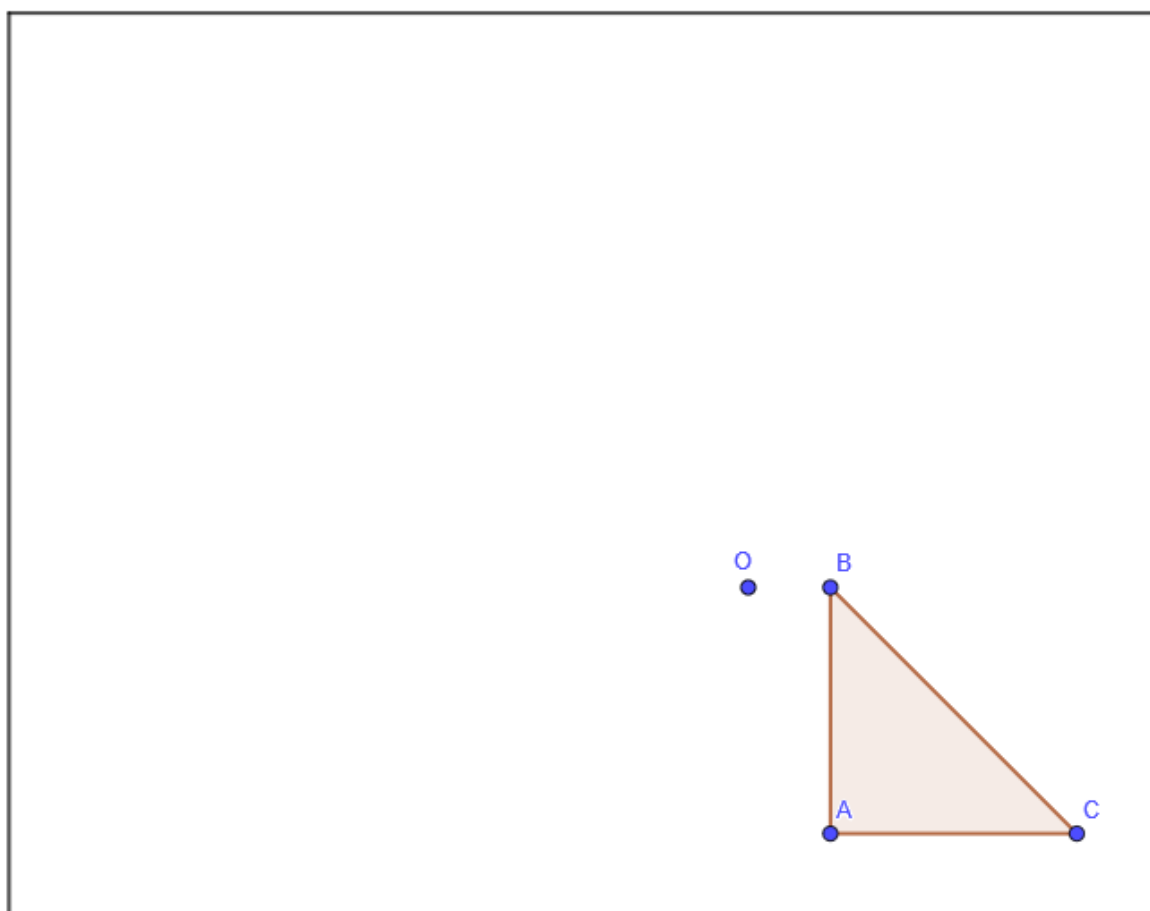
b) O triângulo ABC 1,5 (uma vez e meia).



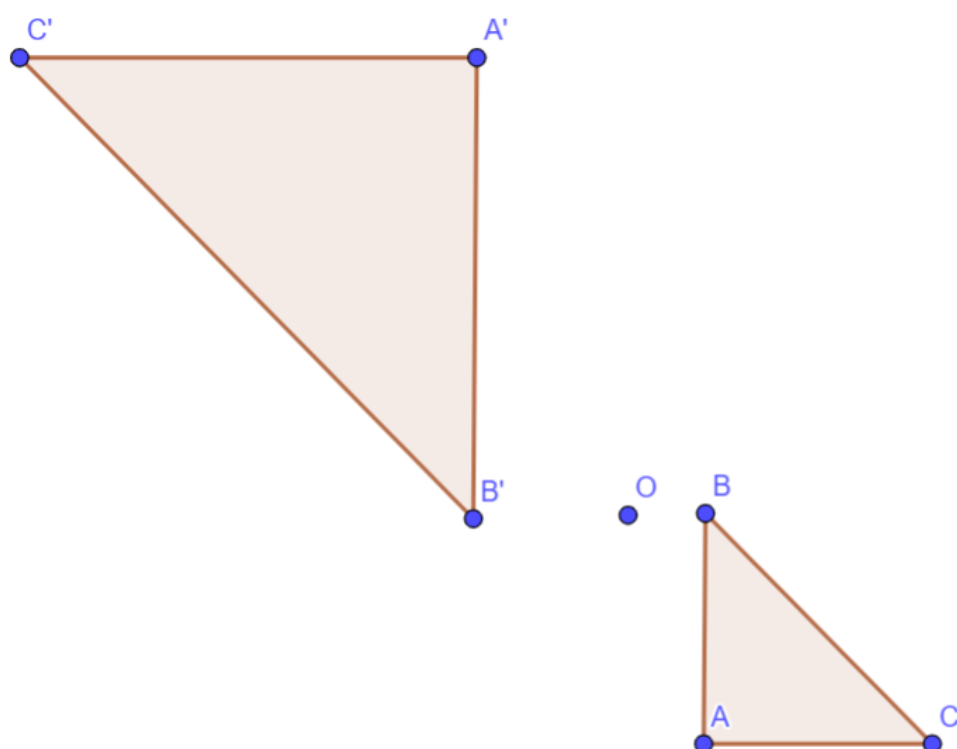
R.



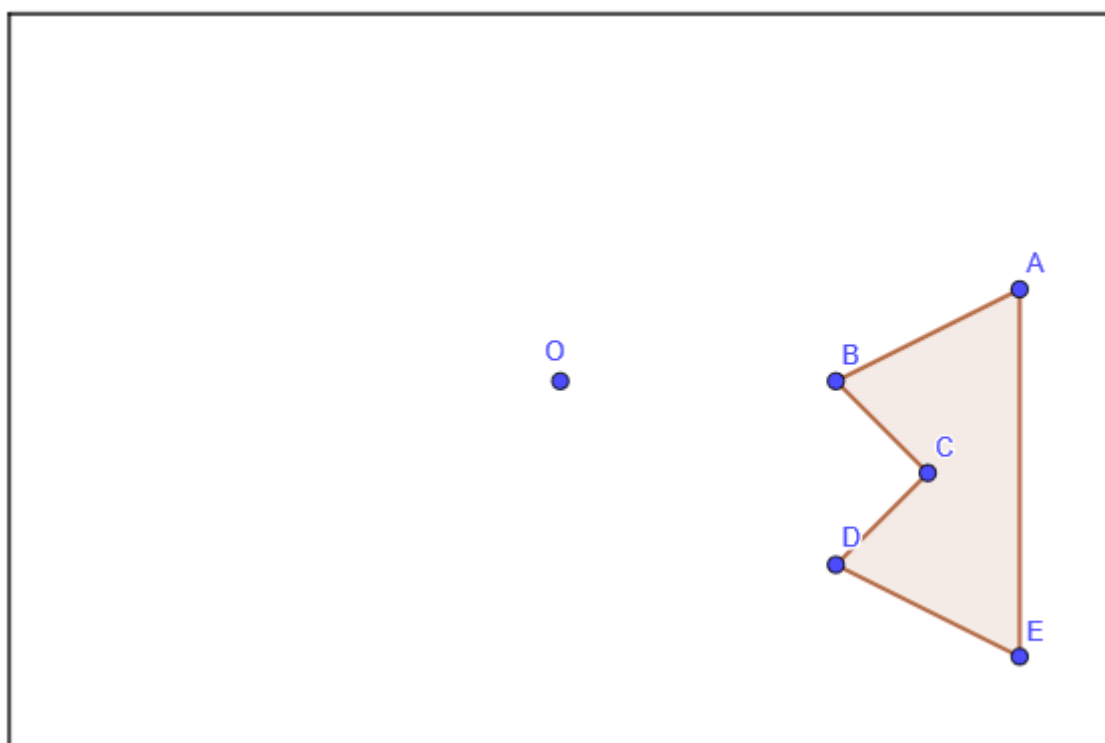
c) O triângulo ABC para $k = -2$.



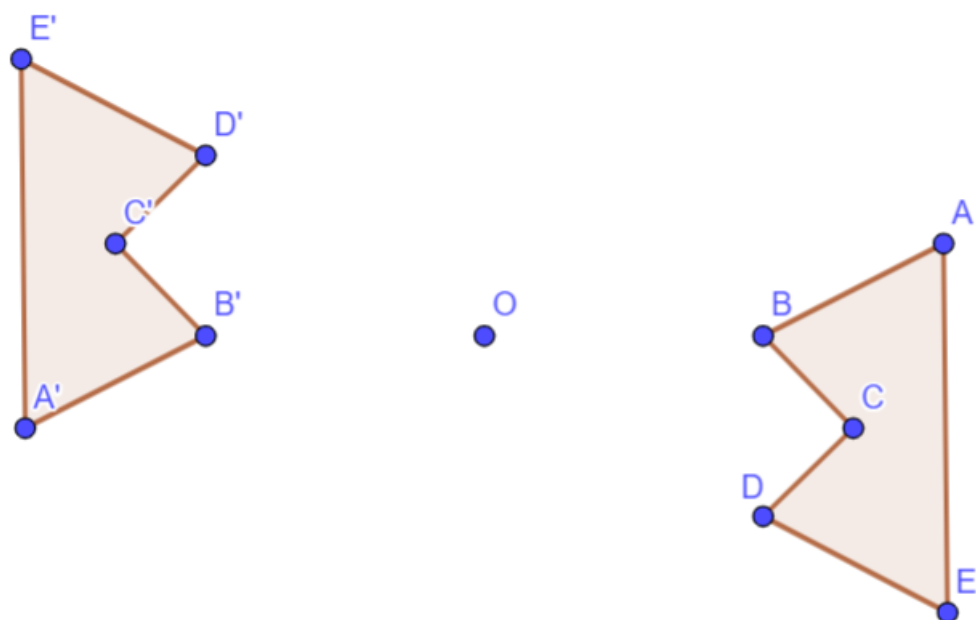
R.



d) A figura ABCDE para $k = -1$.



R.



Lição 91 – Relações da semelhança

1. Quais são as relações de semelhança e o que diz cada uma delas?

R. O estudo de relações de semelhança na matemática diz respeito a como dois entes⁴ matemáticos se relacionam entre si. Aqui, os entes considerados serão os triângulos. Podem estabelecer-se entre dois triângulos três principais relações:

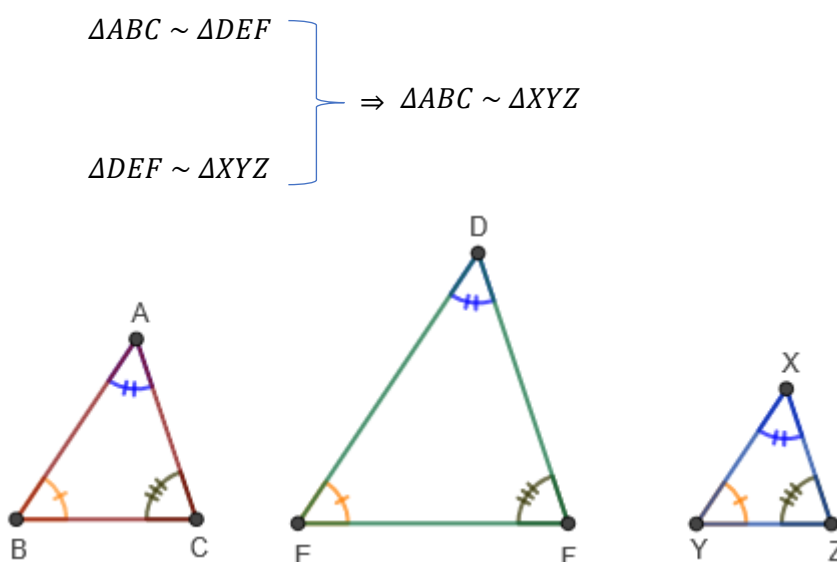
Reflexiva: um triângulo sempre é semelhante a si mesmo:

$$\triangle ABC \sim \triangle ABC$$

Simétrica: se o triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF, então o triângulo DEF é semelhante ao triângulo ABC:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Leftrightarrow \triangle DEF \sim \triangle ABC$$

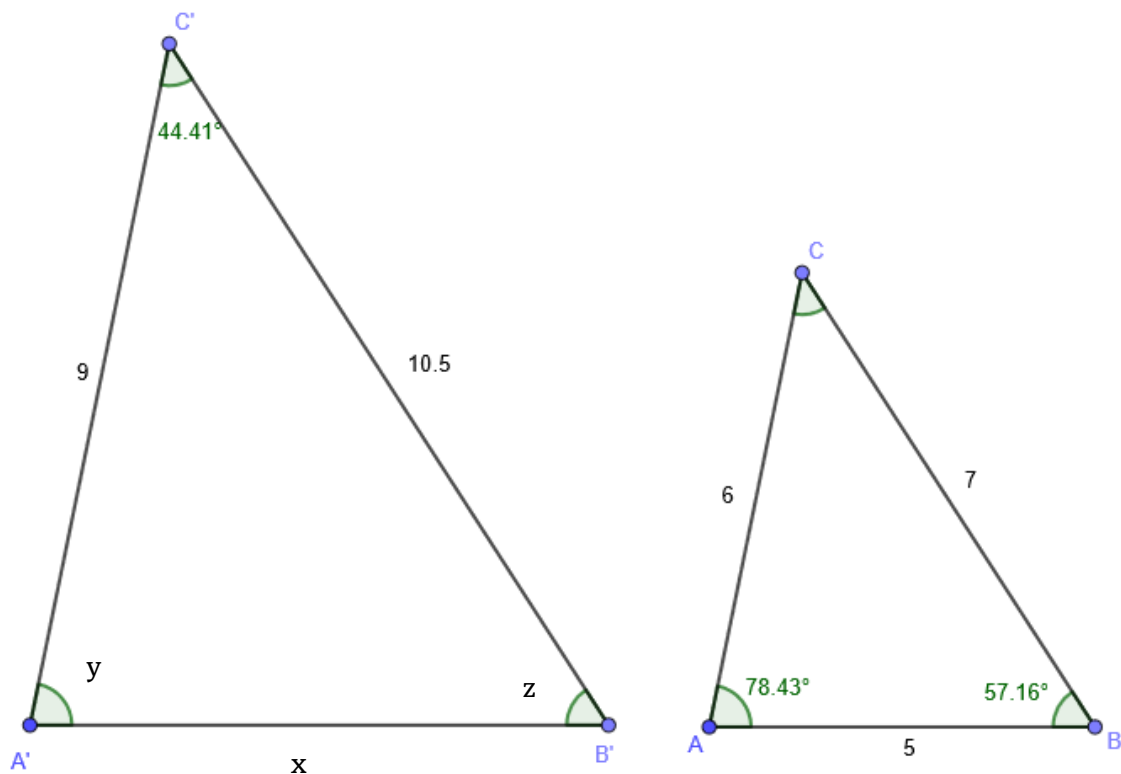
Transitiva: se o triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF, e o triângulo DEF é semelhante ao triângulo XYZ, então os triângulos ABC e XYZ são semelhantes:



⁴ Ente é tudo aquilo que existe, coisa, objeto, pessoa. Por ente matemático deve-se, portanto, compreender tudo aquilo que pertence ao estudo da matemática: os conjuntos numéricos, as funções, as formas geométricas, etc.

2. Sabendo que os triângulos abaixo são semelhantes, indique quais são os valores das incógnitas.

a)



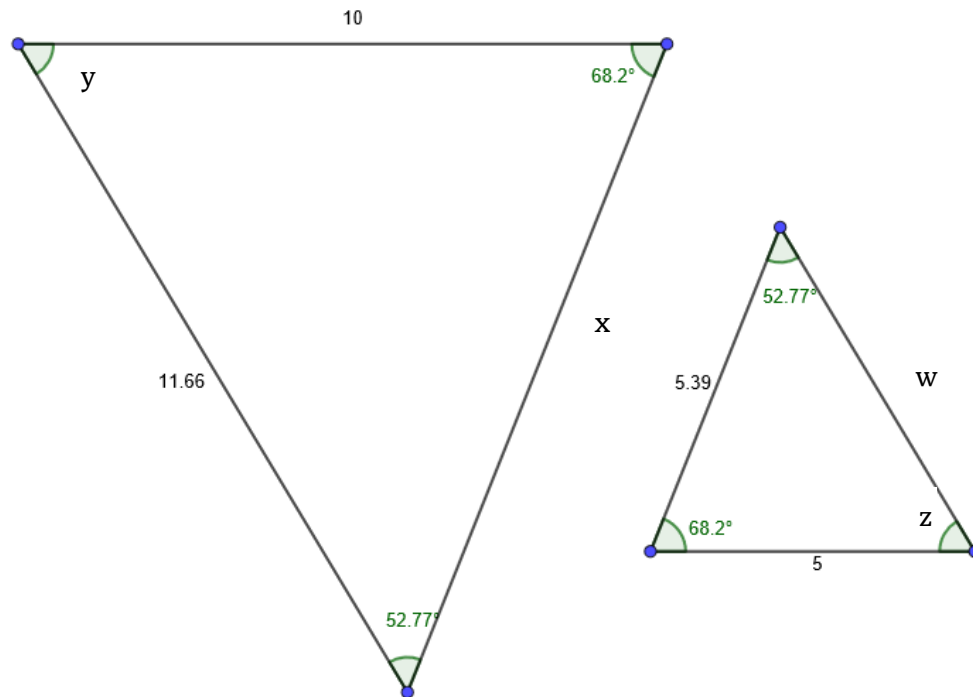
R. Como os ângulos homólogos são congruentes, temos que $y = 78.43^\circ$ e $z = 57.16^\circ$.

Em relação aos lados, temos que a seguinte proporção $\frac{9}{6} = \frac{10,5}{7} = \frac{x}{5}$.

Calculando o valor de x , obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}\frac{9}{6} &= \frac{x}{5} \\ 6x &= 45 \\ x &= \frac{45}{6} = \frac{15}{2}\end{aligned}$$

b)



R. Como os ângulos homólogos são congruentes, temos que $y = z$. Utilizando a soma dos ângulos internos de um triângulo temos que:

$$\begin{aligned} 52,77 + 68,2 + y &= 180^\circ \\ y &= 180^\circ - 52,77 - 68,2 \\ y &= 59,03 \end{aligned}$$

Em relação aos lados, temos que a seguinte proporção $\frac{10}{5} = \frac{11,66}{w} = \frac{x}{5,39}$.

Calculando o valor de x, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{10}{5} &= \frac{x}{5,39} \\ 2 &= \frac{x}{5,39} \\ x &= 2 \cdot 5,39 \\ x &= 10,78 \end{aligned}$$

Calculando o valor de w, obtemos o seguinte:

$$\frac{10}{5} = \frac{11,66}{w}$$

$$2 = \frac{11,66}{w}$$

$$w = \frac{11,66}{2}$$

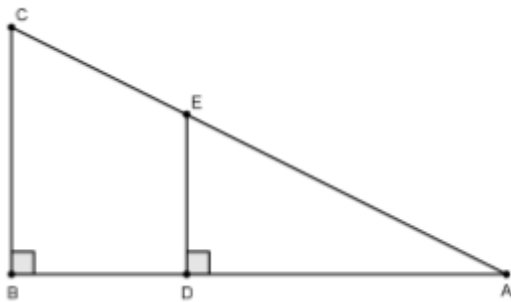
$$w = 5,83$$

Lição 92 – Teorema fundamental da semelhança de triângulos

1. O que enuncia o Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos? Copie a demonstração em seu caderno e procure refazê-la sem consultar a apostila ou o caderno.

R. Teorema fundamental da semelhança de triângulos: se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

2. Observe a figura abaixo e responda:



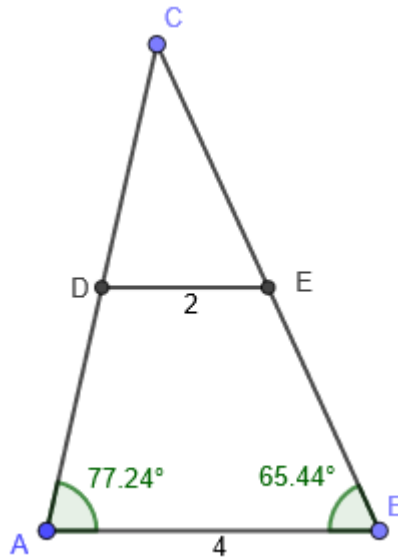
a) Os triângulos ABC e ADE são semelhantes?

R. Pelo Teorema fundamental da semelhança de triângulos os triângulos ABC e ADE são semelhantes

b) Se são semelhantes, quais são os lados homólogos?

R. Os lados homólogos são: $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$ e $\overline{CA}$ e $\overline{EA}$.

3. Sabendo que $DE \parallel AB$, e que $AC = 6$, $CE = 3,25$, diga:



a) Quanto mede $\overline{CD}$.

R.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$$

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{\overline{CD}}$$

$$4 \cdot \overline{CD} = 12$$

$$\overline{CD} = \frac{12}{4} = 3$$

b) Quanto mede $\widehat{C}$.

R.

$$A + B + C = 180$$

$$77,24 + 65,44 + C = 180$$

$$C = 180 - 142,68$$

$$C = 37,32$$

c) Quanto mede $\widehat{D}$ e $\widehat{E}$.

R. O ângulo D é homólogo a ao ângulo A , logo $D = 77,24^\circ$.

O ângulo E é homólogo ao ângulo B , logo $E = 65,44^\circ$.

d) Quanto mede $\overline{CB}$.

R.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CE}}$$

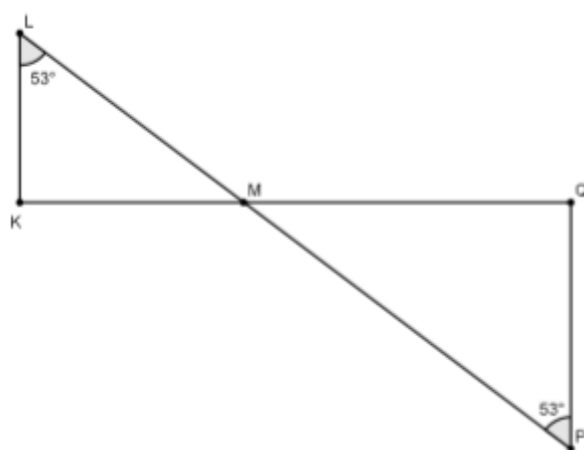
$$\frac{4}{2} = \frac{\overline{CB}}{3,25}$$

$$2 \cdot \overline{CB} = 13$$

$$\overline{CB} = \frac{13}{2} = 6,5$$

Lição 93 – Casos de semelhança – Parte I

1. Determine se os triângulos KLM e MPQ são semelhantes.

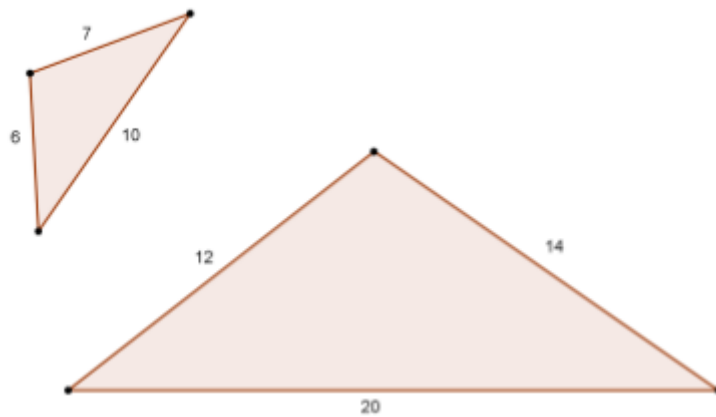


R. Os triângulos KLM e MPQ são semelhantes pelo caso AA, pois

$$\angle KLM \equiv \angle QPM = 53^\circ$$

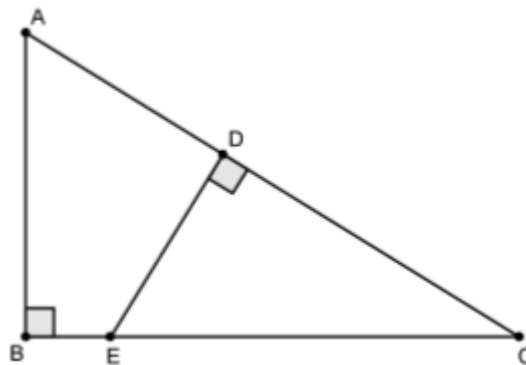
$$\angle LMK \equiv \angle PMQ \text{ (OPV)}$$

2. Qual é a razão de semelhança dos triângulos abaixo?



R. A razão de semelhança é 2, pois $\frac{20}{10} = \frac{12}{6} = \frac{14}{7} = 2$.

3. Sabendo que $\overline{AB} = 15$, $\overline{BC} = 20$, $\overline{AD} = 10$ e $\overline{DC} = 15$, determine a medida de $\overline{DE}$ na figura abaixo.



R. Pelo caso AA, os triângulos ABC e EDC são semelhantes, com isso, temos que:

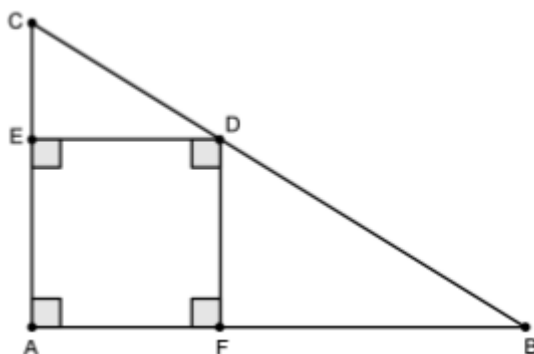
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$$

$$\frac{15}{\overline{DE}} = \frac{20}{15}$$

$$20 \cdot \overline{DE} = 225$$

$$\overline{DE} = \frac{225}{20} = 11,25$$

4. Na figura abaixo, temos $\overline{AC} = 4$ e $\overline{AB} = 6$. Determine o perímetro do quadrado AEDF.



R. Como não sabemos a medida do lado do quadrado, usaremos $\overline{ED} \equiv \overline{AE} = x$. Assim, $\overline{CE} = \overline{AC} - \overline{EA} = 4 - x$.

Os triângulos ABC e EDC são semelhantes pelo caso AA, com isso temos:

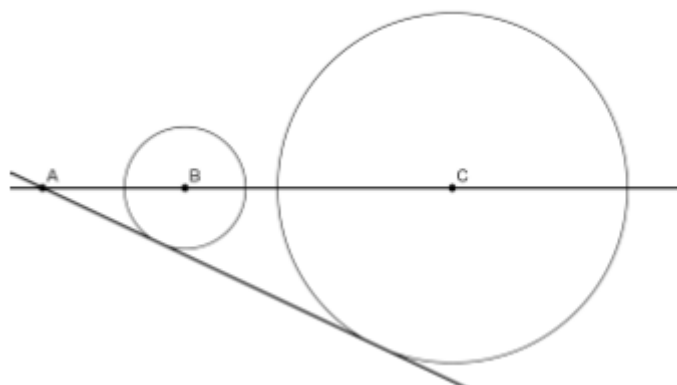
$$\begin{aligned}\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} &= \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} \\ \frac{6}{x} &= \frac{4}{4-x} \\ 4x &= 24 - 6x \\ 10x &= 24 \\ x &= \frac{24}{10} = 2,4\end{aligned}$$

Como sabemos o valor dos lados do quadrado, determinaremos o valor do perímetro.

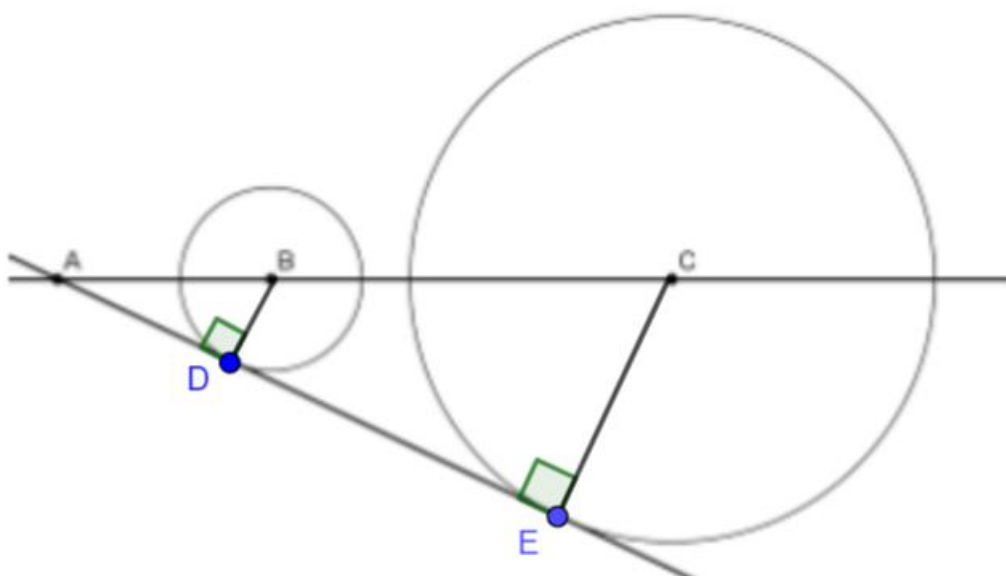
$$p = 2,4 + 2,4 + 2,4 + 2,4 = 9,6$$

5. Na figura abaixo, tem-se uma reta que passa pelos pontos A, B e C e outra que passa por A e é tangente⁵ às circunferências de centros B e C e raios 3 cm e 5 cm. Se $AB = 7$ cm, determine BC.

⁵ Reta tangente é a reta que toca a circunferência em apenas um ponto. O raio da circunferência é perpendicular à reta tangente.



R. Traçando o raio e encontrando a intersecção entre a reta tangente e as circunferências, temos a seguinte imagem.



Pelo caso AA, os triângulos ABD e ACE são semelhantes, com isso, temos que:

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{7}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{7 + \overline{BC}}{7}$$

$$3 \cdot \overline{BC} + 21 = 35$$

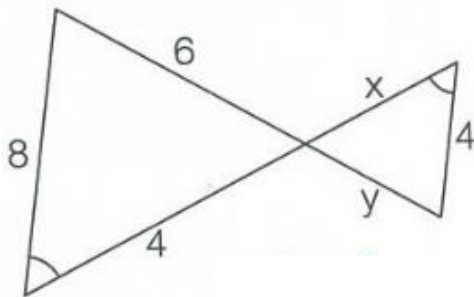
$$3 \cdot \overline{BC} = 14$$

$$\overline{BC} = \frac{14}{3}$$

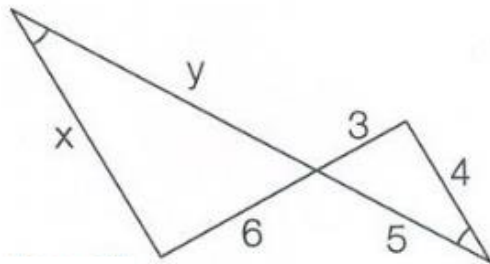
Lição 94 – Casos de semelhança – Parte II

1. Determine x e y nas figuras:

a)



b)



R. a) Como os dois triângulos são semelhantes pelo caso AA, temos:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{6}{3} = 2$$

Calculando o x , temos que:

$$\frac{x}{4} = 2$$

$$x = 8$$

Calculando o y , temos que:

$$\frac{y}{5} = 2$$

$$y = 10$$

b) Como os dois triângulos são semelhantes pelo caso AA, temos:

$$\frac{4}{x} = \frac{6}{y} = \frac{8}{4} = 2$$

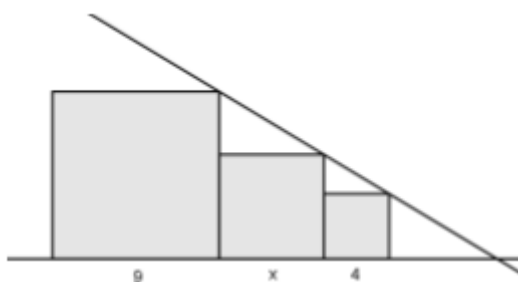
Calculando o x , temos que:

$$\frac{4}{x} = 2$$
$$x = \frac{4}{2} = 2$$

Calculando o y , temos que:

$$\frac{6}{y} = 2$$
$$y = \frac{6}{2} = 3$$

2. Determine x na figura abaixo, na qual existem três quadrados de lados 9, x e 4.



R. Os triângulos azul e vermelho são semelhantes



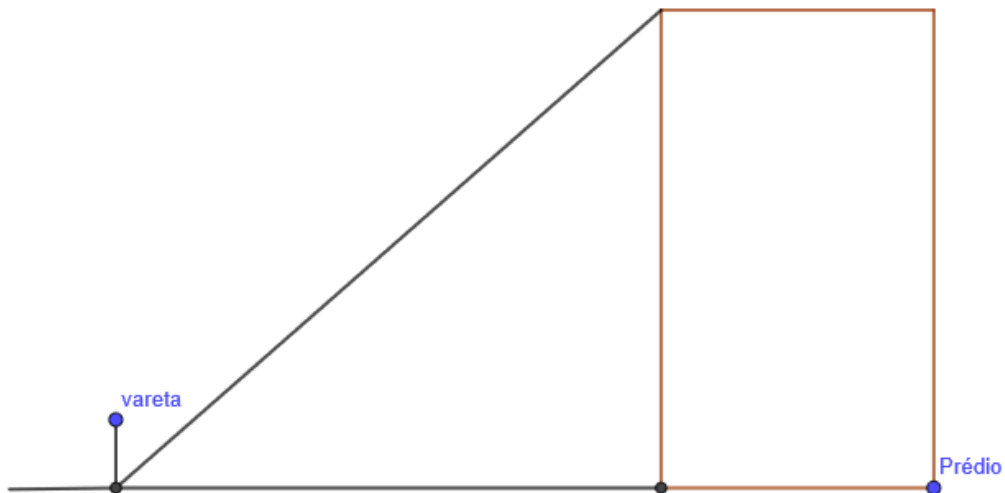
Então temos que:

$$\frac{9-x}{x} = \frac{x-4}{4}$$
$$x^2 - 4x = -4x + 36$$
$$x^2 - 4x + 4x = 36$$
$$x^2 = 36$$
$$x = \pm 6$$

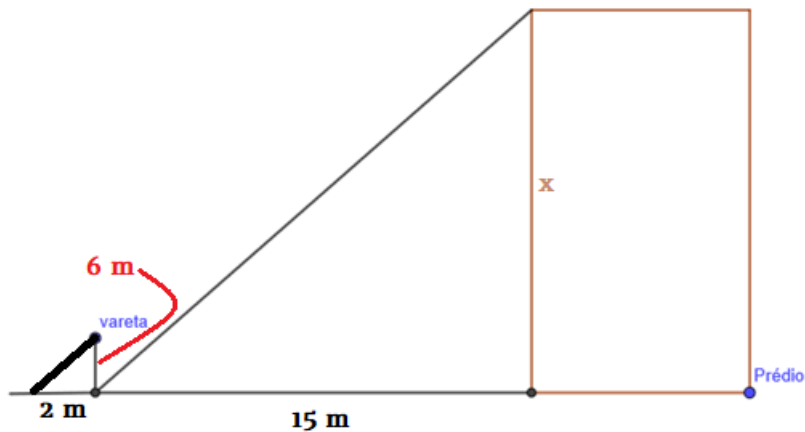
O valor de x é igual a 6, pois $x = -6$ não é possível, já que o lado do triângulo ou os lados do quadrado não podem ser negativos.

3. Determine a altura de um prédio cuja sombra tem 15 m no mesmo instante em que uma vara de 6 m fincada em posição vertical tem uma sombra de 2 m.

Esquema:



R. Vamos montar o esquema com as informações.



Como os dois triângulos são semelhantes, então temos que:

$$\frac{x}{6} = \frac{15}{2}$$

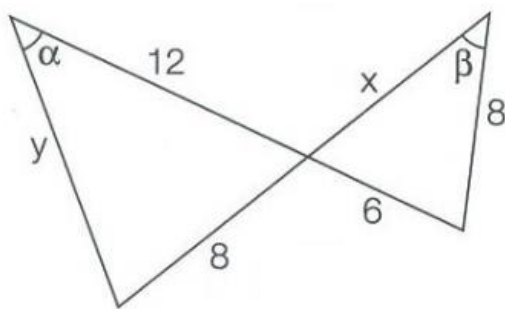
$$2x = 90$$

$$x = 45$$

Portanto, a altura do prédio é de 45 metros.

4. Se $\alpha = \beta$, determine x e y nos casos:

a)



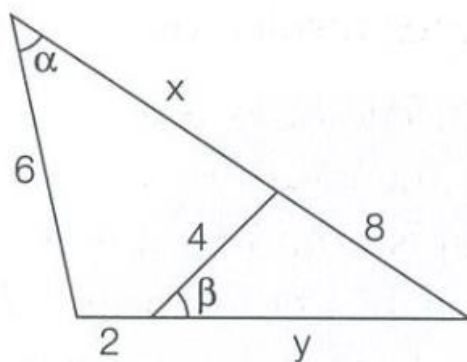
R. Se $\alpha = \beta$ os dois triângulos são semelhantes pelo caso AA, pois além dessa igualdade temos ângulos opostos pelo vértice.

Com isso, temos a seguinte relação $\frac{12}{x} = \frac{8}{6} = \frac{y}{8}$.

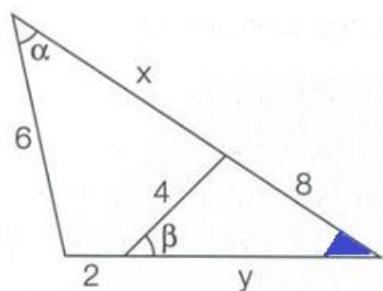
Logo,

$$\begin{aligned} \frac{12}{x} &= \frac{8}{6} & \frac{8}{6} &= \frac{y}{8} \\ 8x &= 72 & 6y &= 64 \\ x &= 9 & y &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

b)



R. O triângulo maior e o triângulo menor semelhantes pelo caso AA, pois $\alpha = \beta$ e o ângulo em azul é comum nos dois triângulos.



Assim, temos que:

$$\frac{x+8}{y} = \frac{2+y}{8} = \frac{6}{4}$$

Vamos encontrar o valor de y:

$$\frac{2+y}{8} = \frac{6}{4}$$

$$8+4y = 48$$

$$4y = 40$$

$$y = 10$$

Agora, iremos encontrar o valor de x:

$$\frac{x+8}{y} = \frac{2+y}{8}$$

$$\frac{x+8}{10} = \frac{2+10}{8}$$

$$\frac{x+8}{10} = \frac{12}{8}$$

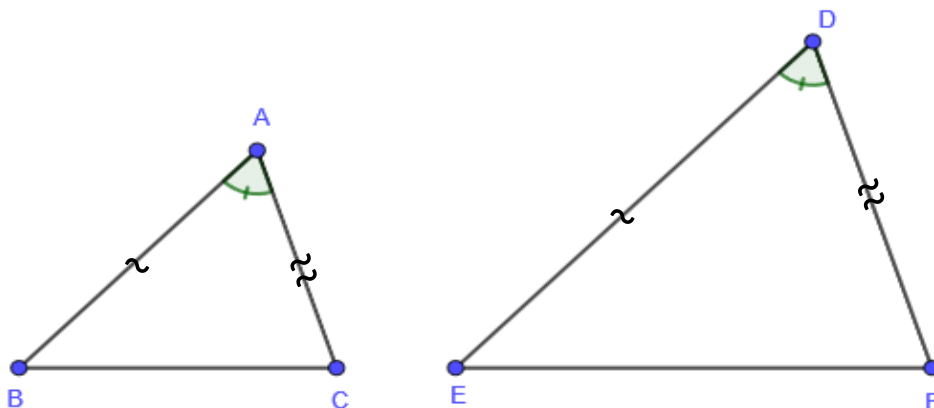
$$8x+64=120$$

$$8x = 56$$

$$x = 7$$

5. Escreva o segundo caso de semelhança nos triângulos e demonstre-o.

R. Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos dois lados homólogos de outro triângulo, e o ângulo entre estes lados é congruente, então estes triângulos são semelhantes.



Demonstração: Ora, este caso de semelhança afirma que, se dois lados de um triângulo são proporcionais aos dois lados homólogos de outro triângulo e o ângulo entre estes lados é congruente (e esta é a hipótese), então os triângulos são semelhantes (e esta é a tese).

Matematicamente, fica da seguinte forma:

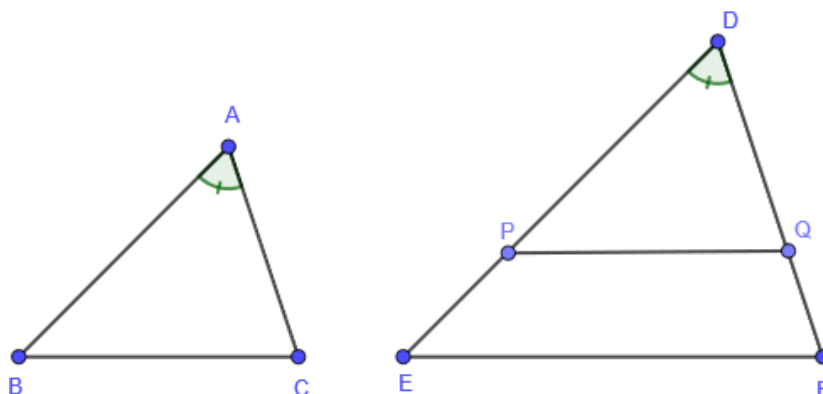
Hipótese

Tese

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} \text{ e } \hat{A} \equiv \hat{D} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Lê-se: Se $\overline{DE}$ está para $\overline{AB}$ assim como $\overline{DF}$ está para $\overline{AC}$, e o ângulo A é congruente ao D , então os triângulos ABC e DEF são semelhantes.

Por suposição, considere que os triângulos não sejam congruentes, e que $\overline{DE} > \overline{AB}$. Tome então um ponto P em $\overline{DE}$ tal que $\overline{DP} \equiv \overline{AB}$, em um ponto Q em $\overline{DF}$ tal que $\overline{DQ} \equiv \overline{AC}$.



Feita esta construção, é possível notar que os triângulos ABC e DPQ são congruentes pelo caso L.A.L, pois:

$$\overline{AB} \equiv \overline{DP} \text{ (por construção)}$$

$$\hat{A} \equiv \hat{D} \text{ (por hipótese)}$$

$$\overline{AC} \equiv \overline{DQ} \text{ (por construção)}$$

Agora, por hipótese $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}}$. Entretanto, como $\triangle DPQ \equiv \triangle ABC$, é possível afirmar que:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{DQ}}$$

O Teorema de Tales afirma que duas retas paralelas determinam sob duas transversais segmentos proporcionais. A recíproca⁶ do Teorema de Tales diz que, dadas duas retas concorrentes, se elas forem cortadas por outras duas retas r e s , de tal forma que se formem em cada uma segmentos proporcionais, então estas duas retas r e s são paralelas. Considerando $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$ como duas retas concorrentes (concorrentes em D), como $\frac{\overline{DE}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{DQ}}$, isso significa que $\overline{PQ}$ e $\overline{EF}$ são paralelas. Se elas são paralelas, pelo Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos tem-se que:

$$\triangle DEF \sim \triangle DPQ$$

Entretanto, $\triangle DPQ$ é congruente ao triângulo $\triangle ABC$, o que implica serem eles semelhantes. Ora, pela propriedade transitiva da semelhança, se $\triangle DEF$ é semelhante a $\triangle DPQ$, e $\triangle DPQ$ é semelhante a $\triangle ABC$, então:

$$\triangle DEF \sim \triangle ABC$$

Dessa forma, fica demonstrado que, se dois triângulos possuem dois lados proporcionais e o ângulo determinado por eles for congruente, então estes triângulos são semelhantes. Consequentemente, os outros dois triângulos são congruentes, e o outro lado é proporcional.

Lição 95 – Casos de semelhança – Parte III

1. O que são os casos de semelhança? Copie as demonstrações de cada caso em seu caderno.

R. Os casos de semelhança são relações mínimas que dois triângulos precisam apresentar para serem semelhantes.

⁶ Um teorema é sempre formado por uma hipótese e uma tese “Se A, então B”. A recíproca deste teorema inverte a hipótese e põe a tese “Se B, então A”.

2. Dada a figura, determine o valor de x .

R. Os triângulos ABC e EDC são semelhantes pelo caso AA, pois são dois triângulos retângulos e o ângulo C é comum nos dois. Assim, temos que:

$$\frac{15}{x} = \frac{20}{15}$$

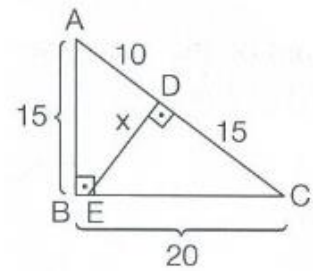
Vamos encontrar o valor de x :

$$\frac{15}{x} = \frac{20}{15}$$

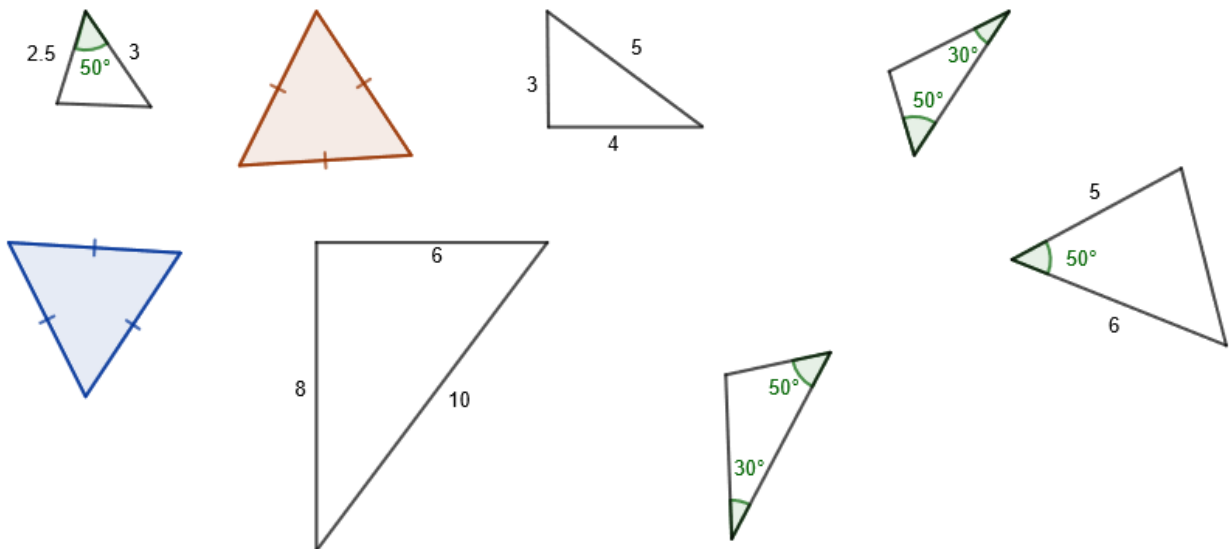
$$20x = 225$$

$$x = \frac{225}{20}$$

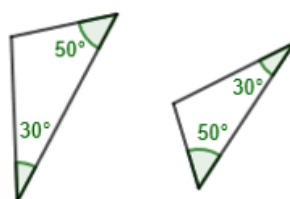
$$x = 11,25$$



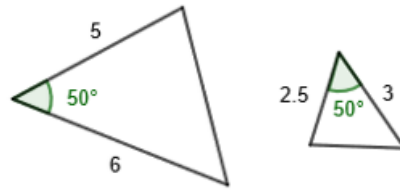
3. Dados oito triângulos, indique os pares de triângulos semelhantes e o caso de semelhança correspondente.



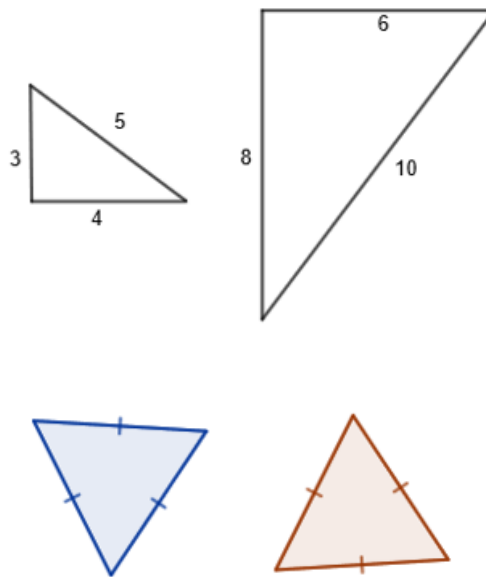
R. Os triângulos abaixo são semelhantes pelo caso AA.



Os triângulos abaixo são semelhantes pelo LAL



Os triângulos abaixo são semelhantes pelo LLL



Lição 96 – Avaliação

1. Defina:

a) Ângulo

R. É a reunião de duas semirretas de mesma origem.

b) Ângulo obtuso

R. É o ângulo cuja medida é maior que 90° .

c) Retas perpendiculares

R. São retas concorrentes e formam entre si quatro ângulos retos.

d) Ângulos opostos pelo vértice

R. Sejam duas retas concorrentes formando quatro ângulos. Analisando dois a dois, é possível notar que esses ângulos ou estão lado a lado ou só possuem um único ponto em comum, que também é o ponto de encontro das duas retas. Quando dois ângulos possuem essa última característica, eles são chamados de **ângulos opostos pelo vértice**.

e) Ângulos adjacentes

R. Dois ângulos são **adjacentes** quando são **consecutivos** e não possuem pontos internos.

f) Ângulos correspondentes

R. **Dois ângulos que ocupam a mesma posição nas retas paralelas** são chamados de correspondentes. Eles apresentam a mesma medida.

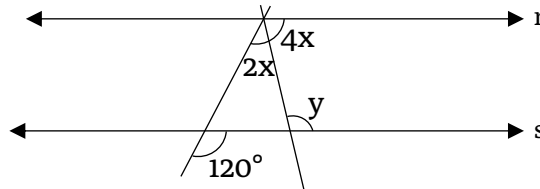
g) Ângulos alternos internos

R. Sejam duas retas paralelas cortadas por uma transversal. **Os ângulos alternos internos** são pares de ângulos não adjacentes que estão em lados opostos em relação à reta transversal e na parte interna das paralelas.

h) Ângulos colaterais

R. Sejam duas retas paralelas cortadas por uma transversal. **Ângulos colaterais** são pares de ângulos não adjacentes localizados no mesmo lado da reta transversal.

2. Na figura seguinte, as retas r e s são paralelas. Qual é a medida do ângulo y ?



a) 100°

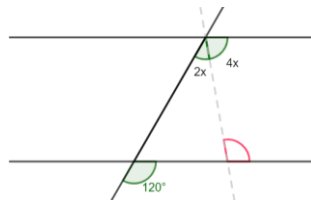
b) 110°

c) 120°

d) 130°

e) 140°

R. Observando o desenho é possível notar que o ângulo gerado pela soma de $2x$ e $4x$ é correspondente ao ângulo de medida 120° . Portanto, $2x + 4x = 120$



Sendo assim, temos que $x = 20$, pois:

$$2x + 4x = 120$$

$$6x = 120$$

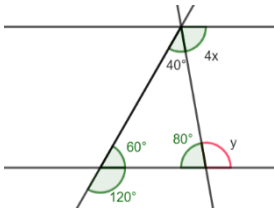
$$x = \frac{120}{6}$$

$$x = 20$$

Se $x = 20$, então $2x = 2 \cdot 20 = 40^\circ$.

Sabemos que o suplemento de 120° é 60° . Assim, sabemos a medida de dois ângulos do triângulo que foi formado pelas transversais. Portanto, para saber o valor do terceiro, basta subtrair de 180° as medidas já conhecidas. Assim, temos:

$$180 - 40 - 60 = 80^\circ$$



Sabemos ainda que 80° e y são suplementares. Assim:

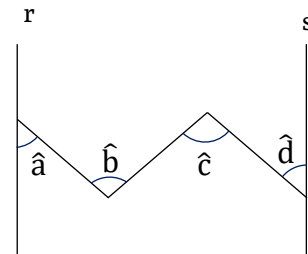
$$80^\circ + y = 180^\circ$$

$$y = 180 - 80$$

$$y = 100^\circ$$

Resposta: alternativa a.

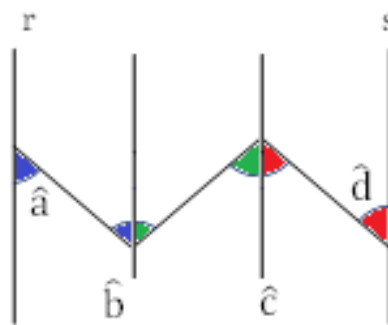
3. Na figura, as retas r e s são paralelas. O ângulo $\hat{a}$ mede 42° , o ângulo $\hat{b}$ mede 71° e o ângulo $\hat{d}$ mede 33° . Determine a medida do ângulo $\hat{c}$.



R. Como $\hat{a}$ mede 42° , $\hat{b} = \hat{a} + \text{ângulo pintado de verde}$ e $\hat{b}$ mede 71° então o ângulo pintado de verde é igual a 29° .

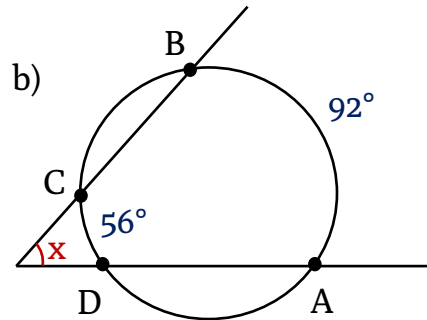
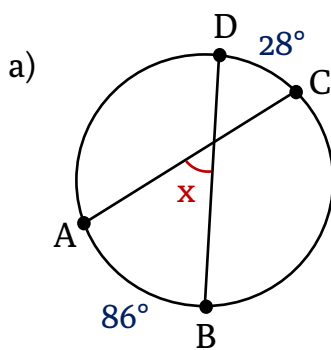
O ângulo $\hat{c} = \text{o ângulo verde} + \text{o ângulo vermelho}$. Como o ângulo vermelho é o ângulo $\hat{d}$ então, temos que:

$$\hat{c} = \text{o ângulo verde} + \text{o ângulo vermelho}$$



$$\hat{c} = 29^\circ + 33^\circ = 62^\circ$$

4. Determine a medida x em cada uma das figuras (a medida dos arcos está indicada em cor azul):

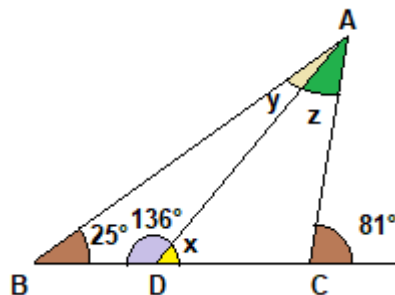


R.

$$a) x = \frac{86}{2} + \frac{28}{2} = 43 + 14 = 57^\circ$$

$$b) x = \frac{92}{2} - \frac{56}{2} = 46 - 28 = 18^\circ$$

5. Determine as medidas x , y e z indicadas na figura abaixo.



R. Os ângulos x e 136° são suplementares. Portanto, a medida de x é:

$$x + 136 = 180$$

$$x = 180 - 136$$

$$x = 44^\circ$$

A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° . Portanto, no triângulo ABD, temos:

$$y + 25 + 136 = 180$$

$$y + 161 = 180$$

$$y = 180 - 161$$

$$y = 19^\circ.$$

Pelo teorema do ângulo externo, temos que a soma de x e z devem ser iguais a 81° . Como já sabemos a medida de x , temos:

$$x + z = 81^\circ$$

$$44 + z = 81$$

$$z = 81 - 44$$

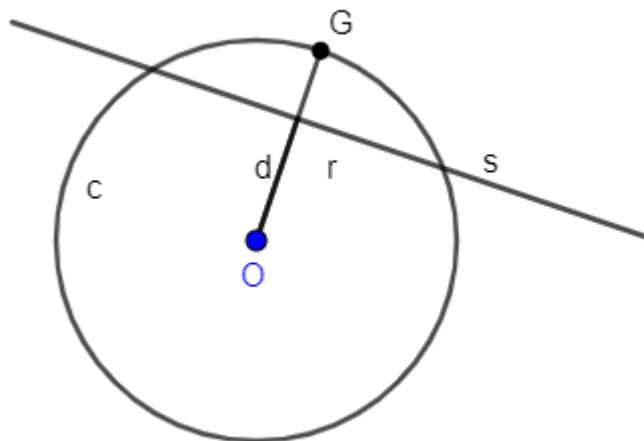
$$z = 37.$$

6. Defina com palavras e com desenho as três posições relativas entre uma reta e uma circunferência.

R. As três posições relativas entre uma reta e uma circunferência são: reta secante, reta tangente e reta externa.

Reta secante: Quando a reta s corta a circunferência em dois pontos distintos, s é chamada **reta secante à circunferência**.

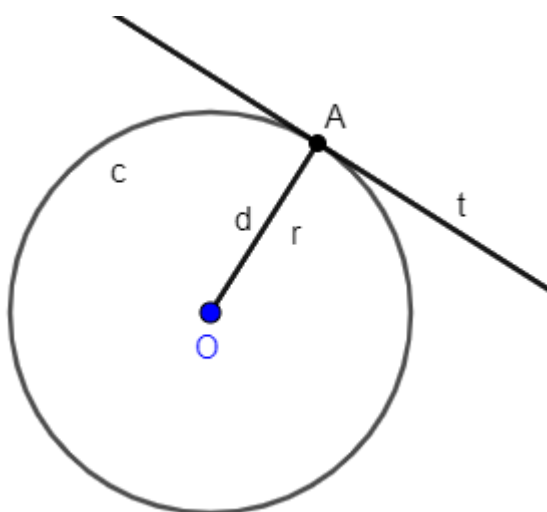
Note que a distância d do centro à reta s é menor que o comprimento r do raio, ou seja, $d < r$.



Reta Tangente: Quando a reta t passa por apenas um ponto em comum com a circunferência, o ponto A, t é chamada **reta tangente à circunferência**.

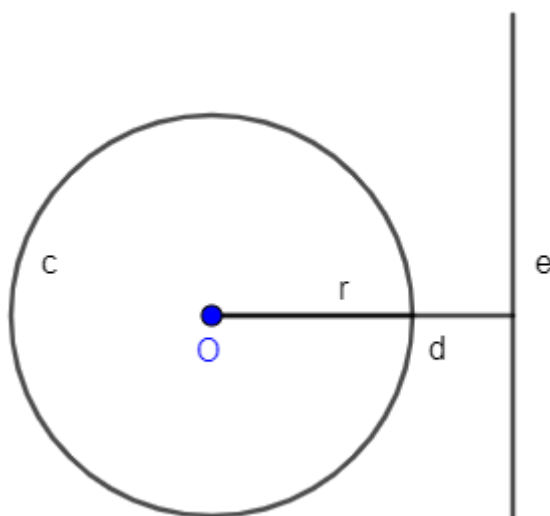
Note que a distância d do centro à reta t é igual ao comprimento r do raio, ou seja, $d = r$.

Observação: o ponto A é chamado de ponto de tangência.



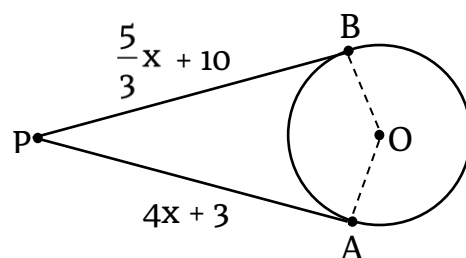
Reta externa: Quando a reta não passa por nenhum ponto em comum com a circunferência, e é chamada reta externa à circunferência.

Note que a distância d do centro à reta e é maior que o comprimento r do raio, ou seja, $d > r$.



7. Observe a figura e determine:

- a) a medida x;
- b) a medida do segmento PA;
- c) a medida do segmento PB;
- d) o perímetro do quadrilátero PAOB, se o comprimento do raio é 7 cm.



R. a) Pela propriedade da reta tangente, temos que:

$$\frac{5}{3}x + 10 = 4x + 3$$

$$\frac{5}{3}x - 4x = 3 - 10$$

$$\frac{5}{3}x - \frac{12}{3}x = -7$$

$$-\frac{7}{3}x = -7$$

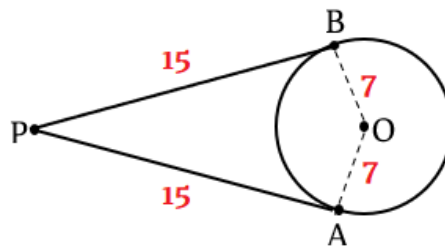
$$-7x = -21$$

$$x = \frac{-21}{-7} = 3$$

b) $\overline{PA} = 4x + 3 = 4 \cdot 3 + 3 = 15$.

c) Como $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$ então $\overline{PB} = 15$.

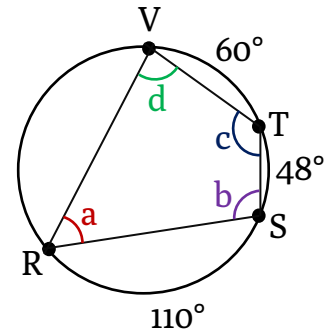
d) Com os resultados encontrados na letra b e c e com o enunciado, temos o seguinte desenho:



Calculando o perímetro do quadrilátero PAOB, temos:

$$p = 15 + 15 + 7 + 7 = 44$$

8. Determine as medidas a , b , c e d indicadas na figura.



R. O ângulo d é um ângulo inscrito, então temos que:

$$d = \frac{RT}{2}$$

$$d = \frac{RS + ST}{2}$$

$$d = \frac{110 + 48}{2}$$

$$d = \frac{158}{2} = 79^\circ$$

O ângulo a é um ângulo inscrito, então temos que:

$$a = \frac{ST}{2}$$

$$a = \frac{ST + TV}{2}$$

$$a = \frac{48 + 60}{2}$$

$$a = \frac{108}{2} = 54^\circ$$

O arco VR mede:

$$VR + 110 + 48 + 60 = 360$$

$$VR + 218 = 360$$

$$VR = 360 - 218$$

$$VR = 142^\circ$$

O ângulo b é um ângulo inscrito, então temos que:

$$b = \frac{TR}{2}$$

$$b = \frac{TV + VR}{2}$$

$$b = \frac{60 + 142}{2}$$

$$b = \frac{202}{2} = 101^\circ$$

O ângulo c é um ângulo inscrito, então temos que:

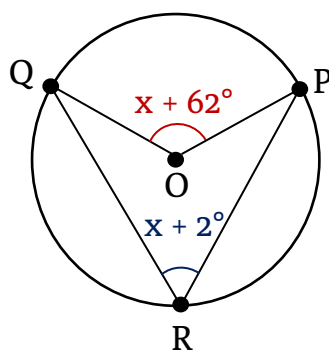
$$\hat{c} = \frac{VS}{2}$$

$$\hat{c} = \frac{VR + RS}{2}$$

$$\hat{c} = \frac{142 + 110}{2}$$

$$\hat{c} = \frac{252}{2} = 126^\circ$$

9. Qual é a medida do ângulo inscrito na figura a seguir?



R. O ângulo QRP é o ângulo inscrito e o ângulo POQ é o ângulo central. Os dois ângulos possuem a seguinte relação:

$$QRP = \frac{POQ}{2}$$

$$x + 2 = \frac{x + 62}{2}$$

$$2x + 4 = x + 62$$

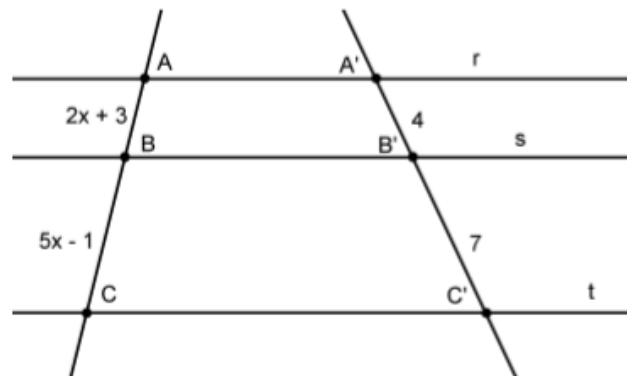
$$2x - x = 62 - 4$$

$$x = 58^\circ$$

Após encontrarmos o valor de x calcularemos a medida do ângulo inscrito.

$$QRP = x + 2 = 58 + 2 = 60^\circ$$

10. Enuncie o Teorema de Tales e determine o valor de x nas figuras abaixo sabendo que $r \parallel s \parallel t$.



R. Teorema de Tales: dadas duas transversais em um feixe de retas paralelas, a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os dois segmentos correspondentes da outra transversal.

Ora, pelo teorema de Tales, a razão entre dois segmentos de uma transversal é proporcional à razão entre os dois segmentos correspondentes da outra transversal. Logo,

$$\frac{2x + 3}{5x - 1} = \frac{4}{7}$$

$$14x + 21 = 20x - 4$$

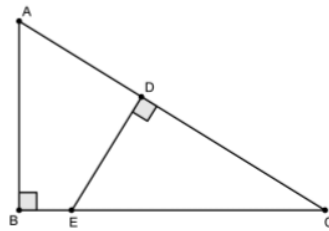
$$14x - 20x = -4 - 21$$

$$-6x = -25 \quad \cdot (-1)$$

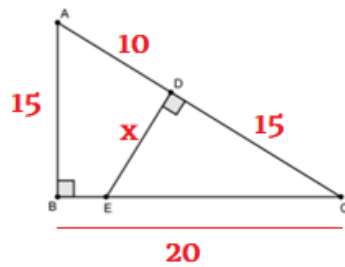
$$6x = 25$$

$$x = \frac{25}{6}$$

11. Sabendo que $AB = 15$, $BC = 20$, $AD = 10$ e $DC = 15$, determine a medida de DE na figura abaixo.



R. Dadas as informações do enunciado, temos a seguinte imagem:



Os triângulos ABC e EDC são semelhantes pelo caso AA, pois os ângulos $B \equiv D = 90^\circ$ e o ângulo C é comum nos dois triângulos. Assim, temos que:

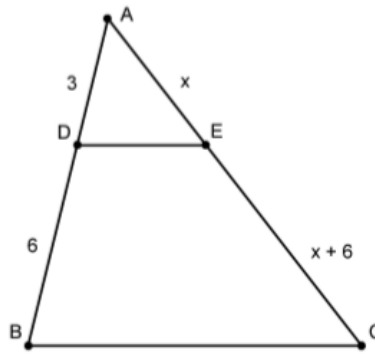
$$\frac{15}{x} = \frac{20}{15}$$

$$20x = 225$$

$$x = \frac{225}{20} = 11,25$$

Portanto, $\overline{DE} = 11,25$.

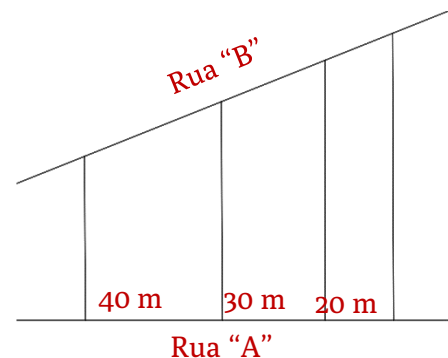
12. Determine o valor de x na figura abaixo, sabendo que $\overline{DE}$ é paralelo à base $\overline{BC}$ do triângulo ABC .



R. Como $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$, pelo **Teorema fundamental da semelhança de triângulos** os triângulos ADE e ABC são semelhantes. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{3}{6} &= \frac{x}{x+6} \\ 3x+18 &= 6x \\ 3x-6x &= -18 \\ -3x &= -18 \quad \cdot(-1) \\ 3x &= 18 \\ x &= \frac{18}{3} = 6\end{aligned}$$

13. Três terrenos têm frente para a rua “A” e para a rua “B”, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua “A”. Qual é a medida de frente para a rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua é de 180m?



R. A frente para a Rua B do terreno de fundo 40 m mede x , a frente para a Rua B do terreno de fundo 30 m mede y e a frente para a Rua B do último terreno mede z . Pelo enunciado, temos que $x + y + z = 180$ m.

Pelo Teorema de Tales, temos que $\frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{z}{20}$.

Pela dica, temos que

$$\text{se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ então } \frac{a+c}{b+d}$$

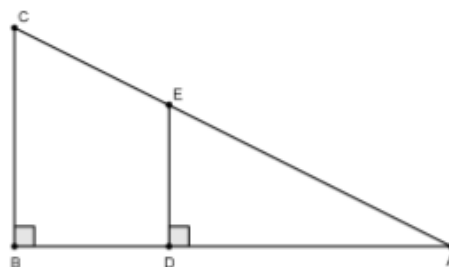
Assim, podemos utilizar essa propriedade com a proporção que já encontramos.

$$\frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{z}{20} = \frac{x+y+z}{40+30+20} = \frac{180}{90} = 2$$

Como $\frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{z}{20} = 2$ temos que $x = 80$, $y = 60$ e $z = 40$.

14. Observe a figura abaixo e responda:

- Os triângulos ABC e ADE são semelhantes?
- Se são semelhantes, quais são os lados homólogos?
- Enuncie o teorema fundamental da semelhança.



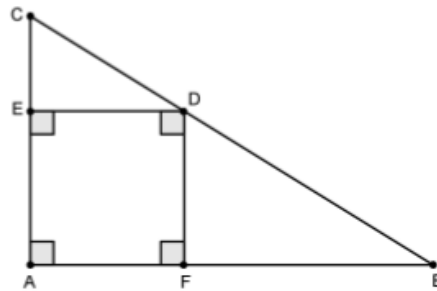
R. a) Sim, são semelhantes.

b) Os lados homólogos são:

- $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$
- $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$
- $\overline{CA}$ e $\overline{EA}$

c) **Teorema fundamental da semelhança de triângulos:** se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

15. Na figura abaixo, temos $AC = 4$ e $AB = 6$. Determine o perímetro do quadrado AEFD.



R. Como não sabemos a medida do lado do quadrado, usaremos $\overline{ED} \equiv \overline{AE} = x$. Assim, $\overline{CE} = \overline{AC} - \overline{EA} = 4 - x$.

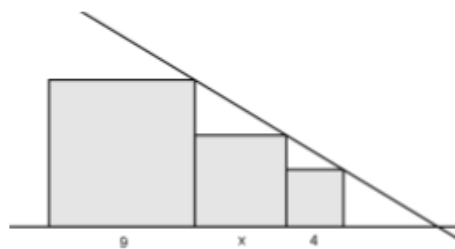
Os triângulos ABC e EDC são semelhantes pelo caso AA, com isso temos:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} &= \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} \\ \frac{6}{x} &= \frac{4}{4-x} \\ 4x &= 24 - 6x \\ 10x &= 24 \\ x &= \frac{24}{10} = 2,4\end{aligned}$$

Como sabemos o valor dos lados do quadrado, determinaremos o valor do perímetro.

$$p = 2,4 + 2,4 + 2,4 + 2,4 = 9,6$$

16. Determine x na figura abaixo, na qual existem três quadrados de lados 9, x e 4.



R. Os triângulos azul e vermelho são semelhantes



Então temos que:

$$\frac{9-x}{x} = \frac{x-4}{4}$$

$$x^2 - 4x = -4x + 36$$

$$x^2 - 4x + 4x = 36$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$

O valor de x é igual a 6, pois x = -6 não é possível, já que o lado do triângulo ou os lados do quadrado não podem ser negativos.

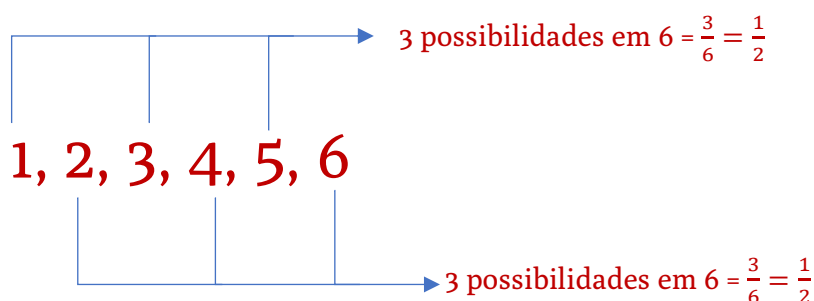
Gabarito de Matemática

9º ano, Volume 7

Lição 97 – A mesma chance de vitória

1. Considere o lançamento de um dado, no qual você deverá escolher os números ímpares e seu oponente os números pares. Qual é a possibilidade de cada um vencer? Faça uma representação do problema com desenhos, frações e porcentagens.

R. Como em um dado existem 6 números, dos quais 3 são ímpares e 3 são pares, cada um tem 50% de chance de vitória.



2. Considere o lançamento de um dado, no qual você deverá escolher 4 números e seu oponente 2 números. Qual é a possibilidade de cada um vencer? Faça uma representação do problema com desenhos, frações e porcentagens.

R. Como são 6 possibilidades, ao escolher 4 números, tenho $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ de possibilidade de vitória, o que corresponde a 66%. Como meu oponente escolheu 2 números, ele tem 2 chances em 6, isto é, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ de chance de ganhar.

3. Em uma partida de futebol, o capitão de cada time deve escolher uma das faces de uma moeda. O que vencer, escolhe começar com a bola ou o lado do campo preferido. Assim, um escolhe *cara* e o outro *coroa*. O árbitro lança a moeda para cima, e assim que ela cai, observa a face voltada para cima. Responda: a chance de vitória é igual para os dois capitães? Faça uma representação do problema com desenhos, frações e porcentagens.

R. Sim, se a moeda não for viciada, os dois têm a mesma possibilidade de ganhar, uma vez que ao lançar a moeda o resultado pode ser “cara” ou “coroa”, não admitindo uma terceira possibilidade. Assim, cada resultado admite a possibilidade 50%, ou seja, existe 1 possibilidade em 2 (duas) de ser cara, e 1 possibilidade em 2 (duas) de ser coroa.

4. Lance uma moeda 50 vezes para o alto e observe, em cada um das vezes, a face que cair virada para cima. Anote os resultados em uma folha. Represente a quantidade de vezes que caiu *cara* utilizando uma fração e porcentagens. O resultado se aproxima daquilo que foi discutido no exercício anterior?

R. Espera-se que o resultado obtido corresponda ao esperado, isto é, que cada face caia o mesmo número de vezes voltada para cima, isto é, aproximadamente 25 vezes cada uma. Por ser um experimento com poucas repetições, é possível que a face “cara” caia 40 vezes voltada para cima, o que pode indicar que a moeda tenha algum defeito de balanceamento.

Lição 98 – Probabilidade

1. Qual é a definição de probabilidade? Explique.

R. Probabilidade é a observação de um experimento aleatório, ambos, observação e experimento, definidos anteriormente. *Probabilidade é a observação de um experimento aleatório*: um experimento aleatório é todo experimento que, repetido em condições idênticas, pode apresentar resultados diferentes. Definidos anteriormente, quer dizer que não é uma observação qualquer de um experimento aleatório qualquer, senão que uma observação definida de um experimento definido.

2. O que é o espaço amostral? E o que é um evento?

R. Espaço amostral é a coleção de todos os eventos possíveis e esperados de um experimento. Uma vez que o experimento é realizado, denominamos o resultado por evento.

3. Qual é o espaço amostral do lançamento de um dado? E qual é a probabilidade da face com o número 5 cair voltada para cima?

R. Lançamento do dado = [1, 2, 3, 4, 5, 6].

A probabilidade da face 5 cair voltada para cima é de 1 (uma) para 6 (seis): $\frac{1}{6}$

4. Considere o seguinte experimento: lançar dois dados para cima e somar as faces que caírem voltadas para cima. Pense e responda:

a) Qual seria o espaço amostral desse experimento?

R: O espaço amostral se constitui de todas as possibilidades de um experimento. Como um dado possui os números de 1 a 6, o espaço amostral se constituirá de todas as somas possíveis entre os números de 1 a 6.

E: [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

b) Liste todas as possibilidades de soma como um par ordenado, conforme o exemplo a seguir: 4 = (1, 3), (3, 1), (2, 2)

Soma 4		
Dado 1	Dado 2	
1	3	Par ordenado: (1, 3)
3	1	Par ordenado: (3, 1)
2	2	Par ordenado: (2, 2)

R:

2 = (1, 1).

3 = (2, 1) , (1,2).

4 = (1, 3) , (2, 2) , (3, 1).

5 = (1, 4) , (2, 3) , (3, 2) , (4, 1).

6 = (1, 5) , (2, 4) , (3, 3) , (4, 2) , (5, 1).

7 = (1, 6) , (2, 5) , (3, 4) , (4, 3) , (5, 2) , (6, 1).

8 = (2, 6) , (3, 5) , (4, 4) , (5, 3) , (6, 2).

9 = (3, 6) , (4, 5) , (5, 4) , (6, 3).

10 = (4, 6) , (5, 5) , (6, 4).

11 = (5, 6) , (6, 5).

12 = (6, 6).

c) Qual é o total de possibilidades?

R: Temos um total de 36 possibilidades.

d) Você acredita que todos os eventos possuem a mesma probabilidade de ocorrência? Preencha a tabela a seguir e observe qual é o número que aparece mais vezes. Que podemos concluir?

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

R. O evento “Soma = 7” tem maior probabilidade de acontecer, uma vez que a quantidade de combinações possíveis com esse resultado é maior que a quantidade de combinações com resultado 12, por exemplo. Uma vez que o primeiro dado é lançado, existe sempre uma possibilidade do número do segundo dado somar 7. Por exemplo: se caiu 1 no primeiro dado, no segundo dado ainda pode cair 2; se caiu 3 no primeiro dado, no segundo dado ainda pode cair 4. Agora, para que o resultado seja igual a 12, por exemplo, no primeiro dado é preciso cair, necessariamente, o número 6. Se já não caiu 6, já desconsideramos a probabilidade de cair 12. Ou, por exemplo, o número 8. Se no primeiro dado cair o número 1, não existe mais possibilidade da soma ser igual a 8.

5. Entre os números inteiros de 0 a 20, selecionam-se apenas os números ímpares.

a) Qual é o espaço amostral?

R. E: [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19].

b) Quantos elementos, no total, há nesse espaço amostral?

R. Dez.

c) Deseja-se selecionar um deles. Qual é a probabilidade que cada número possui de ser retirado?

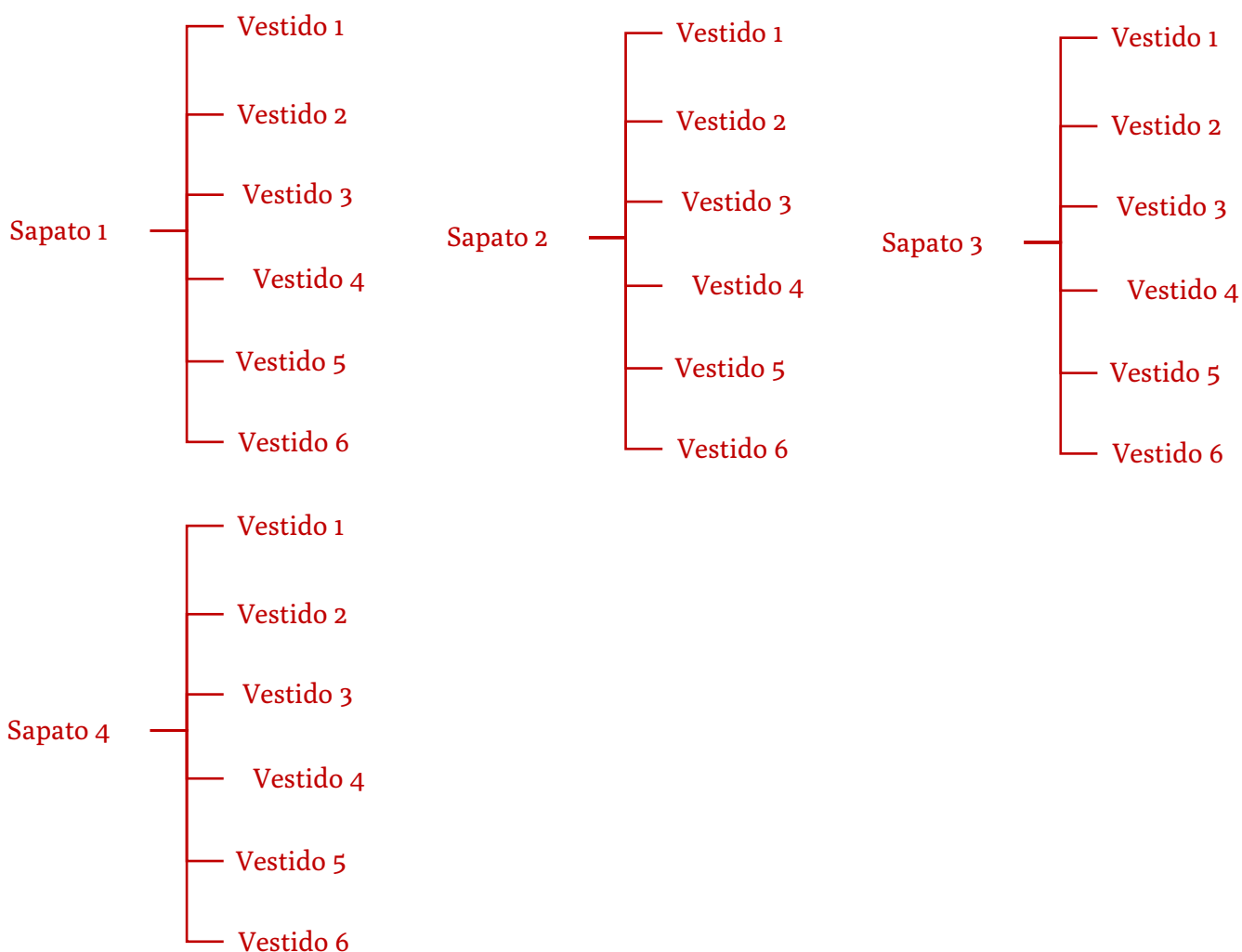
R. Como são dez possibilidades, cada número possui 1 (uma) chance em 10: $\frac{1}{10}$, que em porcentagens pode ser representado como $1 : 10 = 0,10 = 10\%$ de chance.

Lição 99 – Princípio Fundamental da Contagem

1. Maria precisa escolher um conjunto vestido-sapato para sua formatura. Se ela dispõe de 4 pares de sapatos e 6 vestidos para escolher, de quantos modos pode formar o conjunto? Encontre o resultado pelo Princípio Fundamental da Contagem e construa a árvore de possibilidades.

R. Pelo P.F.C, existem 4 possibilidades diferentes para se escolher os sapatos e 6 possibilidades diferentes para se escolher os vestidos, o que é o mesmo que encontrar o produto entre 4 e 6:

$$4 \cdot 6 = 24 \text{ possibilidades.}$$



2. Quantos são os números de três algarismos em que os três algarismos são ímpares? Ou seja: de quantos modos podemos formar um número de três algarismos usando apenas os algarismos ímpares?

Para resolver esse problema, responda às questões a seguir.

a) Quais são os algarismos ímpares? Quantos são?

R. 1, 3, 5, 7, 9.

b) Quantas são as possibilidades para o algarismo da centena?

R. 5 possibilidades.

c) Para cada centena, quantas são as possibilidades para a dezena?

R. 5 possibilidades.

d) Para cada centena e cada dezena, quantas são as possibilidades para a unidade?

R. 5 possibilidades.

e) Quantas são as possibilidades para formar o número?

R. Se cada uma das casas pode admitir 5 possibilidades, pelo PFC temos: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ possibilidades.

3. Quantos são os números de três algarismos **distintos** em que os três algarismos são ímpares? Siga o roteiro do exercício anterior, mas fique atento: quando for escolher o algarismo das dezenas, ele não poderá ser igual ao das centenas; o das unidades não poderá ser igual a nenhum dos anteriores.

R. Como os três algarismos precisam ser distintos, a situação muda. Os algarismos ímpares são: 1, 3, 5, 7 e 9, ou seja, cinco algarismos. Se na casa das centenas for colocado o algarismo 1, restam apenas quatro possibilidades para a casa das dezenas. Após colocar um algarismo na casa das dezenas, restam apenas 3 possibilidades para a casa das unidades. Assim, pelo PFC, temos: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ possibilidades.

4. Numa loja há quatro portas de entrada.

a) Quantas são as possibilidades de entrar por uma porta e sair por outra?

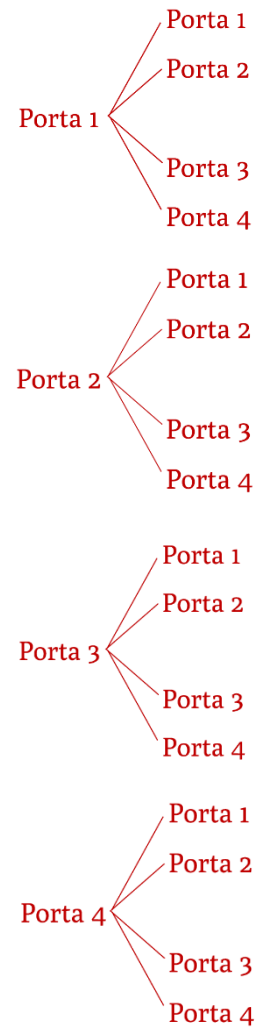
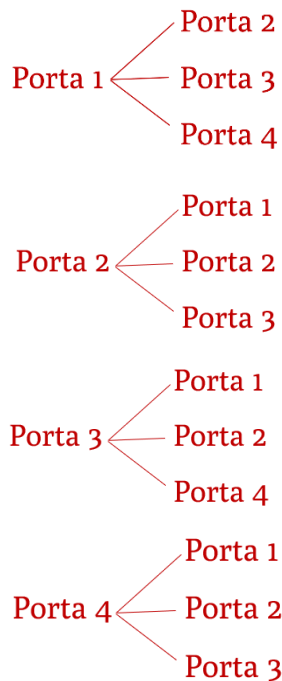
R. Se há 4 maneiras de entrar, e não podemos sair pela mesma porta de entrada, devemos considerar que há 3 maneiras de sair. Pelo PFC, temos: $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades de entrar por uma porta e sair por outra.

b) Quantas são as possibilidades de escolha das portas para entrar e sair da loja, podendo usar a mesma porta?

R. Como são 4 possibilidades para entrar e 4 possibilidades para sair, pelo PFC, temos: $4 \cdot 4 = 16$ possibilidades de entrar e sair por qualquer uma das portas.

c) Construa a árvore de possibilidades dos dois itens anteriores.

R.



5. Uma moeda é lançada algumas vezes e a sequência de resultados, cara ou coroa, de cada lançamento é anotada.

Quantas sequências diferentes podem ser formadas:

a) se forem feitos 2 lançamentos?

R. Como são duas possibilidades para cada lançamento, e serão feitos dois lançamentos, temos, pelo PFC: $2 \cdot 2 = 4$ possibilidades. Vamos listar cada uma delas, considerando C para cara, e K para coroa:

(C, C) , (C, K) , (K, C) , (K, K).

b) se forem feitos 3 lançamentos?

R: Como são duas possibilidades para cada lançamento, e serão feitos três lançamentos, temos, pelo PFC: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ possibilidades. Vamos listar cada uma delas, considerando C para cara, e K para coroa:

(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (C, K, K)

(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (K, C, C)

c) se forem feitos 4 lançamentos?

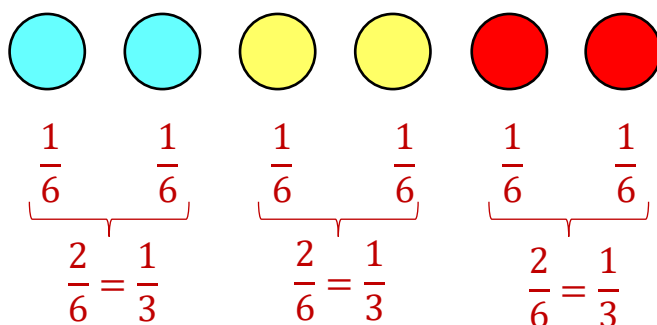
R. Como são duas possibilidades para cada lançamento, e serão feitos quatro lançamentos, temos, pelo PFC: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ possibilidades.

Lição 100 – Calculando a probabilidade

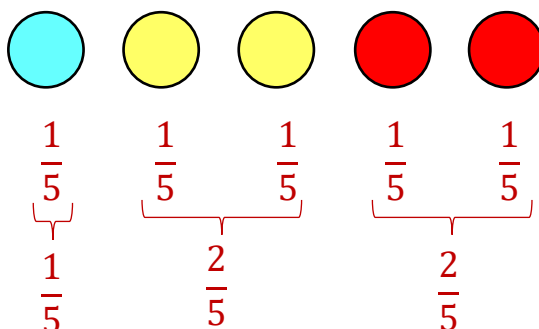
1. Pense no último problema da urna com bolinhas coloridas e responda:

a) A probabilidade de saírem duas bolinhas da mesma cor é menor do que qualquer outro tipo de combinação. Você consegue explicar o porquê?

R. No problema, havia 6 bolinhas, e cada par possuía uma cor: azul, amarela e vermelha. Como cada bolinha possui 1 (uma) possibilidade em 6, podemos dizer que cada cor possui 1 (uma) possibilidade em três:



Após retirar uma bolinha azul, por exemplo, a probabilidade de tirar uma azul na segunda vez é menor, pois teremos mais bolinhas de outras cores. Como restam 5 bolinhas, as probabilidades mudariam para o seguinte:



b) Se você tivesse que escolher entre as possibilidades:

Combinação 1: duas cores iguais.

Combinação 2: azul e amarela (independente da ordem).

Combinação 3: azul e vermelha (independente da ordem).

Combinação 4: vermelha e amarela (independente da ordem).

Existe alguma razão para escolher entre a combinação 1 e a combinação 2? E entre as combinações 1, 2 e 3?

R. Entre a combinação 1 e 2, o mais sensato seria escolher a combinação 2. No espaço amostral desse experimento, temos 9 possibilidades, das quais apenas uma satisfaz a combinação 1, e das quais duas satisfazem a combinação 2.

Já entre as combinações 1, 2 e 3, não existe razão especial para escolher entre as combinações 2 e 3, bastando não escolher a combinação 1.

2. No sorteio de um número natural de 1 a 20 sabe-se que saiu um número de dois algarismos. Qual a probabilidade de que tenha saído um múltiplo de 4.

R. O espaço amostral desse experimento é constituído de todos os números de 2 algarismos compreendidos entre 1 e 20. São eles: [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. São 11 possibilidades. Destas 11 possibilidades, temos 3 números múltiplos de 4: 12, 16 e 20. Portanto, a probabilidade desse evento acontecer é de 3 para 11: $\frac{3}{11}$.

3. Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

R. Como temos 100 números, a probabilidade de sortear um número de 1 a 20 é de 20 para 100: $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$, o mesmo que dizer que é de 20%.

4. Em um grupo de 20 pessoas temos a seguinte situação:

	Maior de idade	Menor de idade
Homem	7	2
Mulher	8	3

Qual é a probabilidade de ao sortear uma pessoa ao acaso ela seja:

a) uma mulher?

R. Nesse grupo de 20 pessoas, temos 9 homens e 11 mulheres. Portanto, a probabilidade de selecionar uma mulher será de $\frac{11}{20}$.

b) um homem menor de idade?

R. Nesse grupo de 20 pessoas, apenas 2 homens são menores de idade. Portanto, a probabilidade desse evento acontecer é de $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

c) uma mulher maior de idade?

R. Nesse grupo de 20 pessoas, apenas 8 mulheres são maiores de idade. Portanto, a probabilidade desse evento acontecer é de $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

d) maior de idade, sabendo que a pessoa sorteada é homem?

R. Uma vez que sabemos que o sorteado é homem, nosso espaço amostral muda, passando a considerar os homens. Se temos 9 homens, dos quais 7 são maiores de idade, a probabilidade desse evento acontecer é de: $\frac{7}{9}$.

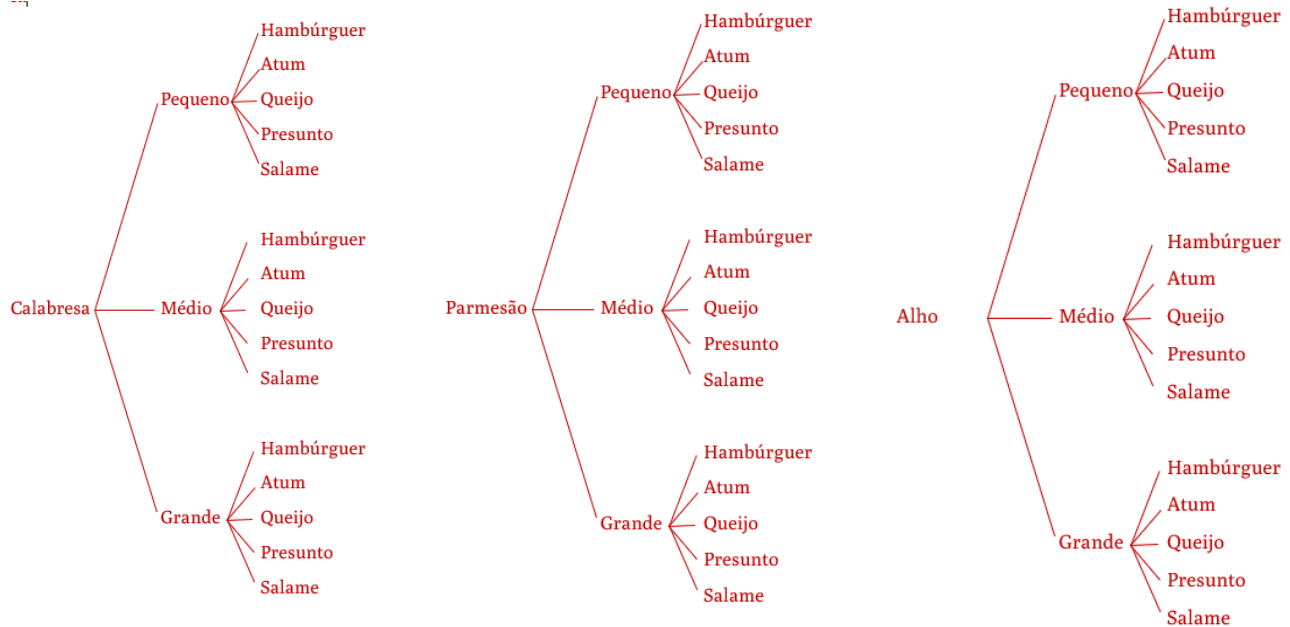
5. Para montar um sanduíche, os clientes de uma lanchonete podem escolher:

- 1 entre 3 tipos de pão: calabresa, parmesão ou de alho.
- 1 entre 3 tamanhos de pão: pequeno, médio ou grande;
- 1 entre os 5 tipos de recheio: hambúrguer, atum, queijo, presunto ou salame.

Calcule:

a) Quantos sanduíches distintos podem ser montados? Construa a árvore de possibilidades

R.



São 45 possibilidades.

b) O número de sanduíches distintos que um cliente pode montar, sabendo que ele não gosta de calabresa, prefere sanduíches pequenos e não pode comer salame.

R. Para escolher o sabor, ele passa a ter 2 possibilidades; para escolher o tamanho, apenas uma; para escolher o sabor, apenas 4 possibilidades. Portanto, pelo PFC, temos: $2 \cdot 1 \cdot 4 = 8$ possibilidades.

Lição 101 – Soma das probabilidades

1. O pai de Carlos e Felipe comprou uma bicicleta nova para os filhos. Para decidir quem seria o primeiro a dar uma volta no brinquedo novo, Carlos sugeriu ao seu irmão tirar no par ou ímpar. As regras são simples: cada irmão deve escolher simultaneamente um número de 1 a 5 (inclusive) e depois somar os dois números escolhidos. Caso o resultado seja par, Felipe vence; caso seja ímpar, quem vence é Carlos. Qual é a probabilidade de cada um dos irmãos vencer?

R. Vamos listar todas as possibilidades:

+	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

Analisando o espaço amostral, é possível notar que 13 resultados são pares e 12 resultados são ímpares, totalizando assim 25 possíveis resultados. As probabilidades de vitória, são:

Par: $\frac{13}{25}$

Ímpar: $\frac{12}{25}$

Assim, a probabilidade de ganhar escolhendo “par” ($13 : 25 = 0,52 = 52\%$) é maior do que a probabilidade de ganhar escolhendo “ímpar” ($12 : 25 = 0,48 = 48\%$).

2. Uma moeda honesta é jogada três vezes. Qual a probabilidade de aparecer pelo menos uma cara?

R. Vamos listar as possibilidades. Considere C para cara e K para coroa. Veja:

(C, C, C) (K, K, K)

(C, C, K) (K, K, C)

(C, K, C) (K, C, K)

(C, K, K) (K, C, C)

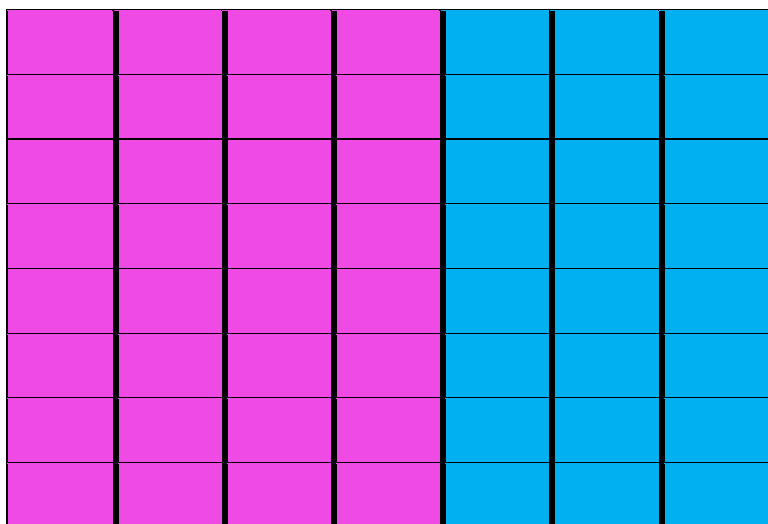
Das 8 possibilidades, 7 contém ao mesmo uma cara. Portanto, a probabilidade é de $\frac{7}{8} = 0,875 = 87,5\%$.

3. Em uma sala do sexto ano, ao sortearmos uma pessoa ao acaso, a probabilidade dessa pessoa ser uma garota é de $\frac{4}{7}$. Se existem entre 55 e 60 alunos na sala, calcule quantos são os garotos.

R. Como o problema se trata de contagem de pessoas, o número precisa ser exato. Assim, o número compreendido entre 55 e 60 precisa ser múltiplo de 7, pois é preciso que seja possível dividir esse grupo em 7 partes, das quais 3 partes são meninos e 4 partes são meninas. 56 é o único número compreendido entre 55 e 60 que é múltiplo de 7. Portanto, podemos concluir que há 56 pessoas no total. Para saber quantos meninos temos, basta descobrir a quantas pessoas $\frac{3}{7}$ correspondem.

$$\frac{3}{7} \text{ de } 56 = \frac{3}{7} \cdot 56 = \frac{168}{7} = 24$$

Veja abaixo uma representação do problema:



4. Um ciclo completo de um semáforo demora 120 segundos. Em cada ciclo, o semáforo está no verde durante 50 segundos, no amarelo durante 10 segundos e no vermelho durante 60 segundos. Se o semáforo for visto ao acaso, qual é a probabilidade de que não esteja no verde?

R. Vamos calcular a probabilidade do semáforo estar verde: $\frac{60}{120} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$. Como a soma das probabilidades é sempre igual a 100% (ou igual a 1, se considerada em decimais), portanto a probabilidade de não estar verde é igual a 100% - 50% = 50%.

5. Uma caixa contém 10 bolas do mesmo material, tamanho e com a mesma massa, sendo 1 azul, 5 amarelas, 1 preta e 3 vermelhas. Uma bola é retirada dessa caixa ao acaso e observa-se sua cor.

a) Quantos resultados possíveis tem o espaço amostral desse experimento?

R. 4 resultados: [azul, amarelo, preto, vermelho]

b) Quantos desses resultados são favoráveis ao evento “sair uma bola vermelha”?

R. 3 resultados são favoráveis.

c) Qual é a probabilidade de sair uma bola vermelha?

R. Como 3 bolas vermelhas, num total de 10 bolinhas, temos: $\frac{3}{10} = 0,3 = 30\%$ de possibilidade de sortear uma bolinha vermelha.

d) Qual é a probabilidade de não sair uma bola vermelha?

R. Como a soma das probabilidades é sempre igual a 1 (ou igual a 100%, se considerado em porcentagens), temos que a possibilidade de não sair vermelha é de $1 - 0,3 = 0,7 = 70\%$, dado que sair vermelha é igual a 30%.

e) Qual é a probabilidade de sair uma bola amarela?

R. Como 5 bolinhas são amarelas, de um total de 10 bolinhas, temos que as bolinhas amarelas correspondem a metade, e portanto, 50% de probabilidade de serem sorteadas.

Lição 102 – Probabilidade condicional

1. Observe os experimentos que foram realizados e classifique os eventos como eventos dependentes ou eventos independentes:

a) Dois dados foram lançados. Sabendo que o dado 1 caiu com a face 5 voltada para cima, deseja-se saber a probabilidade de cair a face 3 no dado 2.

R. Eventos independentes.

b) Um dado e uma moeda foram lançados para cima. Uma vez que caiu a face 3 voltada para cima, deseja-se saber a probabilidade de cair “coroa” no lançamento da moeda.

R. Eventos independentes.

c) Uma carta foi retirada no baralho. Sabendo que a carta é de ouros, deseja-se saber a probabilidade dessa carta ser uma dama.

R. Eventos dependentes.

d) De uma urna com 2 bolinhas vermelhas e 2 bolinhas azuis foram retiradas duas bolinhas, sem reposição. Sabendo que a primeira delas é vermelha, deseja-se saber a probabilidade da segunda bolinha também ser vermelha.

R. Eventos dependentes.

2. Uma pessoa retirou uma dama de um baralho de 52 cartas e, a seguir, retirou uma segunda carta. Qual é a probabilidade de que essa segunda carta também seja uma dama?

R. Em um baralho de 52 cartas existem 4 damas. Assim, a probabilidade de se retirar uma dama é dada por: $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Agora, uma vez que uma dama foi retirada, a probabilidade de se retirar outra dama será de $\frac{3}{51} = \frac{1}{17}$, ou seja, uma probabilidade menor do que a inicial.

3. Em uma urna há 9 bolas: três vermelhas, quatro amarelas e duas azuis. Retira-se uma primeira bola, que não é amarela. Ao retirar-se ao acaso uma segunda bola, qual é a probabilidade de que ela seja amarela?

R. Vamos calcular a probabilidade inicial de cada uma das cores:

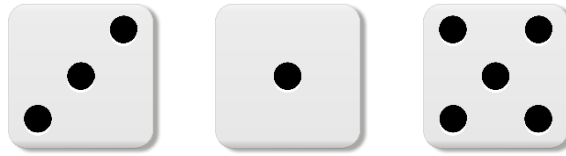
Vermelha: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Amarela: $\frac{4}{9}$

Azul: $\frac{2}{9}$

Uma vez que uma bola foi retirada, restam apenas 8 na urna. Sabendo que não foi uma amarela, significa que ainda temos 4 bolas amarelas. Portanto, se há 8 bolas no total, das quais 4 são amarelas, podemos afirmar que existe a probabilidade de 50% de sair uma bola amarela na segunda retirada.

4. Um dado honesto é lançado três vezes consecutivas. Qual é a probabilidade de surgirem os resultados a seguir, em qualquer ordem?



R. Cada lançamento de dado apresenta 6 possibilidades. Como o dado será lançado 6 vezes, o total de possibilidades pode ser encontrado pelo PFC: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ possíveis combinações. Agora, vamos considerar os casos favoráveis. No primeiro lançamento, temos 3 possibilidades. Uma vez que um dos resultados já saiu, consideramos que o segundo lançamento tem apenas 2 possibilidades (os outros dois números que ainda não foram tirados). Portanto, para o terceiro lançamento resta apenas uma possibilidade (o terceiro número que ainda não foi sorteado). Assim, temos: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possíveis combinações destes três números. Ou seja, são 6 combinações de um total de 216. Portanto, temos $\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$ (Uma chance em 36 de tirar esses três números seguidos).

5) Uma urna contém 3 bolas idênticas numeradas de 1 a 3 e outra urna contém 5 bolas idênticas numeradas de 1 a 5. Ao retirar aleatoriamente uma bola de cada urna, qual é a probabilidade de a soma dos pontos ser:

a) maior que 4?

R. Pelo PFC, temos 3 maneiras diferentes de sortear a primeira bolinha, e 5 maneiras diferentes de sortear a segunda bolinha. Portanto, temos $3 \cdot 5 = 15$ possibilidades de combinações. Deste total, as possibilidades da soma ser maior que 4 são:

(1, 4) , (1, 5) , (2, 3) , (2, 4) , (2, 5) , (3, 2) , (3, 3) , (3, 4) , (3, 5)

Portanto, das 15 possibilidades, 9 delas resultam em uma soma maior que 4. A probabilidade desse evento é $\frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0,6 = 60\%$ de chance de acontecer.

b) zero?

R. Nenhuma.

c) menor ou igual a 2?

R. Existe apenas uma combinação que satisfaz essa condição: (1, 1). Portanto, a probabilidade desse evento acontecer é de $\frac{1}{15}$.

d) de 2 a 8?

R. 100%, pois todas as somas se enquadram nesse intervalo.

6. Uma turma de alunos foi entrevistada, e foram coletados dados como o sexo dos alunos e o fator Rh do sangue de cada um.

Sexo	Rh negativo	Rh positivo	total
Feminino	5	17	22
Masculino	4	14	18
Total	9	31	40

Se um estudante desta turma é sorteado, pede-se determinar a probabilidade de que ele tenha fator Rh positivo, sabendo que é do sexo:

a) feminino.

R. Como temos 22 mulheres, a probabilidade de ser Rh positivo, sabendo que é uma mulher, é de 17 em 22: $\frac{17}{22}$.

b) masculino.

R. Como temos 18 homens, a probabilidade de ser Rh positivo, sabendo que é um homem, é de 14 em 18: $\frac{14}{18} = \frac{7}{9}$.

c) Qual é a probabilidade de ter Rh positivo, sabendo que o aluno escolhido foi um homem?

R. Questão igual anterior.

d) Qual é a probabilidade de sortear uma mulher?

R. Do total de 40 pessoas, 22 são mulheres. Portanto, a probabilidade de sortear uma mulher é $\frac{22}{40} = \frac{11}{20} = 0,55 = 55\%$.

7. Sorteando um número natural de 1 a 30:

a) qual é a probabilidade de o número sorteado ser par?

R. Entre os números de 1 a 30, quinze são pares e quinze são ímpares. Portanto, a probabilidade de é de $\frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$.

b) qual é a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 3?

R. Os múltiplos de 3 são: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 e 30, o que corresponde ao total de 10 números. Portanto, a probabilidade de ser múltiplo de três é: $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

c) qual é a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 6?

R. Os múltiplos de 6 são: 6, 12, 18, 24 e 30, o que corresponde ao total de 5 números. Portanto, a probabilidade de ser múltiplo de seis é: $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

d) qual é a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 6, sabendo que ele é um número par?

R. Se já sabemos que o número par, nosso espaço amostral foi reduzido:

[2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30]

Nesse espaço amostral de 15 números, os números que são múltiplos de 6 são: 6, 12, 18, 24 e 30, isto é, cinco números. Portanto, a probabilidade de ser múltiplo de 6, sabendo que é par, é dada por: $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Lição 103 – Estatística

1. Classifique as variáveis abaixo em qualitativas ou quantitativas

a) Número de partidas num torneio esportivo.

R. Quantitativa.

b) Diâmetro interno de uma tubulação.

R. Quantitativa.

c) Cor dos cabelos.

R. Qualitativa.

d) Número de filhos de um casal.

R. Quantitativa.

e) Número de ações negociadas num dia na bolsa de valores.

R. Quantitativa.

f) Teor alcoólico de uma bebida.

R. Quantitativa.

g) Sexo de um filhote nascido no zoológico.

R. Qualitativa.

2. Considere a seguinte situação imaginária: para indicar a média de altura do povo brasileiro, decidiu-se considerar apenas os habitantes do estado de São Paulo, por ser o estado mais numeroso do país. No entanto, sabe-se que os brasileiros da região norte do país são considerados os mais altos de todo o país, em média de 1,90m para homens, e 1,80 m para mulheres. Se a pesquisa levar em consideração apenas o estado paulista, ela descreverá bem a realidade do Brasil? Se a altura dos homens e mulheres da região norte fosse levada em consideração, a média iria subir ou diminuir?

R. Pelo fato do estado de São Paulo ser o mais numeroso, a pesquisa descreverá bem a realidade do Brasil, embora não totalmente fidedigna. Agora, se a altura dos homens e mulheres do norte fossem consideradas, a média certamente aumentaria.

3. Assinale a alternativa apenas com variáveis qualitativas.

- a) cor dos cabelos e idade.
- b) altura e cor dos olhos.
- c) peso e grau de instrução
- d) cor dos cabelos e grau de instrução.**
- e) peso e idade.

4. Assinale a alternativa apenas com variáveis quantitativas.

- a) número de alunos em uma sala de aula e cor dos olhos destes alunos.
- b) idade e cor da pele.
- c) grau de instrução e nacionalidade.
- d) altura e idade.**
- e) cor dos olhos e nacionalidade.

5. Como podemos classificar as variáveis qualitativas?

- a) nominal e ordinal.**
- b) contínua e ordinal.
- c) discreta e contínua.
- d) discreta e nominal.
- e) ordinal e discreta.

6. Como podemos classificar as variáveis quantitativas?

- a) nominal e ordinal.
- b) contínua e ordinal.
- c) discreta e contínua.
- d) discreta e nominal.
- e) ordinal e discreta.

7. Qual variável abaixo é qualitativa nominal?

- a) grau de instrução.
- b) cor dos olhos.
- c) idade.
- d) altura.
- e) peso.

Lição 104 – Frequências

1) No lançamento de um dado várias vezes, a frequência relativa de todos os números precisa ser igual. Lance um dado 20 vezes para cima e anote a frequência de cada face voltada para cima. Indique qual é a frequência absoluta e a frequência relativa de cada uma das faces. Seu resultado foi conforme o que era esperado?

R. Experimento pessoal, mas a frequência relativa de cada uma das faces é de 1 para 6, ou seja: $\frac{1}{6} = 0,167$.

2. Foi feita uma pesquisa sobre o número de pessoas que moram na mesma habitação em uma pequena vila.

Quantidade de moradores por domicílio	
Quantidade de moradores	Frequência absoluta
1	16 casas, 16 moradores
2	16 casas, 32 moradores.
3	20 casas, 60 moradores
4	8 casas, 32 moradores
Mais de 4	5 casas, 20 moradores

a) Qual é o total de moradores da vila?

R. $16 + 32 + 60 + 32 + 20 = 160$ moradores.

b) Quantos moradores vivem sozinhos?

R. 16 moradores.

c) Qual é a porcentagem dos domicílios com apenas 2 moradores?

R. Temos 65 casas, sendo 16 com apenas 2 moradores. Portanto, temos: $\frac{16}{65} = 0,246 = 24,6\%$.

d) Qual é a frequência relativa (em %) de cada classe de domicílios?

R.

1 morador: $\frac{16}{65} = 0,246 = 24,6\%$.

2 moradores: $\frac{16}{65} = 0,246 = 24,6\%$.

3 moradores: $\frac{20}{65} = 0,308 = 30,8\%$.

4 moradores: $\frac{8}{65} = 0,123 = 12,3\%$.

5 moradores: $\frac{5}{65} = 0,077 = 7,7\%$.

Lição 105 – Medidas de Tendência Central

1. Sara fez três provas de matemática no primeiro bimestre. Suas notas foram 7, 8 e 9. Determine sua média em matemática neste bimestre.

R. $Média = \frac{7 + 8 + 9}{3} = \frac{24}{3} = 8$.

A média de Sara foi 8.

2. Um atleta, em treinamento para as olimpíadas, corre quatro vezes por semana, sendo que nas segundas-feiras, ele percorre 5km; nas terças, 7km; nas quintas 8km; e, por fim, nos sábados, 8km. Determine:

a) a distância média por dia de treino que esse atleta percorre.

R. $Média = \frac{5 + 7 + 8 + 8}{4} = \frac{28}{4} = 7$.

b) a distância média por dia da semana que esse atleta percorre.

R. Média por dia da semana = $\frac{28}{7} = 4$.

c) a distância percorrida para que sua média por dia da semana seja 6km, se ele decide correr também aos domingos.

R. Como são 7 dias em uma semana, para que a média seja de 6 km, o total de quilômetros percorridos precisa ser o número que, dividido por 7, é igual a 6 km. Portanto, o número de quilômetros percorridos na semana deve ser $7 \cdot 6 = 56$ quilômetros.

3. Uma empresa no primeiro semestre de 2016.

Mês	Faturamento (R\$)
jan	4.000
fev	12.000
mar	8.500
abr	7.500
maio	10.000
jun	12.000

Determine:

a) a média mensal de faturamento.

R. Média = $\frac{4\,000 + 12\,000 + 8\,500 + 7\,500 + 10\,000 + 12\,000}{6} = \frac{54\,000}{6} = 7\,000$

A média de faturamento foi igual a R\$ 7 000,00.

b) o faturamento total do segundo semestre para que o faturamento médio mensal no ano de 2016 seja R\$10.000, 00.

R. Como temos 12 meses em um ano, para que o faturamento médio mensal seja de 10 000, o faturamento anual precisaria ser de $12 \cdot 10\,000 = 120\,000$ reais. Se no primeiro semestre o faturamento foi de R\$ 54 000,00, é preciso que o faturamento do segundo semestre seja igual a $120\,000 - 54\,000 = 66\,000$ reais.

4. Deseja-se comprar lentes para óculos. As lentes devem ter espessuras mais próximas possíveis da medida 3mm. No estoque de uma loja, há lentes de espessuras: 3,10mm; 3,021mm; 2,96mm; 2,099mm e 3,07mm. Determine a espessura média dessas medidas.

$$\text{R. Média} = \frac{3,10 + 3,021 + 2,96 + 2,099 + 3,07}{5} = \frac{14,25}{5} = 2,85 \text{ mm.}$$

5. Em 2015, um vendedor recebeu três valores de salário diferentes: R\$2.000,00, por mês, de janeiro a maio; \$2.500, 00, por mês, de junho a agosto; R\$3.100, 00, por mês, de setembro a dezembro. Qual foi o salário médio desse vendedor em 2015?

R.

Média

$$\begin{aligned} &= \frac{2000 + 2000 + 2000 + 2000 + 2000 + 2500 + 2500 + 2500 + 3100 + 3100 + 3100 + 3100}{12} \\ &= \frac{29\,900}{12} = 2491,667. \end{aligned}$$

O salário médio desse vendedor é de R\$ 2491,667.

Lição 106 – Medidas de Tendência Central

1. Em uma turma de sétimo ano, as notas obtidas pelos alunos na prova de matemática foram: 13, 34, 45, 26, 19, 27, 48, 63, 81, 76, 52, 86, 92, 98. Determine:

R. Vamos ordenar os dados em ordem crescente:

13, 19, 26, 27, 34, 45, 48, 52, 63, 76, 81, 86, 92, 98.

a) a moda.

R. Não tem moda.

b) a média.

$$\text{R. Média} = \frac{13+19+26+27+34+45+48+52+63+76+81+86+92+98}{14} = \frac{760}{14} \cong 54,29.$$

c) a mediana.

R. Como são 14 informações, a mediana será encontrada pela média entre os termos centrais, isto é, os 7º e 8º termos.

$$\text{Mediana} = \frac{48 + 52}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

2. Uma microempresa tem 10 funcionários que trabalham em 3 funções diferentes. O salário mensal deles é mostrado no quadro a seguir:

Salário mensal	Frequência
R\$ 11 500,00	2
R\$ 2 000,00	2
R\$ 1 500,00	6

a) Calcule a média aritmética dos salários.

$$R. \text{ Média} = \frac{2 \cdot 11\,500 + 2 \cdot 2\,000 + 6 \cdot 1\,500}{10} = \frac{23\,000 + 4\,000 + 9\,000}{10} = \frac{36\,000}{10} = 3\,600$$

A média é de R\$ 3600,00.

b) Obtenha a mediana dos salários dessa microempresa.

R. Como temos 10 informações, a mediana se dá pela média entre os termos da 5ª e 6ª posição. Ao ordenar em ordem crescente, os seis primeiros termos correspondem ao dado de R\$ 1500,00 (o mesmo se daria se a ordem fosse decrescente, mas nesse caso os seis últimos, do quinto ao décimo, é que seriam correspondentes ao valor de 1500). Portanto, a mediana é R\$ 1500,00:

$$\text{Mediana} = \frac{1500 + 1500}{2} = \frac{3000}{2} = 1500$$

c) Obtenha a moda dos salários dessa microempresa.

R. A moda de salários é de R\$ 1500,00, pois esse dado aparece 6 vezes numa pesquisa que tem 10 informações.

d) qual valor retrata melhor a realidade dos salários dessa microempresa: A média aritmética, a moda ou a mediana dos salários mensais?

R. A mediana ou a moda, pois a média aritmética é jogada para cima por causa de dois salários altos. Como a maioria recebe apenas R\$ 1500,00, a mediana e a moda representam melhor a realidade salarial desta empresa.

3. Observe a tabela a seguir, que mostra o número de anos de escolaridade, a partir do 10 ano do Ensino Fundamental, de um grupo de 40 funcionários de uma empresa:

Quantidade de funcionários por anos de escolaridade	
Anos de escolaridade	Frequência
9	5
13	7
15	12
16	16

a) Qual é a moda do número de anos de escolaridade nessa empresa?

R. A moda é de 16 anos, pois é o dado que aparece com mais frequência.

b) E a média aritmética?

$$R. \text{ Média} = \frac{5 \cdot 9 + 7 \cdot 13 + 12 \cdot 15 + 16 \cdot 16}{40} = \frac{45 + 91 + 180 + 256}{40} = \frac{572}{40} = 14,3.$$

c) E a mediana?

R. Como são 40 informações, a mediana se dará pela média entre as 20ª e 21ª posições. O 9 ocupa até a posição 5; o 13 ocupa as posições de 6 a 18; o 15 ocupa as posições de 19 a 30. Portanto, a mediana será 15, pois os termos 20ª e 21ª é 15:

$$\frac{15 + 15}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

4. Observe as notas, cujo valor máximo era 10, obtidas em uma avaliação realizada em cinco municípios sobre a qualidade de vida da população:

2,0 3,0 3,0 9,0 9,0

a) Calcule a média, a moda e a mediana correspondentes aos dados apresentados.

$$R. \text{ Média} = \frac{2 + 3 + 3 + 9 + 9}{5} = \frac{26}{5} = 5,2$$

Mediana = 3

Moda = 3 e 9 (bimodal).

b) Suponha que tenha sido divulgado na imprensa que o município cuja nota foi 3,0 foi bem avaliado, pois ficou exatamente “no meio” entre a mais alta e a mais baixa das notas atribuídas aos municípios pesquisados. Essa notícia foi bem-intencionada?

R. Não, pois esse dado está abaixo da média. Ele só pode ser considerado como “meio” se considerada a mediana, mas está muito distante das boas cidades (9), e distante da média (5,2).

5. Considere o conjunto de valores abaixo.

$$3 - 5 - 5 - 5 - 7 - 8$$

a) Calcule a média aritmética, a moda e a mediana desse conjunto de valores.

$$\text{R. Média} = \frac{3 + 5 + 5 + 5 + 7 + 8}{6} = \frac{33}{6} = 5,5.$$

Moda = 5.

Mediana: como temos 6 informações, a mediana é encontrada pela média entre os termos das posições 3ª e 4ª. $\text{Mediana} = \frac{5 + 5}{2} = \frac{10}{2} = 5$

b) Acrescente o número 16 ao conjunto de valores e calcule novamente a média aritmética, a moda e a mediana. Qual das medidas sofreu maior alteração?

$$\text{R. Média} = \frac{3 + 5 + 5 + 5 + 7 + 8 + 16}{7} = \frac{49}{7} = 7.$$

Moda = 5.

Mediana: como temos 7 informações, a mediana é encontrada pelo termo da posição 4. Portanto, a mediana é 4.

O dado que sofreu a maior alteração foi a média.

Lição 107 – Medidas de Tendência Central

1. Rubens foi fazer na calculadora a média de suas quatro notas de matemática. O resultado obtido foi 8, mas ele percebeu que havia digitado uma nota errada, trocando 5 por 7. Qual o valor correto para a média?

R. Para calcular a média devemos somar todos os valores e dividir pelo número de parcelas somadas. Supondo que a soma verdadeira das notas seja x , o aluno acabou utilizando $x + 2$, pois aumentou dois pontos na soma total ao trocar 5 por 7. Assim, ao dividir $x + 2$ por 4, que é o número de notas, ele obteve 8. Portanto, temos:

$$\frac{x + 2}{4} = 8$$

$$x + 2 = 8 \cdot 4$$

$$x = 32 - 2$$

$$x = 30$$

Portanto, a soma real das notas é igual a 30. Se a soma real das 4 notas é igual a 30, a média verdadeira é dada por $30 : 4 = 7,5$.

2. Em uma competição de tiro ao alvo, existem 10 pontuações diferentes, de 1 a 10. São dados 20 tiros por participante e a pontuação de cada participante é aquela que foi mais atingida por ele. Qual foi a medida estatística para definir a pontuação de cada participante?

- a) media.
- b) mediana.
- c) **moda.**

3. Em um concurso, os candidatos aprovados para a segunda fase são aqueles que tirarem uma nota superior a nota central, depois de colocar todas as notas em ordem crescente. Qual a medida estatística utilizada para classificar os candidatos deste concurso para a segunda fase?

- a) media.
- b) **mediana.**
- c) moda.

4. Qual medida de tendência central mais adequada no seguinte caso: Estão disponíveis dados mensais sobre a incidência de envenenamento por picada de cobra. Deseja-se planejar a compra mensal de antídoto.

R. A média seria a medida de tendência central mais adequada. Explico: se a mediana for escolhida, só conseguimos garantir vacinas para metade do ano, ficando sem antídotos na outra metade. A média é a melhor opção porque temos variação de casos a cada mês; então, se sobram vacinas em um mês, pode ser que elas sejam usadas no próximo mês, se tiver um aumento de casos. Assim, a média nos dá uma noção de quantas picadas, mais ou menos, acontece por mês.

5. Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar os seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas irá comprar, analisa o lucro (em milhões de reais) de cada uma delas, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresente o maior lucro médio anual. O quadro apresenta o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo do tempo (em anos) de existência de cada empresa. Qual das empresas ele deve escolher?

Empresa	Lucro	Tempo
F	24	3,0
G	24	2,0
H	25	2,5
M	15	1,5
P	9	1,5

R. Vamos calcular o lucro anual de cada empresa.

Empresa F = $24 : 3 = 8$ milhões por ano.

Empresa G = $24 : 2 = 12$ milhões por ano.

Empresa H = $25 : 2,5 = 10$ milhões por ano.

Empresa M = $15 : 1,5 = 10$ milhões por ano.

Empresa P = $9 : 1,5 = 6$ milhões por ano.

Assim, a empresa que dá mais lucro anual é a empresa G e, portanto, seria o melhor investimento.

Lição 108 – Medidas de Tendência Central

1. Um professor de Matemática registrou as 35 notas dos seus alunos no quadro abaixo. Organize, no caderno, uma tabela com esses dados, especificando as notas e as frequências.

8	7	6	7	3	5	4	8	3
6	6	10	7	7	5	6	9	4
4	5	4	9	8	9	10	9	7
9	3	8	10	6	8	7	5	

R.

Nota	Frequência
3	3
4	4
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	3

2. Para controlar a presença dos alunos em um curso de inglês, o diretor fez um levantamento diário da quantidade de faltas em um mês

	Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira
Semana 1	3 faltas	5 faltas	2 faltas	4 faltas	8 faltas
Semana 2	6 faltas	2 faltas	0 falta	16 faltas	Feriado
Semana 3	14 faltas	6 faltas	2 faltas	5 faltas	11 faltas
Semana 4	7 faltas	4 faltas	4 faltas	6 faltas	10 faltas
Semana 5	8 faltas	5 faltas	5 faltas	-	--

a) Quais são a média e a moda das faltas diárias?

R. A moda é de 5 faltas.

Média

$$= \frac{3 + 6 + 14 + 7 + 8 + 5 + 2 + 6 + 4 + 5 + 2 + 2 + 4 + 5 + 4 + 16 + 5 + 6 + 8 + 11 + 10}{22}$$
$$Média = \frac{133}{22} \cong 6,05$$

b) Elabore um quadro que associe os dias da semana à quantidade de alunos faltantes. Depois, calcule a média do número de faltas por dia da semana.

R.

Dia da semana	Faltas
Segunda-feira	38
Terça-feira	22
Quarta-feira	13
Quinta-feira	31
Sexta-feira	29

Média de faltas na segunda-feira: $\frac{38}{5} = 7,6$

Média de faltas na terça-feira: $\frac{22}{5} = 4,4$

Média de faltas na quarta-feira: $\frac{13}{5} = 2,6$

Média de faltas na quinta-feira: $\frac{31}{4} = 7,75$

Média de faltas na sexta-feira: $\frac{29}{3} \cong 9,67$

3. Um dado foi lançado 15 vezes e os resultados obtidos estão representados na tabela abaixo:

Determine:

a) a moda.

R. Número 2.

b) a mediana.

R. Como o dado foi lançado 15 vezes, a mediana se encontra na posição 8. O número 1 ocupa as posições de 1 a 3; o número 2, as posições de 4 a 8. Portanto, a mediana também é 2.

Número	Frequência
1	3
2	4
3	0
4	2
5	3
6	3

4. Em uma escola com 200 alunos, as idades são distribuídas de acordo com a tabela ao lado:

Idade	Quantidade
10	20
11	35
12	30
13	45
14	32
15	38

Determine:

a) a moda.

R. 13 anos.

b) a mediana.

R. Como temos 200 alunos, a mediana é dada pela média aritmética entre os termos das posições 100 e 101.

10 anos: posições de 1 a 20.

11 anos: posições de 21 a 55.

12 anos: posições de 56 a 85

13 anos: posições de 86 a 130.

Portanto, as posições 100 e 101 são ocupadas pelo número 13. Sendo assim, a mediana também será 13 anos.

c) a média.

$$R.Média = \frac{10 \cdot 20 + 11 \cdot 35 + 12 \cdot 30 + 13 \cdot 45 + 14 \cdot 32 + 15 \cdot 38}{200}$$

$$Média = \frac{200 + 385 + 360 + 585 + 448 + 570}{200}$$

$$Média = \frac{2548}{200} = 12,74$$

5. Em um concurso, são aprovados para a segunda fase todos que acertam uma quantidade maior de questões que o número mediano de questões acertadas por todos os candidatos. Observe o resultado da primeira fase na tabela, que mostra a quantidade de candidatos por número de acertos.

Qual será a quantidade mínima de acertos para passar para a segunda fase?

R. Para saber o número de participantes precisamos somar os dados da segunda coluna da tabela. Ao somar todos esses números, temos como resultado 475 participantes. A mediana será o número que se encontra na posição:

$475 : 2 = 237,5$, ou seja, o número da posição 238.

0: ocupa as posições de 1 a 20.

1: ocupa as posições de 21 a 55.

2: ocupa as posições de 56 a 85.

3: ocupa as posições de 86 a 130.

4: ocupa as posições de 131 a 165.

5: ocupa as posições de 166 a 205.

6: ocupa as posições de 206 a 265.

Portanto, o termo que ocupará a posição de número 238 é o número 6. Assim, só passarão para a segunda fase aqueles que tirarem uma nota superior a 7 (pois o enunciado nos diz que só passam para a segunda fase aqueles que atingem uma nota superior a mediana).

Número de acertos	Número de candidatos
0	20
1	35
2	30
3	45
4	35
5	40
6	60
7	65
8	60
9	50
10	35

6. Foi feito um levantamento de dados sobre a idade (em anos completos) dos funcionários de uma fábrica. Observe:

De 18 a 20 anos
284 funcionários

De 21 a 23 anos
316 funcionários

De 24 a 26 anos
420 funcionários

De 27 a 29 anos
304 funcionários

De 30 a 32 anos
160 funcionários

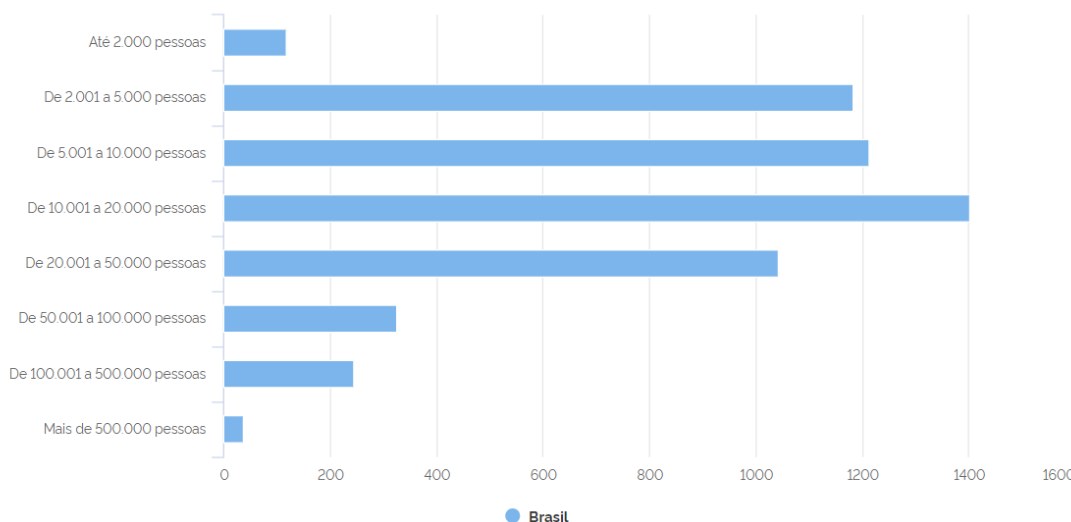
Organize, no caderno, uma tabela com esses dados, especificando as classes e as frequências.

R.

Idade	Quantidade de funcionários
De 18 a 20 anos	284 funcionários
De 21 a 23 anos	316 funcionários
De 24 a 26 anos	420 funcionários
De 27 a 29 anos	304 funcionários
De 30 a 32 anos	160 funcionários

Lição 109 – Gráficos

1. O último censo do Brasil, realizado em 2010, buscou classificar o número de municípios por tamanho da população.



De acordo com os dados fornecidos pelo gráfico, responda:

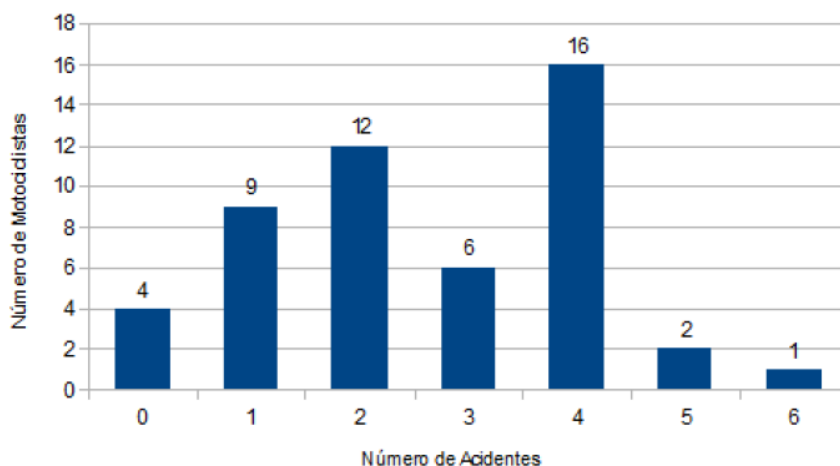
a) Qual é a moda da pesquisa?

R. A moda são as cidades que possuem de 10 001 a 20 000 pessoas.

b) Pesquise a população da sua cidade. Em qual das barras sua cidade se classifica?

R. Resposta pessoal.

2. O gráfico a seguir mostra o resultado de uma pesquisa sobre o número de acidentes ocorridos com 50 motociclistas de uma determinada empresa, no período de 1 ano.



Determine:

a) a média de acidentes por motocicleta.

R.

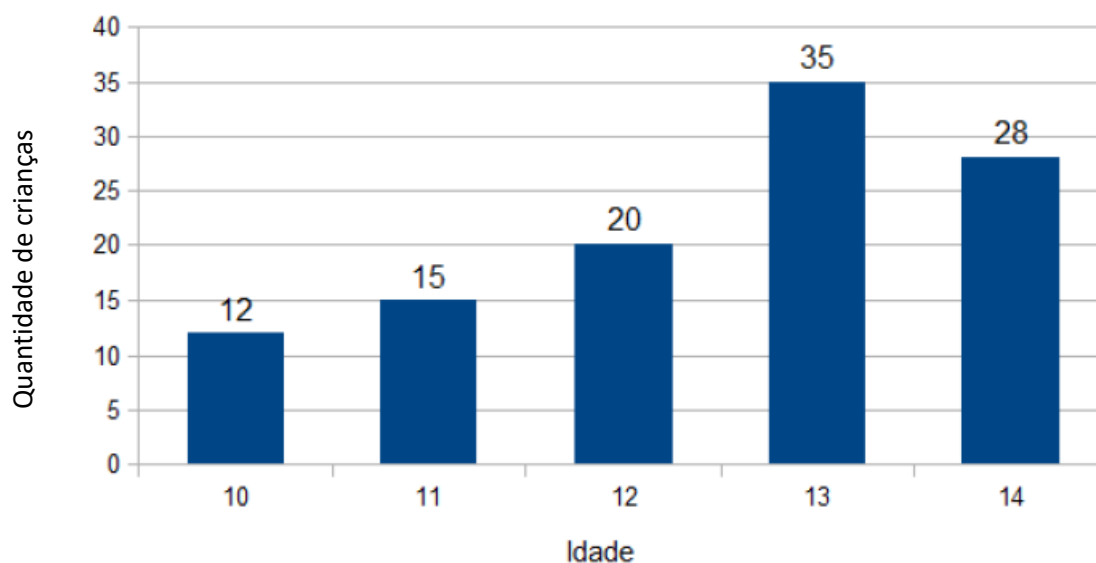
$$Média = \frac{0.4+1.9+2.12+3.6+4.16+5.2+6.1}{50} = \frac{9+24+18+64+10+6}{50} = \frac{131}{50} = 2,62 \text{ acidentes.}$$

b) a média mensal de acidentes.

R. Como um ano possui 12 meses, precisamos dividir o valor total de acidentes, 131, por 12.

$$\frac{131}{12} \cong 10,92 \text{ acidentes por mês.}$$

3. Um grupo de famílias homeschoolers fez um levantamento das idades das crianças de seu grupo. O gráfico abaixo mostra os dados que foram levantados.



Determine:

a) a idade mediana

R. Como temos 110 crianças, a mediana se dá pela média aritmética entre os termos das posições 55 e 56.

10: ocupa as posições de 1 a 12.

11: ocupa as posições de 13 a 27.

12: ocupa as posições de 28 a 47.

13: ocupa as posições de 48 a 82.

As posições 55 e 56 são ocupadas pelo número 13. Portanto, a mediana será 13.

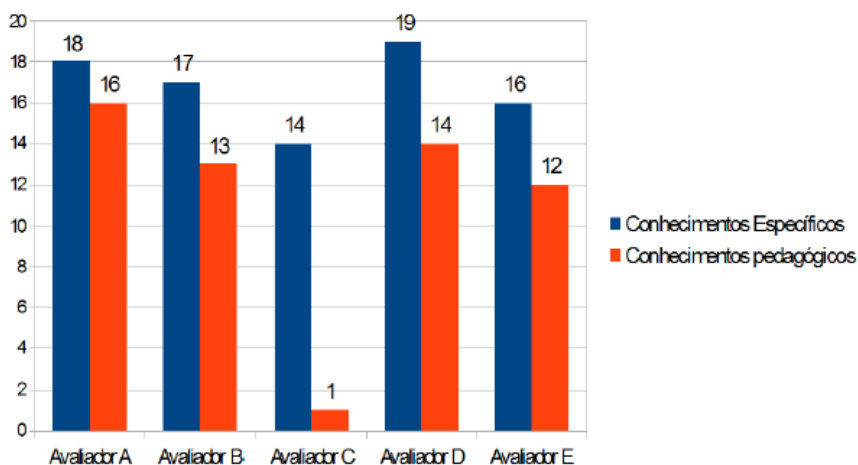
b) a idade média.

$$R. \text{ Média} = \frac{10 \cdot 12 + 11 \cdot 15 + 12 \cdot 20 + 13 \cdot 35 + 14 \cdot 28}{110} = \frac{120 + 165 + 240 + 455 + 392}{110} = \frac{1372}{110} \cong 12,5.$$

c) a moda.

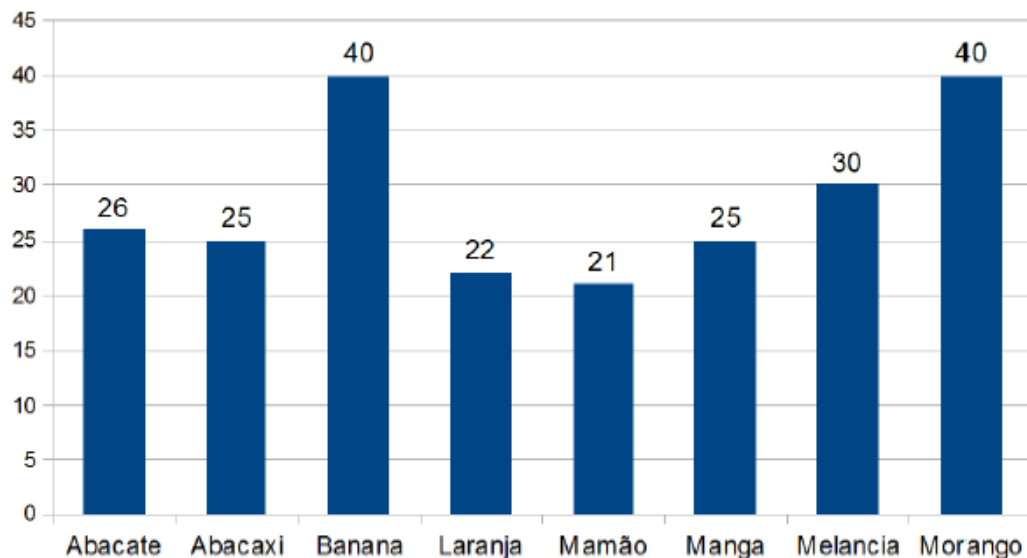
R. 13 anos.

4. As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por 5 membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribui duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos de área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos. A média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora. Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor. Determine a nova média utilizando este critério.



$$\text{Média} = \frac{18 + 16 + 17 + 13 + 14 + 14 + 16 + 12}{8} = \frac{120}{8} = 15$$

5. O Brasil é o quarto maior produtor mundial de alimentos, produzindo mais do que o necessário para alimentar sua população. Entretanto, grande parte da produção é desperdiçada. O gráfico mostra o percentual do desperdício de frutas nas feiras do estado de São Paulo. Considerando os dados do gráfico, determine a média aritmética, a moda e a mediana desses dados.



R. Essa amostral é bimodal, com números de 25 e 40 como moda.

$$\text{Média} = \frac{26 + 25 + 40 + 22 + 21 + 25 + 30 + 40}{8} = \frac{229}{8} = 28,625.$$

Como temos 8 frutas diferentes, a mediana se dá pela média aritmética entre os termos que ocupas as posições 4 e 5. Organizando esses dados, temos:

21 22 25 25 26 30 40 40

$$\text{Média} = \frac{25 + 26}{2} = \frac{51}{2} = 25,5$$

Lição 110 – Gráfico de Setor

1. Numa sessão de cinema os espectadores responderam a uma pesquisa sobre as preferências de gêneros, escolhendo apenas um como preferido. Observe a tabela de frequências:

Quantidade de votos por gênero	
Gênero	Quantidade
Comédia	12
Aventura	20

Ficção científica	4
Desenho animado	12
Suspense	14
Drama	8
Musical	4
Documentário	6

a) Qual é a porcentagem de cada gênero preferido?

R. No total, temos 80 participantes.

Assim, para descobrir a porcentagem de cada gênero de filme, basta dividir o número de pessoas que escolheu o gênero pelo número total de pessoas. Observe:

Comédia: $\frac{12}{80} = 0,15 = 15\%$

Aventura: $\frac{20}{80} = 0,25 = 25\%$

Ficção científica: $\frac{4}{80} = 0,05 = 5\%$

Desenho: $\frac{12}{80} = 0,15 = 15\%$

Suspense: $\frac{14}{80} = 0,175 = 17,5\%$

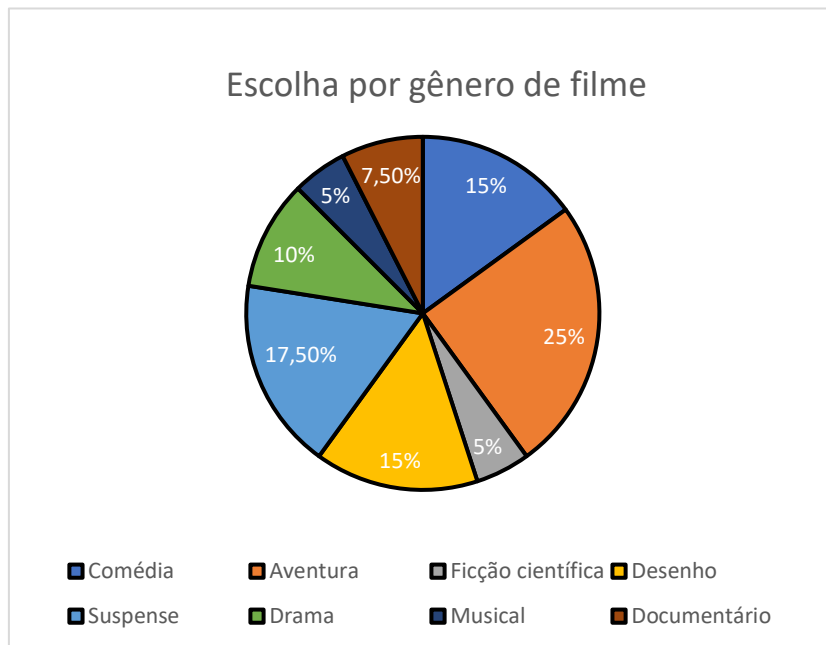
Drama: $\frac{8}{80} = 0,1 = 10\%$

Musical: $\frac{4}{80} = 0,05 = 5\%$

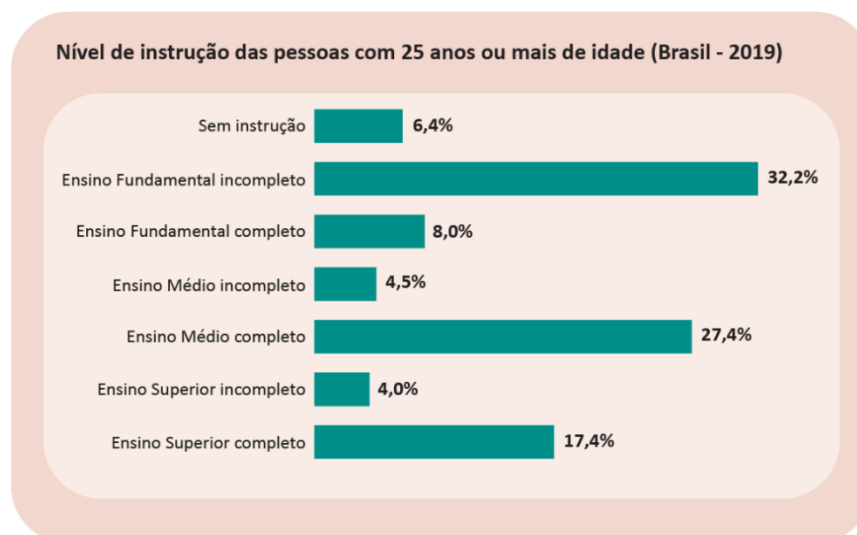
Documentário: $\frac{6}{80} = 0,075 = 7,5\%$

b) Construa um gráfico de setores que represente os gêneros preferidos e suas respectivas porcentagens.

R.



2. Foi feita uma pesquisa acerca do nível de instrução do povo brasileiro, e os dados foram divulgados em 2019.

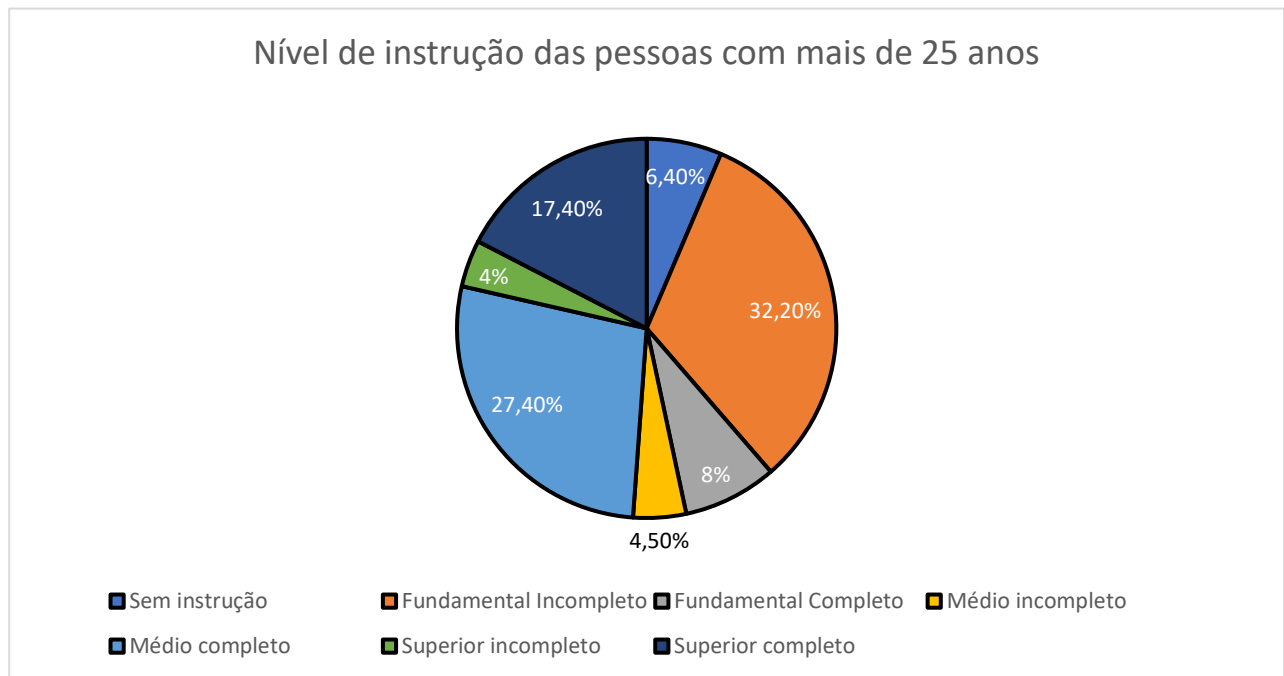


Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua 2012-2019.

Segundo os dados fornecidos pela pesquisa, faça o que se pede:

a) Construa um gráfico de setores com essa informações.

R.



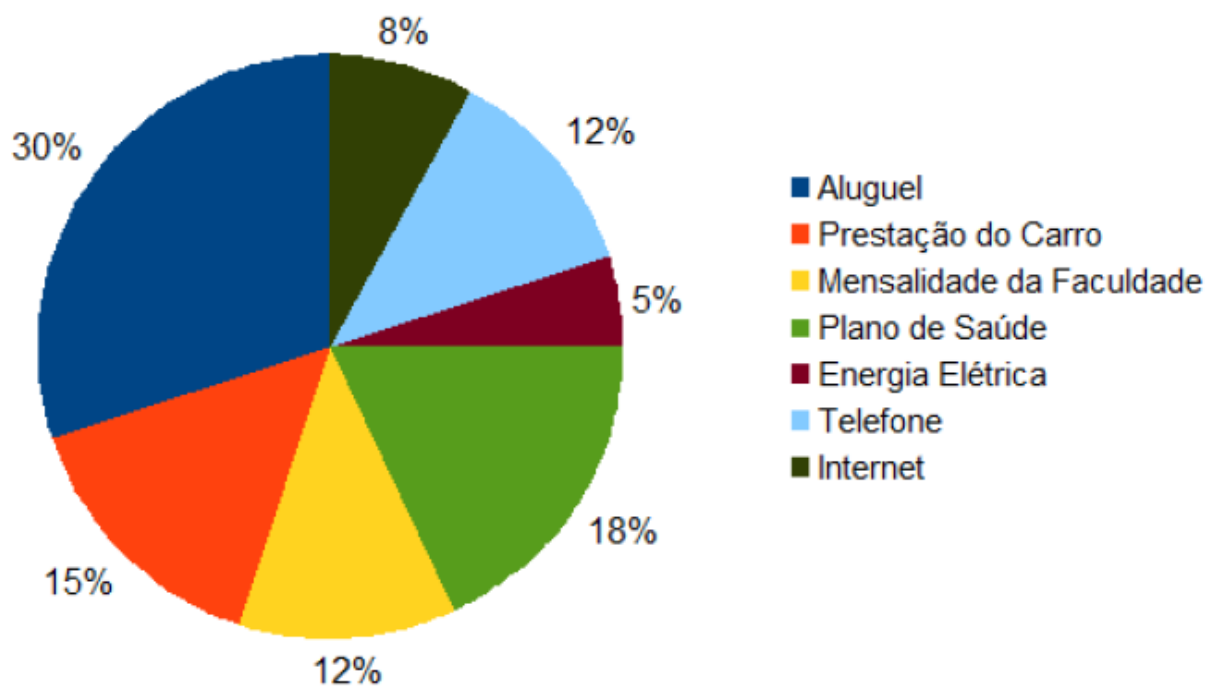
b) Qual é a moda dessa pesquisa?

R. Fundamental incompleto.

c) A variável dessa pesquisa é qualitativa ou quantitativa?

R. Qualitativa ordinal.

3. Jorge tem um gasto fixo mensal de R\$ 2.500,00. O gráfico detalha este gasto.



Determine:

a) O valor gasto com plano de saúde.

$$R. 18\% \text{ de } 2500 = \frac{18}{100} \cdot 2500 = 18 \cdot 25 = 450.$$

R\$ 450,00.

b) o percentual do telefone, caso o aluguel sofra um reajuste (aumento) de R\$ 200,00.

R. O telefone corresponde atualmente a 12% de 2500, o que é o mesmo que:

$$12\% \text{ de } 2500 = \frac{12}{100} \cdot 2500 = 12 \cdot 25 = 300.$$

Portanto, ele gasta R\$ 300,00 com telefone. Se o custo aumentou em R\$ 200,00, precisamos ver a qual porcentagem os 300 reais correspondem do novo custo, que é $2500 + 200 = 2700$. Temos:

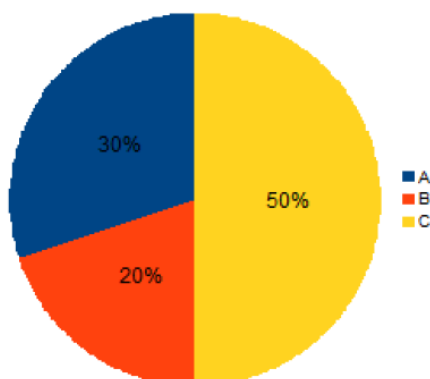
$$2700 \text{ ----- } 100\%$$

$$300 \text{ ----- } x \%$$

$$x = \frac{300 \cdot 100}{2700}$$

$$x = \frac{30\,000}{2700} \cong 11,11\%$$

4. Em uma eleição estão concorrendo os candidatos A, B e C. Realizada uma pesquisa de intenção de voto com 1000 eleitores, obteve-se o resultado ilustrado no gráfico de setores.



Qual é o valor do ângulo utilizado para construir o setor circular referente ao candidato B?

R. Como o candidato B teve 20% de intenção do votos, o ângulo deve corresponder a 20% do círculo total. Portanto, temos:

$$20\% \text{ de } 360 = \frac{20}{100} \cdot 360 = 2 \cdot 36 = 72^\circ$$

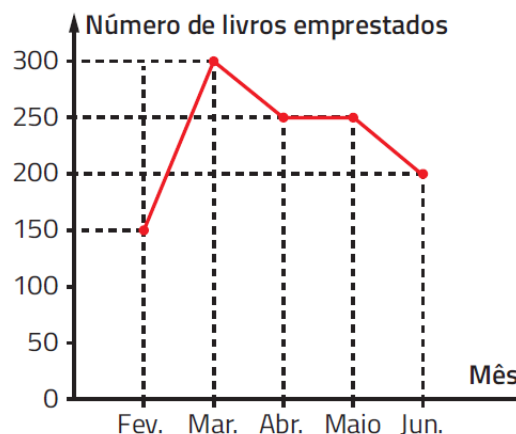
Lição 111 – Gráfico de linhas

1. O gráfico ao lado mostra a relação de livros emprestados durante o período que vai de fevereiro a junho. Responda:

a) Sabendo que durante o mês de fevereiro houve uma ampla campanha de divulgação da leitura, é possível notar um resultado positivo ou negativo da campanha? Por quê?

R. Positivo, uma vez que temos um aumento de 100% no empréstimo de livros.

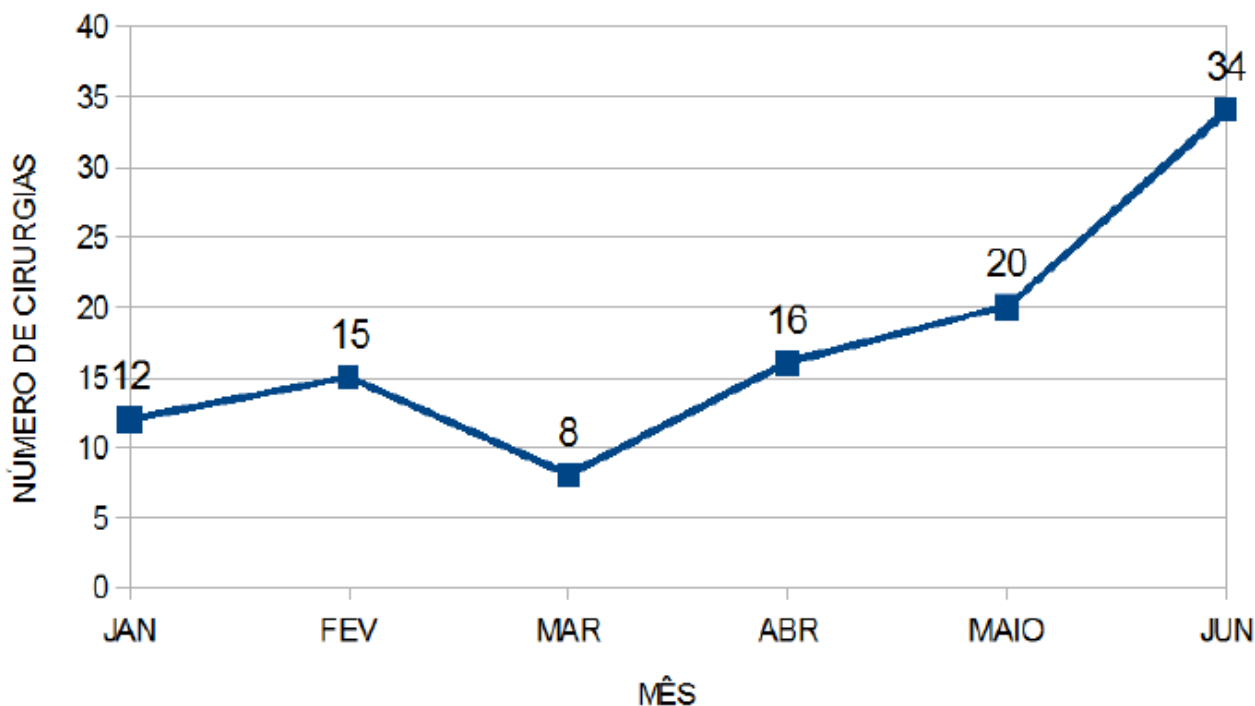
Empréstimos de livros da biblioteca



b) Qual é a média de empréstimos durante esse período?

R. Média = $\frac{150 + 300 + 250 + 250 + 200}{5} = \frac{1150}{5} = 230$.

2. O gráfico a seguir mostra o número de cirurgias realizadas por um médico no primeiro semestre de 2022.



Determine:

a) a média mensal de cirurgias.

$$R. Média = \frac{12+15+8+16+20+34}{6} = \frac{105}{6} = 17,5.$$

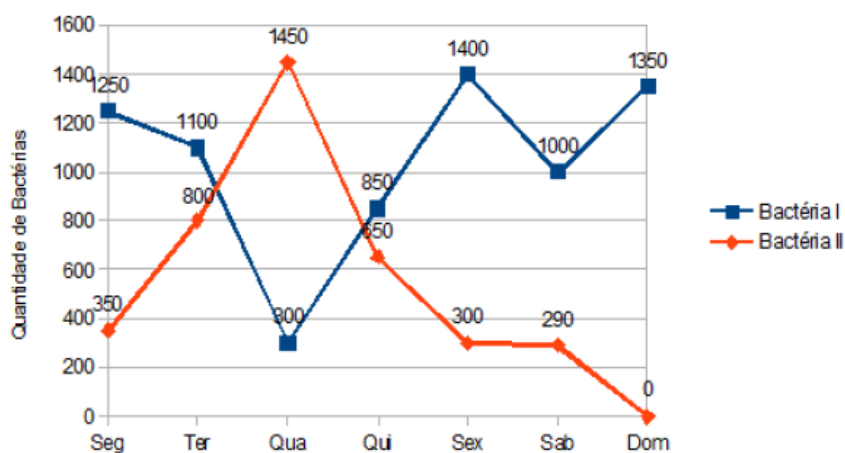
b) o aumento percentual do número de cirurgias em maio em relação ao mês anterior.

R. Maio teve 4 cirurgias a mais do que em abril. Se em abril tiveram 16 cirurgias, podemos afirmar que 4 é o mesmo que 25% das cirurgias feitas em abril. Assim, o aumento foi de 25%.

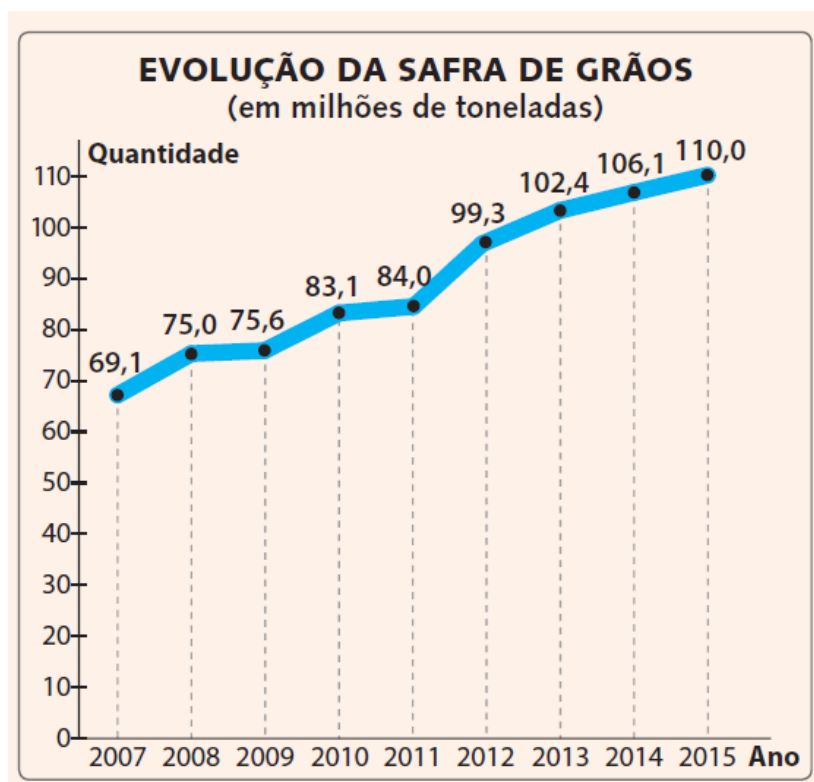
3. Um cientista trabalha com as espécies I e II de bactérias em um ambiente de cultura. Inicialmente, existem 1250 bactérias da espécie I e 350 bactérias da espécie II. O gráfico representa as quantidades de bactérias de cada espécie, em função do dia, durante uma semana.

Analise e responda:
qual dia dessa semana a quantidade total de bactérias foi máxima?

R. Terça-feira.



4. O gráfico abaixo mostra a safra de grãos, em milhões de toneladas, no período de 2007 a 2015, em determinada região.



Responda às questões.

a) Que tipo de gráfico é esse?

R. Gráfico de segmentos ou de linhas.

b) Quantos milhões de toneladas de grãos foram produzidos em 2011?

R. 84 milhões de toneladas.

c) A safra de 2015 foi quanto por cento superior à safra de 2008

R.

75 ----- 100%

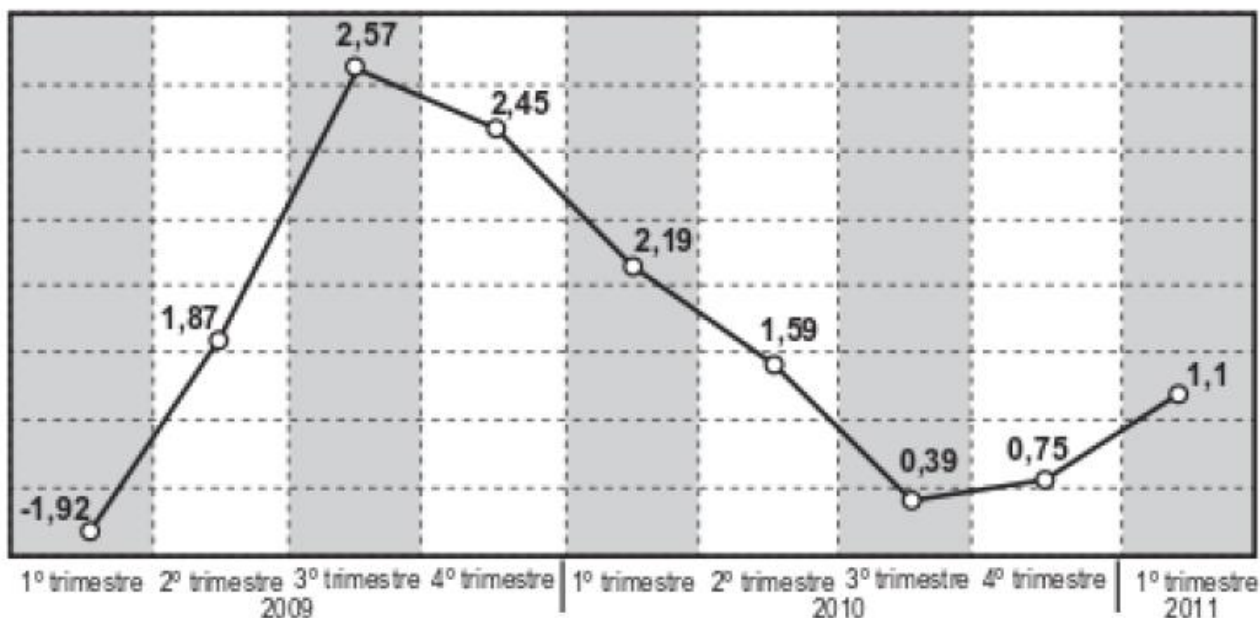
110 ----- x %

$$x = \frac{110 \cdot 100}{75} = \frac{11000}{75} \cong 146,67\%$$

Portanto, a safra de 2015 é $146,67 - 100\% = 46,67\%$ maior do que a safra de 2008.

Lição 112 – Exercícios.

1. O gráfico mostra a variação percentual do valor do Produto Interno Bruto (PIB) do Brasil, por trimestre, em relação ao trimestre anterior.



De acordo com o gráfico, no período considerado, o trimestre em que o Brasil teve o maior valor do PIB, foi o:

- a) segundo trimestre de 2009.
- b) quarto trimestre de 2009.
- c) terceiro trimestre de 2010
- d) quarto trimestre de 2010.
- e) primeiro trimestre de 2011.

2. Veja a seguir o número de visitantes, em um parque, nos 31 dias do mês de julho.

- a) Calcule a média aritmética, a mediana e a moda dessa distribuição.

R. Vamos ordenar os dados em ordem crescente:

54 – 61 – 62 – 63 – 65 – 68 – 76 – 76 – 78 – 80 – 82 – 85 – 88 – 88 – 88 – 94 – 95 – 95 – 99 – 100 – 107 – 108 – 110 – 116 – 117 – 120 – 142 – 156 – 160 – 160 – 176.

176	160	54	62
61	88	95	160
68	76	88	117
78	63	108	99
85	110	88	107
120	156	142	100
80	116	65	94
95	82	76	

A moda dessa amostra é 88.

Como a amostra possui 31 informações, a mediana é o número que estiver na posição 16. Portanto, a mediana é 94.

Para calcular a média, precisamos somar todos esses valores e dividir por 31:

$$\text{Média} = \frac{3069}{31} = 99.$$

b) Na sua opinião, qual dessas medidas é mais significativa para o parque avaliar o número de visitantes no mês de julho? Justifique.

R. A média. A média é um número que pode substituir todos os dados, e apresenta o mesmo efeito na hora da soma. Assim, se somarmos 99 trinta e uma vezes, teremos o mesmo número de visitantes que ao somar o número real de visitantes por dia. Assim, os organizadores conseguem saber que, em média, 99 pessoas visitarão o parque naquele dia, embora tenham dias que receberão apenas 54 visitas, e outros que receberão quase o dobro, 176 visitantes. A moda não é um bom parâmetro pois só apareceu em 3 dias, dos 31 dias. Portanto, não tem real significado nessa amostra.

c) Em quantos dias o público presente no parque foi acima da média?

R. Em 12 dias.

3. Dois dados de cores diferentes são lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de obter nas faces voltadas para cima a soma dos pontos:

a) igual a 7?

R.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

R. Das 36 possíveis combinações, 6 apresentam a soma 7. Portanto, a probabilidade desse acontecer é de $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

b) maior que 10?

R. Temos apenas 3 resultados maiores que 10. Portanto, a probabilidade desse evento acontecer é de $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

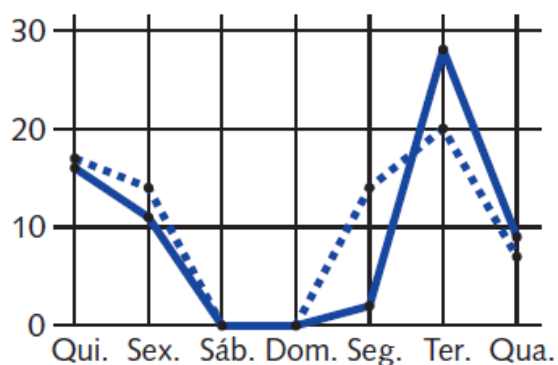
c) maior que 15?

R. Não existe possibilidade desse evento acontecer.

d) menor que 12?

R. Do 36 resultados possíveis, 35 são menores que 12. Portanto a probabilidade é de $\frac{35}{36} = 0,97 = 97\%$

4. A figura a seguir apresenta dois gráficos com informações sobre as reclamações diárias recebidas e resolvidas pelo Setor de Atendimento ao Cliente (SAC) de uma empresa, em uma dada semana. O gráfico de linha tracejada informa o número de reclamações recebidas no dia, e o de linha contínua é o número de reclamações resolvidas no dia. As reclamações podem ser resolvidas no mesmo dia ou demorarem mais de um dia para serem resolvidas.



O gerente de atendimento deseja identificar os dias da semana em que o nível de eficiência pode ser considerado muito bom, ou seja, os dias em que o número de reclamações resolvidas excede o número de reclamações recebidas.

O gerente de atendimento pôde concluir, baseado no conceito de eficiência utilizado na empresa e nas informações do gráfico, que o nível de eficiência foi muito bom na:

a) segunda e na terça-feira.

- b) terça e na quarta-feira.
- c) terça e na quinta-feira.
- d) quinta-feira, no sábado e no domingo.
- e) segunda, na quinta e na sexta-feira.

5. Em uma pesquisa eleitoral para verificar a posição de três candidatos a prefeito de uma cidade, 1 500 pessoas foram consultadas. Se o resultado da pesquisa deve ser mostrado em três setores circulares de um mesmo disco e certo candidato recebeu 350 intenções de voto, qual é o ângulo central correspondente a esse candidato?

R.

1 500 ---- 100%

350 ---- x %

$$x = \frac{350 \cdot 100}{1500} \cong 23,3\%$$

Uma vez que sabemos que a intenção de votos desse candidato corresponde a 23,3% dos eleitores, basta saber a quantos graus da circunferência essa porcentagem corresponde:

$$23,3\% \text{ de } 360 = \frac{23,3}{100} \cdot 360 = 83,88\%$$

6. Uma loja de sapatos femininos fez uma pesquisa para saber a quantidade de sapatos de cada tamanho que era vendida. A pessoa que organizou os dados dessa pesquisa determinou a moda e a mediana dos dados, encontrando a moda igual a 36 e a mediana igual a 37. O que esses dados significam para a loja de sapatos? Explique.

R. O fato da moda ser igual a 36 significa que a maioria dos clientes dessa loja calça 36, e, ao levar esse dado em consideração, os pares de sapatos número 36 devem ser comprados em maior quantidade para uma possível revenda. A mediana ser igual a 37 indica que 50% dos sapatos vendidos foram menores ou iguais a 37 e os outros 50% foram maiores ou iguais a 37.

7. Nos 20 primeiros jogos de um campeonato brasileiro, o Flamengo marcou as seguintes quantidades de gols:

0, 1, 0, 4, 0, 0, 0, 1, 3, 2, 5, 3, 0, 3, 4, 5, 4, 0, 3, 0

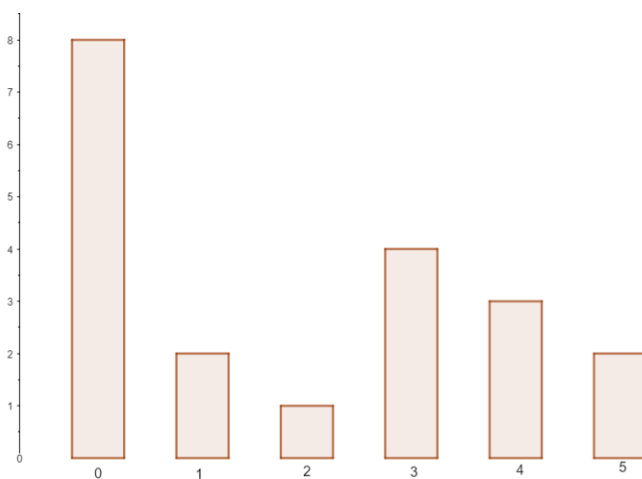
a) Agrupe esses dados numa tabela de frequência.

R.

Número de gols	Frequência
0	8
1	2
2	1
3	4
4	3
5	2

b) Faça o gráfico de barras.

R.



c) Faça o gráfico de setores.

R. Como o total de jogos é igual a 20, precisamos ver o quanto corresponde cada um dos resultados:

0 gol: $\frac{8}{20} = 0,4 = 40\%$.

1 gol: $\frac{2}{20} = 0,1 = 10\%$.

2 gols: $\frac{1}{20} = 0,05 = 5\%$.

3 gols: $\frac{4}{20} = 0,2 = 20\%$.

4 gols: $\frac{3}{20} = 0,15 = 15\%$.

5 gols: $\frac{2}{20} = 0,1 = 10\%$.

Uma vez que sabemos as porcentagens, precisamos agora descobrir os ângulos:

0 gol: $40\% \text{ de } 360 = 144^\circ$.

1 gol: $10\% \text{ de } 360 = 36^\circ$.

2 gols: $5\% \text{ de } 360 = 18^\circ$.

3 gols: $20\% \text{ de } 360 = 72^\circ$.

4 gols: $15\% \text{ de } 360 = 54^\circ$.

5 gols: $10\% \text{ de } 360 = 36^\circ$.



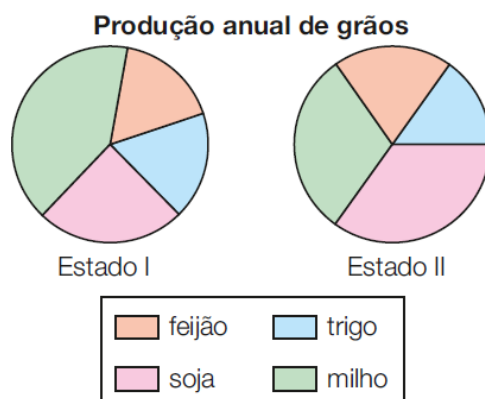
8. Em um certo ano, dois estados produziram os mesmos tipos de grãos. Os gráficos de setores a seguir ilustram a relação entre a produção de cada tipo de grão e a produção total desses estados.

a) Determine que porcentual da produção do estado II representa, nesse ano, as produções de soja e de trigo, juntas.

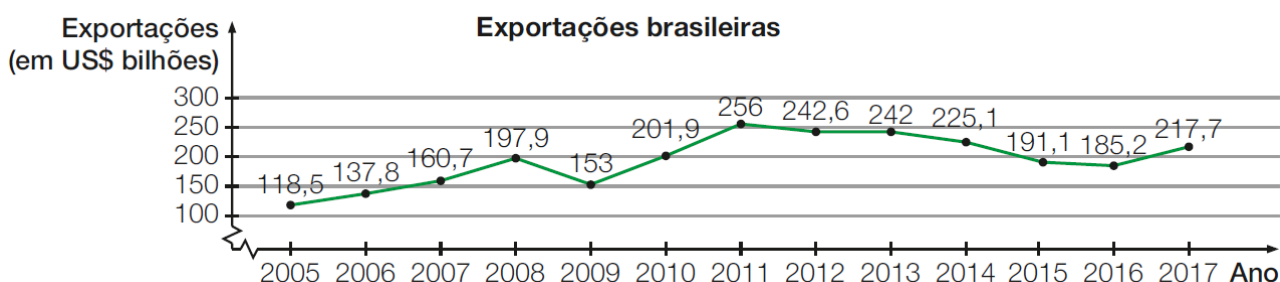
R. Somente observando o gráfico é possível notar que soja e feijão correspondem à metade do círculo. Portanto, representam 50% de produção do estado II.

b) Pode-se dizer que, nesse ano, o estado I produziu uma quantidade total de milho maior que a do estado II? Por quê?

R. Não, porque porcentagem é sempre um valor relativo. Então, embora a porcentagem de milho no estado I seja maior do que a porcentagem de milho do estado II, não sabemos a que essa porcentagem se refere. Assim, o primeiro estado pode ter produzido milhares de milho, e o estado II ter produzido milhões. Por exemplo: se digo que um estado teve 50% de produção de milho, isso não significa que esses 50% representam um número maior do que 20% de produção de outro estado.



9. Analise o gráfico abaixo e responda às perguntas:



a) Entre 2005 e 2017, em quais períodos houve crescimento nas exportações?

R. De 2005 a 2008, de 2009 a 2011.

b) Pesquise o valor do dólar americano (comercial) na data de hoje. Quanto somaram, em reais, as exportações de 2017 ao preço de hoje?

R. Resposta pessoal.

Gabarito de Matemática

9º ano, Volume 8

Lição 113 – Resumo

1. Faça um resumo colocando os principais pontos estudados até o momento de geometria.

R: Resposta pessoal.

Lição 114 – Relações métricas no triângulo retângulo - Parte I

1. Como os triângulos podem ser classificados:

a) Em relação aos seus ângulos?

R: Os triângulos, quanto aos seus ângulos, podem ser classificados como: Acutângulo: se os três ângulos forem agudos, isto é, forem menores que 90° ; Retângulo: se possui um ângulo reto; Obtusângulo: se possui um ângulo obtuso, isto é, maior que 90° e menor que 180° .

b) Em relação aos seus lados?

R: Os triângulos, quanto aos seus lados, podem ser classificados como:

Equilátero: se os três lados forem congruentes dois a dois;

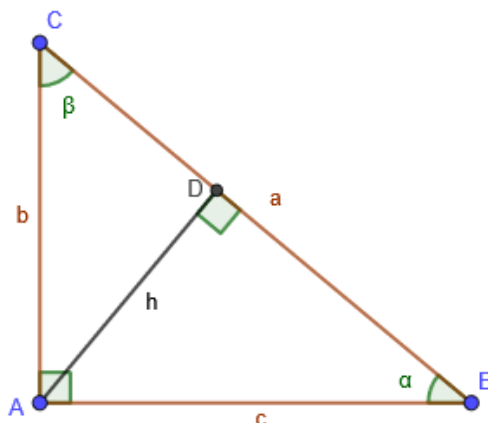
Isósceles: se possui dois de seus lados congruentes;

Escaleno: se nenhum dos lados são congruentes entre si.

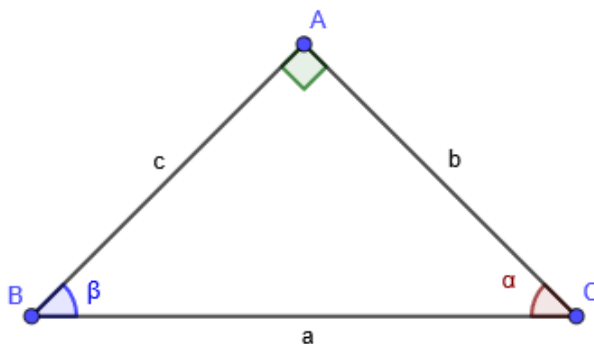
2. Em um triângulo retângulo os lados recebem nomes específicos. Dê esses nomes. Por quê?

R: Os lados do triângulo retângulo têm o nome de Hipotenusa e cateto. A hipotenusa recebe este nome, pois a palavra deriva do grego *hypotenusa*, e significa “o que se estende debaixo (do ângulo reto)”, já que este é sempre o lado oposto a tal ângulo. O nome se forma de *hypo*, “debaixo”, mais *teinein*, “esticar, alongar”. Já o cateto deriva do grego *káthetos*, e significa “descido, abaixado de maneira reta”. Isso porque estes lados determinam um ângulo reto.

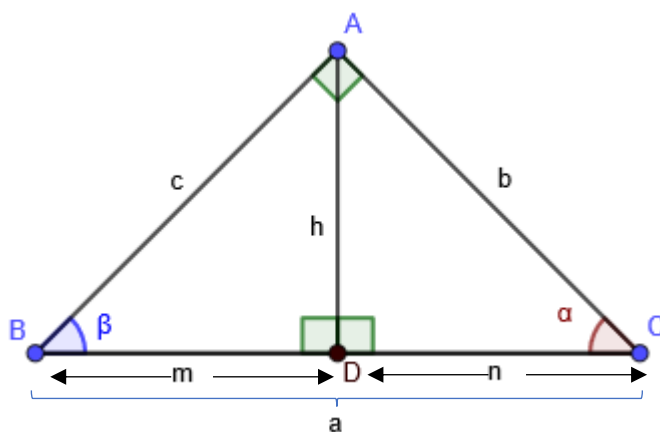
3. Considere o triângulo retângulo abaixo. Demonstre que DAB é semelhante ao triângulo DAC.



R: Considere um triângulo retângulo ABC, retângulo em A. Temos que a hipotenusa é a , e os catetos são b e c .



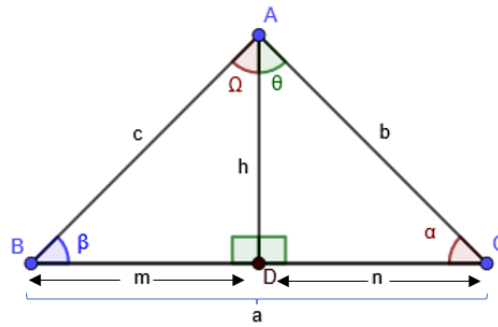
Seja traçada a altura h relativa à hipotenusa, sendo o pé da altura o ponto D.



Essa altura divide o triângulo retângulo ABC em dois novos triângulos retângulos: DBA e DAC. Agora, note que o triângulo ABC é retângulo, o que significa que alfa (α) e beta (β) são complementares, ou seja,

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad (1)$$

Note ainda que a altura h divide o ângulo reto em dois novos ângulos, não necessariamente de mesma medida, Ω (ômega) e θ (teta).



No entanto, os triângulos DBA e DAC também são retos, o que significa que:

$$\beta \text{ e } \Omega \text{ são complementares: } \Omega + \beta = 90^\circ \quad (2)$$

$$\alpha \text{ e } \theta \text{ são complementares: } \alpha + \theta = 90^\circ \quad (3)$$

Ora, pelas igualdades (1), (2) e (3) temos:

– α e Ω são complementos de β , logo:

$$\alpha + \beta = \Omega + \beta$$

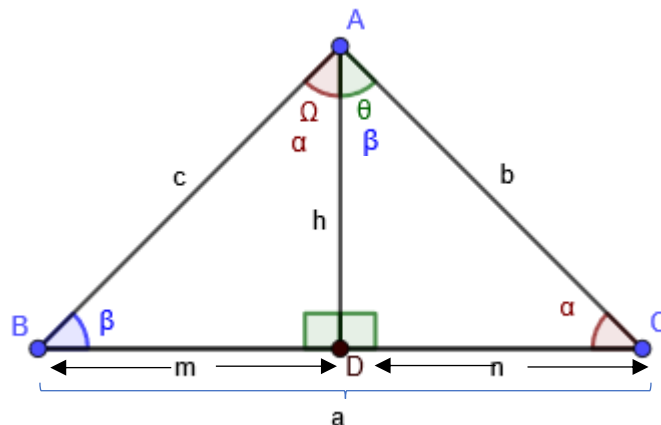
$$\alpha = \Omega$$

– θ e β são complementos de α , logo:

$$\alpha + \beta = \alpha + \theta$$

$$\beta = \theta$$

Portanto, é possível substituir Ω por α , e θ por β .



Note então que os triângulos retângulos DBA e DAC possuem os três ângulos congruentes. Pelo caso de semelhança AA, fica evidente que eles são semelhantes. Além disso, é evidente que eles também são semelhantes ao triângulo retângulo ABC, uma vez que este possui os três mesmos ângulos.

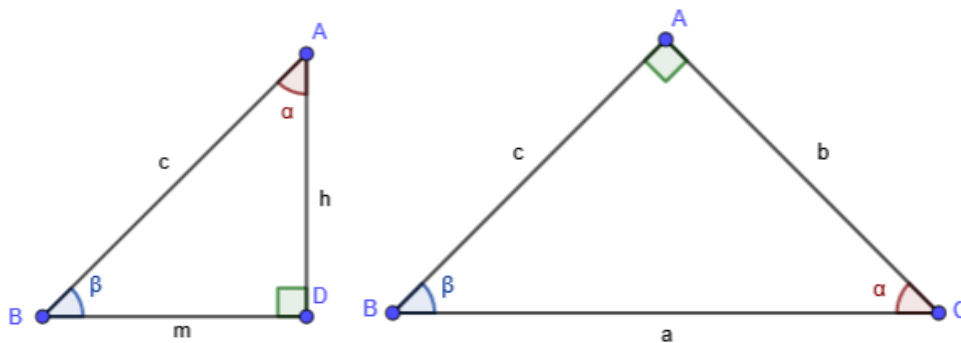
$$\triangle DBA \sim \triangle DAC \sim \triangle ABC$$

■ Q.E.D

Lição 115 – Relações métricas no triângulo retângulo - Parte II

1. Faça a demonstração da 1ª relação métrica no triângulo retângulo.

R: Considerando os triângulos DBA e ABC, temos $\triangle DBA \sim \triangle ABC$, pois $D \equiv A = 90^\circ$ e $B \equiv B$ (comum).



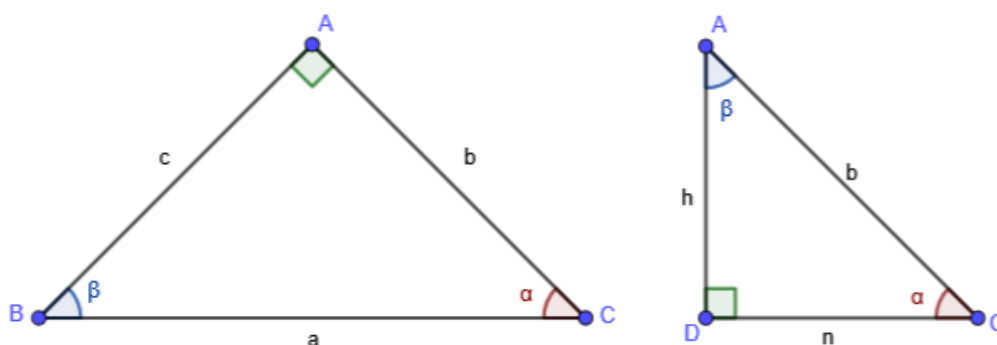
Logo, temos a proporção:

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c}$$

$$c \cdot c = a \cdot m$$

$$c^2 = a \cdot m$$

Considerando os triângulos DAC e ABC, temos $\triangle DAC \sim \triangle ABC$, pois $D \equiv A = 90^\circ$ e $C \equiv C$ (comum).



Logo, temos a proporção:

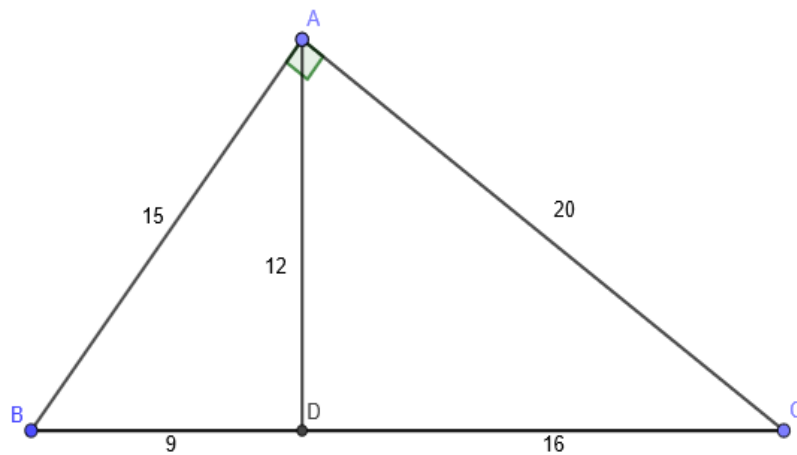
$$\frac{b}{a} = \frac{n}{b}$$

$$b \cdot b = a \cdot n$$

$$b^2 = a \cdot n$$

■ Q.E.D

2. Verifique a primeira relação métrica no triângulo retângulo abaixo:



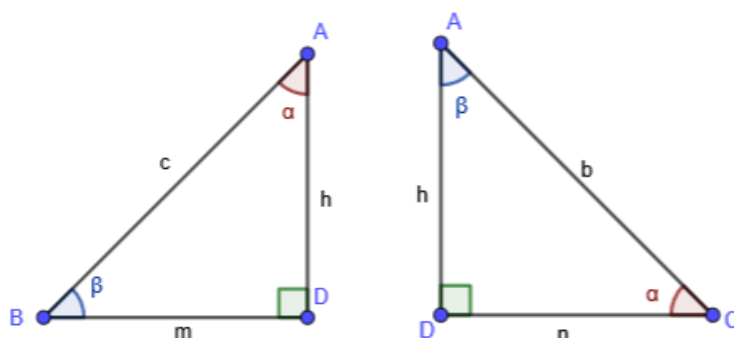
$$\text{R: } c^2 = a \cdot m \Rightarrow 15^2 = (9 + 16) \cdot 9 \Rightarrow 225 = 25 \cdot 9 \Rightarrow 225 = 225$$

$$b^2 = a \cdot n \Rightarrow 20^2 = (9 + 16) \cdot 16 \Rightarrow 400 = 25 \cdot 16 \Rightarrow 400 = 400$$

Lição 116 – Relações métricas no triângulo retângulo - Parte III

1. Faça a demonstração da 2ª relação métrica no triângulo retângulo.

R: Considerando os triângulos DBA e DAC, temos $\triangle DBA \sim \triangle DAC$, pois $D \equiv D = 90^\circ$ e $BAD \equiv ACD$.



Logo, temos a proporção:

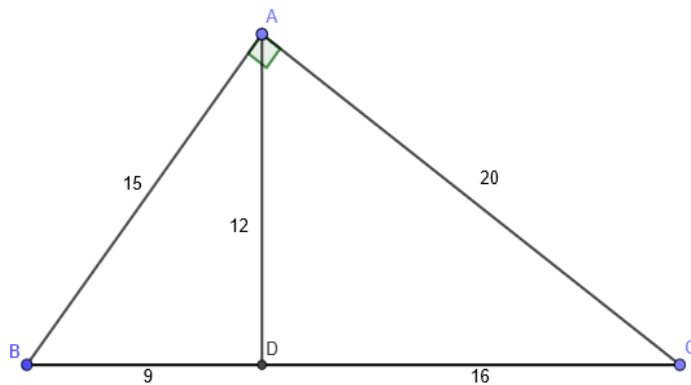
$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h}$$

$$h \cdot h = n \cdot m$$

$$h^2 = n \cdot m$$

■ Q.E.D

2. Verifique a segunda relação métrica no triângulo retângulo abaixo:



R: $h^2 = m \cdot n \Rightarrow 12^2 = 9 \cdot 16 \Rightarrow 144 = 144.$

3. Em um triângulo retângulo, um cateto mede 10 cm e sua projeção sobre a hipotenusa mede 5 cm. Nessas condições, determine:

a) a medida da hipotenusa.

R: $c^2 = a \cdot m \Rightarrow 10^2 = a \cdot 5 \Rightarrow a = \frac{100}{5} = 20 \text{ cm.}$

b) a medida do outro cateto.

R: $b^2 = a \cdot n \Rightarrow b^2 = 20 \cdot (20 - 5) \Rightarrow b^2 = 20 \cdot 15 = 300 \Rightarrow b = \sqrt{300} \Rightarrow b \sim 17,3 \text{ cm.}$

c) a medida da altura relativa à hipotenusa.

R: $h^2 = a \cdot m \Rightarrow h^2 = 5 \cdot 15 \Rightarrow h^2 = 75 \Rightarrow h = \sqrt{75} \Rightarrow h \sim 8,7 \text{ cm.}$

4. Em um triângulo retângulo, os catetos medem 7 cm e 24 cm. Nessas condições, determine:

a) a medida da hipotenusa

R: A partir da primeira relação métrica no triângulo, temos que $b^2 = a \cdot n$ e que $c^2 = a \cdot m$, portanto, podemos passar o b^2 e o $a \cdot m$ para os outros lados das equações, obtendo: $a \cdot n - b^2 = 0$, e $c^2 - a \cdot m = 0$. Dessa forma, como ambas são iguais a 0, uma é igual a outra, e, assim, temos:

$$a \cdot n - b^2 = c^2 - a \cdot m \Rightarrow a \cdot n + a \cdot m = b^2 + c^2.$$

Evidenciando o a na primeira parte da equação, temos $a \cdot (n + m) = b^2 + c^2$, entretanto, $n + m$ é igual a a , estabelecendo a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Portanto:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 7^2 + 24^2 \Rightarrow a^2 = 49 + 576 \Rightarrow a = \sqrt{625} \Rightarrow a = 25 \text{ cm.}$$

b) a medida da altura relativa à hipotenusa

R: Novamente pela primeira relação métrica no triângulo, temos que

$$b^2 = a \cdot n \Rightarrow 7^2 = 25 \cdot n \Rightarrow \frac{49}{25} = n \Rightarrow n = 1,96 \text{ cm.}$$

E, temos também:

$$c^2 = a \cdot m \Rightarrow 24^2 = 25 \cdot m \Rightarrow m = \frac{576}{25} \Rightarrow m = 23,04 \text{ cm.}$$

Dessa forma, a altura relativa a hipotenusa é:

$$h^2 = m \cdot n \Rightarrow h^2 = 23,04 \cdot 1,96 \Rightarrow h = \sqrt{45,1584} = 6,72 \text{ cm.}$$

Lição 117 – Relações métricas no triângulo retângulo - Parte IV

1. Faça a demonstração da 3ª relação métrica no triângulo retângulo.

R: Da 1ª relação métrica, temos que:

$$c^2 = a \cdot m$$

$$b^2 = a \cdot n$$

Multiplicando membro a membro as igualdades, temos que:

$$c^2 \cdot b^2 = am \cdot an$$

$$c^2 \cdot b^2 = a^2 \cdot \underset{h^2}{m \cdot n}$$

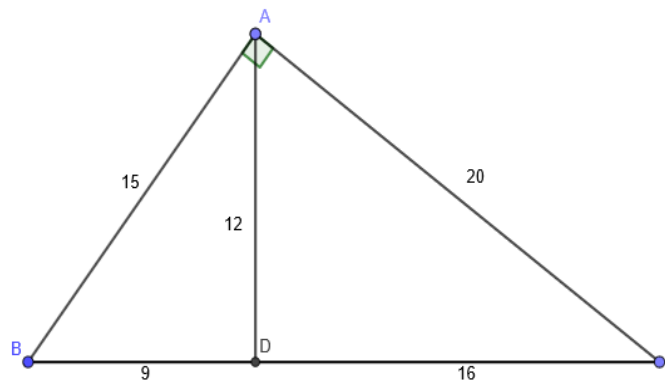
$$c^2 \cdot b^2 = a^2 \cdot h^2$$

$$\sqrt{c^2 \cdot b^2} = \sqrt{a^2 \cdot h^2}$$

$$cb = ah$$

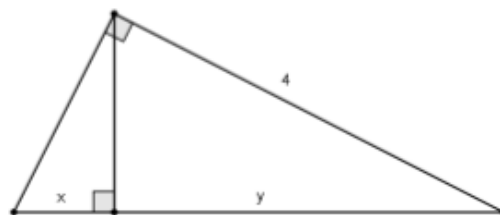
■ Q.E.D

2. Verifique a terceira relação métrica no triângulo retângulo abaixo:



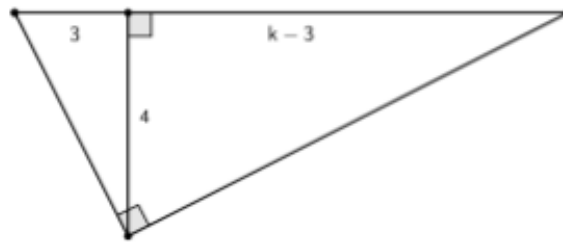
R: $cb = ah \Rightarrow 15 \cdot 20 = (9 + 16) \cdot 12 \Rightarrow 15 \cdot 20 = 25 \cdot 12 \Rightarrow 300 = 300$.

3. Determine x e y no triângulo da figura abaixo.



R: CANCELADA.

4. Determine o valor de k na figura abaixo.



R: $h^2 = m \cdot n \Rightarrow 4^2 = 3 \cdot (k - 3) \Rightarrow 16 = 3k - 9 \Rightarrow 3k = 16 + 9 \Rightarrow k = \frac{25}{3} \text{ cm.}$

Lição 118 – Relações métricas no triângulo retângulo - Parte V

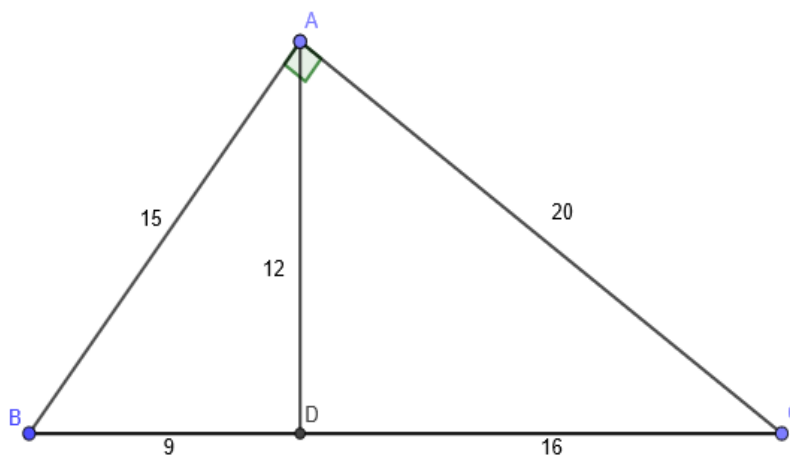
1. Faça a demonstração da 4ª relação métrica no triângulo retângulo.

R: A partir da primeira relação métrica no triângulo, temos que $b^2 = a \cdot n$ e que $c^2 = a \cdot m$, portanto, podemos passar o b^2 e o $a \cdot m$ para os outros lados das equações, obtendo: $a \cdot n - b^2 = 0$, e $c^2 - a \cdot m = 0$. Dessa forma, como ambas são iguais a 0, uma é igual a outra, e, assim, temos:

$$a \cdot n - b^2 = c^2 - a \cdot m \Rightarrow a \cdot n + a \cdot m = b^2 + c^2.$$

Evidenciando o a na primeira parte da equação, temos $a \cdot (n + m) = b^2 + c^2$, entretanto, $n + m$ é igual a a , estabelecendo a relação: $a^2 = b^2 + c^2$.

2. Verifique a quarta relação métrica no triângulo retângulo abaixo:



R: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (9 + 16)^2 = 15^2 + 20^2 \Rightarrow 25^2 = 225 + 400 \Rightarrow 625 = 625.$

3. Quais são as relações métricas existentes entre os triângulos retângulos? Liste-as e analise cada relação métrica no triângulo retângulo.

R: Nos estudos das relações métricas no triângulo retângulo, podemos destacar as seguintes:

1) $c^2 = am$

2) $b^2 = an$

3) $h^2 = mn$

4) $cb = ah$

5) $a^2 = b^2 + c^2$

Analisando as duas primeiras, temos:

1) $c^2 = a \cdot m \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot m}$

- c é um cateto;
- a é a hipotenusa;
- m é a projeção do cateto c na hipotenusa.

2) $b^2 = a \cdot n \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot n}$

- b é um cateto;
- a é a hipotenusa;
- n é a projeção do cateto b na hipotenusa.

Analisando a segunda:

3) $h^2 = n \cdot m \Rightarrow h = \sqrt{n \cdot m}$

- h é a altura relativa à hipotenusa;
- n é a projeção do cateto b na hipotenusa;
- m é a projeção do cateto c na hipotenusa.

Analizando a terceira relação:

4) $a \cdot h = c \cdot b$

- a é a hipotenusa;
- h é a altura relativa à hipotenusa;
- c é o um cateto;
- b é o outro cateto.

5) $a^2 = b^2 + c^2$

- a é a hipotenusa
- b é um cateto
- c é o outro cateto

Lição 119 – Teorema de Pitágoras – Parte I

1. Quem foi Pitágoras?

R: Pitágoras é do século V antes de Cristo, e fundou associações com estilo de vida bem disciplinada e rigorosa. Ele pregava que o mundo era regido pelos números e pela harmonia entre eles. Tal foi sua importância, que aqueles que se assemelhavam ao seu modo de pensar recebiam o nome de pitagóricos. Ele foi muito importante para o desenvolvimento da filosofia grega, sendo citado por Platão, por seus discípulos e por Aristóteles. No entanto, há também muitos erros em suas crenças, como, por exemplo, a reencarnação.

2. Enuncie o Teorema de Pitágoras e faça em seu caderno as duas demonstrações realizadas nessa lição.

R: Teorema de Pitágoras: em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

1ª Demonstração:

$$\begin{array}{rcl} + & 1) & c^2 = a \cdot m \\ & 2) & b^2 = a \cdot n \\ \hline & & c^2 + b^2 = am + na \\ & & c^2 + b^2 = a \cdot (m + n) \\ & & c^2 + b^2 = a \cdot (m + n) \\ & & c^2 + b^2 = a \cdot a \\ & & c^2 + b^2 = a^2 \\ & & a^2 = b^2 + c^2 \end{array}$$

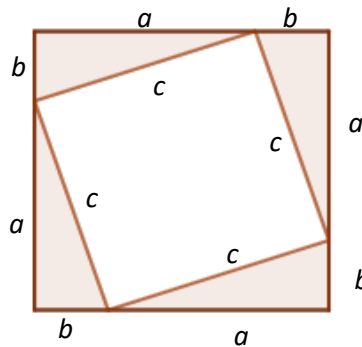
Colocando **a** em evidência.

Sabemos que $m + n = a$.

2ª Demonstração:

Tome um quadrado de lado $a + b$

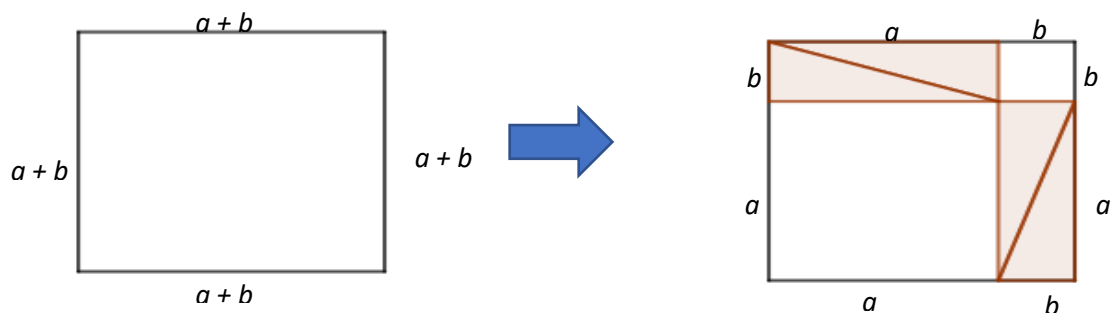
Deste mesmo quadrado sejam retirados 4 triângulos congruentes de catetos a e b . Como eles são congruentes, suas hipotenusas possuem todas as mesmas medidas. Logo, a figura que sobrou é um quadrado, cujo lado chamamos de c .



Ora, sabemos que a área deste quadrado de lado c é:

$$\text{Área} = \text{lado}^2 = c^2$$

Agora, tome um outro quadrado de lado $a + b$, e retire 4 triângulos congruentes dele, de catetos a e b , de maneira diferente da que foi feita no primeiro quadrado:

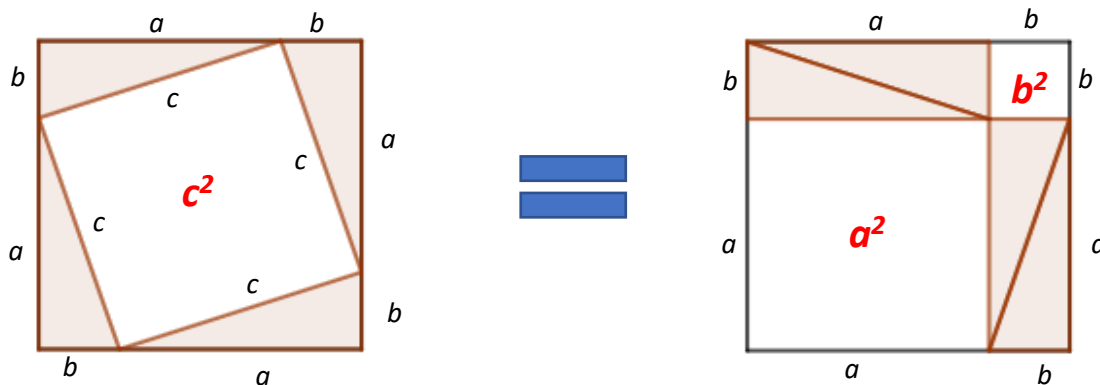


A área que sobra após a retirada desses quatro triângulos é a soma das áreas de um quadrado de lado a e de outro quadrado de lado b :

$$\text{Área}_{\text{restante}} = \text{Área (lado } a) + \text{Área (lado } b)$$

$$\text{Área}_{\text{restante}} = a^2 + b^2$$

Ora, como foram retirados exatamente os mesmos triângulos deste segundo quadrado, fica evidente que a área restante é equivalente à área do primeiro quadrado após a retirada dos triângulos.



$$\text{Área (lado } c) = \text{Área (lado } a) + \text{Área (lado } b)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

No entanto, note que a e b são os catetos dos triângulos retângulos e c é a hipotenusa. Logo, pela última igualdade é possível afirmar que “o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”.

■ Q.E.D

3. Determine a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo se seus catetos medem:

a) 3cm e 4cm

$$\text{R: } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 16 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = \sqrt{25} = 5 \text{ cm.}$$

b) 5cm e 12cm

$$\text{R: } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow a^2 = 25 + 144 \Rightarrow a^2 = 169 \Rightarrow a = \sqrt{169} = 13 \text{ cm.}$$

c) 1cm e 1cm

$$\text{R: } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow a^2 = 1 + 1 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2} \text{ cm.}$$

d) $\frac{1}{2}$ cm e $\frac{3}{2}$ cm

$$\text{R: } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{10}{4} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ cm.}$$

e) $\sqrt{3}$ cm e $\sqrt{5}$ cm

$$\text{R: } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = \sqrt{3}^2 + \sqrt{5}^2 \Rightarrow a^2 = 3 + 5 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = \sqrt{8} \text{ cm.}$$

4. Os lados de um triângulo ABC medem 10 cm, 24 cm e 26 cm. Você pode afirmar que este triângulo é retângulo?

R: sendo o maior lado de um triângulo retângulo a hipotenusa, podemos verificar pelo teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 26^2 = 10^2 + 24^2 \Rightarrow 676 = 100 + 576 \Rightarrow 676 = 676$$

Portanto este triângulo é retângulo.

5. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 14 cm e um dos catetos mede $5\sqrt{3}$ cm. Determine a medida do outro cateto.

R:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \Rightarrow 14^2 = (5\sqrt{3})^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 14^2 - (5\sqrt{3})^2 \Rightarrow c^2 = 196 - 75 \Rightarrow c^2 = 121 \\ &\Rightarrow c = \sqrt{121} \Rightarrow c = 11 \text{ cm.} \end{aligned}$$

6. Num triângulo retângulo, os catetos medem 8cm e 15 cm. Determine a hipotenusa, as projeções dos catetos sobre a hipotenusa e a altura relativa à hipotenusa.

$$\text{R: } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 8^2 + 15^2 \Rightarrow a^2 = 64 + 225 \Rightarrow a^2 = 289 \Rightarrow a = \sqrt{289} \Rightarrow a = 17 \text{ cm.}$$

Lição 120 – Teorema de Pitágoras – Parte II

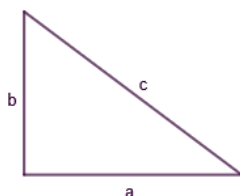
1. Enuncie o Teorema de Pitágoras e faça em seu caderno a demonstração realizada nesta lição.

R: Teorema de Pitágoras: em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

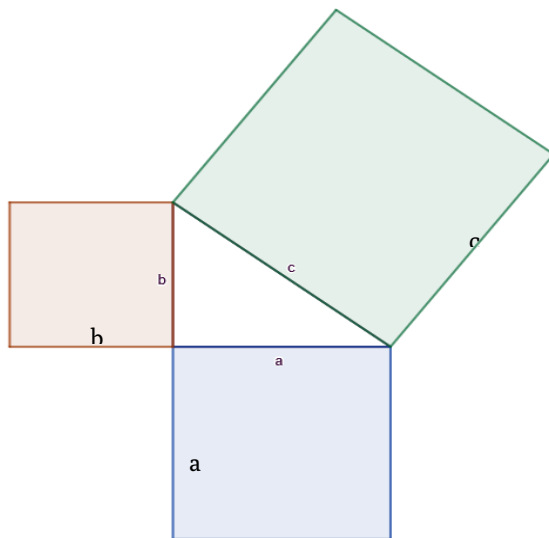
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Demonstração 3: quadriculações.

Tome um triângulo retângulo, de catetos a e b e hipotenusa c .



Seja construído um quadrado sobre cada lado do triângulo, cujos lados têm a mesma medida que o lado em que ele se apoia:



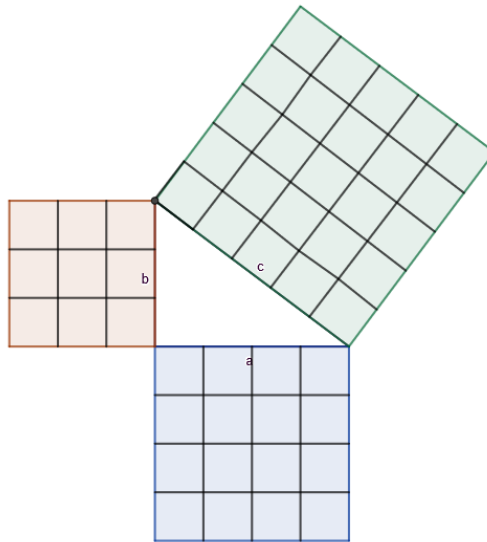
A área de cada um destes quadrados é:

$$\text{Área (lado } a) = a^2$$

$$\text{Área (lado } b) = b^2$$

$$\text{Área (lado } c) = c^2$$

Considere agora o quadrado unitário  , de tal forma que vamos dispô-lo lado a lado para preencher cada quadrado.



Agora, note que na área do quadrado de lado a couberam 16 quadrados unitários; que no quadrado de lado b couberam 9 quadrados; e que no quadrado de lado c couberam 25 quadrados. Portanto,

$$\text{Área (lado } a) = a^2 = 16$$

$$\text{Área (lado } b) = b^2 = 9$$

$$\text{Área (lado } c) = c^2 = 25$$

Algo interessante é possível verificar: a soma das áreas dos quadrados de lado a e de lado b é equivalente à área do quadrado de lado c :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

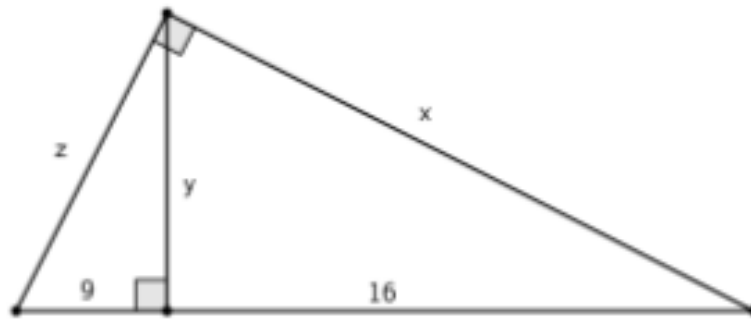
$$16 + 9 = 25$$

$$25 = 25$$

Logo, como a e b são catetos e c é a hipotenusa, podemos afirmar “que o quadrado da hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados dos catetos.”

■ Q.E.D

2. Determine os valores de x , y e z no triângulo abaixo.



R: Pelo teorema de Pitágoras, temos as relações:

$$y^2 + 16^2 = x^2$$

$$9^2 + y^2 = z^2$$

$$z^2 + x^2 = 25^2$$

Somando as duas primeiras equações, obtemos: $(y^2 + 16^2) + (9^2 + y^2) = x^2 + z^2$

Substituindo $x^2 + z^2$ pela terceira equação, temos:

$$(y^2 + 16^2) + (9^2 + y^2) = 25^2 \Rightarrow 2y^2 + 81 + 256 = 625 \Rightarrow 2y^2 = 625 - 81 - 256$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{288}{2} = 144 \Rightarrow y = \sqrt{144} = 12.$$

Substituindo o y na primeira equação, temos:

$$12^2 + 16^2 = x^2 \Rightarrow 144 + 256 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{400} = 20,$$

e substituindo o y na segunda equação, temos:

$$9^2 + 12^2 = z^2 \Rightarrow 81 + 144 = z^2 \Rightarrow z = \sqrt{225} = 15.$$

Portanto, temos:

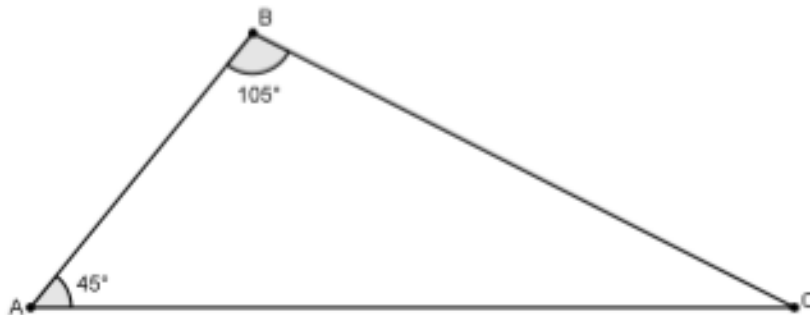
$$x = 20$$

$$y = 12$$

$$z = 15$$

3. Determine o perímetro do triângulo ABC abaixo, sabendo que $AB = 7\sqrt{2}$.

Dicas: trace a altura relativa a AC; veja quanto mede o ângulo $\hat{C}$.



R: CANCELADA.

4. Uma escada de 2,5 m de altura está apoiada em uma parede da qual o pé da escada dista 1,5 m. Determine a altura em que a escada atinge a parede.

R: O triângulo formado pela escada chão e parede tem hipotenusa igual a 2,5 m e um cateto de 1,5 m. Assim, pelo teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2,5^2 = 1,5^2 + c^2 \Rightarrow 6,25 - 2,25 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{4} \Rightarrow c = 2 \text{ m.}$$

Lição 121 – Teorema de Pitágoras – Parte III

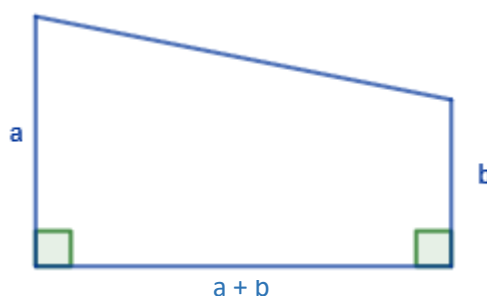
1. Enuncie o Teorema de Pitágoras e faça em seu caderno a demonstração realizada nesta lição.

R: Teorema de Pitágoras: em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

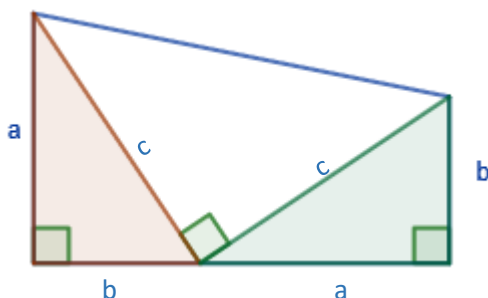
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Demonstração 4: demonstração do presidente dos Estados Unidos James A. Garfield.

Considere um trapézio retângulo de bases a e b , e altura $a + b$.



Seja dividido este trapézio em três triângulos, sendo que em dois deles os catetos são a e b , e a hipotenusa, c . O terceiro triângulo terá, por consequência, os catetos iguais a c .



Ora, sabemos que a área do trapézio será equivalente à soma das áreas dos três triângulos retângulos. Logo,

$$\text{Área}_{\text{trapézio}} = \text{Área}_{\text{triângulo rosa}} + \text{Área}_{\text{triângulo verde}} + \text{Área}_{\text{triângulo branco}}$$

Sabemos também que a área de um trapézio é calculada pela fórmula

$$\text{Área}_{\text{trapézio}} = \frac{(\text{Base}_{\text{maior}} + \text{base}_{\text{menor}}) \cdot \text{altura}}{2},$$

cujos termos valem:

- **Base Maior:** a
- **base menor:** b
- **altura:** a + b

Sabemos também que a área de um triângulo é calculada por

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

cujos termos valem:

Triângulo rosa

- Base: a
- Altura: b

Triângulo verde:

- Base: a
- Altura: b

Triângulo branco:

- Base: c
- Altura: c

Substituindo todos os termos pelos seus respectivos valores, temos:

$$\begin{aligned} \text{Área}_{\text{trapézio}} &= A_{\Delta\text{rosa}} + A_{\Delta\text{verde}} + A_{\Delta\text{branco}} \\ \frac{(\text{Base Maior} + \text{base menor}) \cdot \text{altura}}{2} &= \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} + \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} + \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \\ \frac{(a + b) \cdot (a + b)}{2} &= \frac{a \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c \cdot c}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b)}{2} &= \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} \\ \frac{a^2 + ab + ab + b^2}{2} &= \frac{ab + b + c^2}{2} \\ \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} &= \frac{2ab + c^2}{2} \\ a^2 + 2ab + b^2 &= 2ab + c^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2\end{aligned}$$

Ao fim de todas as manipulações algébricas, temos que a soma dos quadrados dos lados a e b é equivalente ao quadrado da medida c . No entanto, a e b são catetos do triângulo retângulo e c sua hipotenusa. Logo “o quadrado da hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados dos catetos”.

■ Q.E.D

2. Um terreno triangular tem frente de 12 m e 16 m em duas ruas que formam um ângulo de 90° . Quanto mede o terceiro lado desse terreno?

R: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow a^2 = 144 + 256 \Rightarrow a = \sqrt{400} = 20 \text{ m.}$

3. As medidas dos catetos de um triângulo retângulo medem $(2 + \sqrt{5})$ cm e $(-2 + \sqrt{5})$ cm. Nessas condições, determine a medida da hipotenusa.

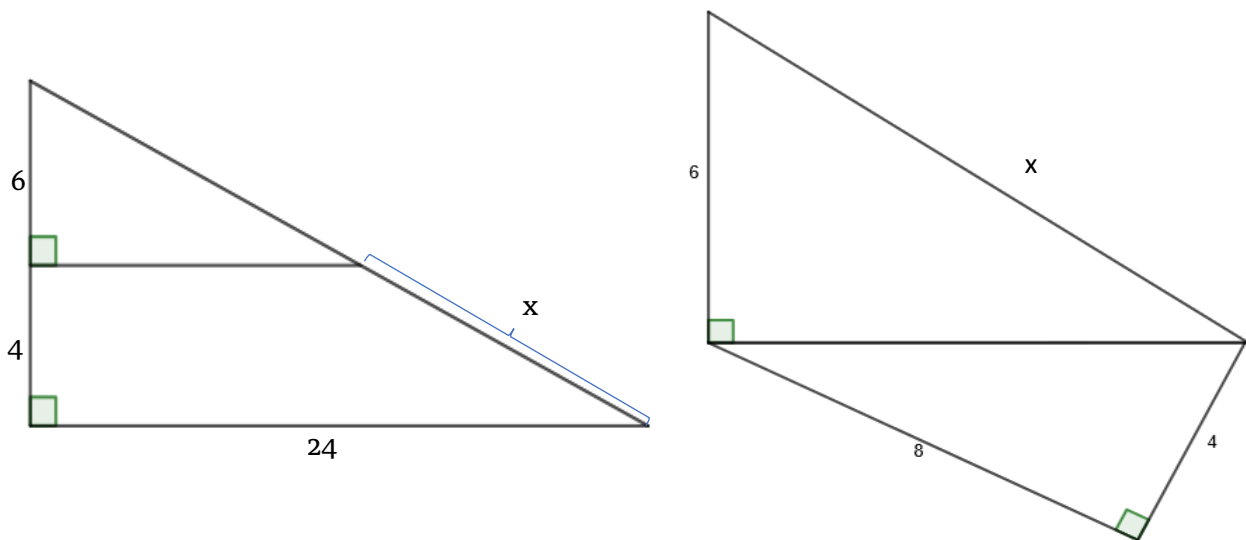
R: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = (2 + \sqrt{5})^2 + (-2 + \sqrt{5})^2 \Rightarrow a^2 = (2^2 + 4\sqrt{5} + \sqrt{5}^2) + (2^2 - 4\sqrt{5} + \sqrt{5}^2) \Rightarrow a^2 = 4 + 4 + 5 + 5 \Rightarrow a = \sqrt{18} \text{ cm.}$

4. Em um triângulo retângulo isósceles, cada cateto mede $10\sqrt{2}$ cm. Qual é a medida da hipotenusa deste triângulo?

R: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 10\sqrt{2}^2 + 10\sqrt{2}^2 \Rightarrow a^2 = 200 + 200 \Rightarrow a = \sqrt{400} = 20 \text{ cm}$

Lição 122 - Aplicações do teorema de Pitágoras

1. Determine x nos casos:



R: No primeiro caso, temos uma semelhança de triângulos, onde o triângulo de cima é semelhante ao triângulo maior. Assim, temos que: $\frac{6}{base} = \frac{10}{24} \Rightarrow base = \frac{144}{10}$, assim, a hipotenusa do triângulo menor é:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 6^2 + \left(\frac{144}{10}\right)^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{24336}{100}} \Rightarrow a = \frac{156}{10}.$$

Tendo a hipotenusa menor, basta calcular a maior e subtrair. A hipotenusa maior é:

$$a^2 = 10^2 + 24^2 \Rightarrow a^2 = 100 + 576 \Rightarrow a = \sqrt{676} \Rightarrow a = 26.$$

$$\text{Portanto } x = 26 - \frac{156}{10} \Rightarrow x = 10,4.$$

Já o segundo caso, temos, no triângulo de baixo o valor da hipotenusa dada por:

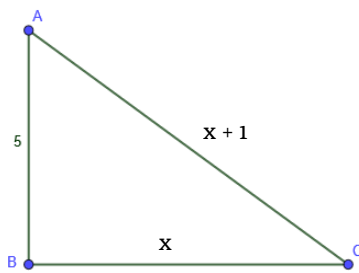
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 4^2 + 8^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 64 \Rightarrow a = \sqrt{80}.$$

Assim, usando o teorema de Pitágoras no triângulo de cima, temos:

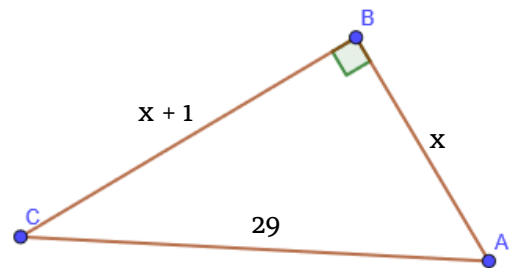
$$x^2 = 6^2 + \sqrt{80}^2 \Rightarrow x^2 = 36 + 80 \Rightarrow x = \sqrt{116} \Rightarrow x = 2\sqrt{29}$$

2. Determine x nos casos

a)



b)



R:

a) $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (x + 1)^2 = 5^2 + x^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 25 + x^2 \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = 12.$

b)

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \Rightarrow 29^2 = (x + 1)^2 + x^2 \Rightarrow 841 = x^2 + 2x + 1 + x^2 \Rightarrow 2x^2 + 2x = 840 \\ &\Rightarrow 2(x^2 + x) = 840 \Rightarrow x^2 + x = 420 \Rightarrow x^2 + x - 420 = 0. \end{aligned}$$

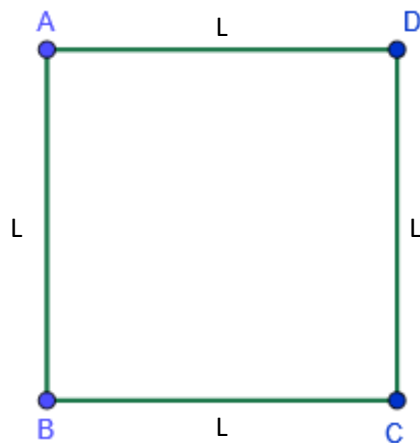
Utilizando Bhaskara, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-420)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1681}}{2} \Rightarrow x = 20$$

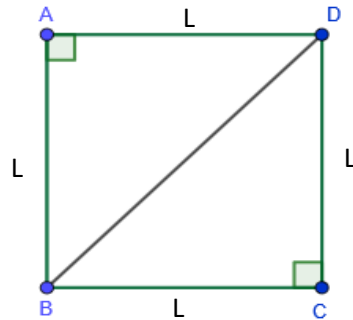
Lição 123 - A diagonal de um quadrado

1. Demonstre com suas palavras o teorema da diagonal do quadrado.

R: Considere um quadrado ABCD qualquer, de lado L.



Traçando sua diagonal BD, temos que o quadrado fica dividido em dois triângulos retângulos, de hipotenusa BD e catetos de medida L: ABD e CBD.



Aplicando o Teorema de Pitágoras a qualquer dos triângulos, temos:

$$BD^2 = L^2 + L^2$$

$$BD^2 = 2L^2$$

$$BD = \sqrt{2L^2}$$

$$BD = L\sqrt{2}$$

■ Q.E.D

2. Quanto mede a diagonal de um quadrado que tem 8 cm de lado?

R: $d = l\sqrt{2} \Rightarrow d = 8\sqrt{2} \text{ cm}$

3. A diagonal de um quadrado mede 10 cm. Determine a medida l do lado desse quadrado.

R: $d = l\sqrt{2} \Rightarrow 10 = l\sqrt{2} \Rightarrow l = \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$

4. Um quadrado tem 4 cm de lado. Determine a medida da sua diagonal:

a) usando a fórmula;

R: $d = l\sqrt{2} \Rightarrow d = 4\sqrt{2} \text{ cm}$

b) sem usar a fórmula.

R: $d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow d^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow d^2 = 32 \Rightarrow d = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$

5. A diagonal de um quadrado mede $11\sqrt{2}$ cm. Nessas condições, determine a medida do lado e o perímetro deste quadrado.

R: $d = l\sqrt{2} \Rightarrow 11\sqrt{2} = l\sqrt{2} \Rightarrow l = 11$ cm

Perímetro: $p = 4l \Rightarrow p = 4 \cdot 11 \Rightarrow p = 44$ cm.

6. A área de um quadrado pode ser calculada fazendo-se ℓ^2 . Se um quadrado tem 225 cm² de área, qual é o valor, em decimal, da diagonal deste quadrado?

(Faça $\sqrt{2} = 1,41$.)

R: $a = l^2 \Rightarrow 225 = l^2 \Rightarrow l = 15$ cm.

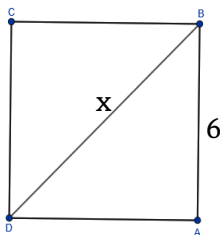
$D = l\sqrt{2} \Rightarrow d = 15 \cdot 1,41 \Rightarrow d = 21,15$ cm.

7. Deduza a diagonal de um quadrado de lado a .

R: $d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}$.

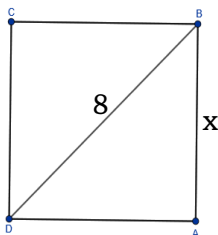
8. Determine o valor de x nos casos a seguir:

a)



R: $d = l\sqrt{2} \Rightarrow d = 6\sqrt{2}$ cm.

b)



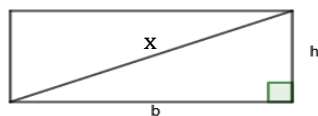
R: $d = l\sqrt{2} \Rightarrow 8 = x\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$ cm

9. A diagonal de um quadrado mede $5\sqrt{2}$. Determine o perímetro do quadrado.

R: $d = l\sqrt{2} \Rightarrow 5\sqrt{2} = l\sqrt{2} \Rightarrow l = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5 \text{ cm}$

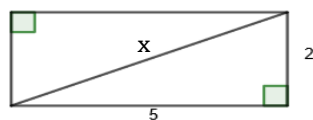
Perímetro: $p = 4l \Rightarrow p = 4 \cdot 5 \Rightarrow p = 20 \text{ cm}$

10. Deduza uma fórmula para calcular medida da diagonal de um retângulo. Tome o retângulo abaixo de base = b e altura = h para realizar a dedução.



R: $x^2 = b^2 + h^2 \Rightarrow x = \sqrt{b^2 + h^2}$

11. Determine o valor de x :



R: $x = \sqrt{b^2 + h^2} \Rightarrow x = \sqrt{5^2 + 2^2} \Rightarrow x = \sqrt{25 + 4} \Rightarrow x = \sqrt{29}$.

Lição 124 – Altura de um triângulo equilátero

1. Demonstre com suas palavras o teorema da altura do triângulo equilátero.

R: Considere um triângulo equilátero ABC de lado L. Seja traçada a altura h relativa ao lado $\overline{BC}$. A altura de um triângulo equilátero possui diversas características, como, por exemplo, ser bissetriz do ângulo A e ser mediatriz do lado relativo a ela:

Ora, note que a altura h divide o triângulo equilátero em dois triângulos retângulos congruentes. Perceba ainda que como a altura h é mediatriz do lado BC, razão por que $\overline{DB} = \overline{DC} = \frac{L}{2}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras a um destes triângulos, temos:

$$(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{Cateto } 1)^2 + (\text{Cateto } 2)^2$$

$$L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$L^2 = h^2 + \frac{L^2}{4}$$

Como queremos descobrir uma relação entre a altura e os lados, isolamos a altura, passando o termo $\frac{L^2}{4}$ para o primeiro membro da equação.

$$L^2 - \frac{L^2}{4} = h^2$$

$$\frac{4L^2 - L^2}{4} = h^2$$

$$\frac{3L^2}{4} = h^2$$

$$h^2 = \frac{3L^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3L^2}{4}}$$

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

■ Q.E.D

2. Determine a medida h da altura de um triângulo equilátero de lado 20 cm.

$$\text{R: } h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{20\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 10\sqrt{3} \text{ cm.}$$

3. A altura de um triângulo equilátero é 9 cm. Determine a medida l do lado deste triângulo.

$$\text{R: } h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 9 = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow l = \frac{9 \cdot 2}{\sqrt{3}} \Rightarrow l = \frac{18\sqrt{3}}{3} \Rightarrow l = 6\sqrt{3} \text{ cm.}$$

4. O lado de um triângulo equilátero mede 12 cm. Determine a medida h da altura desse triângulo:

a) usando a fórmula;

$$\text{R: } h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{12\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 6\sqrt{3} \text{ cm.}$$

b) sem usar a fórmula.

$$\text{R: } L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow 12^2 = h^2 + 6^2 \Rightarrow h^2 = 144 - 36 \Rightarrow h = \sqrt{108} \Rightarrow h = 6\sqrt{3} \text{ cm.}$$

5. Calcule a altura de um triângulo equilátero sabendo que seu perímetro é 36 cm.

$$\text{R: Perímetro} = 3L \Rightarrow 36 = 3L \Rightarrow L = 12 \text{ cm.}$$

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{12\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

6. Em um triângulo equilátero a altura mede $3\sqrt{3}$ cm. Nessas condições, qual é o perímetro deste triângulo equilátero?

$$\text{R: } h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3\sqrt{3} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3\sqrt{3} \cdot 2 = l\sqrt{3} \Rightarrow l = 6 \text{ cm.}$$

$$\text{Perímetro} = 3L \Rightarrow p = 3 \cdot 6 \Rightarrow p = 18 \text{ cm.}$$

7. A área de um triângulo pode ser calculada multiplicando-se a medida de um lado pela medida da altura relativa a esse lado e dividindo-se o resultado por 2. Nessas condições e fazendo $\sqrt{3} = 1,73$, determine a área de um triângulo equilátero cujo lado mede 4 cm.

$$\text{R: } h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

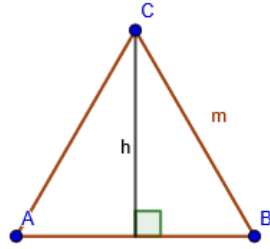
$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = \frac{8\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 4\sqrt{3} = 6,92 \text{ cm}^2.$$

8. A medida do lado de um triângulo equilátero é igual à medida da diagonal de um quadrado de lado 6 cm. Nessas condições, determine a medida da altura do triângulo.

$$\text{R: } d = l\sqrt{2} \Rightarrow d = 6\sqrt{2} \text{ cm.}$$

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{6\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 3\sqrt{6} \text{ cm.}$$

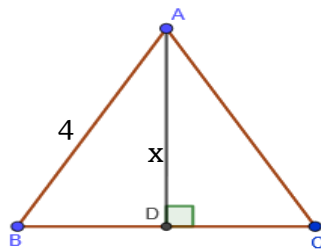
9. Deduza a altura de um triângulo equilátero de lado m .



$$\text{R: } m^2 = h^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = m^2 - \frac{m^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3m^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3m^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{m\sqrt{3}}{2}$$

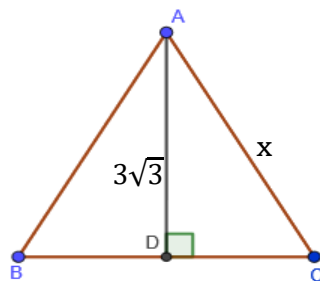
10. Encontre o valor de x nos triângulos abaixo:

a)



$$\text{R: } h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

b)



$$\text{R: } h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3\sqrt{3} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 6$$

Lição 125 – Razões trigonométricas no triângulo retângulo

1. Qual é o objeto de estudo da Trigonometria?

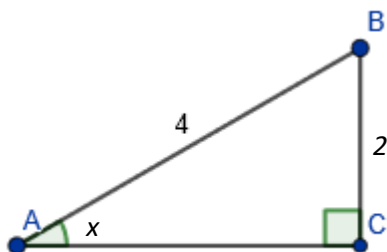
R: A trigonometria estuda as relações que existem entre os ângulos e os lados de um triângulo retângulo, mais especificamente as relações proporcionais que existem entre os lados de dois triângulos retângulos semelhantes.

2. Complete os espaços:

- a) À razão entre o cateto oposto e a hipotenusa dá-se o nome de Seno
- b) À razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa dá-se o nome de Cosseno
- c) À razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente dá-se o nome de Tangente

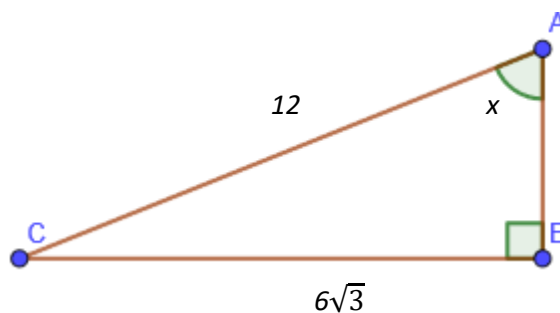
3. Determine $\text{sen } x$ nos casos abaixo

a)



$$\text{R: } \text{sen } x = \frac{CO}{H} \Rightarrow \text{sen } x = \frac{2}{4} = 0,5$$

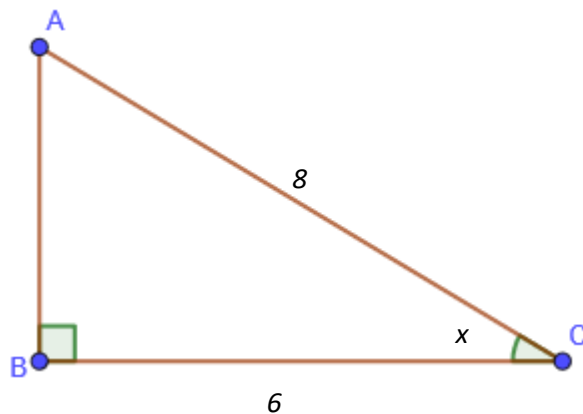
b)



$$\text{R: } \text{sen } x = \frac{CO}{H} \Rightarrow \text{sen } x = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

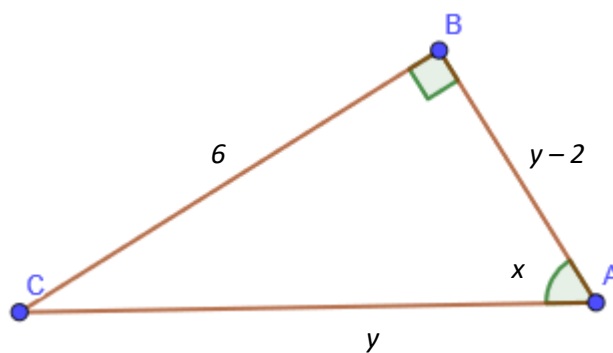
4. Determine $\cos x$ nos casos:

a)



$$\text{R: } \cos x = \frac{CA}{H} \Rightarrow \cos x = \frac{6}{8} = 0,75$$

b)

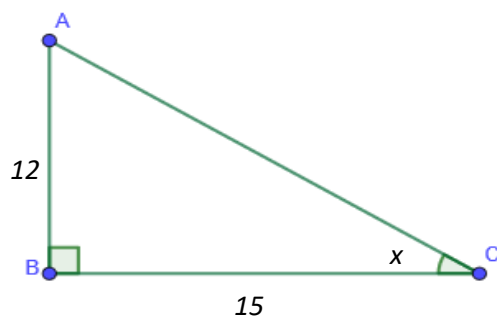


$$\text{R: } (y-2)^2 + 6^2 = y^2 \Rightarrow y^2 - 4y + 4 + 36 = y^2 \Rightarrow 4y = 40 \Rightarrow y = 10$$

$$\cos x = \frac{CA}{H} \Rightarrow \cos x = \frac{10-2}{10} = \frac{8}{10} = 0,8$$

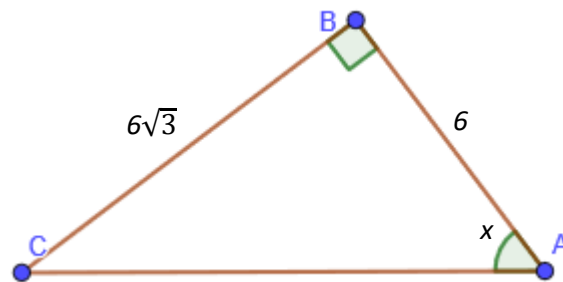
5. Obtenha $\text{tg } x$ nos casos:

a)



$$\text{R: } \operatorname{tg} = \frac{CO}{CA} \Rightarrow \operatorname{tg} = \frac{12}{15} = 0,8$$

b)



$$\text{R: } \operatorname{tg} = \frac{CO}{CA} \Rightarrow \operatorname{tg} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$$

6. Quais os senos, os cossenos e as tangentes dos ângulos agudos do triângulo de lados 6 cm, 8 cm e 10 cm?

R: Para verificar se o triângulo é retângulo, basta utilizar o teorema de Pitágoras, onde: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow 100 = 36 + 64 \Rightarrow 100 = 100$.

Portanto o triângulo é retângulo. Assim, o ângulo formado pelo lado maior e a hipotenusa terá:

$$\operatorname{sen} = \frac{6}{10} = 0,6; \operatorname{cos} = \frac{8}{10} = 0,8; \text{ e } \operatorname{tg} = \frac{6}{8} = 0,75;$$

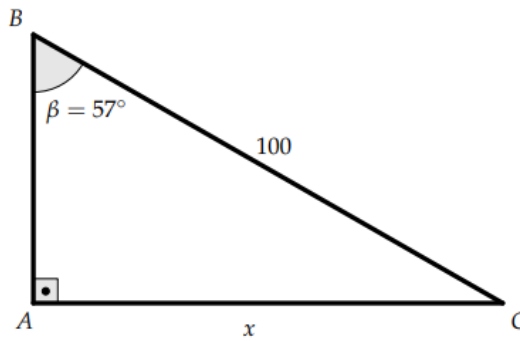
E o ângulo formado pelo lado menor terá:

$$\operatorname{sen} = \frac{8}{10} = 0,8; \operatorname{cos} = \frac{6}{10} = 0,6; \text{ e } \operatorname{tg} = \frac{8}{6} = 1,33$$

Lição 126 - Tabela de razões trigonométricas

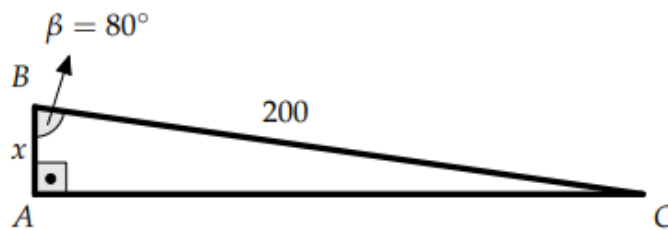
1. Consultando a tabela, determine as medidas de x .

a)



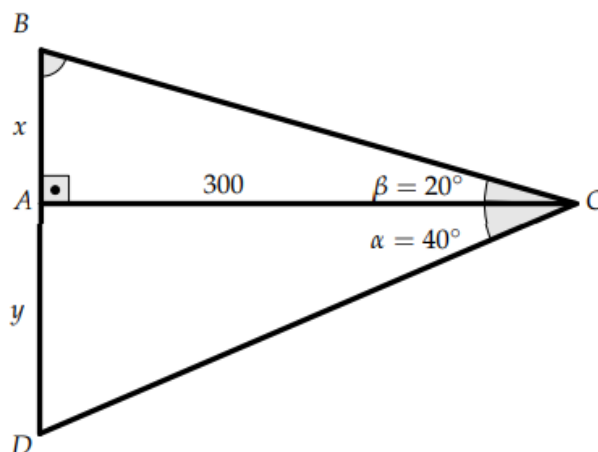
$$\text{R: } \sin 57^\circ = \frac{CO}{H} \Rightarrow 0,8387 = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 83,87$$

b)



$$\text{R: } \cos 80^\circ = \frac{CA}{H} \Rightarrow 0,1736 = \frac{x}{200} \Rightarrow x = 34,72$$

c)



$$\text{R: } \tan 20^\circ = \frac{CO}{CA} \Rightarrow 0,3640 = \frac{x}{300} \Rightarrow x = 109,20$$

$$\operatorname{tg} 40^{\circ} = \frac{CO}{CA} \Rightarrow 0,8391 = \frac{y}{300} \Rightarrow y = 251,73$$

d) Um triângulo retângulo possui catetos medindo 34 e 93. Qual é a medida aproximada do ângulo oposto ao cateto de menor medida?

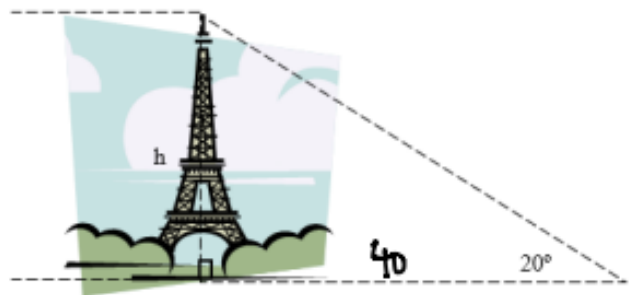
$$\text{R: } \operatorname{tg} \alpha^{\circ} = \frac{CO}{CA} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha^{\circ} = \frac{34}{93} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha^{\circ} = 0,3656 \sim \operatorname{tg} 20^{\circ}$$

e) Um triângulo retângulo possui catetos medindo 26 e 97. Qual é a medida aproximada do ângulo oposto ao cateto de maior medida?

$$\text{R: } \operatorname{tg} \beta^{\circ} = \frac{CO}{CA} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta^{\circ} = \frac{97}{26} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta^{\circ} = 3,7308 \sim \operatorname{tg} 75^{\circ}$$

2. A uma distância de 40 m, uma torre é vista sob um ângulo de 20° , como nos mostra a figura. Determine a altura h da torre.

(Use: $\operatorname{sen} 20^{\circ} = 0,34$, $\operatorname{cos} 20^{\circ} = 0,94$ e $\operatorname{tg} 20^{\circ} = 0,36$.)



a) 14,4 m

b) 17,1 m

c) 44,1 m

d) 52,3 m

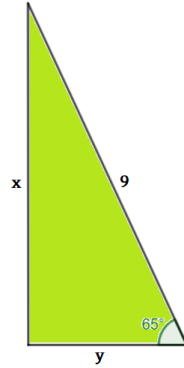
e) 63,8 m

$$\text{R: } \operatorname{tg} 20^{\circ} = \frac{CO}{CA} \Rightarrow 0,36 = \frac{h}{40} \Rightarrow x = 14,4 \text{ m. Alternativa a.}$$

Lição 127 - Razões trigonométricas de ângulos notáveis

1. No triângulo retângulo determine as medidas x e y indicadas.

(Use: $\text{sen } 65^\circ = 0,91$; $\text{cos } 65^\circ = 0,42$; $\text{tg } 65^\circ = 2,14$.)



R:

$$\text{sen } 65^\circ = \frac{CO}{H} \Rightarrow 0,91 = \frac{x}{9} \Rightarrow x = 8,19$$

$$\text{Cos } 65^\circ = \frac{CA}{H} \Rightarrow 0,42 = \frac{y}{9} \Rightarrow y = 3,78$$

2. Determine as medidas dos catetos de um triângulo retângulo sabendo que a hipotenusa mede 50 cm e um dos ângulos agudos mede 37° . (Use: $\text{sen } 37^\circ = 0,60$; $\text{cos } 37^\circ = 0,80$; $\text{tg } 37^\circ = 0,75$.)

R:

$$\text{sen } 37^\circ = \frac{CO}{H} \Rightarrow 0,60 = \frac{a}{50} \Rightarrow a = 30 \text{ cm}$$

$$\text{cos } 37^\circ = \frac{CA}{H} \Rightarrow 0,80 = \frac{b}{50} \Rightarrow b = 40 \text{ cm.}$$

3. Sabe-se que, num triângulo isósceles, cada lado congruente mede 40 cm. Se cada ângulo da base deste triângulo mede 62° , determine:

(Use: $\text{sen } 62^\circ = 0,88$; $\text{cos } 62^\circ = 0,47$; $\text{tg } 62^\circ = 1,88$.)

a) a medida x da base;

R: Sendo um triângulo isósceles, a altura referente à base divide o triângulo em duas partes iguais, assim, temos:

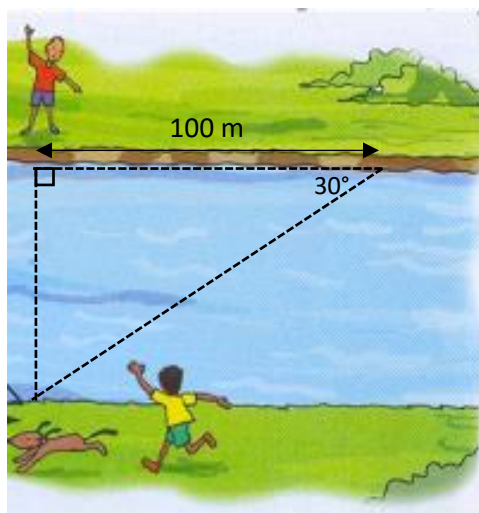
$$\cos 62^\circ = \frac{CA}{H} \Rightarrow 0,47 = \frac{\frac{x}{2}}{40} \Rightarrow \frac{x}{2} = 18,8 \Rightarrow x = 37,6 \text{ cm.}$$

b) a medida h da altura.

R: Utilizando os mesmos princípios do item anterior, temos:

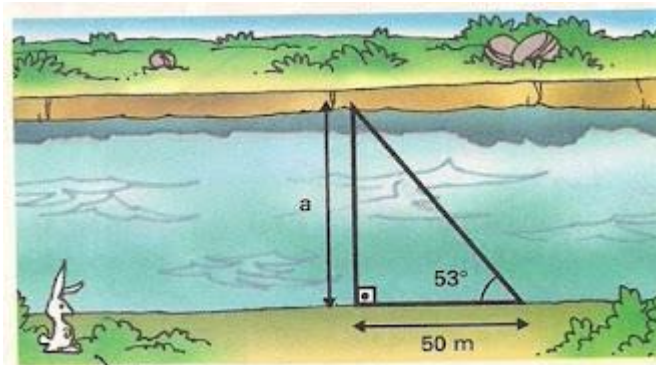
$$\sin 62^\circ = \frac{CO}{H} \Rightarrow 0,88 = \frac{h}{40} \Rightarrow h = 35,2 \text{ cm.}$$

4. Para determinar a largura de um rio, marcou-se a distância entre dois pontos A e B numa margem: $\overline{AB} = 100 \text{ m}$. Numa perpendicular às margens pelo ponto A, visou-se um ponto C na margem oposta e obteve-se o ângulo $ABC = 30^\circ$. Calcule a largura do rio.



$$\text{R: } \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{CO}{CA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{100\sqrt{3}}{3} \text{ m.}$$

5. Qual é a largura do rio representado pela figura abaixo? (Use: $\sin 53^\circ = 0,80$; $\cos 53^\circ = 0,60$; $\tan 53^\circ = 1,32$.)



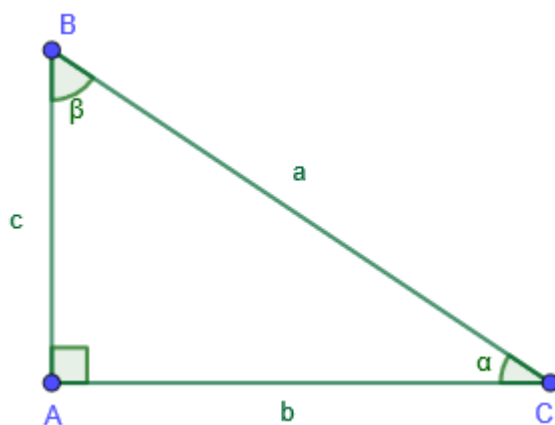
- a) 30 m
- b) 40 m
- c) 56 m
- d) 66 m

R: $\tan 53^\circ = \frac{CO}{CA} \Rightarrow 1,32 = \frac{a}{50} \Rightarrow a = 66 \text{ m. Alternativa d.}$

Lição 128 – Relações entre as razões trigonométricas

1. Demonstre com suas palavras a relação fundamental da trigonometria.

R: considere o triângulo ABC, retângulo em A.



Considere o ângulo α . Temos:

- Cateto oposto: c
- Cateto adjacente: b

– Hipotenusa: a

Dessa forma, as razões trigonométricas são:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \frac{\text{co}}{\text{hip}} \\ \operatorname{sen} \alpha &= \frac{c}{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\text{ca}}{\text{hip}} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \frac{\text{co}}{\text{ca}} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{c}{b}\end{aligned}$$

Ora, se nas duas primeiras razões isolarmos os catetos, eles podem ser encontrados pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \frac{c}{a} \\ a \cdot \operatorname{sen} \alpha &= c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{b}{a} \\ a \cdot \cos \alpha &= b\end{aligned}$$

Neste triângulo o Teorema de Pitágoras é:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Agora, substituindo os catetos b e c pelas relações que encontramos, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Colocando a^2
em evidência.

$$a^2 = (a \cdot \cos \alpha)^2 + (a \cdot \operatorname{sen} \alpha)^2$$

$$a^2 = a^2 \cdot \cos^2 \alpha + a^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$a^2 = a^2 \cdot (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha)$$

Passando a^2
dividindo o
primeiro
membro.

$$\frac{a^2}{a^2} = \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$1 = \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

2. Simplifique a expressão $\operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x - \operatorname{sen} x$.

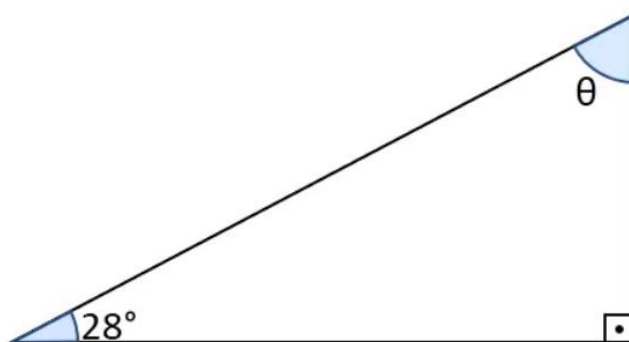
R: $\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

3. Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, e formando com o solo um ângulo de 30° (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1.000 metros, qual será a altura atingida pelo avião, em metros?

R: $\sin 30^\circ = \frac{CO}{H} \Rightarrow 0,5 = \frac{h}{1000} \Rightarrow h = 500 \text{ m.}$

4. No triângulo retângulo a seguir, determine o valor do ângulo θ , em graus, e seu seno, cosseno e tangente.

(Use: $\sin 28^\circ = 0,47$ e $\cos 28^\circ = 0,88$.)



R: Pela propriedade dos triângulos, onde seus ângulos internos somam 180° , temos:

$$28 + 90 + \theta = 180 \Rightarrow \theta = 180 - 90 - 28 = \theta = 62^\circ.$$

Sendo θ e 28° complementares, temos a relação:

$$\sin 28^\circ = \cos \theta \quad \text{e} \quad \cos 28^\circ = \sin \theta.$$

Portanto, $\cos \theta = 0,47$ e $\sin \theta = 0,88$.

Gabarito de Matemática

9º ano, Volume 9

Lição 129 – Comprimento de arco de circunferência

1. Determine o comprimento da circunferência de raio 3,5 cm.

R: $C = 2\pi R \Rightarrow C = 2 \cdot 3,14 \cdot 3,5 \Rightarrow C = 21,98 \text{ cm}.$

2. Uma circunferência tem 10,5 cm de diâmetro. Nessas condições, qual é o comprimento desta circunferência?

R: Sabendo que diâmetro = 2 vezes o raio, a circunferência pode ser escrita por:

$$C = \pi \cdot D \Rightarrow C = 3,14 \cdot 10,5 \Rightarrow C = 32,97 \text{ cm}$$

3. A medida do raio de uma circunferência corresponde à medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 9 cm e 12 cm. Determine o comprimento da circunferência.

R: Pelo teorema de Pitágoras, temos que a hipotenusa do triângulo de catetos 9 e 12 é 15 cm. Assim, a circunferência é: $C = 2\pi r \Rightarrow C = 2 \cdot 3,14 \cdot 15 \Rightarrow C = 94,2 \text{ cm}.$

4. O comprimento de uma circunferência é 50,24 cm. Nessas condições, determine:

a) o comprimento do raio desta circunferência;

R: $C = 2\pi r \Rightarrow 50,24 = 2 \cdot 3,14 \cdot r \Rightarrow r = \frac{50,24}{3,14 \cdot 2} \Rightarrow r = 8 \text{ cm}.$

b) as medidas dos lados de um quadrado, de um hexágono regular e de um triângulo equilátero inscritos nesta circunferência.

R: Quadrado: $l = r\sqrt{2} \Rightarrow l = 8\sqrt{2} \text{ cm}.$

Hexágono: $l = r \Rightarrow l = 8 \text{ cm}.$

Triângulo: $l = r\sqrt{3} \Rightarrow l = 8\sqrt{3} \text{ cm}.$

5. A medida do raio de uma circunferência, em centímetros, corresponde ao valor da raiz da equação $x^2 - 10x - 24 = 0$. Calcule, então, o comprimento desta circunferência.

R: Calculando o valor das raízes pelo método de Bhaskara, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(-24)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{196}}{2} \Rightarrow x = 12 \text{ ou } x = -2.$$

Dessa forma, como se trata de comprimentos, o valor de x não pode ser negativo, assim, $x = 12$. Portanto, a circunferência é: $C = 2\pi r \Rightarrow C = 2 \cdot 3,14 \cdot 12 \Rightarrow C = 75,36 \text{ cm}$.

6. Uma pista tem 25 m de raio. Quantos metros percorre uma pessoa que dá 20 voltas em torno desta pista?

R: Sendo 25 m o raio, a circunferência é $C = 2\pi r \Rightarrow C = 2 \cdot 3,14 \cdot 25 \Rightarrow C = 157 \text{ m}$. Assim 20 voltas equivalem a $20 \cdot 157 = 3.140 \text{ m}$.

7. Se uma pessoa der 10 voltas completas em torno de um jardim circular, ela percorrerá 2.198 m. Qual é o diâmetro deste jardim?

R: Se 10 voltas são 2.198 m, uma volta é 219,8 m, assim, pela circunferência, obtemos o diâmetro:

$$C = \pi d \Rightarrow 219,8 = 3,14 \cdot d \Rightarrow d = \frac{219,8}{3,14} \Rightarrow d = 70 \text{ m}.$$

8. A roda de uma bicicleta tem 0,90 m de diâmetro. Nessas condições responda:

a) Qual é o comprimento da circunferência desta roda?

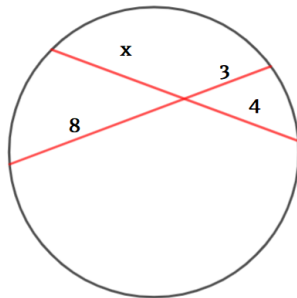
$$\text{R: } C = \pi d \Rightarrow C = 3,14 \cdot 0,90 \Rightarrow C = 2,826 \text{ m}.$$

b) Quantas voltas completas a roda dá num percurso de 9.891 m?

R: O número de voltas é a razão entre a distância percorrida e a circunferência da roda: $n = \frac{9.891}{2,826} \Rightarrow n = 3.500 \text{ voltas}$.

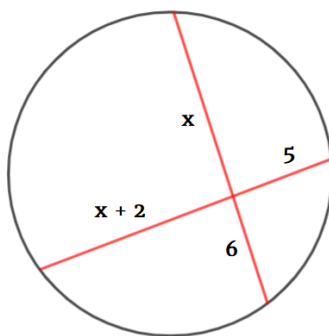
Lição 130 – Relações entre cordas

1. Determine a medida x indicada na figura abaixo.



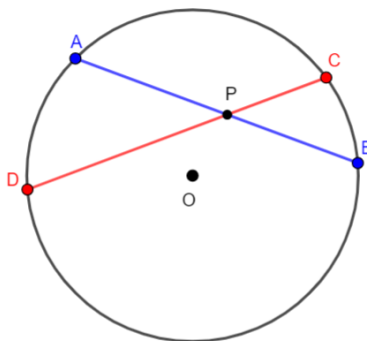
R: $4x = 3 \cdot 8 \Rightarrow x = \frac{24}{4} \Rightarrow x = 6.$

2. Na circunferência abaixo, determine a medida x indicada.



R: $6x = 5(x + 2) \Rightarrow 6x = 5x + 10 \Rightarrow 6x - 5x = 10 \Rightarrow x = 10.$

3. Na figura abaixo, $PA = 3x$, $PB = x + 1$, $PC = x$ e $PD = 4x - 1$.



Nessas condições, determine:

a) a medida x ;

R:

$$3x(x + 1) = x(4x - 1) \Rightarrow 3x^2 + 3x = 4x^2 - x \Rightarrow 0 = 4x^2 - 3x^2 - x - 3x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4$$

Como se trata de comprimento, x não pode ser nulo, portanto, $x = 4$.

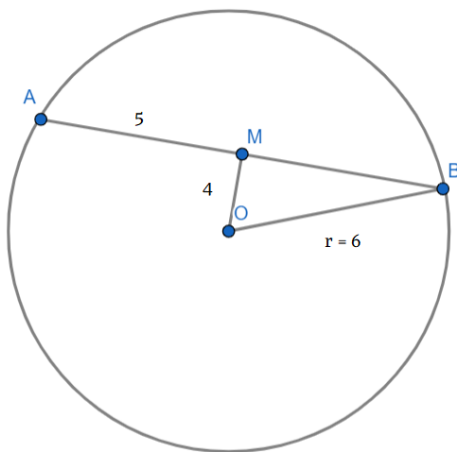
b) o comprimento de cada uma das cordas.

R: Corda $AB = 3x + (x + 1) = 3 \cdot 4 + 4 + 1 \Rightarrow AB = 17$.

Corda $CD = x + (4x - 1) = 4 + 4 \cdot 4 - 1 \Rightarrow CD = 19$.

4. Numa circunferência de centro O e raio 6 cm, traça-se uma corda $\overline{AB}$. Sobre esta corda, toma-se um ponto M de tal forma que $AM = 5$ cm e $OM = 4$ cm. Determine a medida do segmento $\overline{MB}$.

R: Construindo a circunferência enunciada, temos:

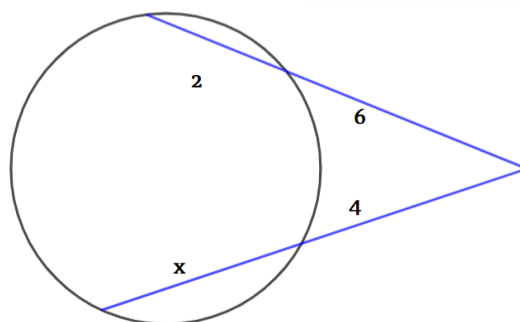


Dessa forma, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$4^2 + \overline{MB}^2 = 6^2 \Rightarrow \overline{MB}^2 = 36 - 16 \Rightarrow \overline{MB} = \sqrt{10} \text{ cm.}$$

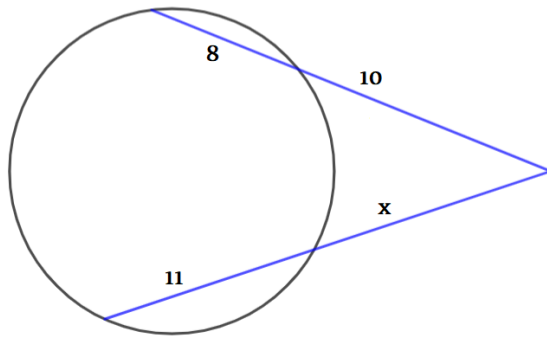
Lição 131 – Relação entre segmentos secantes

1. Determine a medida x indicada na circunferência da figura abaixo.



R: $2 \cdot 6 = 4x \Rightarrow x = \frac{12}{4} \Rightarrow x = 3$

2. Determine a medida x indicada na circunferência da figura abaixo.

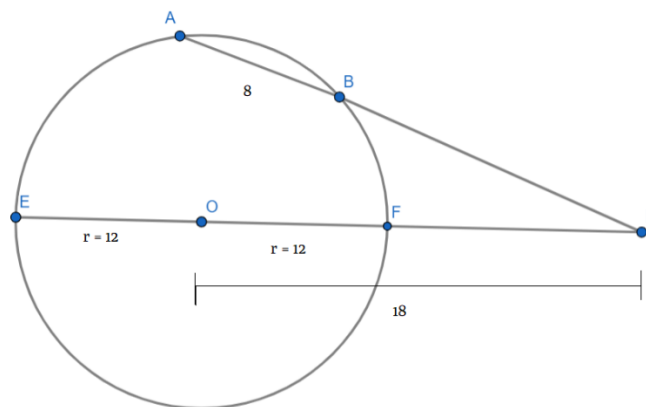


R: $8 \cdot 10 = 11x \Rightarrow x = \frac{80}{11} \cong 7,3.$

3. Por um ponto P, distante 18 cm do centro de uma circunferência, traça-se uma secante que determina na circunferência uma corda $\overline{AB}$, que mede 8 cm. Se o comprimento do raio da circunferência é 12 cm, determine:

a) o comprimento do segmento de secante traçada do ponto P;

R: Construindo a circunferência, temos:



Dessa forma, sabemos que $8 \cdot PB = (12 + 12) \cdot (18 - 12) \Rightarrow PB = \frac{144}{8} \Rightarrow PB = 18 \text{ cm}.$

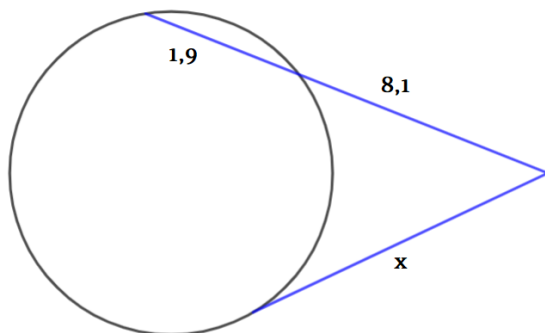
Assim, o segmento $AP = 18 + 8 = 26 \text{ cm}.$

b) o comprimento do segmento externo desta secante.

R: Como visto no item anterior, o segmento $PB = 18 \text{ cm}.$

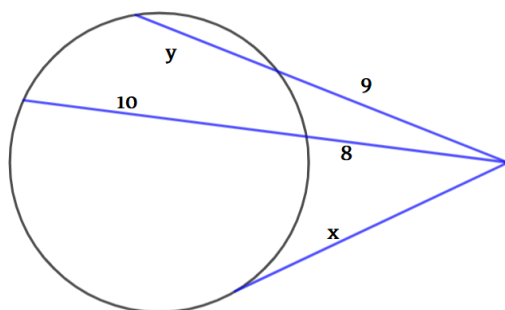
Lição 132 – Relação entre segmentos secante e tangente

1. Determine a medida x do segmento de reta tangente indicada na circunferência ao lado.



R: $8,1 \cdot (8,1 + 1,9) = x^2 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = 9$.

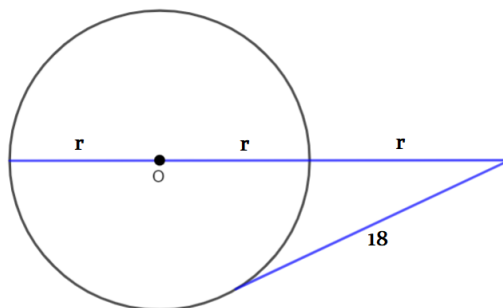
2. Na figura seguinte, determine as medidas x e y indicadas.



R: $9y = 10 \cdot 8 \Rightarrow y = \frac{80}{9}$.

$x^2 = 8 \cdot (10 + 8) \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = \sqrt{144} = 12$

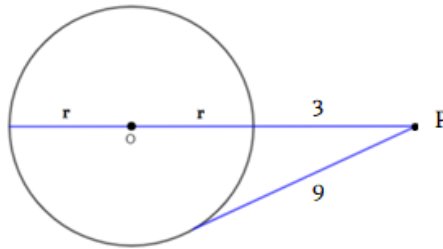
3. Determine a medida r do raio da circunferência da figura abaixo.



R: $r \cdot 3r = 18^2 \Rightarrow 3r^2 = 324 \Rightarrow r^2 = 108 \Rightarrow r = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

4. De um ponto P situado a 3 cm de uma circunferência, traça-se um segmento de tangente $\overline{PC}$ cuja medida é 9 cm. Nessas condições, determine o comprimento do raio desta circunferência.

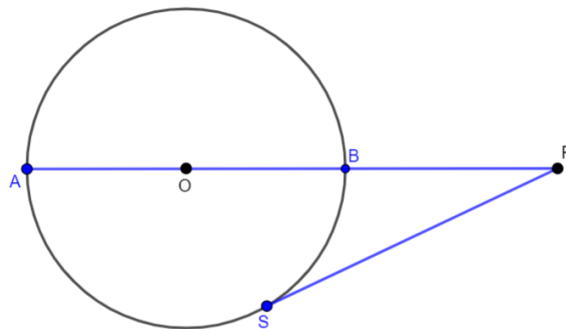
R: Construindo a circunferência, temos:



$$\text{Assim: } 3 \cdot (2r + 3) = 9^2 \Rightarrow 6r + 9 = 81 \Rightarrow 6r = 81 - 9 \Rightarrow r = \frac{72}{6} \Rightarrow r = 12 \text{ cm.}$$

5. Na figura abaixo, temos que $PO = 20$ cm e o comprimento do raio da circunferência é 16 cm. Nessas condições, determine a medida do segmento $\overline{PS}$.

R: Sabendo que $PO = 20$ cm e o raio = 16 cm, temos que $PB = 4$ cm e $AB = 32$ cm. Dessa maneira: $4 \cdot (4 + 32) = PS^2 \Rightarrow PS^2 = 144 \Rightarrow PS = \sqrt{144} = 12$ cm.



6. De um ponto P externo a uma circunferência, traçamos um segmento de tangente $\overline{PA}$ e um segmento de secante. O segmento externo da secante mede 4 cm e o segmento interno tem a mesma medida que o segmento $\overline{PA}$. Nessas condições, fazendo $\sqrt{5} = 2,23$, determine:

a) a medida do segmento $\overline{PA}$;

$$\text{R: } 4 \cdot (\overline{PA} + 4) = \overline{PA}^2 \Rightarrow 4\overline{PA} + 16 = \overline{PA}^2 \Rightarrow -\overline{PA}^2 + 4\overline{PA} + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\overline{PA} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \overline{PA} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4^2 - 4(-1)(16)}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow \overline{PA} = \frac{-4 \pm \sqrt{80}}{-2} \Rightarrow \overline{PA} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{5}}{-2} \Rightarrow$$

$$\overline{PA} = 6,46 \text{ ou } \overline{PA} = -2,46. \text{ Portanto, sendo PA comprimento, } \overline{PA} = 6,46 \text{ cm.}$$

b) o comprimento do segmento de secante.

R: O segmento secante mede: $4 + 6,46 = 10,46$ cm.

Lição 133 – Polígono regular

1. Defina polígono.

R: Chama-se polígono a toda forma geométrica delimitada pela união de três ou mais segmentos consecutivos não colineares.

2. Defina polígono regular e dê quatro exemplos.

R: Se a forma geométrica possui todos os seus ângulos e lados congruentes, é identificada como polígono regular. Exemplos: quadrado, triângulo equilátero, pentágono e hexágono, ambos com todos os lados e ângulos iguais.

Lição 134 – Polígonos regulares inscritos na circunferência

1. Defina um polígono inscrito na circunferência.

R: Um polígono é um polígono inscrito em uma circunferência quando todos os seus vértices são pontos pertencentes a ela.

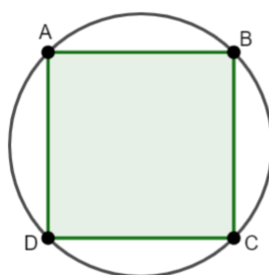
2. Defina um polígono regular inscrito na circunferência.

R: Quando dividimos uma circunferência em n (com $n > 2$) arcos congruentes, as cordas consecutivas delimitam um polígono regular de n lados, inscrito na circunferência.

3. Desenhe os seguintes polígonos inscritos na circunferência.

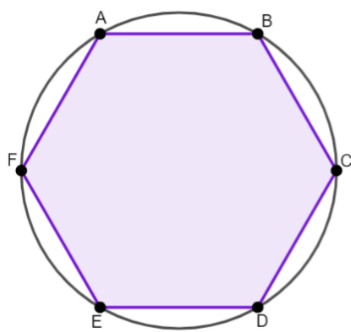
a) Quadrado

R:



b) Hexágono regular

R:



Lição 135 - Elementos de um polígono regular inscrito

1. Determine a medida do ângulo central e a medida do ângulo interno de cada um dos seguintes polígonos regulares inscritos:

a) triângulo equilátero;

$$\text{R: } \hat{\text{Ângulo central}} = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ. \hat{\text{Ângulo interno}} = \frac{(n-2)180^\circ}{n} = \frac{(3-2)180^\circ}{3} = 60^\circ$$

b) quadrado;

$$\text{R: } \hat{\text{Ângulo central}} = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ. \hat{\text{Ângulo interno}} = \frac{(n-2)180^\circ}{n} = \frac{(4-2)180^\circ}{4} = 90^\circ$$

c) pentágono regular;

$$\text{R: } \hat{\text{Ângulo central}} = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ. \hat{\text{Ângulo interno}} = \frac{(n-2)180^\circ}{n} = \frac{(5-2)180^\circ}{5} = 108^\circ$$

d) octógono regular.

$$\text{R: } \hat{\text{Ângulo central}} = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ. \hat{\text{Ângulo interno}} = \frac{(n-2)180^\circ}{n} = \frac{(8-2)180^\circ}{8} = 135^\circ$$

2. O perímetro de um polígono regular inscrito numa circunferência cujo raio mede x é 60 cm. Sabe-se que outro polígono regular com o mesmo número de lados está

inscrito numa circunferência de raio 25 cm e tem 150 cm de perímetro. Quanto mede o comprimento x de raio da primeira circunferência?

$$\text{R: } \frac{x}{25} = \frac{60}{150} \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 25}{150} \Rightarrow x = 10 \text{ cm.}$$

3. Os perímetros de dois polígonos regulares com o mesmo número de lados medem 48 cm e 60 cm, respectivamente. Quanto mede o apótema do segundo, se o apótema do primeiro mede $4\sqrt{3}$ cm?

$$\text{R: } \frac{48}{60} = \frac{4\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 4\sqrt{3}}{48} \Rightarrow x = 5\sqrt{3} \text{ cm.}$$

4. Os perímetros de dois polígonos regulares com o mesmo número de lados estão entre si como 2 está para 5. Sabendo que a medida do lado do segundo polígono é $20\sqrt{2}$ cm, calcule a medida do lado do primeiro polígono.

$$\text{R: } \frac{x}{20\sqrt{2}} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 20\sqrt{2}}{5} \Rightarrow x = 8\sqrt{2} \text{ cm.}$$

5. Os perímetros de dois polígonos regulares com o mesmo número de lados são, respectivamente, 28,28 cm e 39,592 cm. Quanto medem o raio e o apótema do primeiro se o raio e o apótema do segundo medem, respectivamente, 7 e 3,5 cm?

$$\text{R: Raio do primeiro: } \frac{28,28}{39,592} = \frac{r}{7} \Rightarrow r = \frac{28,28 \cdot 7}{39,592} \Rightarrow r = 5 \text{ cm.}$$

$$\text{Apótema: } \frac{28,28}{39,592} = \frac{a}{3,5} \Rightarrow a = \frac{28,28 \cdot 3,5}{39,592} \Rightarrow a = 2,5 \text{ cm.}$$

Lição 136 – Quadrado inscrito

1. Uma circunferência tem 40 cm de raio. Nessas condições, determine a medida do lado de um quadrado inscrito nesta circunferência.

$$\text{R: } l = r\sqrt{2} \Rightarrow l = 40\sqrt{2} \text{ cm.}$$

2. Usando $\sqrt{2} = 1,41$, determine a medida do apótema de um quadrado inscrito numa circunferência que tem 15 cm de raio.

$$\text{R: } a = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{15 \cdot 1,41}{2} \Leftrightarrow a = 10,575 \text{ cm}$$

3. Quais são o perímetro e a área de um quadrado inscrito numa circunferência que tem 32 cm de raio?

$$\text{R: } l = r\sqrt{2} \Rightarrow l = 32\sqrt{2} \text{ cm, portanto o perímetro é } 128\sqrt{2} \text{ cm e a área é } 2.048 \text{ cm}^2.$$

4. Um quadrado cujo lado mede 16 cm está inscrito numa circunferência. Determine o comprimento r do raio desta circunferência.

$$\text{R: } l = r\sqrt{2} \Rightarrow 16 = r\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{16}{\sqrt{2}} \text{ cm.}$$

5. Um quadrado cujo lado mede $20\sqrt{2}$ cm está inscrito em uma circunferência de raio r. Qual é a medida do apótema deste quadrado?

$$\text{R: } l = r\sqrt{2} \Rightarrow 20\sqrt{2} = r\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 20 \text{ cm. } a = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{20 \cdot \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a = 10\sqrt{2} \text{ cm.}$$

6. A medida do lado de um quadrado inscrito numa circunferência corresponde à medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem $20\sqrt{2}$ cm e 2 cm. Nessas condições, determine o raio da circunferência onde está inscrito o quadrado.

R: Sendo $20\sqrt{2}$ e 2 os catetos, a hipotenusa mede:

$$(20\sqrt{2})^2 + 2^2 = h^2 \Rightarrow h = \sqrt{804} = 2\sqrt{201}. l = r\sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{201} = r\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{201}}{\sqrt{2}} = \sqrt{402} \text{ cm.}$$

Lição 137 – Hexágono regular inscrito

1. Uma circunferência tem 40 cm de raio. Nessas condições, determine a medida do lado de um hexágono regular inscrito nesta circunferência.

R: $l = r \Rightarrow l = 40 \text{ cm}.$

2. Usando $\sqrt{3} = 1,73$, determine a medida do apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência que tem 15 cm de raio.

R: $a = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{15 \cdot 1,73}{2} \Leftrightarrow a = 12,975 \text{ cm}.$

3. Em uma circunferência de raio r estão inscritos um quadrado e um hexágono regular. Considerando que o lado do hexágono mede 50 cm e fazendo $\sqrt{2} = 1,41$, determine a medida do lado do quadrado.

R: Se o lado do hexágono mede 50 cm, então o raio da circunferência também mede 50 cm, assim, o lado do quadrado vale: $l = r\sqrt{2} \Rightarrow l = 50 \cdot 1,41 \Rightarrow l = 70,5 \text{ cm}.$

Lição 138 – Triângulo equilátero inscrito

1. Uma circunferência tem 40 cm de raio. Nessas condições, determine a medida do lado de um triângulo equilátero inscrito nesta circunferência.

R: $l = r\sqrt{3} \Rightarrow l = 40\sqrt{3} \text{ cm}.$

2. Determine a medida do apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência que tem 15 cm de raio.

R: $a = \frac{r}{2} \Leftrightarrow a = \frac{15}{2} \Leftrightarrow a = 7,5 \text{ cm}.$

3. O apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio r mede 6,25 cm. Determine o valor de r .

R: $a = \frac{r}{2} \Leftrightarrow 6,25 = \frac{r}{2} \Leftrightarrow r = 6,25 \cdot 2 \Leftrightarrow r = 12,5 \text{ cm}.$

4. Sabendo que o apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio r mede 15 cm, determine:

a) o comprimento do raio;

$$\text{R: } a = \frac{r}{2} \Leftrightarrow 15 = \frac{r}{2} \Leftrightarrow r = 15 \cdot 2 \Leftrightarrow r = 30 \text{ cm.}$$

b) a medida do lado do triângulo, fazendo $\sqrt{3} = 1,73$.

$$\text{R: } l = r\sqrt{3} \Rightarrow l = 30 \cdot 1,73 \Rightarrow l = 51,9 \text{ cm.}$$

5. Num triângulo retângulo, as medidas dos catetos correspondem às medidas do lado e do apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio 10 cm. Nessas condições, determine a medida da hipotenusa deste triângulo retângulo.

$$\text{R: } l = r\sqrt{3} \Rightarrow l = 10\sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$a = \frac{r}{2} \Leftrightarrow a = \frac{10}{2} \Leftrightarrow a = 5 \text{ cm.}$$

Dessa forma, a hipotenusa mede:

$$l^2 + a^2 = h^2 \Rightarrow (10\sqrt{3})^2 + 5^2 = h^2 \Rightarrow h^2 = 325 \Rightarrow h = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$$

6. Determine a razão entre o lado de um hexágono regular e o lado de um triângulo equilátero inscritos numa circunferência de raio r .

R: Sendo o lado do hexágono = h e o do triângulo = t , a razão entre os lados é:

$$\frac{h}{t} = \frac{r}{r\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

7. O raio de uma circunferência corresponde, em centímetros, à raiz positiva da equação $x^2 - 3x - 40 = 0$. Nessas condições, determine a medida do lado e do apótema do triângulo equilátero inscrito nesta circunferência.

$$\text{R: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-40)}}{2 \cdot (1)} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{2} \Rightarrow x = 8 \text{ ou } x = -5.$$

$$\text{Sendo o raio} = 8, \text{ temos: } l = r\sqrt{3} \Rightarrow l = 8\sqrt{3} \text{ cm e } a = \frac{r}{2} \Leftrightarrow a = \frac{8}{2} \Leftrightarrow a = 4 \text{ cm.}$$

Lição 139 – Área de figuras planas

1. Um quadrado e um retângulo têm áreas iguais. Os lados do retângulo são expressos por dois números naturais consecutivos, enquanto o quadrado tem $2\sqrt{5}$ cm de lado. Qual é o perímetro do retângulo?

R: Área do quadrado: $(2\sqrt{5})^2 = 20 \text{ cm}^2$. Dessa forma, os lados do retângulo, que são consecutivos e tem área de 20 cm^2 são 4 e 5 cm. Dessa forma, o perímetro do retângulo é: $4 + 4 + 5 + 5 = 18 \text{ cm}$.

2. Um número natural x é 20 unidades menor que o seu o quadrado. Se este número representa a medida do lado de um quadrado, calcule a área deste quadrado.

R:

$$x = x^2 - 20 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-20)}}{2 \cdot (1)}$$
$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2} \Rightarrow x = 5 \text{ ou } x = -4.$$

Sendo comprimento, $x = 5$. A área do quadrado é $5^2 = 25 \text{ cm}^2$.

3. Quantos pisos retangulares de 20 cm por 35 cm são necessários para cobrir uma sala, também retangular, de 5,6 m por 8 m?

R: Área do piso = $0,20 \cdot 0,35 = 0,07 \text{ m}^2$. Área da sala = $5,6 \cdot 8 = 44,8 \text{ m}^2$. Portanto a quantidade de pisos necessários para preencher a sala é: $\frac{44,8}{0,07} = 640$ pisos.

4. A área de um retângulo é 35 cm^2 . As medidas dos lados deste retângulo são expressas por x e $x - 2$. Qual é o perímetro deste retângulo?

R: $x(x - 2) = 35 \Rightarrow x^2 - 2x - 35 = 0$

Utilizando o método de Bhaskara, temos que $x = 7$.

Assim, um lado do retângulo mede 7 cm, e o outro 5 cm, dessa forma, o perímetro é:

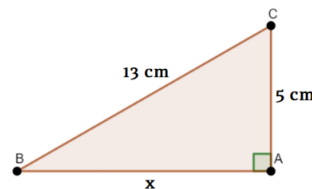
$$5 + 5 + 7 + 7 = 24 \text{ cm}.$$

5. As raízes da equação $x^2 - 15x + 26 = 0$ são as medidas, em centímetros, dos lados de um retângulo. Determine a área deste retângulo.

$$\text{R: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4(1)(26)}}{2 \cdot (1)} \Rightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{121}}{2} \Rightarrow x = 13 \text{ ou } x = 2.$$

Portanto, a área do retângulo é: $13 \cdot 2 = 26 \text{ cm}^2$.

6. No triângulo retângulo da figura, determine a medida x do cateto $\overline{AB}$ e calcule, a seguir, a área do triângulo.



R: O cateto é: $x^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 = 169 - 25 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = 12 \text{ cm}$. Assim, a área do triângulo é: $A = \frac{12 \cdot 5}{2} \Rightarrow A = 30 \text{ cm}^2$.

7. Você quer fazer uma pipa em forma de losango, de tal forma que as varetas meçam 75 cm e 50 cm. Nessas condições, quantos centímetros quadrados de papel de seda você irá usar para fazer esta pipa?

$$\text{R: } A = \frac{D \cdot d}{2} \Rightarrow A = \frac{75 \cdot 50}{2} \Rightarrow A = 1.875 \text{ cm}^2 \text{ de papel.}$$

8. Em um losango, cada lado mede 30 cm. Se a diagonal maior deste losango mede 48 cm, determine a área deste losango.

R: Metade da diagonal maior vale 24 cm, assim, por Pitágoras, metade da diagonal menor vale: $x^2 + 24^2 = 30^2 \Rightarrow x^2 = 900 - 576 \Rightarrow x^2 = 324 \Rightarrow x = 18 \text{ cm}$. Dessa maneira, a diagonal menor mede 36 cm, assim a área do losango é: $\frac{48 \cdot 36}{2} = 864 \text{ cm}^2$.

9. Sabendo que as medidas das diagonais de um losango correspondem às raízes da equação $x^2 - 13x + 40 = 0$, determine a área deste losango.

$$\text{R: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(1)(40)}}{2 \cdot (1)} \Rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow x = 8 \text{ ou } x = 5.$$

Portanto, a área do losango é: $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ cm}^2$.

10. Um terreno tem a forma de um trapézio de bases 35 m e 24 m, com altura 22 m. Neste terreno, foi construída uma piscina retangular de 10,5 m por 6 m. No restante do terreno, colocou-se grama. Qual a área da parte do terreno que foi gramada?

R: A área gramada é a área do terreno menos a da piscina, portanto,

$$A = \frac{(35 + 24) \cdot 22}{2} - (10,5 \cdot 6) \Rightarrow A = 649 - 63 \Rightarrow A = 586 \text{ m}^2.$$

11. Um hexágono regular está inscrito numa circunferência de raio 18 cm. Nessas condições, determine:

a) a medida do lado deste hexágono;

R: $l = r \Rightarrow l = 18 \text{ cm}.$

b) o semiperímetro do hexágono;

R: $p = \frac{P}{2} \Rightarrow p = \frac{6 \cdot 18}{2} \Rightarrow p = 54 \text{ cm}.$

c) a medida do apótema do hexágono;

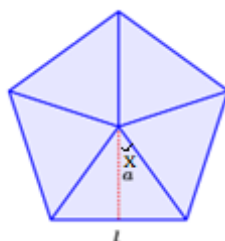
R: $a = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{18 \cdot \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a = 9\sqrt{3} \text{ cm}$

d) a área deste hexágono.

R: $A = p \cdot a \Rightarrow A = 54 \cdot 9\sqrt{3} \Rightarrow A = 486\sqrt{3} \text{ cm}^2$

12. Seja um pentágono regular cujo lado mede 8 cm. Calcule a medida do apótema deste pentágono e a área do pentágono.

($\sin 36^\circ = 0,59$); ($\cos 36^\circ = 0,81$); ($\tan 36^\circ = 0,73$)



R: Analisando a imagem, temos que o ângulo $x = 36^\circ$ e o apótema é:

$$a = \frac{l}{2} \cdot \sin 36^\circ \Rightarrow a = \frac{8 \cdot 0,59}{2} \Rightarrow a = 2,36 \text{ cm.}$$

Dessa maneira, sabendo que o semi-perímetro do pentágono é: $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ cm}$, a área do pentágono é: $A = 20 \cdot 2,36 \Rightarrow A = 47,2 \text{ cm}^2$.

Lição 140 – Área do círculo

1. Qual é a área de um círculo cujo raio mede $6\sqrt{2} \text{ cm}$?

R: $A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot (6\sqrt{2})^2 \Rightarrow A = 72\pi \text{ cm}^2$.

2. Um disco de cobre tem 80 cm de diâmetro. Determine a área deste disco.

R: Sendo o diâmetro $= 2r$, o raio do disco é de 40 cm. Assim, a área do disco é:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot 40^2 \Rightarrow A = 1.600\pi \text{ cm}^2.$$

3. Um quadrado que tem $5\sqrt{2} \text{ cm}$ de lado está inscrito numa circunferência. Determine a área da região circular limitada por esta circunferência.

R: $l = r\sqrt{2} \Rightarrow 5\sqrt{2} = r\sqrt{2} \Rightarrow r = 5 \text{ cm}$. $A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot 5^2 \Rightarrow A = 25\pi \text{ cm}^2$.

4. Qual é a área da região circular limitada por uma circunferência onde está inscrito um hexágono regular que tem 60 cm de perímetro?

R: Sendo 60 cm o perímetro, o lado do hexágono mede $\frac{60}{6} = 10 \text{ cm}$, portanto o raio da circunferência mede 10 cm, e sua área é:

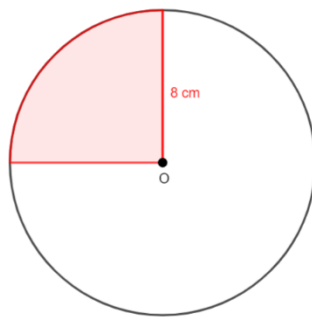
$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot 10^2 \Rightarrow A = 100\pi \text{ cm}^2.$$

5. Um círculo está inscrito num quadrado cujo perímetro é 48 cm. Determine a área do círculo.

R: O lado do quadrado mede $\frac{48}{4} = 12$ cm, que equivale ao diâmetro do círculo. Assim, seu raio é 6 cm e a área é:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot 6^2 \Rightarrow A = 36\pi \text{ cm}^2.$$

6. Observe a figura, e responda:



a) A que fração do círculo corresponde a região colorida de vermelho?

R: $\frac{1}{4}$.

b) Qual é a área da região colorida de vermelho?

R: $A = \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 8^2 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \cdot 64 \pi \Rightarrow A = 16\pi \text{ cm}^2$

Lição 141 – Figuras espaciais

1. Calcule o volume de um cubo, sabendo que a medida da sua aresta é igual a 7 cm.

R: $V=l^3 \Rightarrow V=7^3 \Rightarrow V=343 \text{ cm}^3$.

2. Calcule o volume de um cubo, sabendo que a medida da sua aresta é igual a 18 cm.

R: $V=l^3 \Rightarrow V=18^3 \Rightarrow V=5.832 \text{ cm}^3$.

3. Calcule o volume de um cubo, sabendo que a medida da sua aresta é igual a 20 cm.

R: $V=l^3 \Rightarrow V=20^3 \Rightarrow V=8.000 \text{ cm}^3$.

4. A soma das áreas dos lados de um cubo é igual a 864 cm^2 . Calcule o volume deste cubo.

R: Sabendo a área total do cubo, temos:

$$\text{Área total} = 6l^2 \Rightarrow 864=6l^2 \Rightarrow \frac{864}{6} = l^2 \Rightarrow l^2=144 \Rightarrow l=12 \text{ cm}.$$

Assim, tendo o valor do lado do cubo, seu volume é: $V=l^3 \Rightarrow V=12^3 \Rightarrow V=1.728 \text{ cm}^3$.

5. Um reservatório cilíndrico possui raio igual a 2 metros e altura de 10 metros. Qual é a quantidade de água que cabe neste reservatório em m^3 ?

R: $V = \pi r^2 h \Rightarrow V = 3,14 \cdot 2 \cdot 10 \Rightarrow V = 62,8 \text{ m}^3$.

6. Calcule o volume de um cilindro cuja área da base seja de 3 cm^2 e que tenha altura de 9 cm.

R: $V = A_B \cdot h \Rightarrow V = 3 \cdot 9 \Rightarrow V = 27 \text{ cm}^3$.

7. O raio do círculo da base mede 17 cm, e a altura mede 6 cm. Qual é o volume do cilindro, dado: $\pi=3,14$?

R: $V = \pi r^2 h \Rightarrow V = 3,14 \cdot 17 \cdot 6 \Rightarrow V = 320,28 \text{ cm}^3$.

8. Um clube adquiriu 2 tanques de água com formato cilíndrico. Sabe-se que ambos os tanques medem 6 m de altura. A base do primeiro tem 6 m de diâmetro, e o segundo tem 2 m de raio. Qual é o volume dos dois tanques?

R: O primeiro tanque tem 6 m de diâmetro, portanto 3 m de raio. Assim, seu volume é:

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = 3,14 \cdot 3 \cdot 6 \Rightarrow V = 56,52 \text{ m}^3.$$

O segundo tanque tem volume de:

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = 3,14 \cdot 2 \cdot 6 \Rightarrow V = 37,68 \text{ m}^3.$$

9. Calcule o volume de um bloco retangular com dimensões 40 cm, 10 cm e 20 cm.

R: $V = abc \Rightarrow V = 40 \cdot 10 \cdot 20 \Rightarrow V = 8.000 \text{ cm}^3.$

10. Calcule o volume de um bloco retangular com dimensões 4 cm, 5 cm e 6 cm.

R: $V = abc \Rightarrow V = 4 \cdot 5 \cdot 6 \Rightarrow V = 120 \text{ cm}^3.$

11. Calcule a área lateral do bloco retangular com dimensões 60 cm, 30 cm e 15 cm.

R:

$$A_T = 2(ac + ab + bc) \Rightarrow A_T = 2(60 \cdot 15 + 60 \cdot 30 + 30 \cdot 15) \Rightarrow A_T = 2(900 + 1800 + 450) \Rightarrow A_T = 2 \cdot 3150 \Rightarrow A_T = 6300 \text{ cm}^2$$

12. Calcule a área total do bloco retangular com dimensões 15 cm, 20 cm e 25 cm.

R:

$$A_T = 2(ac + ab + bc) \Rightarrow A_T = 2(15 \cdot 25 + 15 \cdot 20 + 20 \cdot 25) \Rightarrow A_T = 2(375 + 300 + 500) \Rightarrow A_T = 2 \cdot 1175 \Rightarrow A_T = 2350 \text{ cm}^2$$

Lição 142 - Avaliação

1. Defina:

a) probabilidade;

R: A probabilidade é a chance de um evento específico acontecer dentro de todos os eventos possíveis.

b) espaço amostral;

R: Chamamos Espaço Amostral, e indicamos por Ω , um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

c) evento.

R: Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral (Ω).

2. Qual é o espaço amostral do lançamento de um dado? E qual é a probabilidade de a face com o número 5 cair voltada para cima?

R: O espaço amostral é: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. A probabilidade de cair a o número 5 para cima é de $\frac{1}{5}$.

3. Numa loja há quatro portas de entrada.

a) Quantas são as possibilidades de entrar por uma porta e sair por outra?

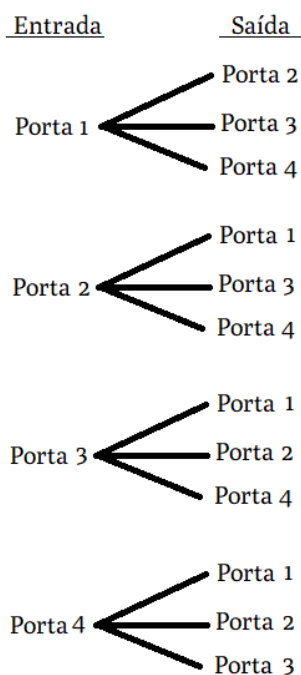
R: Ao entrar em uma das 4 opções de porta, necessariamente uma é excluída na hora de sair, a fim de que se entre por uma e saia por outra, dessa forma as possibilidades são $4 \cdot 3 = 12$ maneiras de se entrar por uma porta e sair por outra.

b) Quantas são as possibilidades de escolha das portas para entrar e sair da loja, podendo usar a mesma porta?

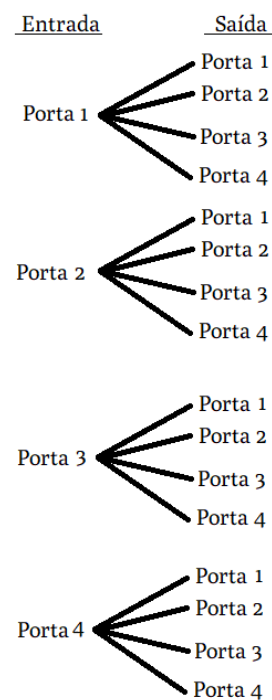
R: Podendo entrar por 4 portas e sair por 4, as possibilidades são $4 \cdot 4 = 16$ maneiras.

c) Construa a árvore de possibilidades dos dois itens anteriores.

R: Item a)



Item b)



4. Em uma sala do sexto ano, ao sortearmos uma pessoa ao acaso, a probabilidade de essa pessoa ser uma garota é de $\frac{4}{7}$. Se existem entre 55 e 60 alunos na sala, calcule quantos são os garotos.

R: Sendo $\frac{4}{7}$ de garotas, temos $\frac{3}{7}$ de garotos. Assim, a quantidade de garotos na sala é de $\frac{3}{7} \cdot 55 = 23,6$ a $\frac{3}{7} \cdot 60 = 25,7$, entretanto, como não existem frações de pessoas, e sendo 55 e 60 os limites mínimos e máximo, respectivamente, arredondamos para cima e baixo, respectivamente, assim, a quantidade de garotos na sala é de 24 a 25.

5. Sorteando um número natural de 1 a 30:

a) qual é a probabilidade de o número sorteado ser par?

R: $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

b) qual é a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 3?

R: $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

c) qual é a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 6?

R: $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

d) qual é a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 6, sabendo que ele é um número par?

R: $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

6. Observe a tabela a seguir, que mostra o número de anos de escolaridade, a partir do 1º ano do Ensino Fundamental, de um grupo de 40 funcionários de uma empresa:

Quantidade de funcionários por anos de escolaridade	
Anos de escolaridade	Frequência
9	5
13	7
15	12
16	16

a) Qual é a moda do número de anos de escolaridade nesta empresa?

R: 16 anos de escolaridade.

b) E a média aritmética?

$$\text{R: } M = \frac{9 \cdot 5 + 13 \cdot 7 + 15 \cdot 12 + 16 \cdot 16}{40} = \frac{572}{40} = 14,3 \text{ anos de escolaridade.}$$

c) E a mediana?

R: 15 anos de escolaridade.

7. Em um triângulo retângulo, os catetos medem 7 cm e 24 cm. Nessas condições, determine:

a) a medida da hipotenusa;

$$\text{R: } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 7^2 + 24^2 \Rightarrow a^2 = 625 \Rightarrow a = 25 \text{ cm.}$$

b) a medida da altura relativa à hipotenusa

R: Pela primeira relação métrica no triângulo, temos que

$$b^2 = a \cdot n \Rightarrow 7^2 = 25 \cdot n \Rightarrow \frac{49}{25} = n \Rightarrow n = 1,96 \text{ cm.}$$

$$\text{E, temos também: } c^2 = a \cdot m \Rightarrow 24^2 = 25 \cdot m \Rightarrow m = \frac{576}{25} \Rightarrow m = 23,04 \text{ cm.}$$

Dessa forma, a altura relativa à hipotenusa é:

$$h^2 = m \cdot n \Rightarrow h^2 = 23,04 \cdot 1,96 \Rightarrow h = \sqrt{45,1584} = 6,72 \text{ cm.}$$

8. A diagonal de um quadrado mede $5\sqrt{2}$. Determine o perímetro do quadrado.

$$\text{R: } d = l\sqrt{2} \Rightarrow 5\sqrt{2} = l\sqrt{2} \Rightarrow l = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5 \text{ cm.}$$

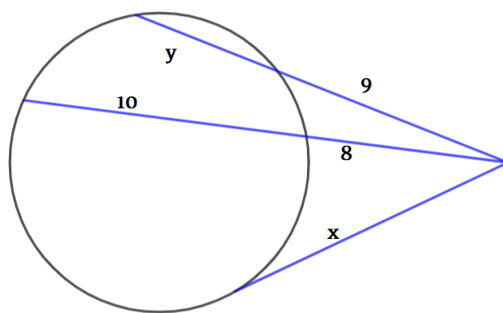
$$\text{Perímetro: } p = 4l \Rightarrow p = 4 \cdot 5 \Rightarrow p = 20 \text{ cm.}$$

9. Determine as medidas dos catetos de um triângulo retângulo sabendo que a hipotenusa mede 50 cm e que um dos ângulos agudos mede 37° . (Use: $\sin 37^\circ = 0,60$; $\cos 37^\circ = 0,80$; $\operatorname{tg} 37^\circ = 0,75$.)

$$\text{R: } \sin 37^\circ = \frac{CO}{H} \Rightarrow 0,60 = \frac{a}{50} \Rightarrow a = 30 \text{ cm}$$

$$\cos 37^\circ = \frac{CA}{H} \Rightarrow 0,80 = \frac{b}{50} \Rightarrow b = 40 \text{ cm.}$$

10. Na figura seguinte, determine as medidas x e y indicadas.



$$\text{R: } 9y = 10 \cdot 8 \Rightarrow y = \frac{80}{9}.$$

$$x^2 = 8 \cdot (10 + 8) \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = \sqrt{144} = 12$$

Lição 143 – Avaliação geral – Parte I

1. Defina os conjuntos numéricos estudados e dê exemplos de números que pertencem a estes conjuntos.

R: Conjunto dos Naturais (N) = Números inteiro e positivos. Exemplo: 1, 2, 3, ...

Conjunto dos Inteiro (Z) = Números naturais e inteiros negativos. Exemplo: -2, -7, 5, 3, ...

Conjunto dos Racionais (Q) = Números inteiros e decimais. Exemplo: 1; 0,5; 3,7; ...

Conjunto dos Irracionais (I) = Dízimas não periódicas. Exemplo: π .

Conjunto dos Reais (R) = Números Racionais e Irracionais. Exemplo: -7, 1543, 0,31;...

2. Transforme os números abaixo em notação científica:

a) 1.234.567.000

R: $1,234567 \cdot 10^9$

b) 0,0000000000009

R: $9,0 \cdot 10^{-12}$

c) 0,0000001240

R: $1,24 \cdot 10^{-7}$

d) 1.004,58

R: $1,00458 \cdot 10^3$

e) 4.560.000.000.000.000

R: $4,56 \cdot 10^{15}$

f) 0,8904

R: $8,904 \cdot 10^{-1}$

3. Simplifique as expressões:

a) $\sqrt{200} + \sqrt{500} + \sqrt{8} - \sqrt{45}$

R: $10\sqrt{2} + 10\sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{5} \Rightarrow$
 $12\sqrt{2} + 7\sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt{12} + \sqrt{75}}{2\sqrt{147}}$

R: $\frac{2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{14\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{14\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80} - 2\sqrt{45}}{8}$

R: $\frac{6\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 6\sqrt{5}}{8} = \frac{4\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{28} + \sqrt{175}}{\sqrt{63}}$

R: $\frac{2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}}{3\sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}}{3\sqrt{7}} = \frac{7}{3}$

e) $\frac{\sqrt{50} - \sqrt{18}}{\sqrt{200}}$

R: $\frac{5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{5}$

4. Calcule:

a) $4 + \sqrt{25} - 3$

R: $4 + 5 - 3 = 6$

b) $3 \cdot \sqrt{16} - \sqrt{100}$

R: $3 \cdot 4 - 10 = 2$

c) $\sqrt{\frac{4}{25}} + \frac{3}{5}$

R: $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = 1$

$$d) \sqrt[3]{\frac{1}{125}}$$

$$\mathbf{R: \frac{1}{5}}$$

$$e) \sqrt[4]{81} + \sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{-1}$$

$$\mathbf{R: 3 + 2 + (-1) = 4}$$

$$f) \sqrt{21 \cdot 4 - 3}$$

$$\mathbf{R: \sqrt{81} = 9}$$

$$g) 3^0 - \sqrt[3]{0}$$

$$\mathbf{R: 1 - 0 = 1}$$

$$h) 49^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{R: \sqrt{49} = 7}$$

$$i) 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$$

$$\mathbf{R: 9\sqrt{3}}$$

$$j) 2\sqrt{12} - 4\sqrt{27} + \sqrt{48}$$

$$\mathbf{R: 4\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = -4\sqrt{3}}$$

$$k) \sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$$

$$\mathbf{R: \sqrt{100} = 10}$$

$$l) \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{R: \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 3}$$

5. Calcule usando a regra dos produtos notáveis:

a) $(x+3)^2$

R: $x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9$

b) $(x-3)^2$

R: $x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9$

c) $(x+3)(x-3)$

R: $x^2 - 3^2 \Rightarrow x^2 - 9$

d) $(x+3) \cdot (x-3) - (x+2) \cdot (x-2)$

R: $x^2 - 3^2 - (x^2 - 2^2) \Rightarrow 9 - 4 = 5$

e) $(x+3)^2 - (x-3)^2$

R: $x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 6x + 9) \Rightarrow 12x$

6. Fatore as expressões a seguir:

a) $20x^2 + 25x$

R: $5x(4x + 5)$

b) $ax + ay - bx - by$

R: $a(x + y) - b(x + y) = (a - b)(x + y)$

c) $4m^3 - 6m^2$

R: $2m^2(2m - 3)$

d) $(a+1)x + (a+1)y$

R: $(a+1)(x + y)$

e) $12 + 4a + 3b + ab$

R: $4(3 + a) + b(3 + a) = (3 + a)(4 + b)$

f) $100x^2 - 1$

R: $(10x + 1)(10x - 1)$

g) $25b^2 - 16$

R: $(5b + 4)(5b - 4)$

h) $x^2 - 6x + 9$

R: $(x - 3)^2$

i) $x^2 + 12x + 36$

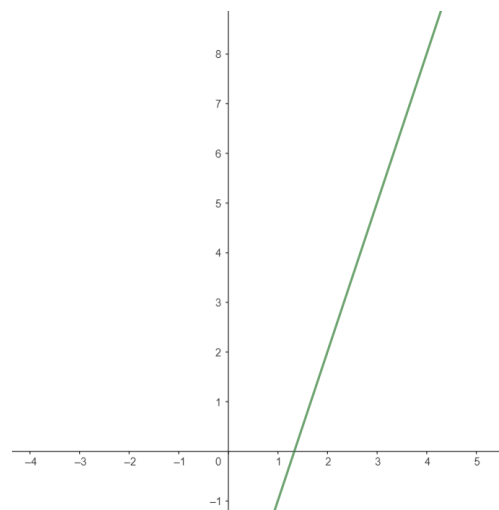
R: $(x + 6)^2$

7. Construa o gráfico das seguintes funções e classifique-as em injetiva, sobrejetiva ou bijetiva:

a) $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$

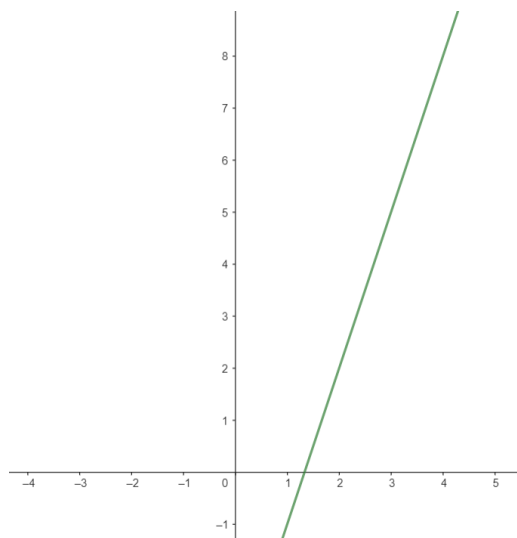
$x \rightarrow f(x) = 3x - 4$

R: Função injetiva.



b) $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{-1, 2, 5, 8\}$
 $x \rightarrow f(x) = 3x - 4$

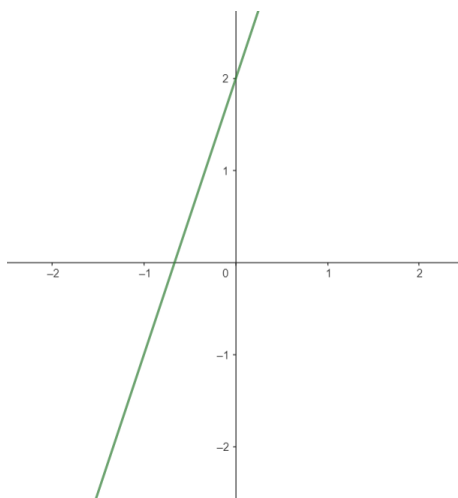
R: Função bijetiva.



8. Classifique cada função como crescente, decrescente ou constante. Indique também qual é a taxa de variação, e o valor em que a reta intercepta o eixo Y e o eixo X. Depois, trace o gráfico de cada uma.

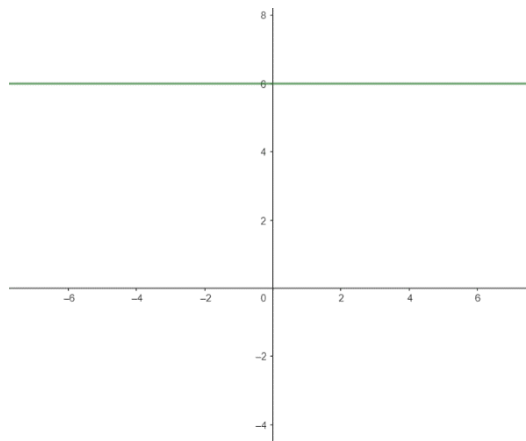
a) $f(x) = 3x + 2$

R: Crescente, Taxa de variação = 3, intercepta o eixo x em $x = -\frac{2}{3}$, e o eixo y em $y = 2$.



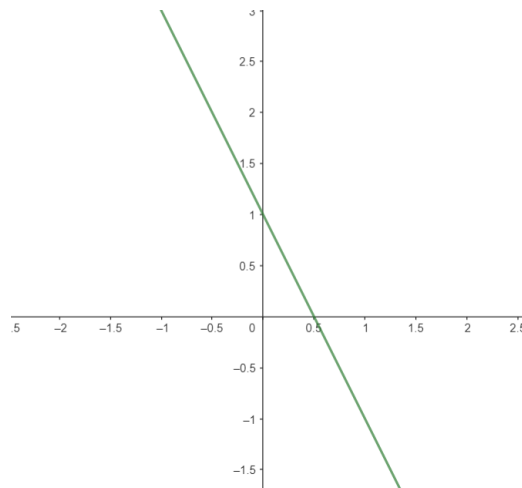
b) $f(x) = 6$

R: Constante, Taxa de variação = 0, não intercepta o eixo x, e intercepta o eixo y em $y = 6$.



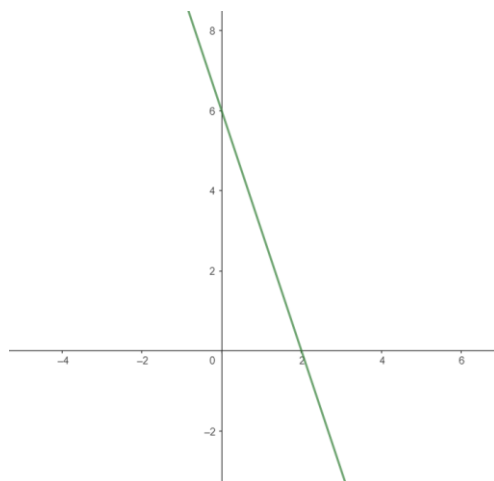
c) $f(x) = -2x + 1$

R: Decrescente, Taxa de variação = -2, intercepta o eixo x em $x = \frac{1}{2}$, e o eixo y em $y = 1$.



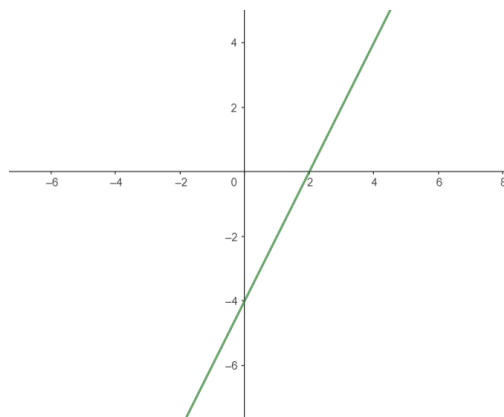
d) $f(x) = 6 - 3x$

R: Decrescente, Taxa de variação = -3, intercepta o eixo x em $x = 2$, e o eixo y em $y = 6$.



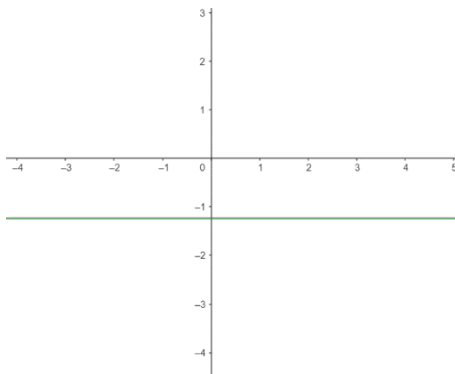
e) $f(x) = -4 + 2x$

R: Crescente, Taxa de variação = 2, intercepta o eixo x em $x = 2$, e o eixo y em $y = -4$.



f) $f(x) = 1 - \sqrt{5}$

R: Constante, Taxa de variação = 0, não intercepta o eixo x e intercepta o eixo y em $y = 1 - \sqrt{5}$.



9. Resolva as equações abaixo:

a) $6x^2 + 5x - 1 = 0$

R: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(6)(-1)}}{2 \cdot (6)} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{12} \Rightarrow x = \frac{1}{6} \text{ ou } x = -1$

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$

R: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(16)}}{2 \cdot (1)} \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2} \Rightarrow x = 8$

c) $9y^2 - 24y + 16 = 0$

R: $y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow y = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(9)(16)}}{2 \cdot (9)} \Rightarrow y = \frac{24 \pm \sqrt{0}}{18} \Rightarrow y = \frac{4}{3}$

d) $4x^2 - 4x - 3 = 0$

$$\text{R: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(4)(-3)}}{2 \cdot (4)} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{8} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

e) $t^2 - t - 1 = 0$

$$\text{R: } t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2 \cdot (1)} \Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

f) $-x^2 + 11x - 28 = 0$

$$\text{R: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(11) \pm \sqrt{(11)^2 - 4(-1)(-28)}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{9}}{-2} \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = 7$$

g) $4x^2 + 16x + 15 = 0$

$$\text{R: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(16) \pm \sqrt{(16)^2 - 4(4)(15)}}{2 \cdot (4)} \Rightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{16}}{8} \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{5}{2}$$

h) $8x^2 - 10x + 3 = 0$

$$\text{R: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(8)(3)}}{2 \cdot (8)} \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{16} \Rightarrow x = \frac{3}{4} \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

i) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{12} = 0$

$$\text{R: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-\left(\frac{1}{3}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{12}\right)}}{2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)} \Rightarrow x = \frac{-\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{36}}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = -1$$

j) $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{4}{9} = 0$

$$\text{R: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{9}\right)}}{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{9}}}{1} \Rightarrow x = \frac{10}{9} \text{ ou } x = \frac{8}{9}$$

10. Sem resolver, dê a soma e o produto das raízes e de cada equação.

a) $3x^2 + 5x + 2 = 0$

R: $S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{5}{3}$

P: $P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{2}{3}$

b) $2x^2 + 11x - 2 = 0$

R: $S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{11}{(-2)} = \frac{11}{2}$

P: $P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{-2}{(-2)} = 1$

c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

R: $S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{(-6)}{9} = \frac{2}{3}$

P: $P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{1}{9}$

d) $7x^2 - 5x - 3 = 0$

R: $S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{(-5)}{7} = \frac{5}{7}$

P: $P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{(-3)}{7}$

e) $-2x^2 - 11x - 3 = 0$

R: $S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{(-11)}{(-2)} = \frac{11}{2}$

P: $P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{(-3)}{(-2)} = \frac{3}{2}$

f) $11x^2 - 7 = 0$

R: $S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{0}{(-7)} = 0$

P: $P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{11}{(-7)}$

g) $8x^2 + 5x = 0$

R: $S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{5}{8}$

P: $P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{0}{8} = 0$

h) $x + 1 = 2x^2$

R: $S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{1}{(-2)} = \frac{1}{2}$

P: $P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{1}{(-2)}$

Lição 144 - Avaliação geral - Parte II

1. Defina:

a) Ângulo

R: Ângulo é a união de todos os pontos de uma região delimitada por duas semirretas de mesma origem.

b) Retas perpendiculares

R: Retas que formam ângulos de 90° na intersecção.

c) Ângulos adjacentes

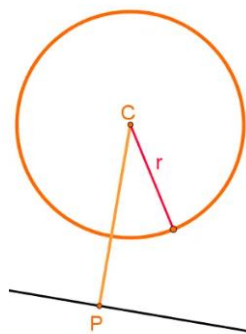
R: Dois ângulos α e β são ditos adjacentes se um de seus lados é comum e se não possuem pontos internos em comum.

d) Bissetriz

R: Bissetriz é uma semirreta que divide o ângulo em dois novos ângulos congruentes.

2. Defina com palavras e com desenho as três posições relativas entre uma reta e uma circunferência.

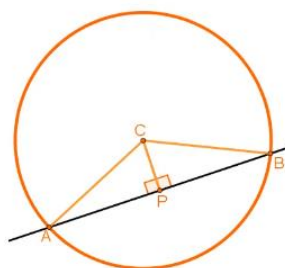
R: Reta externa à circunferência: A reta não possui ponto em comum com a circunferência.



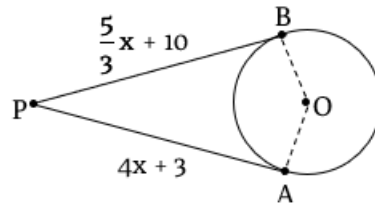
Reta tangente à circunferência: A reta possui um ponto em comum com a circunferência.



Reta secante à circunferência: A reta possui dois pontos em comum com a circunferência.



3. Observe a figura e determine:



a) a medida x ;

R: $4x + 3 = \frac{5}{3}x + 10 \Rightarrow 4x - \frac{5}{3}x = 10 - 3 \Rightarrow \frac{12x - 5x}{3} = 7 \Rightarrow \frac{7x}{3} = 7 \Rightarrow 7x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{7} \Rightarrow x = 3$.

b) a medida do segmento PA;

R: $PA = 4x + 3 \Rightarrow PA = 4 \cdot 3 + 3 \Rightarrow PA = 12 + 3 \Rightarrow PA = 15$.

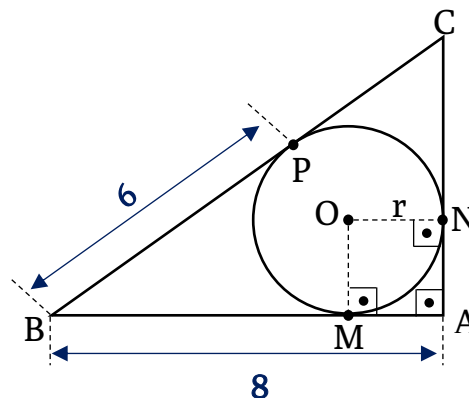
c) a medida do segmento PB;

R: $PB = \frac{5}{3}x + 10 \Rightarrow PB = \frac{5}{3} \cdot 3 + 10 \Rightarrow PB = 5 + 10 \Rightarrow PB = 15$.

d) o perímetro do quadrilátero PAOB, se o comprimento do raio é 7 cm.

R: $\text{Perímetro} = PA + PB + BO + AO \Rightarrow p = 15 + 15 + 7 + 7 \Rightarrow p = 44 \text{ cm}$.

4. Considerando a figura, determine:



a) o comprimento r do raio da circunferência;

R: Pela propriedade da semelhança de triângulos, temos que o segmento $BP=BM$, assim, o segmento MA vale $8 - 6 = 2$. Dessa maneira, sendo $MA = ON = r$, $r = 2$.

b) o perímetro do quadrado ANOM;

R: O perímetro de um quadrado é quatro vezes o lado, assim, $p = 4 \cdot 2 \Rightarrow p = 8$.

c) a expressão algébrica que representa o perímetro do triângulo ABC, se a medida do segmento PC é a .

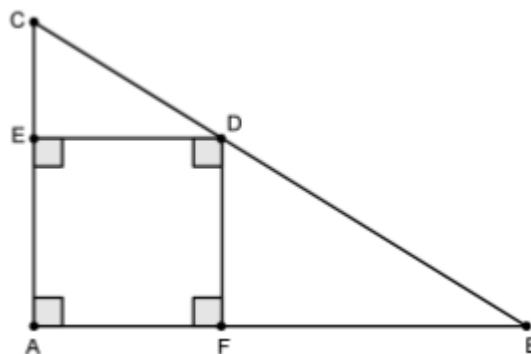
R: Sendo $PC=a$ e $CN=PC$, $CN=a$. Vale também o quadrado ANOM, onde $NA=MA=2$. Assim, o perímetro do triângulo ABC é:

$$p = 6 + 8 + 2 + 2a \Rightarrow p = 2a + 18.$$

d) o perímetro do quadrilátero BMOP.

R: $p = BP + BM + 2r \Rightarrow p = 6 + 6 + 2 \cdot 2 \Rightarrow p = 16$.

5. Na figura abaixo, temos $AC = 4$ e $AB = 6$. Determine o perímetro do quadrado AEDF.

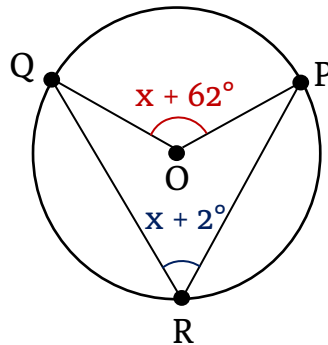


R: Adotando o lado do quadrado como x , temos que o segmento $CE = 4 - x$. Assim, temos dois triângulos, o CED e o ABC, podendo aplicar a semelhança entre eles. Dessa forma:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{ED} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{4-x}{x} \Rightarrow 4x = 24 - 6x \Rightarrow 10x = 24 \Rightarrow x = 2,4.$$

Portanto, o perímetro do quadrado $= 4x = 4 \cdot 2,4 = 9,6$

6. Qual é a medida do ângulo inscrito na figura a seguir

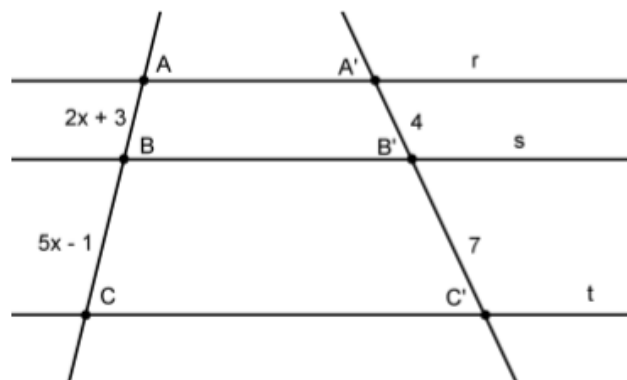


R: Sendo o ângulo QRP metade do ângulo QOP, temos a igualdade:

$$x + 2^\circ = \frac{x + 62^\circ}{2} \Rightarrow x - \frac{x}{2} = 31^\circ - 2^\circ \Rightarrow \frac{2x - x}{2} = 29^\circ \Rightarrow x = 29^\circ \cdot 2 \Rightarrow x = 58^\circ.$$

Assim, o ângulo inscrito QRP = $58^\circ + 2^\circ = 60^\circ$.

7. Enuncie o Teorema de Tales e determine o valor de x nas figuras abaixo sabendo que $r \parallel s \parallel t$.



R: A intersecção de um feixe de retas paralelas por duas retas transversais forma segmentos proporcionais. Dessa forma:

$$\frac{2x + 3}{5x - 1} = \frac{4}{7} \Rightarrow 7(2x + 3) = 4(5x - 1) \Rightarrow 14x + 21 = 20x - 4 \Rightarrow 21 + 4 = 20x - 14x \Rightarrow 6x = 25 \Rightarrow x = \frac{6}{25}$$

8. Uma moeda é lançada algumas vezes, e a sequência de resultados, cara ou coroa, de cada lançamento é anotada.

Quantas sequências diferentes podem ser formadas:

a) se forem feitos 2 lançamentos?

R: $2 \cdot 2 = 4$ sequências diferentes.

b) se forem feitos 3 lançamentos?

R: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ sequências diferentes.

c) se forem feitos 4 lançamentos?

R: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ sequências diferentes.

9. Em um triângulo equilátero a altura mede $3\sqrt{3}$ cm. Nessas condições, qual é o perímetro deste triângulo equilátero?

R: $h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3\sqrt{3} = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3\sqrt{3} \cdot 2 = L\sqrt{3} \Rightarrow L = 6 \text{ cm.}$

Perímetro $= 3L \Rightarrow p = 3 \cdot 6 \Rightarrow p = 18 \text{ cm.}$

10. Simplifique a expressão $\sin x \cdot \cos^2 x - \sin x$.

R: Evidenciando $\sin x$, temos: $\sin x(\cos^2 x - 1)$ e, pela relação fundamental da trigonometria: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$.

Portanto,

$$\sin x \cdot \cos^2 x - \sin x = \sin x(\cos^2 x - 1) = \sin x(-\sin^2 x) = -\sin^3 x$$