Gabarito de Matemática

2º EM

VOLUME 1
LIÇÃO 1 – Resolução de triângulos quaisquer

1)

a) $\text{sen}\,135° = \text{sen}\,45° = 0{,}7071$

b) $\cos 175° = -\cos 5° = -0{,}9962$

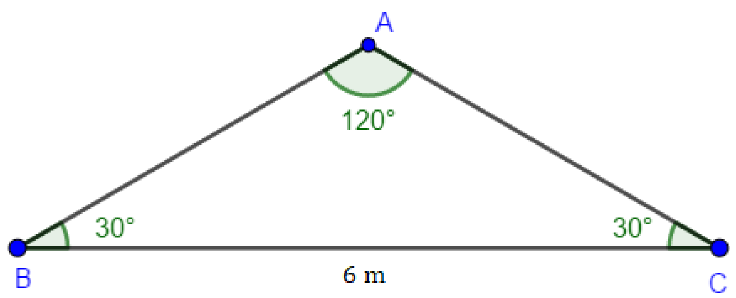
c) $\text{sen}\,105° = \text{sen}\,75° = 0{,}9659$

d) $\cos 120° = -\cos 60° = 0{,}5000$

e) $\text{sen}\,150° = \text{sen}\,30° = 0{,}5000$

f) $\cos 140° = -\cos 40° = 0{,}7660$

2) Temos o seguinte triângulo:



Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{6}{\text{sen}\,120°} = \frac{x}{\text{sen}\,30°} \Rightarrow \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x\sqrt{3} = 6 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

Portanto, cada um dos lados congruentes medem $2\sqrt{3}\ m$.

3) Pela Lei dos Senos, temos que:

$$\frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

$$\frac{5}{\operatorname{sen}48°} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}107°}$$

$$\frac{5}{\operatorname{sen}48°} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}73°}$$

$$\frac{5}{0{,}7431} = \frac{\overline{AB}}{0{,}956}$$

$$\overline{AB} = \frac{4{,}78}{0{,}7431}$$

$$\overline{AB} \cong 6{,}4325$$

4) Pela Lei dos Senos, temos que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}45°} = \frac{b}{\operatorname{sen}60°} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b\sqrt{2}}{2}$$

$$a = b\sqrt{2} \quad (1)$$

Usando a hipótese dos problemas, temos que:

$$b = \sqrt{2} + 1 - a \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos que:

$$a = (\sqrt{2} + 1 - a)\sqrt{2}$$

$$a = 2 + \sqrt{2} - a\sqrt{2}$$

$$a = \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

$$a = \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$

$$a = \frac{2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2}{1 - 2}$$

$$a = \sqrt{2}$$

5)

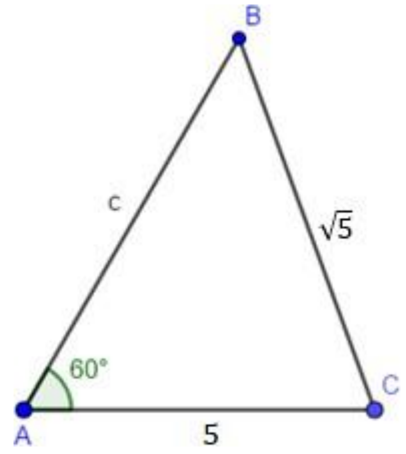
a) $x = 100\sqrt{2}$

b) $x \cong 9{,}1555$

c) $x \cong 5{,}9616$

d) $x \cong 45°$

6) Construindo um esboço do ΔABC, temos que:



Pela Lei dos Cossenos, temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$\left(\sqrt{7}\right)^2 = 2^2 + c^2 - 2 \cdot 2c \cdot \cos 60°$$

$$7 = 4 + c^2 - 4c \cdot \frac{1}{2}$$

$$7 = 4 + c^2 - 2c$$

$$3 = c^2 - 2c$$

$$c^2 - 2c - 3 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos:

$$c = 3 \quad ou \quad c = -1$$

Portanto, $c = 3$.

7) Pela Lei dos Cossenos, temos que:

$$a^2 = 10^2 + \left(8\sqrt{2}\right)^2 - 2\ .\ 10\ .\ 8\sqrt{2}\ .\ \cos 45°$$

$$a^2 = 100 + 128 - 160\sqrt{2}\ .\ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a^2 = 228 - 160$$

$$a^2 = 68$$

$$a = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

Portanto, a medida do terceira lado é $2\sqrt{17}$.

8) Pela Lei dos Cossenos, temos que:

$$3^2 = 4^2 + 2^2 - 2\ .\ 4\ .\ 2\ .\ \cos\alpha$$

$$9 = 16 + 4 - 16\cos\alpha$$

$$16\cos\alpha = 11$$

$$\cos\alpha = \frac{11}{16} = 0{,}6875$$

$$\alpha \cong 47°$$

Portanto, $\hat{A}$ mede aproximadamente 47°.

9) Observe que se $CD = x$, então $AC = x\sqrt{3}$. Agora, no ΔABC teremos $A\hat{C}B = 45°$, pela lei dos senos, obtemos

$$\frac{AB}{\text{sen }45°} = \frac{AC}{\text{sen }60°}$$

$$x = \frac{30}{\sqrt{2}}\ metros$$

Dividindo o resultado por $\sqrt{2}$, obtemos

10) Pela lei dos cossenos, temos

$$BD^2 = \sqrt{3}^2 + 2^2 - 2 . \sqrt{3} . 2 . \cos 30°$$

$$BD = 1\ cm$$

–

Como $BD = DC$, temos $AC = AD + DC = 3\ cm$ e, novamente pela lei dos cossenos, chegamos a

$$BC^2 = \sqrt{3}^2 + 3^2 - 2 . \sqrt{3} . 3 . \cos 30°$$

11) Sejam os pontos T, S e E os representantes das cidades e do epicentro e $ES = d$, a distância entre Sendai e o Epicentro, pela lei dos cossenos, teremos que:

$$d^2 = 320^2 + 360^2 - 2\ .\ 320\ .\ 360\ .\ 0{,}934$$

$$d = \sqrt{320^2 + 360^2 - 2\ .\ 320\ .\ 360\ .\ 0{,}934}$$

$$d = \sqrt{320^2 + 360^2 - 2\ .\ 32\ .\ 36\ .\ 93{,}4}$$

$$d = \sqrt{320^2 + 360^2 - 215100}$$

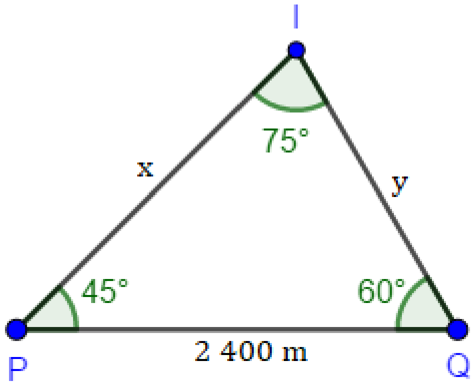
$$d = 130\ km$$

E a velocidade média foi de

$$v = \frac{130}{\frac{13}{60}} = 600\ km/h$$

Alternativa E.

12) Seja o ponto I, a ilha do grupo dos sacerdotes. Como são três pontos não colineares, temos o seguinte triângulo:



<u>Ponte partindo do ponto P</u>

$$\frac{2400}{\text{sen } 75°} = \frac{x}{\text{sen } 60°} \Rightarrow \frac{2400}{0{,}96} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$x = \frac{2400}{0{,}96} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 2125\ m$$

<u>Ponte partindo do ponto Q</u>

$$\frac{2400}{\text{sen } 75°} = \frac{y}{\text{sen } 45°} \Rightarrow \frac{2400}{0{,}96} = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$x = \frac{2400}{0{,}96} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 1750\ m$$

Assim, temos que a ponte $\overline{QI}$ é menor do que a ponte $\overline{PI}$.

Logo, a diferença entre as pontes é

$$2125 - 1750 = 375\ m$$

Construindo a ponte menor, teremos uma economia de 37 500 por unidade monetária.

LIÇÃO 2 – Trigonometria na circunferência

1)

a) $2\pi \cdot \frac{180^\circ}{360^\circ} = \pi\ cm$

b) $2\pi \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{2}\ cm$

c) $2\pi \cdot \frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{4}\ cm$

d) $2\pi \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{3}\ cm$

e) $2\pi \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{6}\ cm$

f) $2\pi \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi}{3}\ cm$

g) $2\pi \cdot \frac{270^\circ}{360^\circ} = \frac{3\pi}{2}\ cm$

2)

a) $30° = \frac{180^{\circ}}{6} = \frac{\pi}{6}\ rad$

b) $45° = \frac{180^{\circ}}{4} = \frac{\pi}{4}\ rad$

c) $60° = \frac{180^{\circ}}{3} = \frac{\pi}{3}\ rad$

d) $120° = \frac{360^{\circ}}{3} = \frac{2\pi}{3}\ rad$

e) $135° = 3 \cdot 45° = \frac{3\pi}{4}\ rad$

f) $150° = 5 \cdot 30° = \frac{5\pi}{6} rad$

g) $225° = 5 \cdot 45° = \frac{5\pi}{4}\ rad$

h) $300° = 5 \cdot 60° = \frac{5\pi}{3} rad$

3)

a) $2 \cdot 180° = 360°$

b) $180°$

c) $\frac{180^{\circ}}{2} = 90°$

d) $\frac{180^{\circ}}{4} = 45°$

e) $\frac{180^{\circ}}{6} = 30°$

f) $\frac{3\,.\,180^{\circ}}{4} = 135^{\circ}$

g) $\frac{7\,.\,180^{\circ}}{6} = 210^{\circ}$

h) $\frac{11\,.\,180^{\circ}}{6} = 330^{\circ}$

4)

a) $400^{\circ} = 360^{\circ}\,.\,1 + 40^{\circ}$

b) $720^{\circ} = 360^{\circ}\,.\,2 + 0^{\circ}$

c) $1000^{\circ} = 360^{\circ}\,.\,2 + 280^{\circ}$

d) $\frac{27\pi}{4}\,rad = 2\pi\,.\,13 + \frac{\pi}{4}$

e) $\frac{19\pi}{3}\,rad = 2\pi\,.\,9 + \frac{\pi}{3}$

LIÇÃO 3 – Relação entre graus e radianos

1)

$\alpha = \frac{12}{4} = 3rad$

2) Como medida do comprimento desta circunferência é $2\pi \cdot 8 = 16\pi\ cm$, a medida do comprimento do arco é

$$\frac{60°}{360°} \cdot 16\pi = \frac{8\pi}{3}\ cm$$

3) Se o movimento realizado completasse uma circunferência, o comprimento da trajetória seria $2\pi \cdot 50 = 100\pi\ cm$. Porém, a trajetória envolve apenas uma parte dessa circunferência. Temos, então, que o comprimento desse arco é

$$\ell = \frac{100\pi}{8} = \frac{25\pi}{2} cm$$

4)

a. $2\pi r = 400$, segue que $r = 200/\pi \cong 63,7m$.

b. A cada $400\ m$ temos $360°$. O comprimento total de cada treino é, em metros,

$$12 \cdot 160 = 1.920 = 4 \cdot 400 + 320$$

Assim, a medida do arco é

$$4 \cdot 360° + \frac{320}{400} \cdot 360° = 1728°$$

5)

6)

7) Como $18780° = 52 \cdot 360° + 60°$, significa que o pneu deu 52 voltas completas mais $60°$. Isso significa que o ângulo central determinado pelo ponto A e o ponto P mede $60°$, ou seja, estes pontos e o centro da roda formam um triângulo equilátero. Assim, a distância entre os pontos A e P é r.

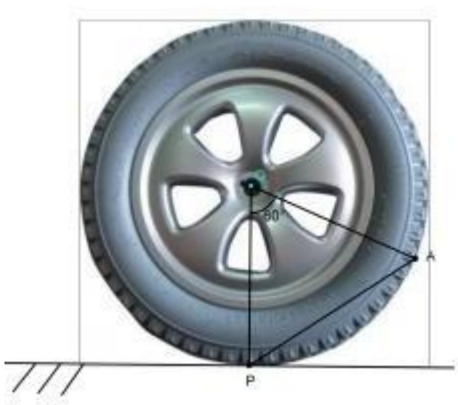


Figura 1 - Posição Final do Pneu.

8) Esse exercício requer descobrir o simétrico de cada arco em relação ao eixo x. Para isso, basta, a partir da origem do círculo trigonométrico, seguir no sentido horário, ou seja, é necessário apenas subtrair de 360° ou $2\pi\ rad$ o arco em questão.

a) $360° - 25° = 335°$

b) $360° - 315° = 45°$

c) $2\pi - \frac{3\pi}{5} = \frac{7\pi}{5}\ rad$

9) Perceba que nesse exercício, diferente do anterior, o eixo de simetria é o eixo y, assim, basta tomar como ponto de partida 90° ou 270°, analisando, de acordo com o quadrante, qual operação deve ser realizada.

a) $90° - (110° - 90°) = 70°$, pois o ângulo pertence ao segundo quadrante.

b) $270° + (270° - 220°) = 320°$, pois o ângulo pertence ao terceiro quadrante.

c) $\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{3\pi}{5}\ rad$

d) $\frac{\pi}{2} - \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6}\ rad$

10)

a) $-180° \rightarrow -180° + 360° = 180°$

b) $-240° \rightarrow -240° + 360° = 120°$

c) $-137° \rightarrow -137° + 360° = 223°$

d) $-500° \rightarrow -140° + 360° = 220°$

e) $-620° \rightarrow -260° + 360° = 100°$

Instituto Cidade de Deus

Gabaritos - Matemática 2º EM

LIÇÃO 4 – Razões trigonométricas na circunferência

1) Como α ∈ ao primeiro quadrante, então $0 < \text{sen}\,\alpha < 1$. Assim,

temos que:

$$0 < 2m - 7 < 1$$

$$\frac{7}{2} < m < 4$$

2)

$$\frac{\text{sen}\,75° \cdot \cos 327° \cdot \text{tg}\,138°}{\text{sen}\,269° \cdot \text{tg}\,288°} = \frac{(+)\cdot(+)\cdot(-)}{(-)\cdot(-)} < 0$$

Portanto a expressão é negativa.

LIÇÃO 5 – Cotangente

1) Sabemos que

$-1 \leq \cos\beta \leq 1.$

Assim, temos que:

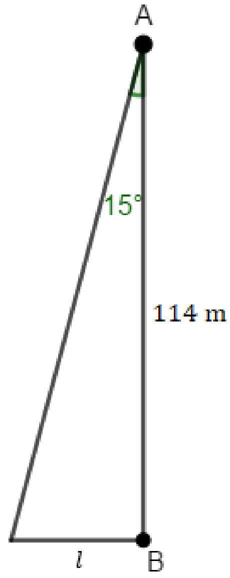
$$-1 \leq 2k + 3 \leq 1$$

$$-2 \leq k \leq -1$$

2) Como $0 < \text{sen}\,\alpha < 1$, α é um arco do primeiro ou segundo quadrantes.

No intervalo $[0, 9\pi]$, que equivale a quatro voltas e meia no círculo trigonométrico, passaremos cinco vezes por cada um destes quadrantes, ou seja, são 10 soluções.

3) (ENEM 2013) Chamamos de l o lado da base quadrada do prédio.



$$\text{tg } 15° = \frac{l}{114}$$

Assim, temos que:

$$l = 29{,}64\ m$$

Portanto, a área é $(29{,}64)^2 = 858{,}73\ m^2$.
A resposta é a alternativa $\boldsymbol{E}$.

VOLUME 2
LIÇÃO 6 (5) – Relações fundamentais

Instituto Cidade de Deus

Gabaritos - Matemática 2º EM

1) Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$, temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$$

$$\operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

2)

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{12}$$

Notando que $\pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sec x < 0$, temos:

$$\sec x = -\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = -\sqrt{1 + \frac{144}{25}} = -\sqrt{\frac{169}{25}} = -\frac{13}{5}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{-\frac{13}{5}} = -\frac{5}{13}$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \,.\, \cos x = \left(\frac{12}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{13}$$

$$\text{cossec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x} = \frac{1}{-\frac{12}{13}} = -\frac{13}{12}$$

3) Como $\text{cotg}\, x = \frac{2\sqrt{m}}{m-1}$ com $m > 1$, temos que:

$$\text{tg}\, x = \frac{1}{\text{cotg}\, x} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{m}}{m-1}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{m-1}{2\sqrt{m}} = \frac{m-1}{2\sqrt{m}} = \frac{(m-1)\sqrt{m}}{2m}$$

Para calcularmos $\cos x$, temos que:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \text{tg}^2\, x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \frac{(m-1)^2}{4m}}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{\frac{4m + (m-1)^2}{4m}}$$

$$\cos^2 x = \frac{4m}{4m + (m-1)^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{4m}{m^2 + 2m + 1}$$

$$\cos^2 x = \frac{4m}{(m+1)^2}$$

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{4m}{(m+1)^2}}$$

$$\cos x = \pm\frac{2\sqrt{m}}{m+1}$$

4) Para calcularmos $\operatorname{sen}^2 x$ temos que:

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

E para calcularmos $\operatorname{tg}^2 x$ temos que:

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 = 9 - 1 = 8$$

Então:

$$y = \operatorname{sen}^2 x + 2\ .\ \operatorname{tg}^2 x = \frac{8}{9} + 16 = \frac{152}{9}$$

5) <u>**Solução 1:**</u> Calculando $\operatorname{tg} x$, $\cos x$ temos que:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} = \frac{7}{24}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{49}{576}} = \frac{576}{625} \Rightarrow \cos x = -\frac{24}{25}$$

Agora, calculando y, temos:

$$y = \frac{\operatorname{tg} x\ .\ \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{\left(\frac{7}{24}\right)\left(-\frac{24}{25}\right)}{\left(1 - \frac{24}{25}\right)\left(1 + \frac{24}{25}\right)} = \frac{-\frac{7}{25}}{\frac{49}{625}} = -\frac{25}{7}$$

<u>**Solução 2:**</u> Simplificando y e depois calculando o valor da expressão:

$$y = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\ .\ \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cossec} x = -\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = -\sqrt{1 + \frac{576}{49}} = -\frac{25}{7}$$

6) Como $\cos x = \frac{2}{5}$ então temos que:

$$\cos^2 x = \frac{4}{25}$$

E pelo Teorema Fundamental da trigonometria, temos que:

$$\text{sen}^2\, x = \frac{4}{25} = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

Logo,

$$\text{tg}^2\, x = \frac{\text{sen}^2\, x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{21}{25}}{\frac{4}{25}} = \frac{21}{4}$$

Resolvendo y, temos que:

$$y = (1 + \text{tg}^2\, x)^2 + (1 - \text{tg}^2\, x)^2 = \left(1 + \frac{21}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{21}{4}\right)^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2 + \left(\frac{17}{4}\right)^2 = \frac{625}{16} + \frac{289}{16}$$

$$= \frac{914}{16} = \frac{457}{8}$$

7) Transformando em um sistema, temos que:

$$\begin{cases} 3\,.\ \cos x + \text{sen}\, x = -1 & \mathbf{(1)} \\ \cos^2 x + \text{sen}^2\, x = 1 & \mathbf{(2)} \end{cases}$$

De $(\mathbf{1})$ temos:

$$\text{sen}\, x = -1 - 3\,.\cos x \quad (\mathbf{3})$$

Substituindo $(\mathbf{3})$ em $(\mathbf{2})$, temos que:

$$\cos^2 x + (-1 - 3\,.\cos x)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 x + 1 + 6\cos x + 9\cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow 10\cos^2 x + 6\cos x = 0$$

$$\cos x = 0 \qquad ou \qquad \cos x = -\frac{3}{5}$$

Substituindo os valores de $\cos x$ em $(\mathbf{2})$, temos que:

$$\operatorname{sen} x = -1 - 3\,.\,0 = -1$$

$$\operatorname{sen} x = -1 - 3\,.\,\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

Portanto, temos duas soluções:

$$S_1 = \{\cos x = 0 \;\; e \;\; \operatorname{sen} x = -1\}$$

$$S_2 = \left\{\cos x = -\frac{3}{5} \;\; e \;\; \operatorname{sen} x = \frac{4}{5}\right\}$$

8) Como $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, temos que:

$$(2m+1)^2 + (4m+1)^2 = 1 \Rightarrow (4m^2 + 4m + 1) + (16m^2 + 8m + 1) = 1$$

$$\Rightarrow 20m^2 + 12m + 1 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos que:

$$m = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 80}}{40} = \frac{-12 \pm 8}{40}$$

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{2} \;\; ou \;\; m = -\frac{1}{10}$$

9) Como $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, temos que:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow 16x^2 + 9y^2 = 144$$

10) Como $\operatorname{cossec}^2 t = \operatorname{cotg}^2 t + 1$ e $\operatorname{cotg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t}$, temos que:

$$\left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{x}\right)^2 + 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} = \frac{25}{x^2} + 1 \Rightarrow x^2y^2 = 225 + 9x^2 \Rightarrow x^2y^2 - 9x^2 = 225$$

11) Como $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, temos que:

$$y = (\operatorname{sen}^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$$
$$= 1^2 - 2(\operatorname{sen} x \cos x)^2 = 1 - 2m^2$$

Instituto Cidade de Deus

Gabaritos - Matemática 2º EM

LIÇÃO 7 (6) – Arcos notáveis

1) $\text{sen}\, 15° = \text{sen}\frac{\pi}{12} = \frac{l_{12}}{12}$

Usando a fórmula l_{2n} e $l_6 = R$, temos que:

$$l_{12} = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - R^2}\right)}$$

$$l_{12} = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{3R^2}\right)}$$

$$l_{12} = \sqrt{R(2R - R\sqrt{3})}$$

Como $R = 1$, temos que:

$$l_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Assim, temos que:

$$\text{sen}\, 15° = \frac{l_{12}}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

Para calcularmos o cos 15°, temos que:

$$\cos 15° = \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{1 - \text{sen}^2\frac{\pi}{12}} = \sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

Para calcularmos o tg 15°, temos que:

$$\text{tg}\, 15° = \text{tg}\frac{\pi}{12} = \frac{\text{sen}\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$$

2) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{l_8}{2}$

Usando a fórmula l_{2n} e $l_4 = R\sqrt{2}$, temos que:

$$l_8 = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - 2R^2}\right)}$$

$$l_8 = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{2R^2}\right)}$$

$$l_8 = \sqrt{R\left(2R - R\sqrt{2}\right)}$$

Como $R = 1$, temos que:

$$l_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Assim, temos que:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{l_8}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Para calcularmos o $\cos\frac{\pi}{8}$, temos que:

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{8}} = \sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

Para calcularmos o $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$, temos que:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}=\frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

E como

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2}$$

Então, temos que:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$$

3) Dando valores a k, temos:

$k=0\Rightarrow x=\operatorname{tg}0=0$

$k=1\Rightarrow x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$k=2\Rightarrow x=\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$

$k=3\Rightarrow x=\operatorname{tg}\pi=0$

$k=4\Rightarrow x=\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}=\sqrt{3}$

$k=5\Rightarrow x=\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}=-\sqrt{3}$

$k=6\Rightarrow x=\operatorname{tg}2\pi=0$

Então, temos que:

$$A=\{-\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}\}$$

Dando valores a k do conjunto B, temos:

$k = 0 \Rightarrow x = \cos 0 = 1$

$k = 1 \Rightarrow x = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$k = 2 \Rightarrow x = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

$k = 3 \Rightarrow x = \cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$k = 4 \Rightarrow x = \cos \pi = -1$

$k = 5 \Rightarrow x = \cos\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$k = 6 \Rightarrow x = \cos\dfrac{3\pi}{2} = 0$

$k = 7 \Rightarrow x = \cos\dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$k = 8 \Rightarrow x = \cos 2\pi = 1$

Então, temos que:

$$A \cap B = \{-1, 0, 1\}$$

4) Dando valores a k do conjunto A, temos:

$$k = 0 \Rightarrow x = \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$k = 2 \Rightarrow x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 3 \Rightarrow x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$$

$$k = 4 \Rightarrow x = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 5 \Rightarrow x = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$k = 6 \Rightarrow x = \operatorname{sen} \pi = 0$$

$$k = 7 \Rightarrow x = \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$k = 8 \Rightarrow x = \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 9 \Rightarrow x = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$$

$$k = 10 \Rightarrow x = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 11 \Rightarrow x = \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$k = 12 \Rightarrow x = \operatorname{sen} 2\pi = 0$$

Dando valores a k do conjunto B, temos:

$k = 0 \Rightarrow x = \cos 0 = 1$

$k = 1 \Rightarrow x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$k = 2 \Rightarrow x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$k = 3 \Rightarrow x = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k = 4 \Rightarrow x = \cos \pi = -1$

$k = 5 \Rightarrow x = \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k = 6 \Rightarrow x = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$

$k = 7 \Rightarrow x = \cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$k = 8 \Rightarrow x = \cos 2\pi = 1$

Então, temos que:

$$A \cap B = \{-1, 0, 1\}$$

LIÇÃO 8 – Redução ao 1º quadrante

Instituto Cidade de Deus

Gabaritos - Matemática 2º EM

1)

a) $\text{sen}\,120° = \text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{sen}\,180° = 0$

c) $\text{sen}\,240° = -\text{sen}\,60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\text{sen}\,315° = -\text{sen}\,45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\text{sen}\frac{3\pi}{4} = \text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\text{sen}\frac{7\pi}{6} = -\text{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

g) $\text{sen}\frac{5\pi}{3} = -\text{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3)

a) $\text{tg}\,120° = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

b) $\text{tg}\,225° = \text{tg}\,45° = 1$

c) $\text{tg}\,240° = \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$

d) $\text{tg}\,300° = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

e) $\text{tg}\frac{7\pi}{4} = -\text{tg}\frac{\pi}{4} = -1$

f) $\text{tg}\frac{5\pi}{6} = -\text{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

g) $\text{tg}\frac{4\pi}{3} = \text{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

2)

a) $\cos 90° = 0$

b) $\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

d) $\cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

4)

a) $\text{sen}\,720° = \text{sen}\,0° = 0$

b) $\cos 1170° = \cos 90° = 0$

c) $\text{tg}\,3540° = \text{tg}\,300° = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

d) $\text{sen}\,3930° = \text{sen}\,330° = -\text{sen}\,30° = -\frac{1}{2}$

e) $\text{sen}\frac{51\pi}{4} = \text{sen}\frac{3\pi}{4} = \text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\cos\frac{37\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

g) $\text{tg}\frac{29\pi}{3} = \text{tg}\frac{5\pi}{3} = -\text{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

5) $\beta = 180° + 45° = 225°$

6) A expressão

$$(\cos 165° + \operatorname{sen} 155° + \cos 145° - \operatorname{sen} 25° + \cos 35° + \cos 15°)$$

é equivalente a

$$(-\cos 15° + \operatorname{sen} 25° - \cos 35° - \operatorname{sen} 25° + \cos 35° + \cos 15°) = 0$$

Portanto, a resposta é a alternativa ***C***.

7)

$$\frac{m+1}{m-2} = \cos 3015° = \cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, temos que:

$$2(m+1) = -\sqrt{2}(m-2)$$

$$m = \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} = \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} \cdot \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-2} = \frac{4\sqrt{2}-4-4+2\sqrt{2}}{4-2} = \frac{6\sqrt{2}-8}{2} = 3\sqrt{2}-4$$

Portanto, a resposta é a alternativa ***B***.

Instituto Cidade de Deus

Gabaritos - Matemática 2º EM

8)

a) $\cos 178° = -\cos 2°$

b) $\text{cotg}\frac{7\pi}{6} = \text{cotg}\frac{\pi}{6}$

c) $\text{sen}\frac{7\pi}{6} = -\text{sen}\frac{\pi}{6}$

d) $\text{sen}\frac{5\pi}{4} = -\text{sen}\frac{\pi}{4}$

e) $\text{sen}\, 251° = -\text{sen}\, 71°$

f) $\text{sen}\, 124° = \text{sen}\, 56°$

g) $\cos\frac{5\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3}$

h) $\cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6}$

i) $\text{tg}\, 290° = -\text{tg}\, 70°$

j) $\text{cossec}\frac{11\pi}{6} = -\text{cossec}\frac{\pi}{6}$

k) $\text{tg}\frac{3\pi}{4} = -\text{tg}\frac{\pi}{4}$

l) $\text{tg}\frac{5\pi}{3} = -\text{tg}\frac{\pi}{3}$

9)

a) $\text{sen}\, 261° = -\cos 9°$

b) $\text{sen}\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{6}$

c) $\text{sen}\frac{5\pi}{6} = \text{sen}\frac{\pi}{6}$

d) $\text{sen}\frac{5\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{6}$

e) $\cos 341° = \cos 19°$

f) $\cos\frac{2\pi}{3} = -\text{sen}\frac{\pi}{6}$

g) $\cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6}$

h) $\cos\frac{4\pi}{3} = -\text{sen}\frac{\pi}{6}$

i) $\text{tg}\, 151° = -\text{tg}\, 29°$

j) $\text{tg}\frac{5\pi}{3} = -\text{cotg}\frac{\pi}{6}$

k) $\text{tg}\frac{11\pi}{6} = -\text{tg}\frac{\pi}{6}$

l) $\text{tg}\frac{2\pi}{3} = -\text{cotg}\frac{\pi}{6}$

Instituto Cidade de Deus

Gabaritos - Matemática 2º EM

10) Como $\cos x > 0$ temos x ou no I ou no IV quadrante. Ao considerarmos $x + \frac{\pi}{2}$, ficaremos com o novo arco no I ou no II quadrante. Qualquer um deles tem seno positivo e mesmo valor em módulo.

Sendo assim, temos que:

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{5}$$

11)

a) $\text{cossec}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\text{sen}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sec\frac{7\pi}{6} = -\sec\left(\frac{7\pi}{6} - \pi\right) = -\sec\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

d) $\text{tg}\frac{11\pi}{6} = -\text{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $\text{sen}\frac{5\pi}{3} = -\text{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

f) $\text{cotg}\frac{5\pi}{4} = \text{cotg}\frac{\pi}{4} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\text{sen}\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

g) $\text{cossec}\,325° = -\text{cossec}\,35° = -\frac{1}{\text{sen}\,35°} = -\frac{1}{0{,}5736} \cong -1{,}74337$

h) $\cos 147° = -\cos 33° = -0{,}8387$

i) $\sec 250° = -\sec 70° = -\frac{1}{\cos 70°} = -\frac{1}{0{,}3420} \cong -2{,}92398$

h) $\cos\frac{4\pi}{\ } = -\text{sen}\frac{\pi}{\ }$

12)

a) $\frac{4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{230 - 63\sqrt{3}}{210}$

d) $\frac{-18+\sqrt{3}}{9}$

e) $\frac{-\sqrt{3}}{6}$

f) $\frac{42\sqrt{2}-111\sqrt{3}+70}{105}$

13) Desenvolvendo a expressão, temos que:

$$\left(\text{cossec}\frac{\pi}{6}+\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)\left(\text{sen}\frac{\pi}{4}-\sec\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-2\right)$$

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{-4+\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{-20+5\sqrt{2}}{4}$$

Portanto, o resultado da expressão é

$$\left(\text{cossec}\frac{\pi}{6}+\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)\left(\text{sen}\frac{\pi}{4}-\sec\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-20+5\sqrt{2}}{4}$$

14) $\text{cotg}\,330° < \text{cotg}\,120° < \text{cotg}\,60° < \text{cotg}\,210°$

15) Notemos que:

$$x = \frac{105\pi}{4} = \frac{104\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 26\pi + \frac{\pi}{4}$$

Com isso, x é côngruo a $\frac{\pi}{4}$. Assim, temos que:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

16) Temos que $1200° = 3\,.\,360° + 120°$.Então

$$\cos 1200° = \cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

17) Observe que:

$$\frac{19\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = 2\pi + \frac{7\pi}{6}$$

Assim, podemos concluir que $\frac{19\pi}{6}$ é côngruo a $\frac{7\pi}{6}$.

Logo, temos que:

$$\operatorname{sen}\frac{19\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = -\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6} - \pi\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

LIÇÃO 9: AVALIAÇÃO I DE MATEMÁTICA

1)

a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{4}{5}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{5}$

e) $\frac{4}{5}$

f) $\frac{3}{5}$

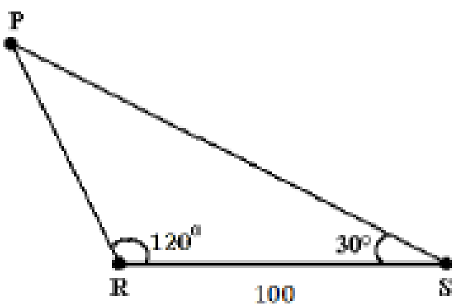
g) $\frac{4}{3}$

h) $\frac{3}{4}$

2) Pela Lei dos Senos no ΔPRS, temos que:

$$\frac{100}{\text{sen}\,30°} = \frac{\overline{PS}}{\text{sen}\,120°}$$

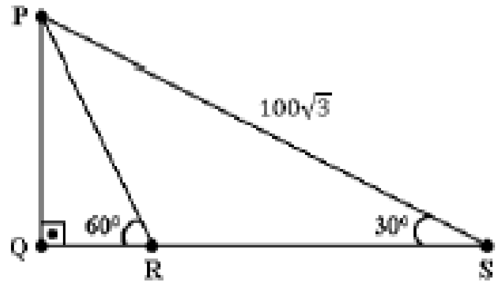
$$\overline{PS} = 100\sqrt{3}$$



Utilizando novamente a Lei dos Senos, mas agora, no ΔPQS, temos que:

$$\frac{100\sqrt{3}}{\text{sen}\,90°} = \frac{\overline{PQ}}{\text{sen}\,30°}$$

$$\overline{PQ} = 50\sqrt{3}$$



Portanto, a resposta é a alternativa ***B***.

3) Pela Lei dos Cossenos, temos que:

$$3^2 = 4^2 + 2^2 - 2\ .\ 4\ .\ 2\ .\ \cos\alpha$$

$$9 = 16 + 4 - 16\cos\alpha$$

$$16\cos\alpha = 11$$

$$\cos\alpha = \frac{11}{16} = 0{,}6875$$

$$\alpha \cong 47°$$

Portanto, $\hat{A}$ mede aproximadamente 47°.

4) Existem três casos para analisarmos:

1° Caso: $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{90°}$

Como $\cos 90° = 0$ (a justificativa ficará para os próximos capítulos). Então temos que:

$$b^2 + c^2 - 2bc\,.\cos\hat{A} = b^2 + c^2 - 2bc\,.\cos 90° = b^2 + c^2$$

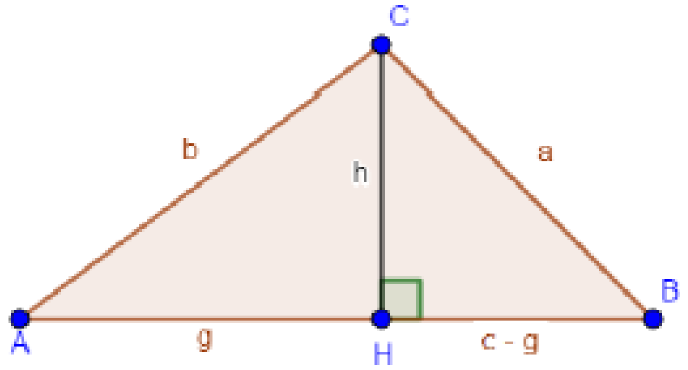
Assim, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Portanto, o caso 1 é verdadeiro. Resulta com o Teorema de Pitágoras.

2° Caso: Â agudo

Supondo que $\hat{A} < 90°$, e seja H o ponto perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ passando pelo vértice C, tal que $h = \overline{CH}$ e $g = \overline{AH}$.



Seja $\hat{B} < 90°$ e $\overline{HB} = c - g$. Aplicando o Teorema de Pitágoras nos ΔHCA e ΔHBC temos que:

$$b^2 = h^2 + g^2 \text{ e } a^2 = h^2 + (c-g)^2$$

Ou ainda,

$$h^2 = b^2 - g^2 \text{ e } h^2 = a^2 - (c-g)^2$$

Pela igualdade, temos que:

$$b^2 - g^2 = a^2 - (c-g)^2 \Leftrightarrow b^2 - g^2 = a^2 - c^2 + 2cg - g^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 = a^2 - c^2 + 2cg$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cg$$

Pelo ΔHCA, temos que:

$$\cos\hat{A} = \frac{ca}{hip} = \frac{g}{b} \Leftrightarrow g = b\,.\cos\hat{A}$$

Assim, temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cg \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,.\cos\hat{A}$$

Se $\hat{B} \geq 90°$ e $\overline{HB} = g$. Aplicando o Teorema de Pitágoras nos ΔHCA e ΔHBC temos que:

$$b^2 = h^2 + (c+g)^2 \text{ e } a^2 = h^2 + g^2$$

Ou ainda,

$$h^2 = b^2 - (c+g)^2 \text{ e } h^2 = a^2 - g^2$$

Pela igualdade, temos que:

$$b^2 - (c+g)^2 = a^2 - g^2 \Leftrightarrow b^2 - c^2 - 2cg - g^2 = a^2 - g^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 - c^2 - 2cg = a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 - c^2 - 2cg$$

Pelo ΔHCA, temos que:

$$\cos\hat{A} = \frac{ca}{hip} = \frac{c+g}{b} \Leftrightarrow g = b\,.\cos\hat{A} - c$$

Assim, temos que:

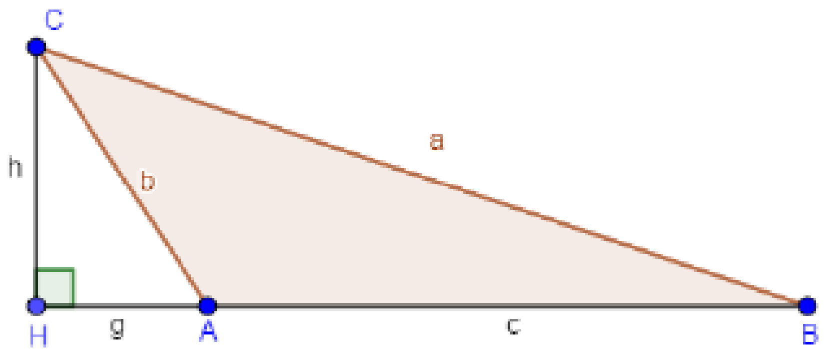
$$a^2 = b^2 - c^2 - 2cg \Leftrightarrow a^2 = b^2 - c^2 - 2c\,.(b\,.\cos\hat{A} - c)$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 - c^2 - 2bc\,.\cos\hat{A} + 2c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,.\cos\hat{A}$$

3° Caso: $\hat{A}$ obtuso

Supondo $\hat{A} > 90°$ e seja H o ponto perpendicular ao lado AB vindo do vértice C, tal que $h = \overline{CH}$ e $g = \overline{AH}$.



Pelo Teorema de Pitágoras aplicado aos ΔHAC e ΔHBC temos que:

$$b^2 = h^2 + g^2 \text{ e } a^2 = h^2 + (c+g)^2$$

Ou ainda,

$$h^2 = b^2 - g^2 \text{ e } h^2 = a^2 - (c+g)^2$$

Pela igualdade, temos que:

$$b^2 - g^2 = a^2 - (c+g)^2 \Leftrightarrow b^2 - g^2 = a^2 - c^2 - 2cg - g^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 = a^2 - c^2 - 2cg$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2cg$$

Como $B\hat{A}C > 90°$ temos que:

$$\cos B\hat{A}C = -\cos\left(180° - B\hat{A}C\right) = -\cos H\hat{A}C$$

Pelo ΔHAC, temos que:

$$\cos H\hat{A}C = \frac{ca}{hip} = \frac{g}{b} \Leftrightarrow g = b\,.\cos H\hat{A}C = -\,b\,.\cos \hat{A}$$

Assim, temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cg = b^2 + c^2 - 2bc\,.\cos\hat{A}$$

■ Q.E.D

5) No ΔABC, temos que:

$$\text{sen } 30° = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{2}{\overline{AC}}$$

$$\overline{AC} = 4\ m$$

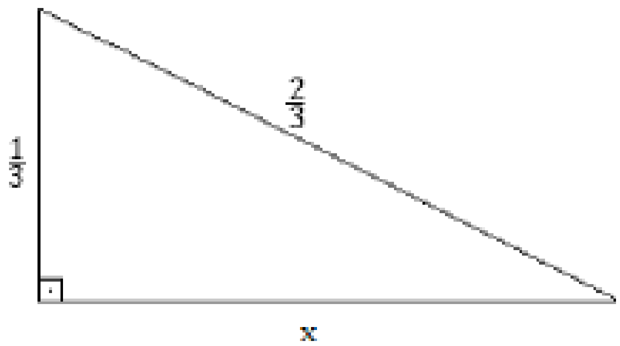
Como $\overline{AB} = 2\ m$, então a altura do degrau vale:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}m$$

E a hipotenusa do degrau vale:

$$\frac{\overline{AC}}{Quantidade\ de\ Degraus} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}m$$

Assim, os degraus possuem os seguintes valores:



Pelo Teorema de Pitágoras, nos degraus, temos que:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + x^2$$

$$x^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{9}$$

$$x^2 = \frac{3}{9}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Portanto, a extensão da escada é a alternativa ***E***.

6)

a) $\operatorname{tg} 290° = -\operatorname{tg} 70°$

b) $\operatorname{cossec} \frac{11\pi}{6} = -\operatorname{cossec} \frac{\pi}{6}$

c) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$

d) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$

7) $\sec 60° > \sec 330° > \sec 210° > \sec 120°$

8) Alternativa D.

9)

$$y = \frac{1}{\operatorname{cossec} x + \operatorname{cotg} x} + \frac{1}{\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x}$$

$$y = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} + \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$$

$$y = \frac{1}{\frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}} + \frac{1}{\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}}$$

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$$

$$y = \frac{\operatorname{sen} x + \cos^2 x \operatorname{sen} x - \cos^2 x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x}{1 - \cos^2 x}$$

$$y = \frac{2\,\text{sen}\,x}{\text{sen}^2\,x}$$

$$y = \frac{2}{\text{sen}\,x}$$

$$y = \frac{2}{\frac{1}{3}}$$

$$y = 6$$

10) **<u>Dica:</u>** Dividir por $\cos^2 x$, pois assim surgirá a tangente em nossa hipótese.

Assim, temos que:

$$\text{sen}\,x\cos x = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\text{sen}\,x\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{2}{5}}{\cos^2 x}$$

$$\text{tg}\,x = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{tg}\,x = \frac{2}{5} \cdot \sec^2 x$$

E como $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2\,x$, temos que:

$$\operatorname{tg} x = \frac{2}{5} \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2}{5} + \frac{2}{5}\operatorname{tg}^2 x$$

$$-\frac{2}{5}\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - \frac{2}{5} = 0$$

Como é uma função de segundo grau, temos uma fórmula para a soma e o produto.

$$\text{Produto} = \frac{c}{a} = \frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{2}{5}} = 1$$

$$\text{Soma} = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{-\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}$$

Portanto, a resposta é a alternativa **B**.

VOLUME 3
LIÇÃO 10: Funções trigonométricas 1

LIÇÃO 11: Funções trigonométricas 2

LIÇÃO 12: Funções trigonométricas 3

1)

a) A função seno é uma função ímpar $\forall x \in \mathbb{R}$, pois

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x)$$

Como por exemplo,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

Então:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = -\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

b) A função tangente é uma função ímpar $\forall x \in \mathbb{R}$, pois:

$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x)$$

Como por exemplo,

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Então:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = -\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

c) A função *cossecante* é uma função ímpar, pois:

$$\operatorname{cossec} x = -\operatorname{cossec}(-x)$$

Como por exemplo,

$$\operatorname{cossec}\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\operatorname{cossec}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Então:

$$\operatorname{cossec}\frac{\pi}{2} = 1 = -\operatorname{cossec}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

d) A função *cos*seno é uma função par $\forall x \in \mathbb{R}$, pois:

$$\cos x = \cos(-x)$$

Como por exemplo,

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad e \quad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Então:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

2)

a) $p(f) = 2\pi$

$I_m(f) = \{-1,1\}$

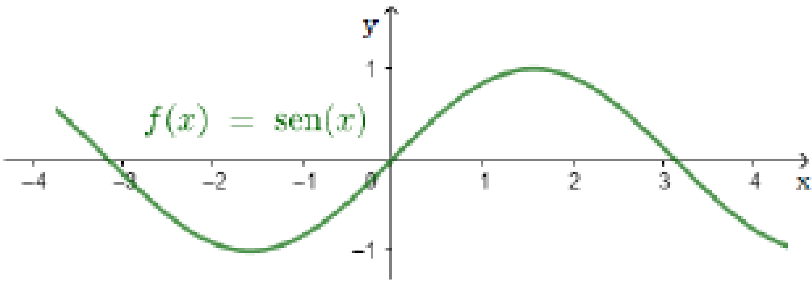


Figura 1 - O gráfico da função $f(x) = sen\ x$.

b) $p(f) = 2\pi$

$I_m(f) = \{-1,1\}$

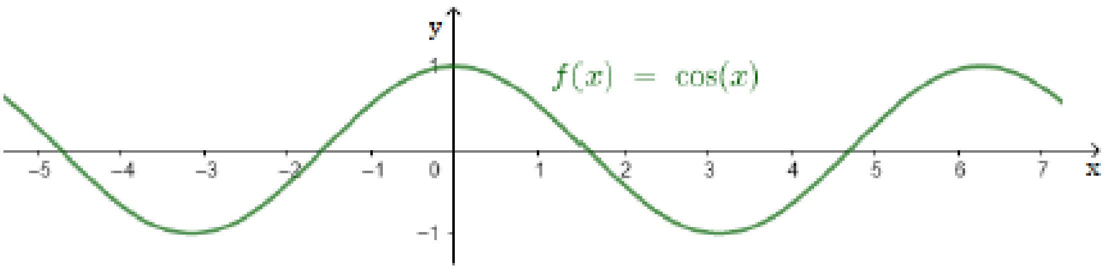


Figura 2 - O gráfico da função $f(x) = cos\ x$.

c) $p(f) = \pi$

$I_m(f) = \mathbb{R}$

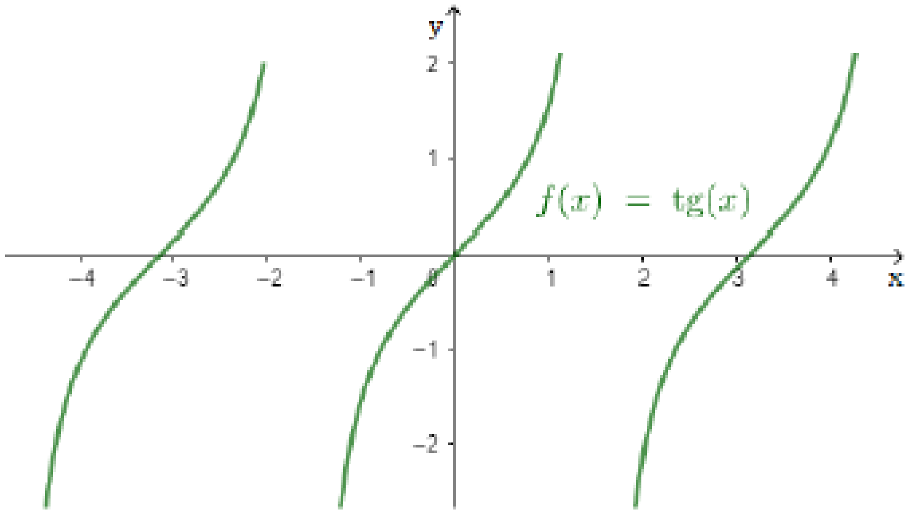


Figura 3 - O gráfico da função $f(x) = tg\, x$.

d) $p(f) = \pi$

$I_m(f) = \mathbb{R}$

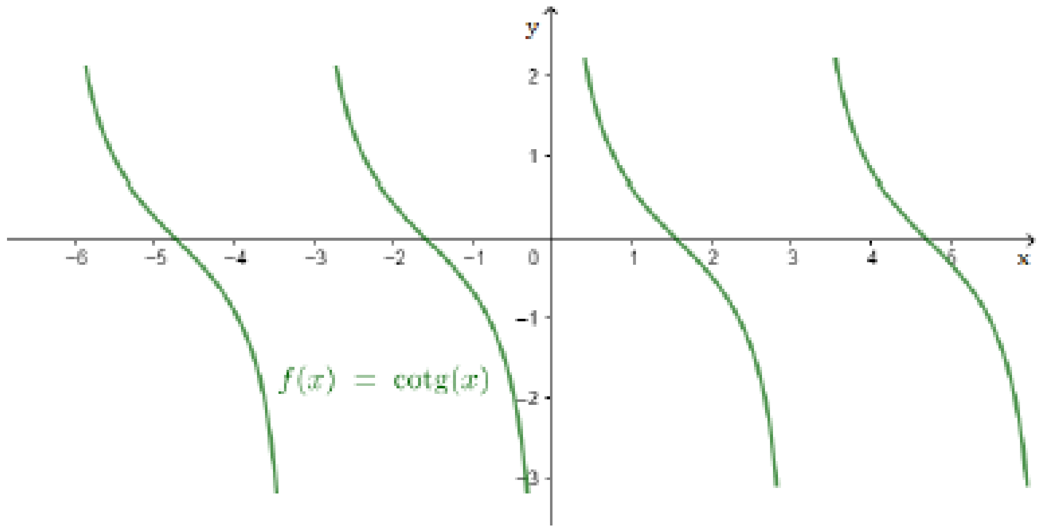


Figura 4 - O gráfico da função $f(x) = cotg\, x$.

e) $p(f) = 2\pi$

$I_m(f) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq -1 \text{ ou } f(x) \geq 1\}$

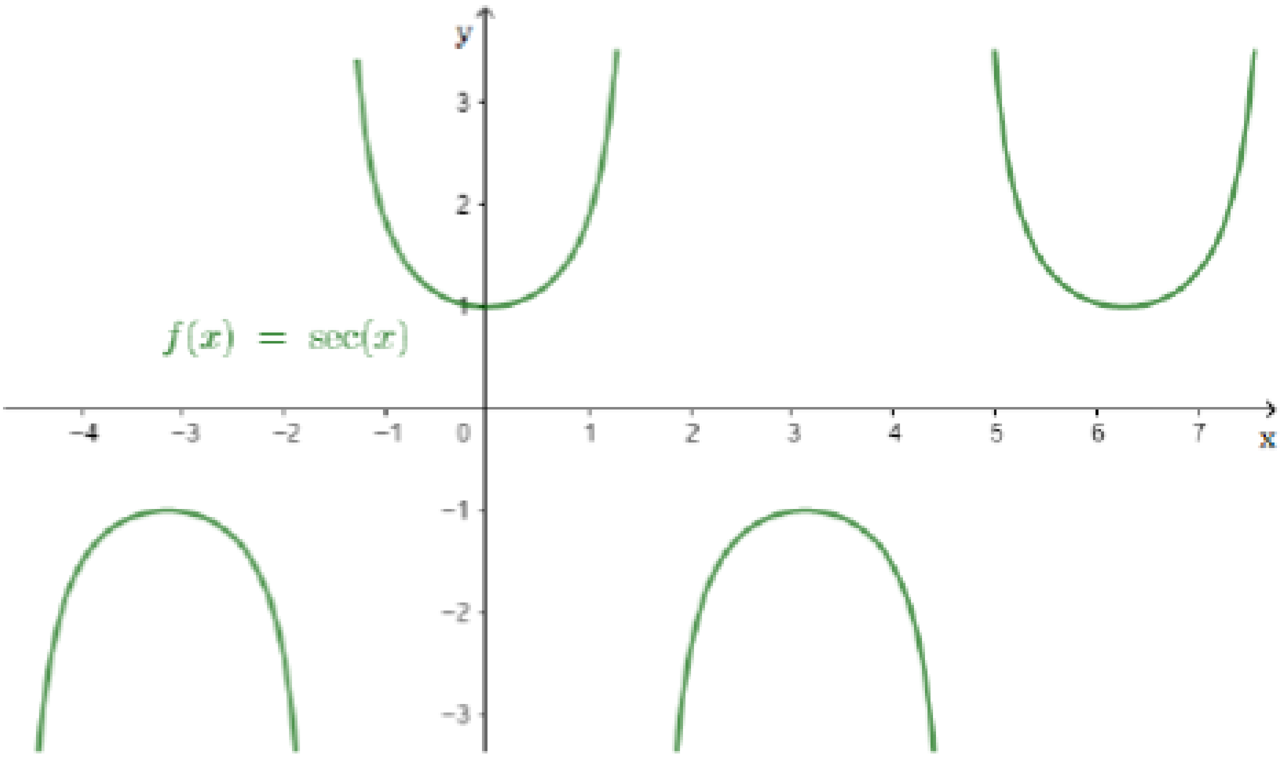


Figura 5 - O gráfico da função $f(x) = \sec x$.

f) $p(f) = 2\pi$

$I_m(f) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq -1 \; ou \; f(x) \geq 1\}$

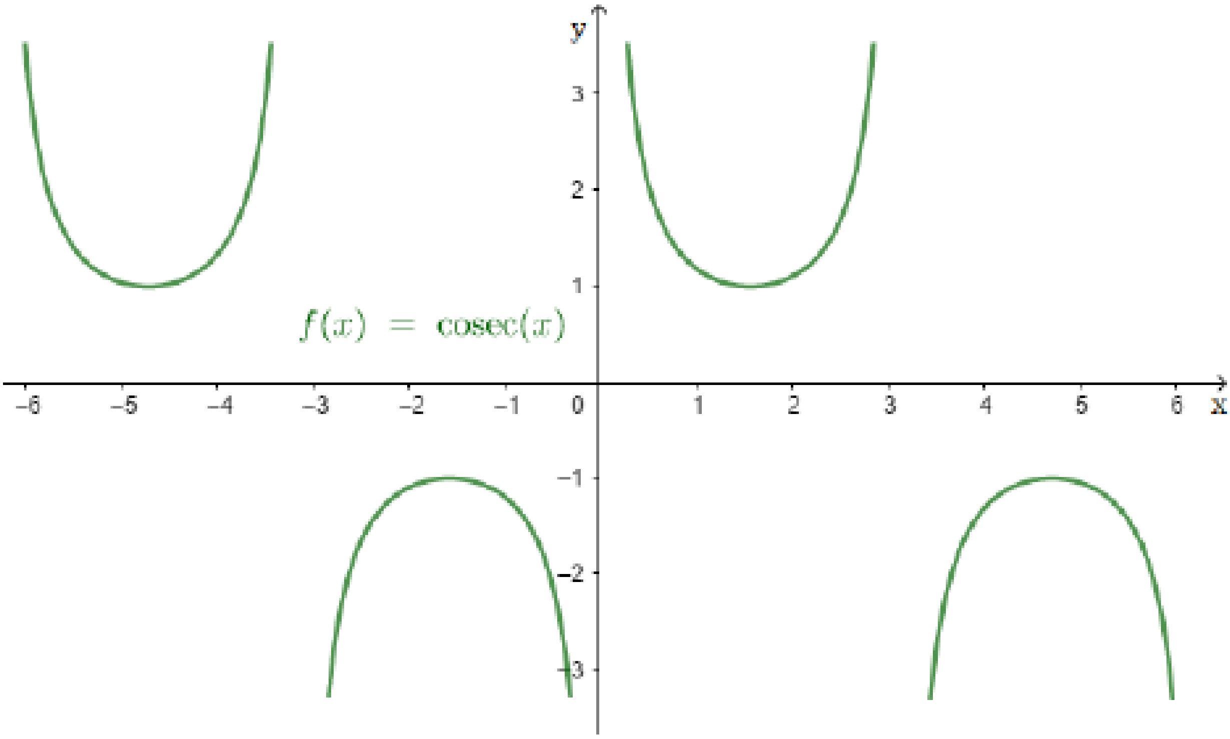


Figura 6 - O gráfico da função $f(x) = cossec\,x$.

g) $p(f) = \pi$

$I_m(f) = \{-1,1\}$

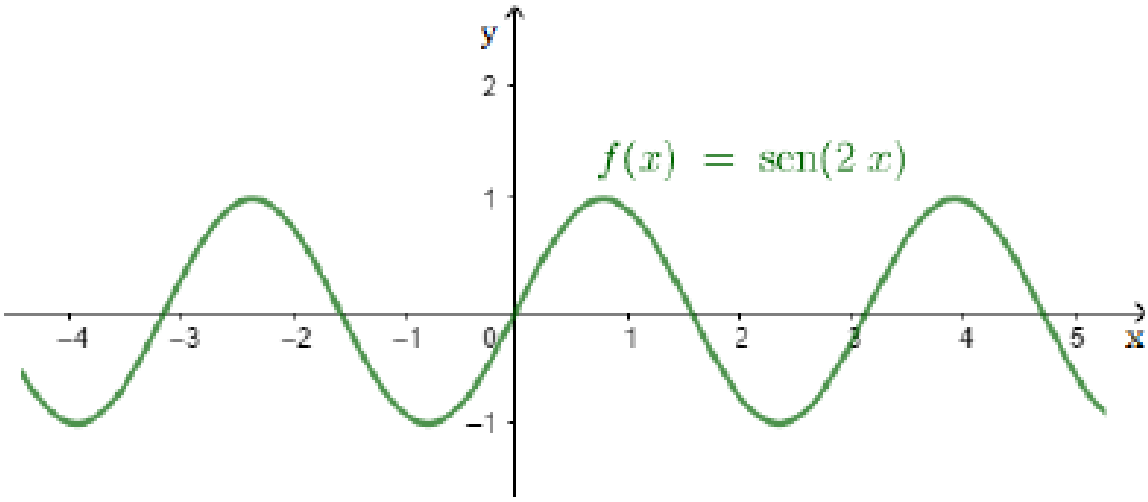


Figura 7 - O gráfico da função $f(x) = sen\,2x$.

h) $p(f) = \pi$

$I_m(f) = \{0, 1\}$

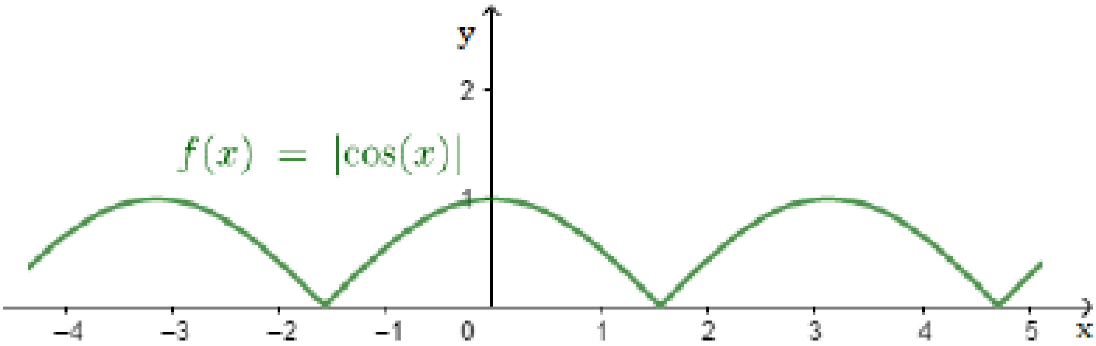


Figura 8 - O gráfico da função $f(x) = |\cos x|$.

i) $p(f) = 2\pi$

$I_m(f) = \{-1, 1\}$

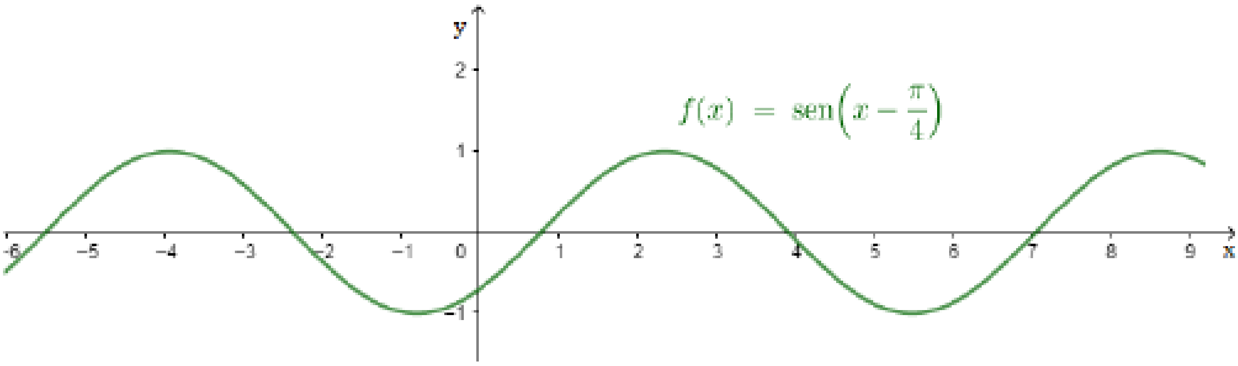


Figura 9 - O gráfico da função $f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

j) $p(f) = 4\pi$

$I_m(f) = \{-1, 1\}$

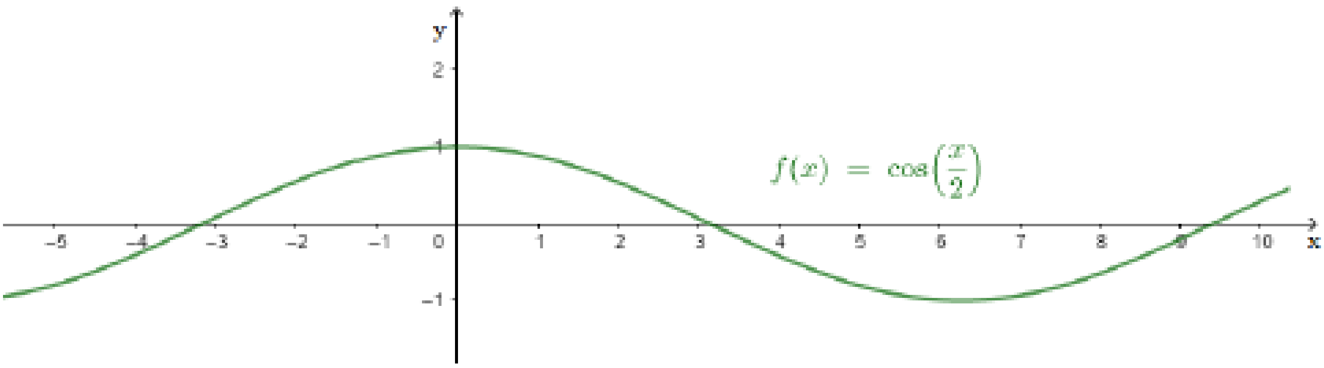


Figura 10 - O gráfico da função $f(x) = cos\frac{x}{2}$.

k) $p(f) = \pi$

$I_m(f) = \mathbb{R}$

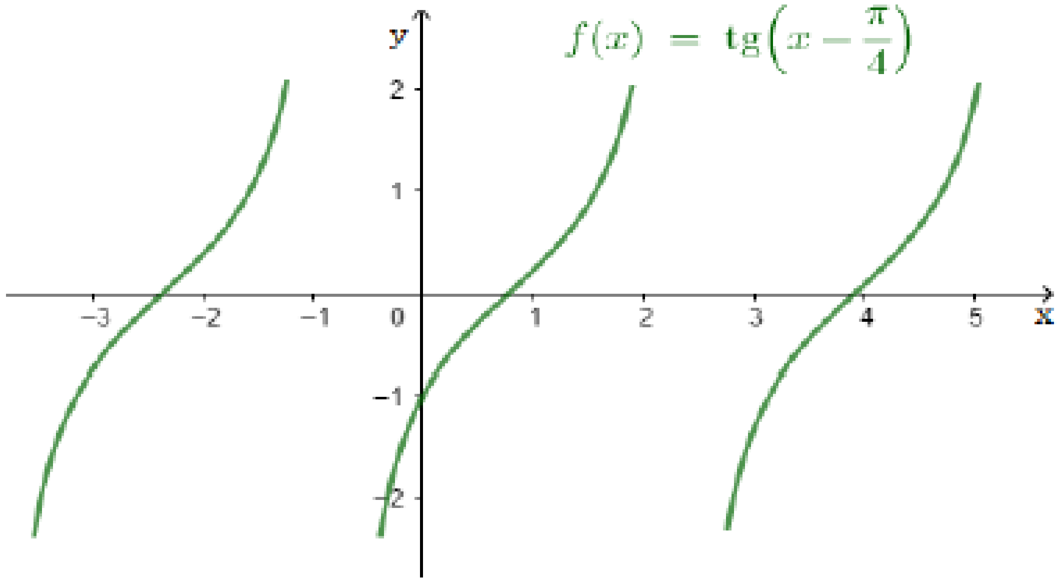


Figura 11 - O gráfico da função $f(x) = tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

l) $p(f) = \pi$

$I_m(f) = \mathbb{R}$

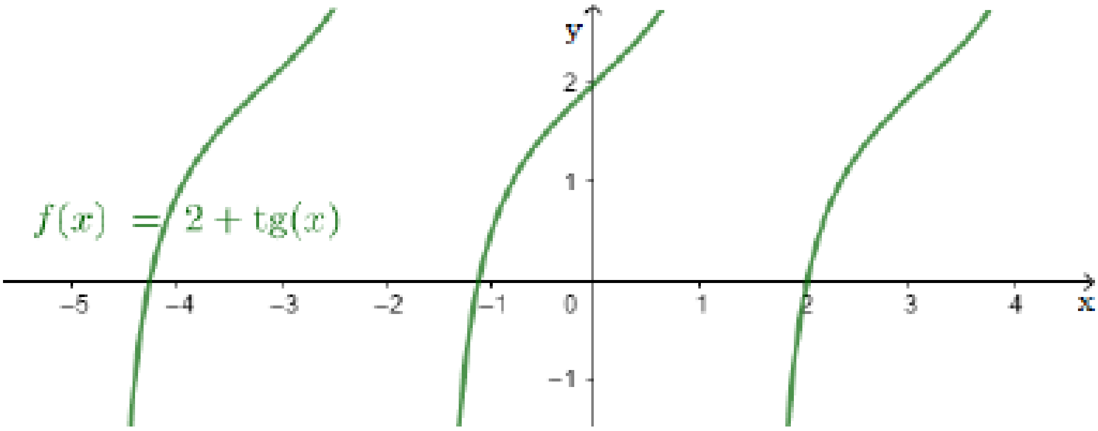


Figura 12 - O gráfico da função $f(x) = 2 + tg\, x$.

3)

a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) Na tangente temos que:

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Portanto, temos que:

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) $D(f) = \mathbb{R}$

d) Na *tangente* temos que:

$$3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$$

Portanto, temos que:

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3},\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

e) Na *cotangente* temos que:

$$x - \frac{\pi}{3} \neq k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Portanto, temos que:

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

f) Na *secante* temos que:

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Portanto, temos que:

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

g) Na $tangente$ temos que:

$$2x-\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow 2x\neq\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+k\pi\Rightarrow 2x\neq\frac{5\pi}{6}+k\pi\Rightarrow x\neq\frac{5\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}$$

Portanto, temos que:

$$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid\frac{5\pi}{12}+k\frac{\pi}{2},\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

h) Na $cossecante$ temos que:

$$x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi\Rightarrow x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi$$

Portanto, temos que:

$$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

4)

$$\frac{1}{1+\sec x}.\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\cos x}}.\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}=\frac{1}{\frac{\cos x+1}{\cos x}}.\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}=\frac{\cos x}{\cos x+1}.\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

$$=\frac{\sqrt{(1+\cos x).\cos^2 x}}{\sqrt{(1-\cos x)(\cos x+1)^2}}=\sqrt{\frac{(1+\cos x).\cos^2 x}{(1-\cos x)(\cos x+1)(\cos x+1)}}=\sqrt{\frac{\cos^2 x}{(1-\cos x)(\cos x+1)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x-1}}=\sqrt{\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}=\sqrt{\operatorname{cotg}^2 x}=\operatorname{cotg} x$$

5)

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x\ +\ 1}{\operatorname{cotg}^2 x\ +\ 1}=\frac{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\ +\ 1}{\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\ +\ 1}=\frac{\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{n^2-2n+1}{n^2}}{1-\frac{n^2-2n+1}{n^2}} = \frac{n^2-2n+1}{n^2} . \frac{n^2}{2n-1} = \frac{n^2-2n+1}{2n-1}$$

$$= \frac{(n-1)^2}{2n-1}$$

6) Alternativa E.

7) Alternativa A.

8)

$$-1 \leq 2m - 5 \leq 1$$

$$-1 + 5 \leq 2m \leq 1 + 5$$

$$\frac{4}{2} \leq m \leq \frac{6}{2}$$

$$2 \leq m \leq 3$$

9)

$$-1 \leq \frac{t+2}{2t-1} \leq 1$$

$$-1.(2t-1) \leq t+2 \leq 1.(2t-1)$$

$$-2t+1 \leq t+2 \leq 2t-1$$

$$-2t+\ 1-2 \leq t \leq 2t-1-2$$

$$-2t-1 \leq t \leq 2t-3$$

$$-2t-1 \leq t \quad ou \quad t \leq 2t-3$$

$$t \leq -\frac{1}{3} \quad ou \quad t \geq 3$$

10) Como $\sqrt{\alpha^2 - 5\alpha + 4} \geq 0$, então temos que:

$$\alpha^2 - 5\alpha + 4 \geq 0$$

$$a = 4 \quad e \quad a = 1$$

Fazendo o estudo de sinais, temos que:

$$a \leq 1 \quad e \quad a \geq 4$$

11) Como $\sqrt{2 - m} \geq 0$, então temos que:

$$2 - m \geq 0$$

$$-m \geq -2$$

$$m \leq 2$$

12) Sabemos que a imagem da $secante$ é $I_m(f) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq -1 \text{ } ou \text{ } f(x) \geq 1\}$.

Assim, temos que:

$$3m - 2 \leq -1 \Rightarrow m \leq \frac{1}{3}$$

$$3m - 2 \geq 1 \Rightarrow m \geq 1$$

Portanto, $m \leq \frac{1}{3}$ ou $m \geq 1$.

13) Na função $cossecante$, a imagem é $I_m(f) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq -1 \text{ } ou \text{ } f(x) \geq 1\}$.

Assim, temos que:

$$\frac{2m - 1}{1 - 3m} \leq -1 \Rightarrow 2m - 1 \leq -1 + 3m \Rightarrow -m \leq 0 \Rightarrow m \geq 0$$

$$\frac{2m - 1}{1 - 3m} \geq 1 \Rightarrow 2m - 1 \geq 1 - 3m \Rightarrow 5m \geq 2 \Rightarrow m \geq \frac{2}{5}$$

Como a função cossec $x = \frac{2m-1}{1-3m}$, o denominador é diferente de zero, então temos que:

$$1 - 3m \neq 0$$

$$-3m \neq -1$$

$$m \neq \frac{1}{3}$$

Portanto, $0 \leq m < \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{3} < m \geq \frac{2}{5}$.

14)

a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) Não existe

c) Não existe

d) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

f) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

VOLUME 3
LIÇÃO 14 (13): Transformações 2

Instituto Cidade de Deus

Gabaritos - Matemática 2º EM

1)

a) $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° . \cos 30° + \operatorname{sen} 45° . \operatorname{sen} 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

b) $\operatorname{sen} 105° = \operatorname{sen}(60° + 45°) = \operatorname{sen} 60° . \cos 45° + \operatorname{sen} 45° . \cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c) $\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(45° + 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 45° \,.\, \operatorname{tg} 30°} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1.\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

d) $\sec 285° = \sec 75° = \frac{1}{\cos 75°} = \frac{1}{\cos(45°+30°)} = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

e) $\operatorname{cotg} 165° = -\operatorname{cotg} 15° = -\frac{1}{\operatorname{tg} 15°} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(45° - 30°)} = -\frac{1}{\frac{\operatorname{tg} 45 - \operatorname{tg} 30}{1 + \operatorname{tg} 45 . \operatorname{tg} 30}}$

$$= -\frac{1}{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1.\frac{\sqrt{3}}{3}}} = -\frac{1 + 1.\frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = -(2+\sqrt{3}) = -2-\sqrt{3}$$

f) $\sec 255° = -\sec 75° = -(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = -\sqrt{6} - \sqrt{2}$

g) $\operatorname{cossec} 15° = \frac{1}{\operatorname{sen} 15°} = \frac{1}{\operatorname{sen}(45° - 30°)} = \frac{1}{\operatorname{sen} 45° . \cos 30° - \operatorname{sen} 30° . \cos 45°}$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen} 45° . \cos 30° - \operatorname{sen} 30° . \cos 45°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

2)

$$\operatorname{tg}(A - B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 + \operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{tg} B} = \frac{2 - 1}{1 + 2 \,.\, 1} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$$

3)

$$\cos x = +\sqrt{1-\text{sen}^2 x} = +\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{sen}\, y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-\frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \,.\, \cos y \; - \; \text{sen}\, x \,.\, \text{sen}\, y = \frac{4}{5}.\frac{5}{13} - \frac{3}{5}.\frac{-12}{13} = \frac{56}{65}$$

4)

$$\cos y = -\sqrt{1-\text{sen}^2 y} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{tg}\, y = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{tg}(x+y) = \frac{\text{tg}\, x \; + \; \text{tg}\, y}{1 \; - \; \text{tg}\, x \;.\; \text{tg}\, y} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}}{1 \; - \; \frac{2}{3}.\left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{17}{9}} = -\frac{6}{17}$$

5) $f(x) = \text{sen}\, 2x \,.\, \cos x + \text{sen}\, x \,.\, \cos 2x = \text{sen}(2x+x) = \text{sen}\, 3x$

Assim, temos que:

$D(f) = \mathbb{R}$

$p = \frac{2\pi}{3}$

$I_m(f) = [-1, 1]$

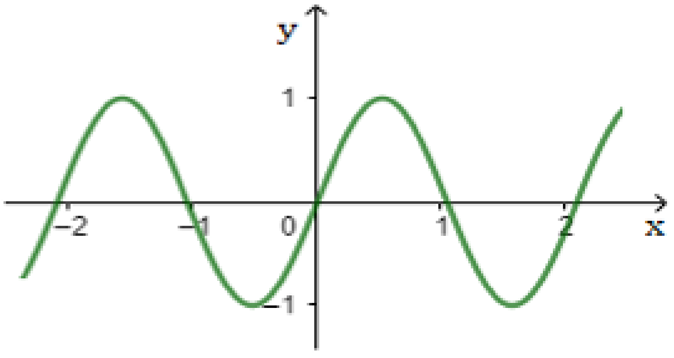


Figura 13 - Gráfico da função $f(x) = sen\, 3x$.

6)

$$\operatorname{sen} x = -\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}} = -\sqrt{\frac{\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}} = -\frac{3}{5}$$

$$\cos x = -\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}} = -\sqrt{\frac{1}{1+\frac{9}{16}}} = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2.\operatorname{sen} x \,.\cos x = 2.\left(-\frac{3}{5}\right).\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

7)

$$\cos x = \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x} = \sqrt{1+\frac{144}{25}} = \frac{13}{5} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{5}{13}$$

$$\cos 2x = 1 - 2.\operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\,.\frac{25}{169} = \frac{119}{169}$$

8)

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{\sec^2 x - 1} = -\sqrt{\frac{625}{576} - 1} = -\frac{7}{24}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\,.\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{-\frac{14}{24}}{1 - \frac{49}{576}} = -\frac{336}{527}$$

9) Note que $\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$.

$$\cos x = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = -\sqrt{1-\frac{576}{625}} = -\frac{7}{25}$$

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = +\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = +\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = +\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

10)

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\frac{25}{144}}} = \pm\frac{12}{13}$$

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1\pm\frac{12}{13}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{13\pm 12}{26}}$$

Portanto, há 4 possibilidades para $\operatorname{sen}\frac{x}{2}$:

$$+\frac{\sqrt{26}}{26},\quad -\frac{\sqrt{26}}{26},\quad +\frac{5\sqrt{26}}{26},\quad -\frac{5\sqrt{26}}{26}$$

11)

$$\operatorname{cotg}\frac{a}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{a}{2}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{a}{2}} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sen} a = \frac{2.\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}} = \frac{2.\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{3}{9}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

12)

a) $y = 2.\operatorname{sen}\frac{5x+3x}{2}\ .\ \cos\frac{5x-3x}{2} = 2.\operatorname{sen} 4x\,.\cos x$

b) $y = 2.\cos\frac{3x+x}{2}\ .\ \cos\frac{3x-x}{2} = 2.\cos 2x\,.\cos x$

c) $y = (\cos 9a + \cos 5a) - (\cos 3a + \cos a)$

$= 2.\cos 7a\,.\cos 2a - 2.\cos 2a\,.\cos a$

$= 2.\cos 2a\,.(\cos 7a - \cos a)$

$= 2.\cos 2a\,.(-2.\operatorname{sen} 4a\,.\operatorname{sen} 3a)$

$= -4.\cos 2a\,.\operatorname{sen} 4a\,.\operatorname{sen} 3a$

d) $y = (\text{sen}\, a + \text{sen}\, b) - [\text{sen}(a+b+c) - \text{sen}\, c]$

$$= 2.\text{sen}\frac{a+b}{2}.\ \cos\frac{a-b}{2} - 2.\text{sen}\frac{a+b+c-c}{2}.\ \cos\frac{a+b+c-(-c)}{2}$$

$$= 2.\text{sen}\frac{a+b}{2}.\ \cos\frac{a-b}{2} - 2.\text{sen}\frac{a+b}{2}.\ \cos\frac{a+b+2c}{2}$$

$$= -2.\text{sen}\frac{a+b}{2}.\left[\cos\frac{a+b+2c}{2} - \cos\frac{a-b}{2}\right]$$

$$= -2.\text{sen}\frac{a+b}{2}.\left(-2.\text{sen}\frac{\frac{a+b+2c+a-b}{2}}{2}.\text{sen}\frac{\frac{a+b+2c-a+b}{2}}{2}\right)$$

$$= -2.\text{sen}\frac{a+b}{2}.\left(-2.\text{sen}\frac{2a+2c}{4}.\text{sen}\frac{2b+2c}{4}\right)$$

$$= 4.\text{sen}\frac{a+b}{2}.\text{sen}\frac{a+c}{2}.\text{sen}\frac{b+c}{2}$$

e) $y = \text{sen}\frac{\pi}{2} + \text{sen}\, 2x = 2.\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 2.\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

f) $y = \cos 0 + \cos x = 2.\cos\frac{\pi}{2}.\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2.\cos^2\frac{\pi}{2}$

g) $y = (\cos 2a + \cos 0) + \cos a = 2.\cos^2 a + \cos a = 2.\cos a\left(\cos a + \frac{1}{2}\right)$

$$= 2.\cos a\left[\cos a + \cos\frac{\pi}{3}\right] = 2.\cos a\left[2.\cos\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 4.\cos a.\cos\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

h) $y = (\text{sen}\, 5a + \text{sen}\, a) + 2.\text{sen}\, 3a = 2.\text{sen}\, 3a.\cos 2a + 2.\text{sen}\, 3a$

$$= 2.\text{sen}\, 3a.[\cos 2a + 1] = 2.\text{sen}\, 3a.[\cos 2a + \cos 0]$$

$$= 2.\text{sen}\, 3a.[2.\cos a + \cos a] = 4.\text{sen}\, 3a.\cos^2 a$$

i) $y = \text{sen}\, x + \cos x = \text{sen}\, x + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 2.\text{sen}\frac{\pi}{4}.\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

j) $y = \cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = -2.\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}.\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

k) $y = \frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\cos a + \cos b} = \frac{2\ .\ \operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right).\ \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\ .\ \cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\ \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)} = \operatorname{tg}\ \left(\frac{a+b}{2}\right)$

13) Temos que:

$$\frac{x\ +\ y}{2} = \frac{13\pi}{12} \qquad e \qquad \frac{x -\ y}{2} = \frac{11\pi}{12}$$

Pelo sistema, obtemos que:

$$x = \frac{24\pi}{12} = 2\pi \qquad e \qquad y = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

Portanto, temos que:

$$y = \frac{1}{2}.\left(2.\operatorname{sen}\frac{13\pi}{12}.\cos\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}.\left(\operatorname{sen} 2\pi\ +\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.\left(0\ +\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

14)

$$\frac{\cos x - \cos 5x}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 5x} = \frac{-2\operatorname{sen}\left(\frac{x+5x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-5x}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x-5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+5x}{2}\right)} = -\frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x} = -\operatorname{tg} 3x$$

15) Alternativa D.

16)

a)

$$\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1+\cos(x+x)}{2} = \frac{1+\cos x\,.\cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x}{2}$$

$$= \frac{1+\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{2} = \frac{1+\cos^2 x + \cos^2 x - 1}{2}$$

$$= \frac{2\cos^2 x}{2} = \cos^2 x$$

b)

$$\frac{\cos 2x\ -\ 1}{\cos 2x\ +\ 1} = \frac{2\cos^2 x\ -\ 1 - 1}{2\cos^2 x\ -\ 1\ +\ 1} = \frac{2\cos^2 x\ -\ 2}{2\cos^2 x} = \frac{2(\cos^2 x\ -\ 1)}{2\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x\ -\ 1}{\cos^2 x} = \frac{-\text{sen}^2\, x}{\cos^2 x} = -\,\text{tg}^2\, x$$

17)

$$\text{tg}\frac{x}{4} = \frac{2\,.\,\text{tg}\frac{x}{8}}{1 - \text{tg}^2\frac{x}{8}}$$

$$1 = \frac{2\,.\,\text{tg}\frac{x}{8}}{1 - \text{tg}^2\frac{x}{8}}$$

$$1.\left(1 - \text{tg}^2\frac{x}{8}\right) = 2\,.\,\text{tg}\frac{x}{8}$$

$$1 - \text{tg}^2\frac{x}{8} = 2\,.\,\text{tg}\frac{x}{8}$$

$$-\,\text{tg}^2\frac{x}{8} - 2\,.\,\text{tg}\frac{x}{8} + 1 = 0$$

Tome $\text{tg}\frac{x}{8} = y$, então temos que:

$$-y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$y_1 = -1 - \sqrt{2}$$

$$y_2 = -1 + \sqrt{2}$$

O $y_1 < 0$ então não pode ser o resultado, pois com ele a distância seria negativa.

Logo, usaremos y_2 para descobrir a distância d, tal que:

$$d = \frac{5}{\text{tg}\, 22{,}5}$$

$$d = \frac{5}{\text{tg}\frac{\pi}{8}}$$

$$d = \frac{5}{\sqrt{2} - 1} = \frac{5}{\sqrt{2} - 1}\,.\,\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{5\sqrt{2} + 1}{4 - 1} = \frac{5\sqrt{2} + 1}{3} = \frac{5}{3}\,.\,(\sqrt{2} + 1)$$

Instituto Cidade de Deus

Gabaritos - Matemática 2º EM

VOLUME 4

LIÇÃO 13: Identidades

1)

$$f(x) = (1 + \mathrm{cotg}^2\,x)(1 - \cos^2 x) = \left(1 + \frac{\cos^2 x}{\mathrm{sen}^2\,x}\right).\mathrm{sen}^2\,x = \frac{\mathrm{sen}^2\,x + \cos^2 x}{\mathrm{sen}^2\,x}\,.\ \mathrm{sen}^2\,x = 1 = g(x)$$

2)

$$g(x) = \frac{1}{\mathrm{cossec}\,x - 1} + \frac{1}{\mathrm{cossec}\,x + 1} = \frac{(\mathrm{cossec}\,x + 1) + (\mathrm{cossec}\,x - 1)}{(\mathrm{cossec}\,x - 1) + (\mathrm{cossec}\,x + 1)} = \frac{2\,\mathrm{cossec}\,x}{\mathrm{cossec}^2\,x - 1}$$

$$= \frac{2\,\mathrm{cossec}\,x}{\mathrm{cotg}^2\,x} = \frac{2}{\mathrm{sen}\,x}\,.\,\frac{\mathrm{sen}^2\,x}{\cos^2 x} = 2\,.\,\frac{1}{\cos x}\,.\,\frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x} = 2\,.\sec x.\ \mathrm{tg}\,x = f(x)$$

3)

$$f(x) = (1 - \mathrm{tg}\,x)^2 + (1 - \mathrm{cotg}\,x)^2 = \left(1 - \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}\right)^2 + \left(1 - \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\cos x - \mathrm{sen}\,x}{\cos x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{sen}\,x - \cos x}{\mathrm{sen}\,x}\right)^2 = \frac{1 - 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{1 - 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x}{\mathrm{sen}^2\,x}$$

$$= (1 - 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x)\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\mathrm{sen}^2\,x}\right) = (1 - 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x)\left(\frac{\mathrm{sen}^2\,x + \cos^2 x}{\cos^2 x\,.\ \mathrm{sen}^2\,x}\right)$$

$$= \frac{1 - 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x}{\cos^2 x\,.\ \mathrm{sen}^2\,x} = h(x)$$

$$g(x) = (\sec x - \mathrm{cossec}\,x)^2 = \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\mathrm{sen}\,x}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{sen}\,x - \cos x}{\cos x\,.\ \mathrm{sen}\,x}\right)^2 = \frac{1 - 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x}{\cos^2 x\,.\ \mathrm{sen}^2\,x} = h(x)$$

Portanto, $f(x) = g(x)$.

4)

$$f(x) - g(x) = \frac{1 - \cos x}{\mathrm{sen}\,x\,.\ \cos x} + \mathrm{sen}\,x - \frac{1 - \cos x}{\mathrm{tg}\,x} - \mathrm{tg}\,x$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\mathrm{sen}\,x\,.\ \cos x} + \mathrm{sen}\,x - \frac{\cos x\,(1 - \cos x)}{\mathrm{sen}\,x} - \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$$

$$=\frac{1-\cos x+\operatorname{sen}^2 x\ .\cos x-\cos^2 x\,(1-\cos x)-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x\ .\ \cos x}$$

$$=\frac{1-\cos x+(1-\cos^2 x)\,.\cos x-\cos^2 x\,(1-\cos x)-(1-\cos^2 x)}{\operatorname{sen} x\ .\ \cos x}$$

$$=\frac{1-\cos x+\cos x-\cos^3 x-\cos^2 x+\cos^3 x-1+\cos^2 x}{\operatorname{sen} x\ .\ \cos x}=\frac{0}{\operatorname{sen} x\ .\ \cos x}=0$$

5)

a)

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}\right)-\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\right)=\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos x-\operatorname{sen} x\cos\frac{\pi}{4}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos x+\operatorname{sen} x\cos\frac{\pi}{4}}\right)-\left(\frac{\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}.\operatorname{sen} x}{\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}.\operatorname{sen} x}\right)$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x}=0$$

b)

$$\frac{\cos x\ .\ \operatorname{cotg} x-\operatorname{sen} x\ .\ \operatorname{tg} x}{\operatorname{cossec} x-\sec x}-1+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x=\frac{\cos x\ .\ \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}-\operatorname{sen} x\ .\ \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\operatorname{cossec} x-\sec x}-1-\operatorname{sen} x\cos x$$

$$=\frac{\cos^2 x\,.\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\operatorname{sen}^2 x\,.\frac{1}{\cos x}}{\operatorname{cossec} x-\sec x}-1-\operatorname{sen} x\cos x=\frac{\cos^2 x\,.\operatorname{cossec} x-\operatorname{sen}^2 x\,.\sec x}{\operatorname{cossec} x-\sec x}-1-\operatorname{sen} x\cos x$$

$$=\frac{\cos^2 x\ .\ \operatorname{cossec} x-\operatorname{sen}^2 x\ .\ \sec x+(-1-\operatorname{sen} x\cos x)(\operatorname{cossec} x-\sec x)}{\operatorname{cossec} x-\sec x}$$

$$=\frac{\cos^2 x\ .\ \operatorname{cossec} x-\operatorname{sen}^2 x\ .\ \sec x-\operatorname{cossec} x+\sec x-\operatorname{sen} x\cos x\operatorname{cossec} x+\operatorname{sen} x\cos x\sec x}{\operatorname{cossec} x-\sec x}$$

$$=\frac{\operatorname{cossec} x\,(\cos^2 x-1-\operatorname{sen} x\cos x)+\sec x\,(-\operatorname{sen}^2 x+1\operatorname{sen} x\cos x)}{\operatorname{cossec} x-\sec x}$$

$$= \frac{\operatorname{cossec} x\,(-\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cos x) + \sec x\,(\cos^2 x + \operatorname{sen} x \cos x)}{\operatorname{cossec} x - \sec x}$$

$$= \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x}(-\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cos x) + \frac{1}{\cos x}(\cos^2 x + \operatorname{sen} x \cos x)}{\operatorname{cossec} x - \sec x}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} x - \cos x + \cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec} x - \sec x}$$

$$= \frac{0}{\operatorname{cossec} x - \sec x} = 0$$

6) Para $n = 1$, temos que:

$$\cos a\ .\cos 2a\,.\cos 4a\,. \ldots\ .\cos 2^{n-1}.\,a = \frac{\operatorname{sen} 2^n a}{2^n\,.\ \operatorname{sen} a}$$

$$\cos 2^{1-1}.\,a = \frac{\operatorname{sen} 2^1 a}{2^1\,.\ \operatorname{sen} a}$$

$$\cos 2^0.\,a = \frac{\operatorname{sen} 2^1 a}{2^1\,.\ \operatorname{sen} a}$$

$$\cos a = \frac{\operatorname{sen} 2a}{2\,.\ \operatorname{sen} a}$$

$$\cos a = \frac{2 \operatorname{sen} a\,.\ \cos a}{2\,.\ \operatorname{sen} a}$$

$$\cos a = \cos a$$

Com isso, vale para $n = 1$.

Suponha que vale para $n = k$, vamos provar que vale para $n = k + 1$.

$$\cos a\ .\cos 2a\,.\cos 4a\,.\ldots\ .\cos 2^{k-1}.\,a.\ \cos 2^{k}.\,a=\frac{\text{sen}\ 2^{k+1}a}{2^{k+1}\ .\ \text{sen}\ a}$$

$$\frac{\text{sen}\ 2^{k}a}{2^{k}\ .\ \text{sen}\ a}.\ \cos 2^{k}.\,a=\frac{\text{sen}\ 2^{k+1}a}{2^{k+1}\ .\ \text{sen}\ a}$$

$$\frac{\text{sen}\ 2^{k}a}{2^{k}\ .\ \text{sen}\ a}.\ \cos 2^{k}.\,a=\frac{\text{sen}\ 2^{k+1}a}{2^{k+1}\ .\ \text{sen}\ a}$$

$$\frac{2^{k+1}\ .\ \text{sen}\ a}{2^{k}\ .\ \text{sen}\ a}.\ \cos 2^{k}.\,a=\frac{\text{sen}\ 2^{k+1}a}{\text{sen}\ 2^{k}a}$$

$$\frac{2\,.\,2^{k}\ .\ \text{sen}\ a}{2^{k}\ .\ \text{sen}\ a}.\ \cos 2^{k}.\,a=\frac{2\,\text{sen}\ 2^{k}a\ .\ \cos 2^{k}a}{\text{sen}\ 2^{k}a}$$

$$2\,.\cos 2^{k}.\,a=2\,.\cos 2^{k}.\,a$$

Portanto, vale para $n=k+1$, pois chegamos em uma igualdade. Assim, está demonstrado por indução que vale para qualquer n a igualdade abaixo:

$$\cos a\ .\cos 2a\,.\cos 4a\,.\ldots\ .\cos 2^{n-1}.\,a=\frac{\text{sen}\ 2^{n}a}{2^{n}\ .\ \text{sen}\ a}$$

7)

$$y=\frac{(-\,\text{sen}\,x)(-\cos x)}{(-\,\text{cotg}\,x)(\text{tg}\,x)}=-\,\text{sen}\,x\cos x$$

8)

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{5} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi + \dfrac{\pi}{5} + 2k\pi = \dfrac{4\pi}{5} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \quad ou \quad x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi\right\}$$

b)

$$\operatorname{cossec} x = \operatorname{cossec}\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad ou \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$$

c)

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 + 2k\pi \quad ou \quad x = \pi + 2k\pi\}$$

d)

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad ou \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

e)

$$\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad ou \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}$$

f)

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad ou \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}$$

g) $\operatorname{sen} x = 1 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$$

h) $\operatorname{sen} x = -1 = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\}$$

i) $\cos x = \cos\frac{\pi}{5} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{5} + 2k\pi$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{5} + 2k\pi\right\}$$

j) $\sec x = \sec\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos\frac{2\pi}{3}} = \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}$$

k) $\cos x = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$$

l) $\cos x = 1 = \cos 0$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi\}$$

m) $\cos x = -1 = \cos\pi$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi\}$$

n) $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$$

o) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}$$

p) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

q) $\operatorname{tg} x = 1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$$

r) $\operatorname{cotg} x = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi\right\}$$

s) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi\right\}$$

t) $\operatorname{tg} x = 0 = \operatorname{tg} 0$, então:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi\}$$

u) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right\}$$

v) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x \Rightarrow 2x = x + k\pi$, então:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi\}$$

w) $\operatorname{tg} 3x = 1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\right\}$$

x) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 3x \Rightarrow 5x = 3x + k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$, então:

Note que, se k for ímpar, então não existe tg $5x$ e tg $3x$, portanto:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2} + k\ par\right\}$$

9) Tomando $\text{sen}\, x = u$ e $\cos x = v$, temos:

$$\begin{cases} u + v = 1 & (1) \\ u^2 + v^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Fazendo (1) em (2), temos que:

$$u^2 + (1 - u)^2 = 1 \Rightarrow 2u^2 - 2u = 0$$

Então, temos duas possibilidades:

$$u = 0\ e\ v = 1\ ou\ u = 1\ e\ v = 0$$

Para a primeira possibilidade, temos que:

$$\text{sen}\, x = 0\ e\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$

Para a segunda possibilidade, temos que:

$$\text{sen}\, x = 1\ e\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Portanto,

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ \ ou\ \ x = 2k\pi\right\}$$

10)

a) $\operatorname{sen} x = \pm\frac{1}{2}$ e, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\; ou \;\; x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \;\; ou \;\; x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \;\; ou \;\; x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

b) $\operatorname{sen} x\,(\operatorname{sen} x - 1) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \;\; ou \;\; \operatorname{sen} x = 1$, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \;\; ou \;\; x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$$

c) Resolvendo a equação do segundo grau, temos que $\operatorname{sen} x = 1 \;\; ou \;\; \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; ou \;\; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\; ou \;\; x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

d) $2\,.\,(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 1 - \operatorname{sen} x \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0.$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos que $\operatorname{sen} x = 1 \;\; ou \;\; \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; ou \;\; x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\; ou \;\; x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

e)

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \quad ou \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\pi \;\;\; ou \;\;\; x = \frac{5\pi}{12} + k\pi\right\}$$

f)

$$\operatorname{sen} 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \quad ou \\ 3x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \;\;\; ou \;\;\; x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right\}$$

g)

$$\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\Rightarrow\begin{cases} x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ ou \\ x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$$

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\quad ou\quad x=\pi+2k\pi\right\}$$

h)

$$\operatorname{sen}2x=\operatorname{sen}x\Rightarrow\begin{cases} 2x=x+2k\pi \\ ou \\ 2x=\pi-x+2k\pi \end{cases}$$

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=2k\pi\quad ou\quad x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right\}$$

i) $\cos^2 x=\frac{3}{4}\Rightarrow\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\;\; ou\;\; \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, então:

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi\quad ou\quad x=\pm\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$$

j) $\cos x\,(\cos x+1)=0\Rightarrow\cos x=0\;\; ou\;\; \cos x=-1$, então:

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{2}+k\pi\;\; ou\;\; x=\pi+2k\pi\right\}$$

k) $1-\cos^2 x=1+\cos x\Rightarrow\cos^2 x+\cos x=0$ e recaímos no anterior.

l) $(2\,.\cos^2 x-1)+3\,.\;\cos x+2=0\Rightarrow 2\,.\cos^2 x\,3\,.\;\cos x+1=0$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos que $\cos x=-1\;\; ou\;\; \cos x=-\frac{1}{2}$, então:

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\pi+2k\pi\;\; ou\;\; x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\;\; ou\;\; x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right\}$$

m) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi\right\}$$

n)

$$\cos 2x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 2x = x + 2k\pi \\ ou \\ 2x = -x + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \quad ou \quad x = \frac{2k\pi}{3}\right\}$$

o) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \;\; ou \;\; x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}$$

p) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 = \cos 0 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}$$

q) $\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\ .\ \cos x = 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi\right\}$$

r) $\operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = 1$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos que $\operatorname{tg} x = 1 \;\; ou \;\; \operatorname{tg} x = -1$, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \; x = \frac{\pi}{4} + k\pi \;\; ou \;\; x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\right\}$$

s) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 2 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 2 \,.\operatorname{tg} x + 1 = 0$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos que $\operatorname{tg} x = 1$, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$$

t) $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg} x \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg} x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos que $\operatorname{tg} x = 0 \;\; ou \;\; \operatorname{tg} x = 1$, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \;\; ou \;\; x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$$

11) Fazendo $\operatorname{sen} x = u$ e $\cos x = v$, temos:

$$\begin{cases} u + v \,.\, \sqrt{3} = 1 & (1) \\ u^2 + v^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

De (1) vem $u = 1 - v \,.\, \sqrt{3}$ que, substituída em (2), acarreta:

$$\left(1 - v \,.\, \sqrt{3}\right)^2 + v^2 = 1 \Rightarrow 4v^2 - 2\sqrt{3} \,.\, v = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos que $v = 0 \;\; ou \;\; v = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Assim, existem duas possibilidades:

$$\cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 1 \;\; e \;\; x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \;\; e \;\; x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

LIÇÃO 14: Inequações trigonométricas

1)

a) Na primeira volta, temos que:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{5} < x < \pi - \frac{\pi}{5}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{5} < x < \frac{4\pi}{5}\right\}$$

No conjunto dos reais:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{5} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{5} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) Na primeira volta, temos que:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \quad ou \quad \frac{5\pi}{6} < x < 2\pi\right\}$$

No conjunto dos reais:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid\ 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + \ 2k\pi \quad ou \quad \frac{5\pi}{6} + \ 2k\pi < x < 2\pi + \ 2k\pi\right\}$$

c) Na primeira volta, temos que:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{3\pi}{4} \quad ou \quad \frac{5\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$$

No conjunto dos reais:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad ou \quad \frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\right\}$$

d) Na primeira volta, temos que:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{11\pi}{6}\right\}$$

No conjunto dos reais:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

e) Como $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -1$ então na primeira volta, temos que:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4} \quad ou \quad \frac{3\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$$

No conjunto dos reais:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi \quad ou \quad \frac{3\pi}{2} + k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + k\pi\right\}$$

f) Como $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ então na primeira volta, temos que:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \quad ou \quad \frac{4\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$$

No conjunto dos reais:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ou \quad \frac{4\pi}{3} + k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k\pi\right\}$$

LIÇÃO 15: Funções trigonométricas inversas

Instituto Cidade de Deus

Gabaritos - Matemática 2º EM

1)

a) $\alpha = \text{arc sen}\frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ então

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

b) $\alpha = \text{arc cos}\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $0 \leq \alpha \leq \pi$ então

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

c) $\alpha = \text{arc tg } 1 \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = 1$ e $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ então

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

2)

a) Fazendo $\text{arc sen}\frac{1}{3} = \alpha$, temos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3} \quad e \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

Assim, temos que:

$$\cos\alpha = +\sqrt{1 - \text{sen}^2\,\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

b) Fazendo $\text{arc cos}\frac{2}{5} = \alpha$, temos:

$$\cos\alpha = \frac{2}{5} \quad e \quad 0 \leq \alpha \leq \pi$$

Assim, temos que:

$$\text{sen}\,\alpha = +\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Logo,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

c) Fazendo arc tg $\sqrt{2} = \alpha$, temos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} \quad e \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

Assim, temos que:

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

Logo,

$$\operatorname{sen}\alpha = +\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

d) Fazendo arc sen $\frac{3}{5} = \alpha$, temos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5} \quad e \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

Assim, temos que:

$$\cos\alpha = +\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Fazendo arc sen $\frac{5}{13} = \beta$, temos:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{5}{13} \quad e \quad -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

Assim, temos que:

$$\cos\beta = +\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

Logo, temos que:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ .\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\ .\operatorname{sen}\beta=\frac{4}{5}.\frac{12}{13}-\frac{3}{5}.\frac{5}{13}=\frac{48-15}{65}=\frac{33}{65}$$

e) Fazendo arc $\cos\frac{5}{13}=\alpha$, temos:

$$\cos\alpha=\frac{5}{13}\quad e\quad 0\le\alpha\le\pi$$

Assim, temos que:

$$\operatorname{sen}\alpha=+\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{12}{13}$$

Fazendo arc $\operatorname{sen}\frac{7}{25}=\beta$, temos:

$$\operatorname{sen}\beta=\frac{7}{25}\quad e\quad -\frac{\pi}{2}\le\beta\le\frac{\pi}{2}$$

Assim, temos que:

$$\cos\beta=+\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{49}{625}}=\sqrt{\frac{576}{625}}=\frac{24}{25}$$

Logo, temos que:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\ .\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\ .\cos\alpha=\frac{12}{13}.\frac{24}{25}+\frac{7}{25}.\frac{5}{13}=\frac{288+35}{325}=\frac{323}{325}$$

f) Fazendo arc $\operatorname{sen}\frac{3}{5}=\alpha$, temos:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{5}\quad e\quad -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$$

Assim, temos que:

$$\cos\alpha = +\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Fazendo arc $\operatorname{tg}\frac{5}{12} = \beta$, temos $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$.

Logo,

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\ .\ \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{3}{4}-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\ .\ \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{3}{4}-\frac{5}{12}}{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{12}} = \frac{\frac{16}{48}}{\frac{63}{48}} = \frac{16}{63}$$

LIÇÃO 16: Avaliação 2

Instituto Cidade de Deus

Gabaritos - Matemática 2º EM

1)

a) $p(f) = 2\pi$

$I_m(f) = \{-1,1\}$

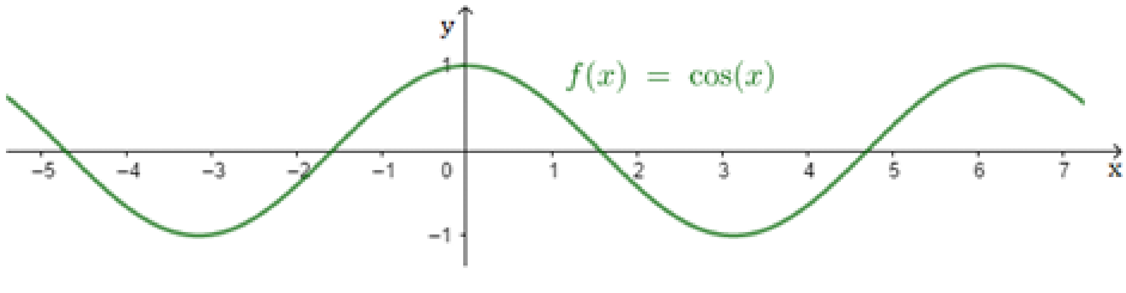


Figura 1

b) $p(f) = \pi$

$I_m(f) = \mathbb{R}$

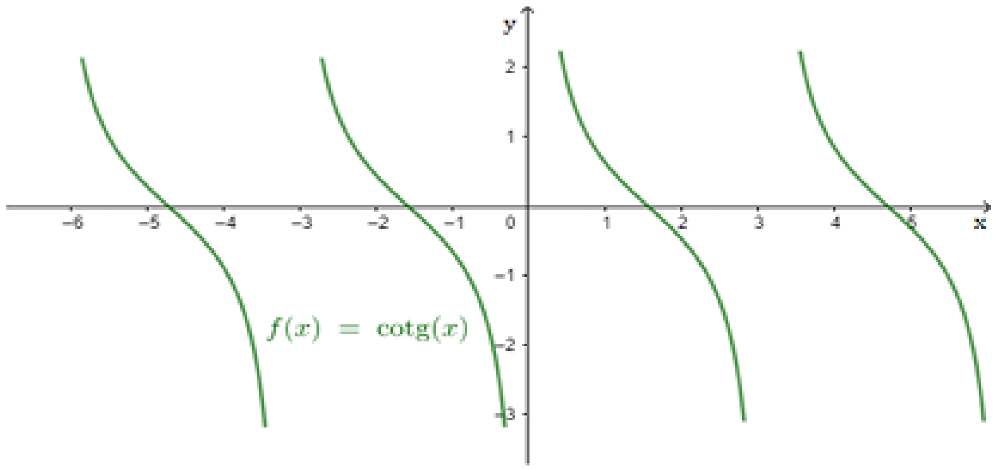


Figura 2

c) $p(f) = \pi$

$I_m(f) = \{-1,1\}$

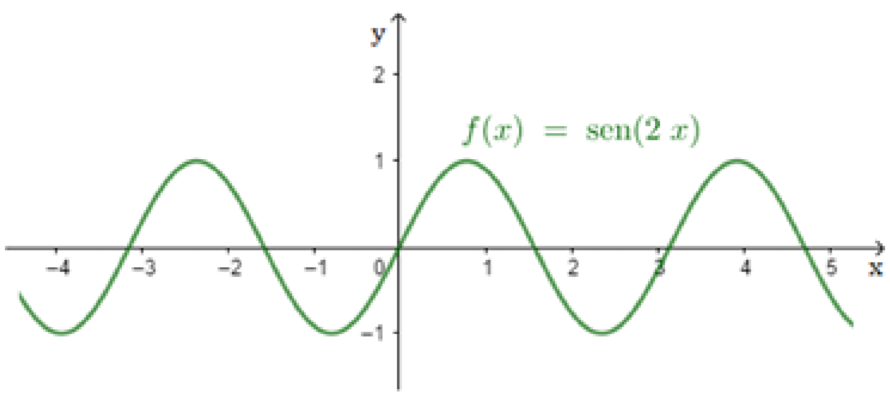


Figura 3

d) $p(f) = 2\pi$

$I_m(f) = \{-1, 1\}$

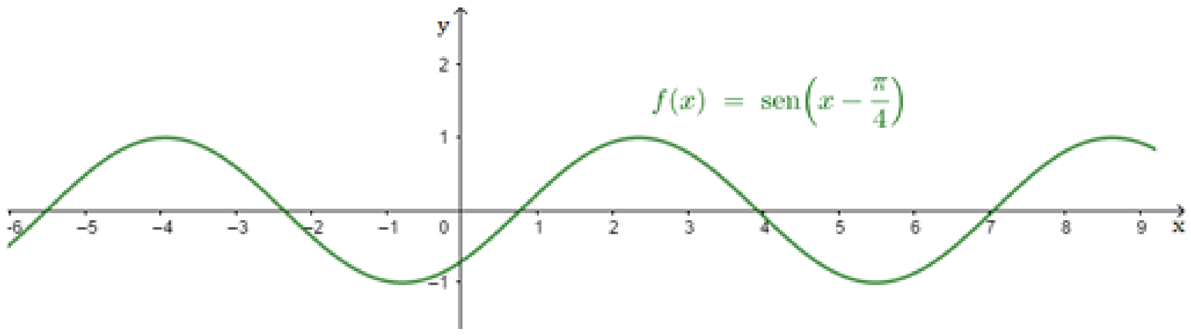


Figura 4

e) $p(f) = \pi$

$I_m(f) = \mathbb{R}$

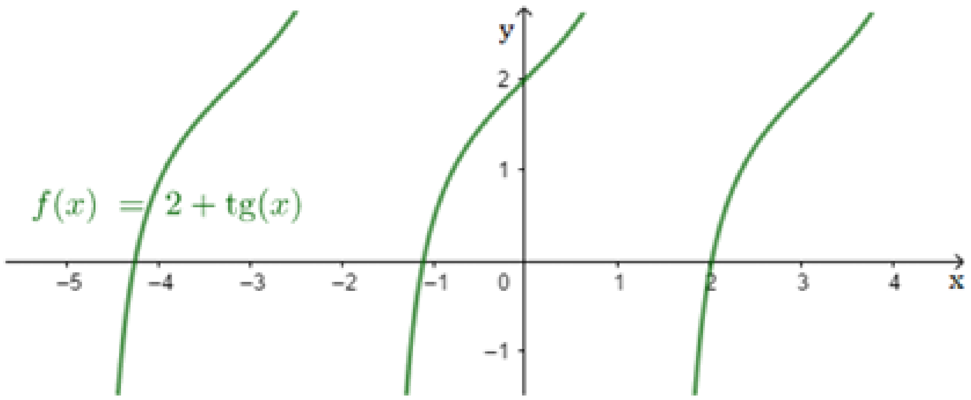


Figura 5

2)

$$\frac{1}{1+\sec x} \cdot \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\cos x}} \cdot \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \frac{1}{\frac{\cos x + 1}{\cos x}} \cdot \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \frac{\cos x}{\cos x + 1} \cdot \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

$$= \frac{\sqrt{(1+\cos x).\cos^2 x}}{\sqrt{(1-\cos x)(\cos x + 1)^2}} = \sqrt{\frac{(1+\cos x).\cos^2 x}{(1-\cos x)(\cos x+1)(\cos x+1)}} = \sqrt{\frac{\cos^2 x}{(1-\cos x)(\cos x + 1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x - 1}} = \sqrt{\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \sqrt{\operatorname{cotg}^2 x} = \operatorname{cotg} x$$

3)

a) Como $\sqrt{\alpha^2 - 5\alpha + 4} \geq 0$, então temos que:

$$\alpha^2 - 5\alpha + 4 \geq 0$$

$$a = 4 \quad e \quad a = 1$$

Fazendo o estudo de sinais, temos que:

$$a \leq 1 \quad e \quad a \geq 4$$

b) Como $\sqrt{2 - m} \geq 0$, então temos que:

$$2 - m \geq 0$$

$$-m \geq -2$$

$$m \leq 2$$

c) Sabemos que a imagem da $secante$ é $I_m(f) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq -1 \ ou \ f(x) \geq 1\}$.

Assim, temos que:

$$3m - 2 \leq -1 \Rightarrow m \leq \frac{1}{3}$$

$$3m - 2 \geq 1 \Rightarrow m \geq 1$$

Portanto, $m \leq \frac{1}{3}$ ou $m \geq 1$.

d)

$$-1 \leq \frac{t+2}{2t-1} \leq 1$$

$$-1.(2t - 1) \leq t + 2 \leq 1.(2t - 1)$$

$$-2t + 1 \leq t + 2 \leq 2t - 1$$

$$-2t - 1 \leq t \leq 2t - 3$$

$$-2t - 1 \leq t \quad ou \quad t \leq 2t - 3$$

$$t \leq -\frac{1}{3} \quad ou \quad t \geq 3$$

4)

a) Sejam dois triângulos equiláteros, como mostra a figura abaixo:

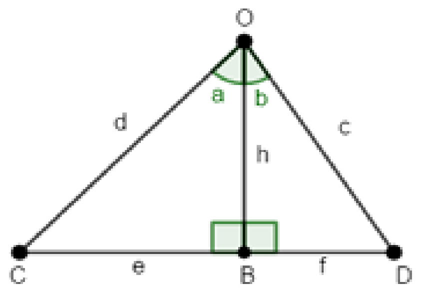


Figura 6

Calculando as áreas dos triângulos, através do seno de um dos seus ângulos, temos que:

$$A_{BOC} = \frac{e.h}{2} = \frac{h.d.\operatorname{sen} a}{2}$$

$$A_{BOD} = \frac{f.h}{2} = \frac{h.c.\operatorname{sen} b}{2}$$

$$A_{COD} = \frac{d.c.\operatorname{sen}(a+b)}{2}$$

Além disso, temos que:

$$\cos a = \frac{h}{d} \Rightarrow h = d.\cos a$$

$$\cos b = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c.\cos b$$

Sabemos que a área do triângulo maior é igual à soma da área dos triângulos menores, então, temos que:

$$A_{COD} = A_{BOC} + A_{BOD} = \frac{h.\,d.\,\text{sen}\,a}{2} + \frac{h.\,c.\,\text{sen}\,b}{2} = \frac{c.\cos b\,.\,d.\,\text{sen}\,a}{2} + \frac{d.\cos a\,.\,c.\,\text{sen}\,b}{2}$$

$$= \frac{c.\,d\cos b\,.\,\text{sen}\,a}{2} + \frac{c.\,d.\cos a\,.\,\text{sen}\,b}{2} =$$

$$\Rightarrow \frac{d.\,c.\,\text{sen}(a+b)}{2} = \frac{c.\,d\cos b\,.\,\text{sen}\,a}{2} + \frac{c.\,d.\cos a\,.\,\text{sen}\,b}{2}$$

$$\Rightarrow \text{sen}(a+b) = \cos b\,.\,\text{sen}\,a + \cos a\,.\,\text{sen}\,b$$

$$\Rightarrow \text{sen}(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$$

■ Q.E.D

b) Como o $\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, então temos que:

$$\cos(a-b) = \cos[a + (-b)] = \text{sen}\left[\frac{\pi}{2} - \left(a + (-b)\right)\right] = \text{sen}\left[\frac{\pi}{2} - a + b\right] = \text{sen}\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right]$$

$$\Rightarrow \cos(a+b) = \text{sen}\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right] = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\cos b + \text{sen}\,b.\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

Como $\cos a = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ e $\text{sen}\,a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, temos que:

$$\cos(a+b) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\cos b + \text{sen}\,b.\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a\,.\cos b + \text{sen}\,b.\ \text{sen}\,a$$

$$= \cos a\,.\cos b + \text{sen}\,a.\ \text{sen}\,b$$

■ Q.E.D

c) Como a $\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$, então temos que:

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b.\ \cos a}{\cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a.\ \text{sen}\,b}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cos a\,.\cos b$, temos que:

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{sen}a\,.\cos b+\operatorname{sen}b\,.\ \cos a}{\cos a\,.\cos b-\operatorname{sen}a\,.\ \operatorname{sen}b}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}a\,.\cos b+\operatorname{sen}b\,.\ \cos a}{\cos a\,.\cos b}}{\dfrac{\cos a\,.\cos b-\operatorname{sen}a\,.\ \operatorname{sen}b}{\cos a\,.\cos b}}$$

$$=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}a\,.\cancel{\cos b}}{\cos a\,.\cancel{\cos b}}+\dfrac{\operatorname{sen}b\,.\ \cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a}\,.\cos b}}{\dfrac{\cos a\,.\cancel{\cos b}}{\cancel{\cos a}\,.\cos b}-\dfrac{\operatorname{sen}a\,.\ \operatorname{sen}b}{\cos a\,.\cos b}}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}a}{\cos a}+\dfrac{\operatorname{sen}b}{\cos b}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}a}{\cos a}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}b}{\cos b}}=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\,.\operatorname{tg}b}$$

■ Q.E.D

5)

a) $y=2.\operatorname{sen}\frac{5x+3x}{2}\ .\ \cos\frac{5x-3x}{2}=2.\operatorname{sen}4x\,.\cos x$

b) $y=(\cos 9a+\cos 5a)-(\cos 3a+\cos a)$

$=2.\cos 7a\,.\cos 2a-2.\cos 2a\,.\cos a$

$=2.\cos 2a\,.(\cos 7a-\cos a)$

$=2.\cos 2a\,.(-2.\operatorname{sen}4a\,.\operatorname{sen}3a)$

$=-4.\cos 2a\,.\operatorname{sen}4a\,.\operatorname{sen}3a$

6) Tomando $\operatorname{cotg}x=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$ e $\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}x\cos x$, temos que:

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}-2\operatorname{sen}x\cos x=0$$

$$\frac{\cos x-2\operatorname{sen}^2x\cos x}{\operatorname{sen}x}=0$$

$$\cos x-2\operatorname{sen}^2x\cos x=0$$

$$-2\operatorname{sen}^2x\cos x=-\cos x$$

$$2\operatorname{sen}^2x\cos x=\cos x$$

$$2\operatorname{sen}^2x=1$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad ou\ x = -\frac{\pi}{4}$$

Portanto,

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$$

7) Para que $\operatorname{sen} x \geq 0$, temos que:

$$S = \{0 \leq x \leq \pi\}$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$S = \{2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi\}$$

8) $\alpha = \operatorname{arc\,cos} \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $0 \leq \alpha \leq \pi$ então

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

9)

a) Seja a função $f: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}\right]$ com

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x$$

chamamos f de **função arco seno**.

Esta função é a inversa da função $g: \left[-\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ com $g(x) = \operatorname{sen} x$.

b) Seja a função $f: [-1, 1] \to [0, \ \pi]$ com

$$f(x) = \arccos x$$

chamamos f de **função arco cosseno**.

Esta função é a inversa da função $g: [0,\ \pi] \to [-1, 1]$ com $g(x) = \cos x$.

c) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ com

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

chamamos f de **função arco tangente.**

Esta função é a inversa da função $g: \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ com $g(x) = \operatorname{tg} x$.

10) Por hipótese, temos que $x = 1$ então

$$(\cos^2 \alpha) - (4 \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) + \frac{3}{2} \operatorname{sen} \beta = 0 \qquad (I)$$

Como $\cos \alpha = \cos(90 - \beta)$, temos que:

$$\cos \alpha = \cos(90 - \beta) = \cos 90 \,.\, \cos \beta + \operatorname{sen} 90 \,.\, \operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} \beta \qquad (II)$$

Assim, substituindo (II) em (I), temos que:

$$\operatorname{sen}^2 \beta - (4 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \beta) + \frac{3}{2} \operatorname{sen} \beta = 0$$

$$\operatorname{sen}^2 \beta - 4 \operatorname{sen}^2 \beta + \frac{3}{2} \operatorname{sen} \beta = 0$$

$$-3\operatorname{sen}^2 \beta + \frac{3}{2} \operatorname{sen} \beta = 0$$

$$3 \operatorname{sen} \beta \left(-\operatorname{sen} \beta + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\operatorname{sen} \beta = 0 \quad ou \quad \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2}$$

Portanto, $\beta = 30° = \frac{\pi}{6}$.

A resposta é a alternativa D.

Instituto Cidade de Deus

Gabaritos - Matemática 2º EM

VOLUME 5

Lição 17 – Matrizes

1)

a) $a_{23} = -4$

b) $a_{12} = 2$

2) A soma da diagonal principal vale 16.

3) A soma das entradas c_{ij} da matriz abaixo em que $i + j$ é ímpar vale 12.

4) A soma das entradas d_{ij}, com $i \neq j$ vale 14.

5)

a) $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

b) $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

c) $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

6) $c = 4$ e $d = 1$. Portanto, $c + d = 5$.

7) Como $A^t = B$, segue que $c = 4$ e $d = 2$.

8) Seja uma matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{m\,x\,n}$, temos que a transposta de A é:

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & \dots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

E fazendo a transposta de A^t, temos que:

$$(A^t)^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$

9) Pela definição, temos que:

$$a_{11} = 1 - 1 = 0$$

$$a_{21} = 2 - 1 = 1$$

$$a_{31} = 3 - 1 = 2$$

$$a_{12} = 1 - 2 = -1$$

$$a_{22} = 2 - 2 = 0$$

$$a_{32} = 3 - 2 = 1$$

$$a_{13} = 1 - 3 = -2$$

$$a_{23} = 2 - 3 = -1$$

$$a_{33} = 3 - 3 = 0$$

Portanto, temos que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

10) Pela definição, temos que:

$$\begin{cases} 2x = x + 1 \\ 3y = 2y \\ 4 = y + 4 \end{cases}$$

Portanto, $x = 1$ e $y = 0$.

11)

$$A + B + C = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 8 \\ 12 & 23 & 30 \end{bmatrix}$$

$$A - B + C == \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ -4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A - B - C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ -6 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$-A + B - C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

12) $c_{21} + c_{22} + c_{23} = 42$

13) $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$

14) $X = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

15)

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3}B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3}(A + B) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

16)

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\begin{matrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 3 & 6 \end{matrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 & 14 \\ -14 & 13 \end{bmatrix}$

17)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{8} & -\frac{13}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{23}{8} \end{bmatrix}$$

18)

$$A^t \,.\, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

19) $x = 2; y = 5; z = -4$

20) $x = 4; y = -2; z = -1$

21)

$A^t = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

$B^t = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$C^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$D^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Instituto Cidade de Deus

Gabaritos - Matemática 2º EM

VOLUME 6

Lição 1(14) – Determinantes

1)

a)

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

b)

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{-3}{2} - 10 = \frac{-3}{2} - \frac{20}{2} = -\frac{23}{2}$$

c)

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{7} \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \frac{21}{15} - 8 = \frac{7}{5} - 8 = \frac{7}{5} - \frac{40}{5} = -\frac{33}{5}$$

d)

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ -\cos x & \operatorname{sen} x \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

e)

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} x \\ -\cos x & \cos x \end{vmatrix} = \operatorname{sen} x\ .\cos x + \operatorname{sen} x\ .\cos x = \operatorname{sen}(x+y)$$

f)

$$\begin{vmatrix} 2\,.\operatorname{sen} x & 3\,.\cos x \\ 1 - 2\,.\cos x & 3\,.\operatorname{sen} x + 2 \end{vmatrix} = 6\,.\operatorname{sen}^2 x + 4\,.\operatorname{sen} x - 3\,.\cos x + 6\,.\cos^2 x$$

$$= 6(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) + 4\,.\operatorname{sen} x - 3\,.\cos x + 6\,.\cos^2 x = 6 + 4\,.\operatorname{sen} x - 3\,.\cos x$$

g)

$$\begin{vmatrix} 3x & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15x - 14$$

h)

$$\begin{vmatrix} \log a & \log b \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\log a - \frac{1}{2}\log b = \log a^{\frac{1}{4}} - \log a^{\frac{1}{2}} = \log \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}}$$

i)

$$\begin{vmatrix} 2m^2 & 2m^4 - m \\ m & m^3 - 1 \end{vmatrix} = 2m^5 - 2m^2 - 2m^5 + m^2 = -m^2$$

j)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 30 + 24 + 24 - 20 - 12 - 72 = -26$$

k)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

l)

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -40$$

m)

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -51$$

n)

$$\begin{vmatrix} 0 & a & c \\ -c & 0 & b \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = -c^2b + a^2b = b(c^2 + a^2)$$

o)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ m & n & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 4\text{m} + 8\text{n} - 64$$

2)

a) $x = 2$

b) $x = -\frac{1}{2}$

c) $x = \frac{1}{2}$

d) $x = 0 \quad ou \quad x = -2$

e) $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

3) Calculando x, temos que:

$$x = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Calculando y, temos que:

$$\begin{vmatrix} -2a & 2c \\ -3b & 3d \end{vmatrix} = -6ad + 6bc$$

Assim, temos que:

$$\frac{y}{x} = \frac{-6ad + 6bc}{ad - bc} = \frac{-6(ad - bc)}{ad - bc} = -6$$

4)

$$D = \begin{vmatrix} 2 & \log_5 5 & \log_5 5 \\ 5 & \log_5 125 & \log_5 25 \\ 8 & \log_3 27 & \log_3 243 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 15 + 16 - 24 - 12 - 25 = 0$$

5)

$$A = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}^2 x & \operatorname{sen}^2 x & 0 \\ \cos^2 x & \cos^2 y & \operatorname{sen}^2 y \\ r^2 & 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

$$= r^2 \,.\, \operatorname{sen}^2 x \,.\cos^2 y + r^2 \,.\, \operatorname{sen}^2 x \,.\operatorname{sen}^2 y - r^2 \,.\, \operatorname{sen}^2 x \,.\cos^2 x$$

$$= r^2 \,.\, \operatorname{sen}^2 x \left(\cos^2 y + \cos^2 y - \cos^2 x\right) = r^2 \,.\, \operatorname{sen}^2 x \left(1 - \cos^2 x\right) = r^2 \,.\, \operatorname{sen}^2 x \,.\, \operatorname{sen}^2 x$$

$$= r^2 \,.\, \operatorname{sen}^4 x$$

6)

a)

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 21 = -25$$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 9 = 7$$

$$D_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 14 + 12 = 26$$

b)

$$D_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 15 + 8 - 36 - 12 = -25$$

$$D_{24} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 16 - 20 + 21 = 6$$

$$D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = -12 - 7 = -19$$

$$D_{43} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 - 3 = -4$$

c)

$$D_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 16 - 24 = 1$$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 8 - 30 = -41$$

$$D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

$$D_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 4 + 30 - 8 = 29$$

7) .

a) Seja a Matriz M, tal que:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando a definição de Determinante, temos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\,.\,A_{11} + 0\,.\,A_{12} + (-1)\,.\,A_{13} + 3\,.\,A_{14} = A_{11} - A_{13} + 3A_{14} =$$

$$= (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3\,.(-1)^{1+4}.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 - (-6) - 3\,.(18) = -54$$

b) Seja a Matriz M, tal que:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando a definição de Determinante, temos que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\,.\,A_{21} + 1\,.\,A_{22} + 1\,.\,A_{23} + 0\,.\,A_{24} = A_{22} + A_{23} =$$

$$= (-1)^{2+2}\,.\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\,.\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8 - (+36)$$

$$= -44$$

c) Seja a Matriz M, tal que:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Usando a definição de Determinante, temos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\,.\,A_{13} + 0\,.\,A_{23} + 0\,.\,A_{33} + 1\,.\,A_{43} = 2\,.\,A_{13} + A_{43} =$$

$$= 2\,.\,(-1)^{1+3}\,.\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3}\,.\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\,.\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,.\,(27 + 8 - 6 - 6) - (1 + 12 - 6 - 9) = 2\,.\,23 + 2 = 48$$

d) A Matriz M é uma Matriz Triangular, assim, temos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & a & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & b & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & c & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = 1 \,.\, a \,.\, b \,.\, c \,.\, d = abcd$$

e) Seja a Matriz M, tal que:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Usando a definição de Determinante, temos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \,.\, A_{11} + 0 \,.\, A_{21} + 0 \,.\, A_{31} + 0 \,.\, A_{41} + 0 \,.\, A_{51} = A_{11} =$$

$$= (-1)^{1+1} \,.\, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -5 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -5 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \,.\, A_{11} + 0 \,.\, A_{12} + 0 \,.\, A_{13} + 0 \,.\, A_{14} = A_{11} =$$

$$= (-1)^{1+1} \,.\, \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 - 20 = -25$$

8) Seja a Matriz M, tal que:

$$M = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & x \\ c & 0 & d & x & e \\ f & 0 & x & 0 & 0 \\ g & x & h & i & j \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \,.\, A_{12} + 0 \,.\, A_{22} + 0 \,.\, A_{32} + x \,.\, A_{42} + 0 \,.\, A_{52} = x \,.\, A_{42} =$$

$$= x\,.\,(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} a & b & 0 & x \\ c & d & x & e \\ f & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x\,.\begin{vmatrix} a & b & 0 & x \\ c & d & x & e \\ f & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x\,.\,(x\,.\,A_{41} + 0\,.\,A_{42} + 0\,.\,A_{43} + 0\,.\,A_{44})$$

$$= x\,.\,x\,.\,A_{41} = x^2\,.\,(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} b & 0 & x \\ d & x & e \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = x^2\,.\,(-1)\,.\,(-x^3) = x^5$$

Assim, temos que:

$$M = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & x \\ c & 0 & d & x & e \\ f & 0 & x & 0 & 0 \\ g & x & h & i & j \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x^5 < -32 \Rightarrow x < -2$$

9)

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 8 \\ 8 & 1 & -1 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 0 & -5 & 1 \\ 8 & 1 & -1 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -1 & 9 \\ 8 & 1 & -1 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Pela propriedade de Filas Paralelas Iguais, temos que:

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 8 \\ 8 & 1 & -1 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 0 & -5 & 1 \\ 8 & 1 & -1 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -1 & 9 \\ 8 & 1 & -1 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

10) Pela propriedade da Matriz Transposta, temos que:

$$\det M = \det M^t$$

Então,

$$\det M^t = 20$$

11) Seja a Matriz A, tal que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

Em decorrência do Teorema de Binet, temos que:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{1} = 1$$

12) Pelo Teorema de Jacobi, temos que:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & \text{sen}\,\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & 1 & \cos\theta \\ 0 & \text{sen}\,\theta & 0 \end{vmatrix} = \text{sen}^3\,\theta - \cos^2\theta\ .\text{sen}\,\theta$$

$$= -\text{sen}\,\theta\,(\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta) = (-\text{sen}\,\theta)\,.\cos(2\theta)$$

Para que o Determinante seja nulo, temos que:

$$(-\text{sen}\,\theta)\,.\cos(2\theta) = 0$$

$$(\text{sen}\,\theta) = 0 \quad ou \quad \cos(2\theta) = 0$$

Para o sen $\theta = 0$, temos $\theta = 0$, $\theta = 180°$ e $\theta = 360°$.

Para o cos $2\theta = 0$, temos $\theta = 45°$, $\theta = 135°$, $\theta = 225°$ e $\theta = 315°$.

Portanto, temos que:

$$\theta = \{0,\ 45°,\ 135°,\ 180°,\ 225°,\ 315°,\ 360°\}$$

$$ou$$

$$\theta = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\right\}$$

13)

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 11 \\ 5 & 24 & 13 \\ 7 & 36 & 17 \end{vmatrix} = 12\,.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 5 & 2 & 13 \\ 7 & 3 & 17 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \\ 10 & 5 & 9 & 13 \\ 14 & 7 & -3 & 15 \end{vmatrix} = 3 \,.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 11 \\ 4 & 8 & 4 & 8 \\ 10 & 5 & 3 & 13 \\ 14 & 7 & -1 & 15 \end{vmatrix} = 3\,.\,4\,.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 10 & 5 & 3 & 13 \\ 14 & 7 & -1 & 15 \end{vmatrix}$$

$$= 12\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 10 & 5 & 3 & 13 \\ 14 & 7 & -1 & 15 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 11 & 15 \\ 5 & 13 & 25 \end{vmatrix} = 0 = 12\,.\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 11 & 3 \\ 5 & 13 & 5 \end{vmatrix}$$

14)

$$D' = \begin{vmatrix} 8x & -2x^2 & 2x^3 & -2x^4 \\ 4y & -y^2 & y^3 & -y^4 \\ 4z & -z^2 & z^3 & -z^4 \\ 4t & -t^2 & t^3 & -t^4 \end{vmatrix} = (-1)\,.\begin{vmatrix} 8x & 2x^2 & 2x^3 & -2x^4 \\ 4y & y^2 & y^3 & -y^4 \\ 4z & z^2 & z^3 & -z^4 \\ 4t & t^2 & t^3 & -t^4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\,.(-1)\,.\begin{vmatrix} 8x & 2x^2 & 2x^3 & 2x^4 \\ 4y & y^2 & y^3 & y^4 \\ 4z & z^2 & z^3 & z^4 \\ 4t & t^2 & t^3 & t^4 \end{vmatrix} = (-1)\,.(-1)\,.\;2\,.\begin{vmatrix} 4x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 4y & y^2 & y^3 & y^4 \\ 4z & z^2 & z^3 & z^4 \\ 4t & t^2 & t^3 & t^4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\,.(-1)\,.\;2\,.4\,.\begin{vmatrix} 1x & x^2 & x^3 & x^4 \\ y & y^2 & y^3 & y^4 \\ z & z^2 & z^3 & z^4 \\ t & t^2 & t^3 & t^4 \end{vmatrix} = 8\,.\begin{vmatrix} 1x & x^2 & x^3 & x^4 \\ y & y^2 & y^3 & y^4 \\ z & z^2 & z^3 & z^4 \\ t & t^2 & t^3 & t^4 \end{vmatrix} = 8D$$

15)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Pela propriedade da Regra de Chió, temos que:

$$= \begin{vmatrix} 7-12 & 8-18 & 9-24 & 10-30 \\ 12-22 & 13-33 & 14-44 & 15-55 \\ 17-32 & 18-48 & 19-64 & 20-80 \\ 22-42 & 23-63 & 24-84 & 25-105 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3-2 & 0-4 & 1-5 \\ 4-2 & 2-4 & 1-5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & -10 & -15 & -20 \\ -10 & -20 & -30 & -40 \\ -15 & -30 & -45 & -60 \\ -20 & -40 & -60 & -80 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (-5)(-10)(-15)(-20) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

Pela propriedade de Filas Paralelas Iguais, temos que:

$$= (-5)(-10)(-15)(-20) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 8 = 8$$

16) Utilizando a Regra de Sarrus, temos que:

$$\begin{vmatrix} \cos 2a & \cos^2 a & \operatorname{sen}^2 a \\ \cos 2b & \cos^2 b & \operatorname{sen}^2 b \\ \cos 2c & \cos^2 c & \operatorname{sen}^2 c \end{vmatrix} =$$

$$= \cos 2a \ .\cos^2 b \ .\operatorname{sen}^2 c + \cos 2b \ .\cos^2 c \ .\operatorname{sen}^2 a + \cos 2c \ .\cos^2 a \ .\operatorname{sen}^2 b$$

$$-(\cos 2c \ .\cos^2 b \ .\operatorname{sen}^2 a) - (\cos 2a \ .\cos^2 c \ .\operatorname{sen}^2 b) - (\cos 2b \ .\cos^2 a \ .\operatorname{sen}^2 c)$$

Tomando $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, temos que:

$$\begin{vmatrix} \cos 2a & \cos^2 a & \operatorname{sen}^2 a \\ \cos 2b & \cos^2 b & \operatorname{sen}^2 b \\ \cos 2c & \cos^2 c & \operatorname{sen}^2 c \end{vmatrix} =$$

$$= (\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a) . \cos^2 b \ .\operatorname{sen}^2 c + (\cos^2 b - \operatorname{sen}^2 b) . \cos^2 c \ .\operatorname{sen}^2 a$$

$$+(\cos^2 c - \operatorname{sen}^2 c) . \cos^2 a \ .\operatorname{sen}^2 b + (-\cos^2 c + \operatorname{sen}^2 c) . \cos^2 b \ .\operatorname{sen}^2 a$$

$$+(-\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a) . \cos^2 c \ .\operatorname{sen}^2 b + (-\cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b) . \cos^2 a \ .\operatorname{sen}^2 c$$

$$= \cos^2 a\ .\cos^2 b - \text{sen}^2\, a\ .\cos^2 b + \cos^2 a\ .\text{sen}^2\, c - \text{sen}^2\, a\ .\text{sen}^2\, c + \cos^2 b\ .\cos^2 c$$
$$- \text{sen}^2\, b\ .\cos^2 c + \cos^2 b\ .\text{sen}^2\, a - \text{sen}^2\, b\ .\text{sen}^2\, a + \cos^2 c\ .\cos^2 a - \text{sen}^2\, c\ .\cos^2 a$$
$$+ \cos^2 c\ .\text{sen}^2\, b - \text{sen}^2\, c\ .\text{sen}^2\, b - \cos^2 c\ .\cos^2 b + \text{sen}^2\, c\ .\cos^2 b - \cos^2 c\ .\text{sen}^2\, a$$
$$+ \text{sen}^2\, c\ .\text{sen}^2\, a - \cos^2 a\ .\cos^2 c + \text{sen}^2\, a\ .\cos^2 c - \cos^2 a\ .\text{sen}^2\, b + \text{sen}^2\, a\ .\text{sen}^2\, b$$
$$- \cos^2 b\ .\cos^2 a + \text{sen}^2\, b\ .\cos^2 a - \cos^2 b\ .\text{sen}^2\, c + \text{sen}^2\, b\ .\text{sen}^2\, c$$

Reorganizando as igualdades, temos que:

$$= -\text{sen}^2\, a\ .\cos^2 b + \text{sen}^2\, a\ .\cos^2 b + \cos^2 a\ .\text{sen}^2\, c - \cos^2 a\ .\text{sen}^2\, c - \text{sen}^2\, b\ .\cos^2 c$$
$$+ \text{sen}^2\, b\ .\cos^2 c - \text{sen}^2\, a\ .\text{sen}^2\, c + \text{sen}^2\, a\ .\text{sen}^2\, c - \text{sen}^2\, b\ .\text{sen}^2\, a + \text{sen}^2\, b\ .\text{sen}^2\, a$$
$$- \text{sen}^2\, c\ .\text{sen}^2\, b + \text{sen}^2\, c\ .\text{sen}^2\, b + \text{sen}^2\, c\ .\cos^2 b - \text{sen}^2\, c\ .\cos^2 b - \text{sen}^2\, b\ .\cos^2 a$$
$$+ \text{sen}^2\, b\ .\cos^2 a - \cos^2 c\ .\text{sen}^2\, a + \cos^2 c\ .\text{sen}^2\, a + \cos^2 b\ .\cos^2 a - \cos^2 b\ .\cos^2 a$$
$$+ \cos^2 b\ .\cos^2 c - \cos^2 b\ .\cos^2 c + \cos^2 c\ .\cos^2 a - \cos^2 c\ .\cos^2 a = 0$$

17)

$$\begin{vmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix} \underset{L_1 \to L_1 + L_2}{=} \begin{vmatrix} a-c & m-p & x-z \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix} \underset{L_3 \to L_1 + L_3}{=} \begin{vmatrix} a-c & m-p & x-z \\ b-c & n-p & y-z \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Pela propriedade de Filas Nulas, temos que:

$$\begin{vmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & m-p & x-z \\ b-c & n-p & y-z \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

18)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{100}\,.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{100}\,.\frac{1}{10}\,.\begin{vmatrix} 100 & 10 & 9 \\ 100 & 80 & 7 \\ 100 & 50 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{1000}\begin{vmatrix} 100 & 10 & 9 \\ 100 & 80 & 7 \\ 100 & 50 & 3 \end{vmatrix}$$

Pelo teorema de Jacobi, temos $C_3 \to C_1 + C_2 + C_3$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{1000}\begin{vmatrix} 100 & 10 & 119 \\ 100 & 80 & 187 \\ 100 & 50 & 153 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 119 \\ 1 & 8 & 187 \\ 1 & 5 & 153 \end{vmatrix} = 17\,.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

19)

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a-b-c & 2a & 2a \\ a+b+c & b-c-a & 2b \\ 0 & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$C_1 \rightarrow C_1 + C_2$$

$$= \begin{vmatrix} -a-b-c & 0 & 2a \\ a+b+c & -a-b-c & 2b \\ 0 & a+b+c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\,.\,(a+b+c)\,.\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 1 & -1 & 2b \\ 0 & 1 & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$C_2 \rightarrow C_2 + L_3$$

$$= (a+b+c)^2\,.\,(c-a-b+2a+2b) = (a+b+c)^2\,.\,(a+b+c) = (a+b+c)^3$$

20) A Matriz é Triangular, assim temos que:

$$u = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 0 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^4$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos que:

$$u = 1$$

Portanto, temos que:

$$x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

21)

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 18 - 6 = 10$$

Em decorrência do Teorema de Binet, temos que:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{10}$$

22)

a)

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-1&2-1&2-1\\2-1&3-1&3-1\\2-1&3-1&4-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-1&2-1\\2-1&3-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1$$

b)

$$\begin{vmatrix}1&2&0&4\\2&-3&5&1\\1&6&3&-1\\3&2&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3-4&5&1-8\\6-2&3&-1-4\\2-6&1&4-12\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-7&5&-7\\4&3&-5\\-4&1&-8\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5&-7&-7\\3&4&-5\\1&-4&-8\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-4&-8\\3&4&-5\\5&-7&-7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4+12&-5+24\\-7+20&-7+40\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}16&19\\13&33\end{vmatrix}=528-247=281$$

c)

$$\begin{vmatrix}4&1&2&0\\3&1&0&2\\5&3&2&2\\1&0&2&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&4&2&0\\1&3&0&2\\3&5&2&2\\0&1&2&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3-4&0-2&2\\5-12&2-6&2\\1&2&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&-2&2\\-7&-4&2\\1&2&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&1\\-7&-4&2\\-1&-2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4+14&2+7\\-2+2&2+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10&9\\0&3\end{vmatrix}=30$$

d)

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&2\\1&5&4&2\\1&1&3&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-1&3-1&2-1\\5-1&4-1&2-1\\1-1&3-1&7-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\4&3&1\\0&2&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-8&1-4\\2&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&-3\\2&6\end{vmatrix}$$

$$=-30+6=-24$$

23)

$$D=\begin{vmatrix}a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{vmatrix}=a\,.\begin{vmatrix}1&a&a&a\\1&b&b&b\\1&b&c&c\\1&b&c&d\end{vmatrix}$$

Utilizando a Regra de Chió, temos que:

$$D = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & b & b \\ 1 & b & c & c \\ 1 & b & c & d \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a \cdot (b-a) \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 1 & c-a & c-a \\ 1 & c-a & d-a \end{vmatrix}$$

$$= a \cdot (b-a) \begin{vmatrix} (c-a)-(b-a) & (c-a)-(b-a) \\ (c-a)-(b-a) & (d-a)-(b-a) \end{vmatrix}$$

$$= a \cdot (b-a) \begin{vmatrix} c-a-b+a & c-a-b+a \\ c-a-b+a & d-a-b+a \end{vmatrix} = a \cdot (b-a) \begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix}$$

$$= a \cdot (b-a) \cdot (c-b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & c-b \\ 1 & d-b \end{vmatrix} = a \cdot (b-a) \cdot (c-b) \cdot (d-b-c+b)$$

$$= a \cdot (b-a) \cdot (c-b) \cdot (d-c)$$

24)

a) Pela propriedade de Vandermonde, temos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \end{vmatrix} = (5-4) \cdot (5-3) \cdot (5-2) \cdot (4-3) \cdot (4-2) \cdot (3-2)$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 12$$

b) Pela propriedade de Vandermonde, temos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 25 & 49 \\ 8 & 27 & 125 & 343 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 2^2 & 3^2 & 5^2 & 7^2 \\ 2^3 & 3^3 & 5^3 & 7^3 \end{vmatrix}$$

$$= (7-5) \cdot (7-3) \cdot (7-2) \cdot (5-3) \cdot (5-2) \cdot (3-2) = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 240$$

25) Pela propriedade de Vandermonde, temos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 2 & \log 20 & \log 200 & \log 2000 \\ (\log 2)^2 & (\log 20)^2 & (\log 200)^2 & (\log 2000)^2 \\ (\log 2)^3 & (\log 20)^3 & (\log 200)^3 & (\log 2000)^3 \end{vmatrix}$$

$$= (\log 2000 - \log 200) \,.\, (\log 2000 - \log 20) \,.\, (\log 2000 - \log 2) \,.\, (\log 200 - \log 20) \,.\, (\log 200 - \log 2) \,.\, (\log 20 - \log 2)$$

$$= (\log 200 + \log 10 - \log 200) \,.\, (\log 20 + \log 100 - \log 20) \,.\, (\log 2 + \log 1000 - \log 2) \,.\, (\log 20 + \log 10 - \log 20) \,.\, (\log 2 + \log 100 - \log 2) \,.\, (\log 2 + \log 10 - \log 2)$$

$$= 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 1 = 12$$

VOLUME 7

Lição 15 – Sistemas lineares

Instituto Cidade de Deus

Gabaritos - Matemática 2º EM

1)

a) São equações lineares

b) Não são equações lineares

c) São equações lineares

d) Não são equações lineares

e) Não são equações lineares

2) Seja a equação $2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -2$, vamos verificar se vale o conjunto solução $(2,\ 0, -3)$.

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -2$$

$$2\,.\,2 + 5\,.\,0 + 2\,.\,(-3) = -2$$

$$4 + 0 - 6 = -2$$

$$-2 = -2$$

Portanto, $(2,\ 0, -3)$ é solução de $2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -2$.

3) O conjunto $(1,\ 0,\ 2)$ é uma solução para a equação $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$, pois

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$2\,.\,1 - 0 - 2 = 0$$

$$0 = 0$$

4) O conjunto $(0, -3, -4)$ não é solução, pois

$$x + 2y + z = 2 \Rightarrow 0 + 2\,.\,(-3) - 4 = 2 \Rightarrow -6 - 4 = 2 \Rightarrow -10 \neq 2$$

5) O conjunto $(1, 0, -2, 1)$ é solução, pois

$$\begin{cases} 5x+3y-2z-4t=5 \\ 2x-4y+3z-5t=-9 \\ -x+2y-5z+3t=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5.1+3.0-2.(-2)-4.1=5 \\ 2.1-4.0+3.(-2)-5.1=-9 \\ -1+2.0-5.(-2)+3.1=12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5+0+4-4=5 \\ 2+0-6-5=-9 \\ -1+0+10+3=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5=5 \\ -9=-9 \\ 12=12 \end{cases}$$

6)

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} a & b & -c \\ b & -c & a \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} sen\ \theta & \cos\ \varphi \\ \cos\ \varphi & sen\ \theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

7)

a) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5x+2y=-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+4y-2z=1 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+0y=5 \\ 0x+y=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$

d) $$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x \quad\quad - 3z = -2 \\ 2x - 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

8)

a) Resolveremos pelo método de Comparação:

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 - y \\ x = 3 + y \end{cases}$$

Igualando os valores de x, temos que:

$$3 + y = 11 - y$$

$$2y = 8$$

$$y = 4$$

Substituindo o valor de y em uma das equações, temos que:

$$x = 3 + y$$

$$x = 3 + 4$$

$$x = 7$$

Portanto, temos como solução:

$$S = \{7,\ \ 4\}$$

b) Resolveremos pelo método de Adição:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2x - 3y = -16 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases} + \\ \hline 7x + 0y = -14 \end{array}$$

Resolvendo a equação, temos que:

$$7x + 0y = -14$$

$$7x = -14$$

$$x = -2$$

Substituindo o valor de x em uma das equações, temos que:

$$5x + 3y = 2$$

$$5.(-2) + 3y = 2$$

$$3y = 12$$

$$y = 4$$

Portanto, temos como solução:

$$S = \{-2,\ \ 4\}$$

c) Resolveremos pelo método de Adição:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 21 \\ 2x - y = 5 \quad (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \begin{cases} 3x + 3y = 21 \\ 6x - 3y = 15 \end{cases} + \\ \hline 9x + 0y = 36 \end{array}$$

Resolvendo a equação, temos que:

$$9x = 36$$

$$x = 4$$

Substituindo o valor de x em uma das equações, temos que:

$$2x - y = 5$$

$$2\,.\,4 - y = 5$$

$$-y = 5 - 8$$

$$y = 3$$

Portanto, temos como solução:

$$S = \{4,\ \ 3\}$$

d) Resolveremos pelo método de Substituição:

$$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 2 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

Substituindo o valor de y na segunda equação, temos que:

$$3x + 2y = 7$$

$$3x + 2\,.\,(4x - 2) = 7$$

$$3x + 8x - 4 = 7$$

$$11x = 11$$

$$x = 1$$

Substituindo o valor de x em uma das equações, temos que:

$$y = 4x - 2$$

$$y = 4\,.\,1 - 2$$

$$y = 2$$

Portanto, temos como solução:

$$S = \{1,\ \ 2\}$$

e) Resolvendo pelo método de Substituição:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 4y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Substituindo o valor de y em uma das equações, temos que:

$$3x - 2y = 3$$

$$3x - 2\,.\,3 = 3$$

$$3x = 3 + 6$$

$$x = 3$$

Portanto, temos como solução:

$$S = \{3,\ \ 3\}$$

f) Resolveremos pelo método da Substituição:

$$\begin{cases} y = 4x - 2 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

Substituindo o valor de y na segunda equação, temos que:

$$5x - 2y = 1$$

$$5x - 2\,.\,(4x - 2) = 1$$

$$5x - 8x + 4 = 1$$

$$-3x = -3$$

$$x = 1$$

Substituindo o valor de x em uma das equações, temos que:

$$y = 4x - 2$$

$$y = 4\,.\,1 - 2$$

$$y = 2$$

Portanto, temos como solução:

$$S = \{1,\ \ 2\}$$

9)

a) Na regra de Cramer calculamos o determinante principal e depois os secundários substituindo a coluna das variáveis pela coluna dos termos independente.

Assim, temos a seguinte matriz incompleta:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculando o determinante, temos que:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7 \neq 0$$

Agora vamos calcular o determinante secundário D_x, antes devemos substituir toda a coluna do x pela coluna do termo independente. Assim:

$$D_x = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 13 = 14$$

Próximo passo é calcular o determinante D_y, antes vamos substituir a coluna y pela coluna do termo independente. Então:

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 39 - 18 = 21$$

Dessa forma, podemos achar os valores de x e y fazendo:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{14}{7} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{21}{7} = 3$$

Portanto, a solução do sistema é:

$$S = \{2, \ 3\}$$

b) Na regra de Cramer calculamos o determinante principal e depois os secundários substituindo a coluna das variáveis pela coluna dos termos independente.

Assim, temos a seguinte matriz incompleta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando o determinante, temos que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 2 - 1 - 1 - 4 = -7 \neq 0$$

Agora vamos calcular o determinante secundário D_x, antes devemos substituir toda a coluna do x pela coluna do termo independente. Assim:

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 3 + 12 - 6 - 2 - 6 = -7$$

Próximo passo é calcular o determinante D_y, antes vamos substituir a coluna y pela coluna do termo independente. Então:

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 12 + 2 + 3 - 6 - 4 = -14$$

Próximo passo é calcular o determinante D_z, antes vamos substituir a coluna z pela coluna do termo independente. Então:

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 4 + 6 + 2 - 3 - 24 = -21$$

Dessa forma, podemos achar os valores de x, y e z fazendo:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{-7} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-21}{-7} = 3$$

Portanto, a solução do sistema é:

$$S = \{1,\ \ 2,\ \ 3\}$$

c) Na regra de Cramer calculamos o determinante principal e depois os secundários substituindo a coluna das variáveis pela coluna dos termos independente.

Assim, temos a seguinte matriz incompleta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos calcular o determinante usando a regra de Sarrus. Assim, temos que:

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right|$$

$$\det(D) = 1 + 9 + 2 + 3 + 1 - 6 = 10$$

Agora vamos calcular o determinante secundário D_x, antes devemos substituir toda a coluna do x pela coluna do termo independente. Assim:

$$D_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 3 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right|$$

$$\det(D_x) = 0 + 1 + 9 + 3 - 3 + 0 = 10$$

Próximo passo é calcular o determinante D_y, antes vamos substituir a coluna y pela coluna do termo independente. Então:

$$D_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right|$$

$$\det(D_y) = 1 - 6 + 0 + 3 - 3 + 0 = -5$$

Por fim, vamos calcular o determinante secundário D_z, antes vamos substituir a coluna z pela coluna do termo independente. Logo:

$$D_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right|$$

$$\det(D_z) = 3 + 9 + 0 - 18 + 1 + 0 = -5$$

Dessa forma, podemos achar os valores de x, y e z fazendo:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{10}{10} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

Portanto, a solução do sistema é:

$$S = \left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$$

d) Vamos utilizar a regra de Sarrus para calcular o determinante principal.

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right|$$

$$\det(D) = 4 - 3 - 2 + 2 + 2 - 6 = -3$$

Vamos calcular agora o determinante secundário D_x, substituindo a coluna do x pelo termo independente.

$$D_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

Termo independente

$$\det(D_x) = 6 - 1 + 0 + 0 + 3 - 2 = 6$$

Próximo passo é calcular o determinante secundário para D_y, substituindo a coluna do y pelo termo independente. Assim:

$$D_y = \left|\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right|$$

Termo independente

$$\det(D_y) = 0 - 9 - 2 + 6 + 2 + 0 = -3$$

Por fim, o determinante secundário para D_z, substituindo a coluna do z pelo termo independente. Logo:

$$D_z = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right|$$

Termo independente

$$\det(D_z) = 4 + 0 - 6 + 2 + 0 - 18 = -18$$

Dessa forma, podemos achar os valores de x, y e z fazendo:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-18}{-3} = 6$$

Portanto, a solução do sistema é:

$$S = \{-2, 1, 6\}$$

e) Admitindo $3z + 2 \neq 0$ e $2x + y \neq 0$, temos:

$$\frac{2x - y}{3z + 2} = 1 \Leftrightarrow 2x - y = 3z + 2 \Leftrightarrow 2x - y - 3z = 2$$

$$\frac{z+1}{2x+y} = 1 \Leftrightarrow z+1 = 2x+y \Leftrightarrow 2x+y-z = 1$$

Assim, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y-3z=1 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$$

Utilizando a regra de Cramer, temos que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Assim, temos que:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-5}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{3}{4}$$

Note que

$$3z + 2 = \frac{9}{4} + 2 \neq 0$$

$$2x + y = \frac{6}{2} - \frac{5}{4} = \neq 0$$

Portanto, a solução do sistema é:

$$S = \left\{\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, \ \frac{3}{4}\right\}$$

10) Vamos iniciar por x o número de mulheres no início. Com o total de pessoas é n, então o número de homens pode ser identificado por $n - x$.

Festa			
	Inicialmente	**Instante 1**	**Instante 2**
Mulheres	x	$x - 31$	$x - 31$
Homens	$n - x$	$n - x$	$(n - x) - 55$
Total	n	$n - 31$	$n - 31 - 55$

Após a saída das 31 mulheres (Instante 1) a razão era de 2 homens para cada mulher. Assim, temos que:

$$\frac{Número\ de\ homens}{Número\ de\ mulheres} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{n - x}{x - 31} = \frac{2}{1}$$

$$n - x = 2\,.(x - 31)$$

$$n - x = 2x - 62$$

$$-3x + n = -62 \quad (\boldsymbol{Equação\ I})$$

Após a saída dos 55 homens (Instante 2) a razão era de 3 mulheres para cada homem. Assim, temos que:

$$\frac{Número\ de\ mulheres}{Número\ de\ homens} = \frac{3}{1}$$

$$\frac{x - 31}{(n - x) - 55} = \frac{3}{1}$$

$$x - 31 = 3\,.\,[(n - x) - 55]$$

$$x - 31 = 3n - 3x - 165$$

$$4x - 3n = -134 \quad (\boldsymbol{Equação\ II})$$

As equações I e II devem ser satisfeitas simultaneamente, assim temos que:

$$\begin{cases} -3x + n = -62 \\ 4x - 3n = -134 \end{cases}$$

Como apenas foi pedido o valor de n, podemos manipular as equações do sistema linear anterior de modo a eliminar x e obter outra equação em que a incógnita n seja a única variável. Isso pode ser feito multiplicando a primeira equação por 4 e a segunda por 3 e somando ambas posteriormente. Veja:

$$\begin{cases} -3x + n = -62 & .\,(4) \\ 4x - 3n = -134 & .\,(3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -12x + 4n = -248 \\ 12x - 9n = -402 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -12x + 4n = -248 \\ 12x - 9n = -402 \end{cases} + \\ \hline 0x - 5n = -650 \end{array}$$

$$-5n = -650$$

$$n = 130$$

Portanto, nesta festa tinha 130 pessoas.

A resposta será a alternativa $\boldsymbol{D}$.

11) Calculando a matriz incompleta do sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 1 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$, temos que:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 + 5 - 10 - 2 + 0 = -8 \neq 0$$

Pela regra de Cramer, se $D \neq 0$, o sistema terá uma solução única.

Logo, o sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 1 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$ tem solução única.

12) Tomando $x = 1$ e $y = 2$, temos que:

$$\begin{cases} (a-1)x + by = 1 \\ (a+1)x + 2by = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1) . 1 + 2b = 1 \\ (a+1) . 1 + 4b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 1 + 2b = 1 \\ a + 1 + 4b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 2 \\ a + 4b = 4 \end{cases}$$

Pela Regra de Cramer, temos que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0$$

$$D_a = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0$$

$$D_b = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$$

Dessa forma, podemos achar os valores de a e b fazendo:

$$x = \frac{D_a}{D} = \frac{0}{2} = 0$$

$$y = \frac{D_b}{D} = \frac{2}{2} = 1$$

Portanto, a solução do sistema é:

$$S = \{0, \ \ 1\}$$

13)

a) Sim

b) Sim

c) Não

d) Sim

e) Sim

f) Sim

14)

a) Calculando o z, temos que:

$$5z = 10$$

$$z = 2$$

Calculando o y, temos que:

$$2y + z = 2$$

$$2y + 2 = 2$$

$$y = 0$$

Calculando o x, temos que:

$$-x + 3y - z = 1$$

$$-x + 3.0 - 2 = 1$$

$$x = -3$$

Portanto, a solução do sistema é $(-3,\ \ 0,\ \ 2)$.

b) Seja o sistema

$$\begin{cases} x + 4y - z = 2 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

Tomando $z \in \mathbb{R}$, temos que:

$$y = 3 - z$$

Substituindo os valores de y e z na primeira equação, temos que:

$$x + 4y - z = 2$$

$$x + 4\,.\,(3 - z) - z = 2$$

$$x + 12 - 4z - z = 2$$

$$x = 5z - 10$$

Portanto, a solução do sistema é $(5z - 10,\ \ 3 - z,\ \ z)$ para todo $z \in \mathbb{R}$.

c)

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 2 \\ -y + 3z = -3 \\ 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{3} \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

d) Seja o sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - t = 4 \\ y - z + 2t = 3 \\ 3z + t = 2 \end{cases}$$

Tomando $t \in \mathbb{R}$, temos que:

$$z = \frac{2 - t}{3}$$

Substituindo os valores de z e t na segunda equação, temos que:

$$y - z + 2t = 3$$

$$y - \left(\frac{2 - t}{3}\right) + 2t = 3$$

$$3y - 2 + t + 6t = 9$$

$$y = \frac{11 - 7t}{3}$$

Substituindo os valores de y, z e t na primeira equação, temos que:

$$2x - 3y + z - t = 4$$

$$2x - 3\left(\frac{11 - 7t}{3}\right) + \frac{2 - t}{3} - t = 4$$

$$2x - \frac{33}{3} + \frac{21t}{3} + \frac{2}{3} - \frac{t}{3} - t = 4$$

$$6x - 33 + 21t + 2 - t - 3t = 12$$

$$x = \frac{43 - 17t}{6}$$

Portanto, a solução do sistema é $\left(\frac{43-17t}{6}, \frac{11-7t}{3}, \frac{2-t}{3}\right)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

e) Seja o sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ my = n \end{cases}$$

Logo,

$$y = \frac{n}{m}$$

Substituindo o valor de y na primeira equação, temos que:

$$ax + by = c$$

$$ax + b\,.\left(\frac{n}{m}\right) = c$$

$$max + bn = mc$$

$$x = \frac{mc - bn}{ma}$$

Portanto, a solução do sistema é $\left(\frac{mc-bn}{ma}, \frac{n}{m}\right)$ para todo $m, n, a, b \in \mathbb{R}$.

f) Para todo $z, t \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ -y + 3z - 2t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5z + 3t + 5 \\ y = 3z - 2t - 2 \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

15)

a) Fazendo $L_2 \to L_2 - 2L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -13 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, é um **Sistema Possível e Determinado**.

b) Fazendo $L_2 \to L_2 - 2L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, é um **Sistema Possível e Indeterminado**.

c) Fazendo $L_2 \to L_2 - 3L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to L_3 - 2L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \to -\frac{1}{5}L_2$ e $L_3 \to -\frac{1}{5}L_3$ temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Portanto, é um **Sistema Possível e Determinado**.

d) Fazendo $L_2 \to L_2 + L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to L_3 - L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Trocando a segunda e a terceira linha, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Portanto, é um **Sistema Possível e Determinado**.

e) Fazendo $L_2 \to L_2 + 2L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to L_3 + L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to L_3 + L_2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Portanto, é um **Sistema Possível e Indeterminado**.

f) Fazendo $L_2 \to L_2 - 3L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 5 & 3 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to L_3 - 5L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 5 & 3 & 4 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & -12 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to L_3 - 3L_2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & -12 & -6 & -12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Portanto, é um **Sistema Impossível**.

g) Fazendo $L_2 \to L_2 - 3L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to L_3 + L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to L_2 - 4L_3$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -14 & -1 \end{bmatrix}$$

Portanto, é um **Sistema Possível e Indeterminado**.

h) Fazendo $L_2 \to L_2 - L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4 \to L_4 - 2L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \to -\frac{1}{2}L_2$ e $L_4 \to -L_4$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to L_2 - L_3$ e $L_4 \to L_4 - 2L_2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4 \to L_4 - L_3$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Portanto, é um **Sistema Possível e Determinado**.

i) Fazendo $L_2 \to L_2 + 2L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ -2 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 13 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to L_3 + L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 13 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 13 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to L_3 - L_2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 13 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Portanto, é um **Sistema Impossível**.

16)

a) Transformando o sistema em matriz, temos que:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \to \frac{1}{5}L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \to L_2 - 3L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{11}{5} \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4 \to L_4 - 4L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{11}{5} \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \to \frac{5}{11}L_2$ e $L_3 \to -\frac{5}{7}L_3$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to L_3 - L_2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transformando em sistema, temos que:

$$\begin{cases} x - \frac{2}{5}y + \frac{3}{5}z = \frac{2}{5} \\ y + z = -1 \end{cases}$$

Tomando $z \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{cases} x - \frac{2}{5}y + \frac{3}{5}z = \frac{2}{5} \\ y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -1 - z \\ z = z \end{cases}$$

b) Transformando o sistema em matriz, temos que:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 26 \\ 1 & -7 & 1 & -16 \\ 5 & -1 & 3 & 14 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \to \frac{1}{3}L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 26 \\ 1 & -7 & 1 & -16 \\ 5 & -1 & 3 & 14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{26}{3} \\ 1 & -7 & 1 & -16 \\ 5 & -1 & 3 & 14 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \to L_1 - L_2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{26}{3} \\ 1 & -7 & 1 & -16 \\ 5 & -1 & 3 & 14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{26}{3} \\ 0 & \frac{26}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{74}{3} \\ 5 & -1 & 3 & 14 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to 5L_1 - L_3$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{26}{3} \\ 0 & \frac{26}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{74}{3} \\ 5 & -1 & 3 & 14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{26}{3} \\ 0 & \frac{26}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{74}{3} \\ 0 & \frac{28}{3} & \frac{1}{3} & \frac{88}{3} \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \to 3L_2$ e $L_3 \to 3L_3$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{26}{3} \\ 0 & \frac{26}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{74}{3} \\ 0 & \frac{28}{3} & \frac{1}{3} & \frac{88}{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{26}{3} \\ 0 & 26 & -1 & 74 \\ 0 & 28 & 1 & 88 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to L_2 + L_3$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{26}{3} \\ 0 & 26 & -1 & 74 \\ 0 & 28 & 1 & 88 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{26}{3} \\ 0 & 26 & -1 & 74 \\ 0 & 54 & 0 & 162 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to \frac{L_3}{54}$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{26}{3} \\ 0 & 26 & -1 & 74 \\ 0 & 54 & 0 & 162 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{26}{3} \\ 0 & 26 & -1 & 74 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Transformando em sistema, temos que:

$$\begin{cases} x + \frac{5}{3}y + \frac{2}{3}z = \frac{26}{3} \\ 26y - z = 74 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$$

17)

a) Primeiramente, sabemos que, se

$$D = \begin{vmatrix} a & 3a \\ 2 & a \end{vmatrix} \neq 0$$

O teorema tem solução única (Teorema de Cramer). Assim, os valores de a para os quais $D = 0$ são os que tornam o sistema indeterminado ou impossível.

Analisando o caso, temos que:

$$D = \begin{vmatrix} a & 3a \\ 2 & a \end{vmatrix} = a^2 - 6a = a(a-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ ou \\ a = 6 \end{cases}$$

Se $a = 0$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 2x + 0y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \ e \ y \ é \ qualquer$$

Logo, o sistema é indeterminado.

Se $a = 6$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 6x + 18y = 0 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, temos que:

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 0x + 0y = 4 \end{cases}$$

Logo, o sistema é impossível.

Portanto, temos que:

$$\begin{cases} a \neq 0 \ \ e \ \ a \neq 6 & \Rightarrow Sistema \ Possível \ e \ determinado \\ a = 0 & \Rightarrow Sistema \ Indeterminado \\ a = 6 & \Rightarrow Sistema \ Impossível \end{cases}$$

b) Primeiramente, sabemos que, se

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{vmatrix} \neq 0$$

O teorema tem solução única (Teorema de Cramer). Se $D = 0$, o sistema poderá ser indeterminado ou impossível.

Analisando o caso, temos que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

Se $a = -2$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ 2(x - y) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ 2.2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ 0 = b - 4 \end{cases}$$

Assim, temos que:

$$\Rightarrow \begin{cases} b - 4 = 0 \ \Rightarrow \ Sistema\ Possível\ e\ Indeterminado \\ b - 4 \neq 0 \ \Rightarrow Sistema\ Impossível \end{cases}$$

Portanto, temos que:

$$\begin{cases} a \neq -2 & \Rightarrow Sistema\ Possível\ e\ determinado \\ a = -2 \ e \ b = 4 & \Rightarrow Sistema\ Possível\ e\ Indeterminado \\ a = -2 \ e \ b \neq 4 & \Rightarrow \ Sistema\ Impossível \end{cases}$$

18) Tomando $D = 0$, temos que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & a \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 28 + 9a - 30 - 7a - 6 = 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

Se $a = \frac{3}{2}$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + \frac{3}{2}z = 0 \\ 3x + 7y + z = 0 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, temos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & \frac{3}{2} & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Assim, temos que:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 5y + \frac{5}{2}z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 5y + \frac{5}{2}z = 0 \end{cases}$$

O número de equações é menor que o número de incógnitas, então o sistema é possível e indeterminado.

Portanto, para $a = \frac{3}{2}$ o sistema é indeterminado.

19)

a) Escalonando a matriz, temos que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & 1 \\ 4 & 10 & 2 & 5 \\ 6 & 15 & -1 & k \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & 10 & 2 & 5 \\ 6 & 15 & -1 & k \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & k-3 \end{vmatrix}$$

Transformando em um sistema, temos que:

$$\begin{cases} x + \frac{5}{2}y - \frac{3}{2}z = \frac{1}{2} \\ 8z = 3 \\ 8z = k - 3 \end{cases}$$

Igualando a segunda e a terceira equação, temos que:

$$k - 3 = 3$$

$$k = 6$$

b) Resolvendo o sistema, temos que:

$$\begin{cases} x + \frac{5}{2}y - \frac{3}{2}z = \frac{1}{2} \\ 8z = 3 \\ 8z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{5}{2}y - \frac{3}{2}z = \frac{1}{2} \\ 8z = 3 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{3}{8}$$

Tomando $y = y$, temos que:

$$x + \frac{5}{2}y - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{5}{2}y = \frac{1}{2} + \frac{9}{16}$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{9}{16} - \frac{5}{2}y$$

$$x = \frac{8 + 9 - 40y}{16}$$

$$x = \frac{17 - 40y}{16}$$

Portanto, temos como solução do sistema:

$$S = \left\{\frac{17 - 40y}{16},\ \ y,\ \ \frac{3}{8}\right\}; y \in \mathbb{R}$$

20)

a) Escalonando o sistema, temos que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -3 & 0 \\ 0 & 13 & -5 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{11} & 0 \end{vmatrix}$$

Transformando em sistema, temos que:

$$\begin{cases} x - 4y + z = 0 \\ 11y - 3z = 0 \\ -\frac{16}{11}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Portanto, temos como solução do sistema:

$$S = \{0,\ \ 0,\ \ 0\}$$

b) Escalonando o sistema, temos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Transformando em sistema, temos que:

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ -5y+5z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=z \\ z=z \end{cases}$$

Portanto, temos como solução do sistema:

$$S = \{-z,\ \ z,\ \ z\};\ z \in \mathbb{R}$$

c) Escalonando o sistema, temos que:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & -36 & -12 & 0 \\ 0 & -15 & -5 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Transformando em sistema, temos que:

$$\begin{cases} x+8y+2z=0 \\ -3y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2z}{3} \\ y=-\dfrac{z}{3} \\ z=z \end{cases}$$

Portanto, temos como solução do sistema:

$$S = \left\{\frac{2}{3}z,\ \ -\frac{1}{3}z,\ \ z\right\};\ z \in \mathbb{R}$$

d) Escalonando o sistema, temos que:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -12 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -12 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Transformando em sistema, temos que:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5y - 15z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 3z \\ z = z \end{cases}$$

Portanto, temos como solução do sistema:

$$S = \{2z,\ \ 3z,\ \ z\};\ z \in \mathbb{R}$$

21)

a) 2

b) 4

c) 3

d) 3

e) 2

f) 3

g) 3

h) 4

22)

a) Seja A uma matriz qualquer e A' uma matriz escalonada, linha-equivalente a A. Chamamos de **característica da matriz A**, e indicamos por $\rho(A)$, ao **número de linhas não nulas de A'**.

b) 3

23)

a) Seja a matriz incompleta do sistema

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

E a matriz completa do sistema

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora, iremos encontrar os valores de $\rho(A)$ e $\rho(B)$ escalonando a matriz B:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que $\rho(A) = \rho(B) = 3 = n$. Logo, o sistema é possível e determinado.

Resolvendo o sistema, temos que:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4 \\ 5y - 5z = 5 \\ 5z = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \dfrac{9}{5} \\ y = -\dfrac{1}{5} \\ z = -\dfrac{6}{5} \end{matrix}$$

b) Seja a matriz incompleta do sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

E a matriz completa do sistema

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Agora, iremos encontrar os valores de $\rho(A)$ e $\rho(B)$ escalonando a matriz B:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & 7 \\ 0 & 8 & -1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que $\rho(A) = \rho(B) = 2 < 3 = n$. Logo, o sistema é possível e indeterminado.

Resolvendo o sistema, temos que:

$$\begin{cases} -x + 3y - 1z = 2 \\ 8y - z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \dfrac{5 - 5z}{8} \\ y = \dfrac{7 + z}{8} \\ z = z \end{matrix}$$

AVALIAÇÃO – volumes 5, 6 e 7

1)

a) 6

b) 1

2)

a) $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

b) $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

c) $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

3) Como $A^t = B$, segue que $c = 4$ e $d = 2$.

4)

$$A^t \,.\, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5) $x = 2; y = 5; z = -4$

6)

a)

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 21 = -25$$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 9 = 7$$

$$D_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 14 + 12 = 26$$

b)

$$D_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 15 + 8 - 36 - 12 = -25$$

$$D_{24} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 16 - 20 + 21 = 6$$

$$D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = -12 - 7 = -19$$

$$D_{43} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 - 3 = -4$$

c)

$$D_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 16 - 24 = 1$$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 8 - 30 = -41$$

$$D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

$$D_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 4 + 30 - 8 = 29$$

7)

a)

$$\begin{vmatrix} ax & 2a & a^2 \\ x & 4 & 1 \\ 3x & 6 & 2 \end{vmatrix} = x\,.\begin{vmatrix} a & 2a & a^2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = x\,.\,a\,.\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = ax\,.\,2.\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2ax\,.\,(4 + 3a + 3 - 6a - 3 - 2) = 2ax\,.\,(2 - 3a) = 4ax - 6a^2x$$

b)

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy^2 & x \\ xy & y^3 & y \\ x^2 & y^2 & z \end{vmatrix} = y \cdot \begin{vmatrix} x^2 & xy^2 & x \\ x & y^2 & 1 \\ x^2 & y^2 & z \end{vmatrix}$$

Pela propriedade de Filas Paralelas Proporcionais, temos que:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy^2 & x \\ xy & y^3 & y \\ x^2 & y^2 & z \end{vmatrix} = y \cdot \begin{vmatrix} x^2 & xy^2 & x \\ x & y^2 & 1 \\ x^2 & y^2 & z \end{vmatrix} = 0$$

c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 & 11 \\ -2 & 14 & 9 & 22 \\ 4 & 21 & 15 & 55 \\ 6 & 49 & 20 & 121 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 7 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 462 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 7 & 10 & 11 \end{vmatrix}$$

Pela Regra de Chió, temos que:

$$= 462 \cdot \begin{vmatrix} 2+1 & 3+2 & 2+1 \\ 3-2 & 5-4 & 5-2 \\ 7-3 & 10-6 & 11-3 \end{vmatrix} = 462 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -462 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -462 \cdot \begin{vmatrix} 5-3 & 3-9 \\ 4-4 & 8-12 \end{vmatrix} = -462 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -462 \cdot (-8) = 3696$$

d) Pela propriedade de Filas Nulas, temos que:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 2 & 13 & 0 & 19 & 17 \\ 9 & 27 & 0 & 25 & 35 \\ 16 & 51 & 0 & 42 & 47 \\ 21 & 73 & 0 & 54 & 49 \end{vmatrix} = 0$$

8)

$$\begin{vmatrix} zy & x & 1 \\ xz & y & 1 \\ xy & z & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \cdot \begin{vmatrix} xzy & x^2 & x \\ xz & y & 1 \\ xy & z & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \begin{vmatrix} xyz & x^2 & x \\ xyz & y^2 & 1 \\ xyz & z^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{xy} \cdot \frac{1}{z} \begin{vmatrix} xyz & x^2 & x \\ xyz & y^2 & 1 \\ xyz & z^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{xyz} \cdot xyz \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & y^2 & 1 \\ 1 & z^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & y^2 & y \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}$$

9) Pela propriedade de Vandermonde, temos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 7 & \log 70 & \log 700 & \log 7000 \\ (\log 7)^2 & (\log 70)^2 & (\log 700)^2 & (\log 7000)^2 \\ (\log 7)^3 & (\log 70)^3 & (\log 700)^3 & (\log 7000)^3 \end{vmatrix}$$

$$= (\log 7000 - \log 700) \cdot (\log 7000 - \log 70) \cdot (\log 7000 - \log 7) \cdot (\log 700 - \log 70) \cdot$$
$$(\log 700 - \log 7) \cdot (\log 70 - \log 7)$$

$$= (\log 700 + \log 10 - \log 700) \cdot (\log 70 + \log 100 - \log 70) \cdot (\log 7 + \log 1000 - \log 7) \cdot$$
$$(\log 70 + \log 10 - \log 70) \cdot (\log 7 + \log 100 - \log 7) \cdot (\log 7 + \log 10 - \log 7)$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 12$$

10) A Matriz A é uma Matriz Triangular, temos que:

$$A = a_1 \cdot a_4 \cdot a_6$$

$$-1\,000 = 10 \cdot a_1 \cdot a_6$$

$$a_1 \cdot a_6 = -100$$

Sabemos por P.A. que:

$$a_1 = a_4 - 3d = 10 - 3d$$

$$a_6 = a_4 + 2d = 10 + 2d$$

Assim, temos que:

$$a_1 \cdot a_6 = -100$$

$$(10 - 3d) \,.\, (10 + 2d) = -100$$

$$-6d^2 - 10d + 200 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos:

$$d = -\frac{20}{3} \quad e \quad d = 5$$

Por hipótese, temos que $d > 0$, então $d = 5$.

Logo,

$$a_1 = 10 - 3d = 10 - 15 = -5$$

Portanto,

$$\frac{a_1}{d} = \frac{-5}{5} = -1$$

Resposta: Alternativa D.

11)

a) $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ -5 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Instituto Cidade de Deus

Gabaritos - Matemática 2º EM

c) $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ m & n & 0 \\ ab & -b^2 & m \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

d) $$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 4 & \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

e) $$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

f) $$\begin{bmatrix} a & -b & 2 \\ a^2 & -b & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

g) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-t \\ 1-3t \\ 7+t \end{bmatrix} \; ou \; \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

h) $$\begin{bmatrix} (sen\ \theta) & -(sen\ \varphi) \\ (\cos\ \varphi) & (2\cos\ \theta) \\ (sen\ \varphi) & -(3\cos\ \theta) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

12)

a) Na regra de Cramer calculamos o determinante principal e depois os secundários substituindo a coluna das variáveis pela coluna dos termos independente. Assim, temos a seguinte matriz incompleta:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculando o determinante, temos que:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cancel{+10} + 3 - 12 \cancel{-10} - 2 = -3$$

Agora vamos calcular o determinante secundário D_x, antes devemos substituir toda a coluna do x pela coluna do termo independente. Assim:

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 10 + 1 - 4 - 20 + 2 = -15$$

Próximo passo é calcular o determinante D_y, antes vamos substituir a coluna y pela coluna do termo independente. Então:

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \cancel{-4} + 2 \cancel{+12} + 6 - 2 \cancel{-8} = 6$$

Próximo passo é calcular o determinante D_z, antes vamos substituir a coluna z pela coluna do termo independente. Então:

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{4} \cancel{+20} - 3 \cancel{-24} + 10 - 1 = 6$$

Dessa forma, podemos achar os valores de x, y e z fazendo:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-15}{-3} = 5$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{6}{-3} = -2$$

Portanto, a solução do sistema é:

$$S = \{5, -2, -2\}$$

b) Na regra de Cramer calculamos o determinante principal e depois os secundários substituindo a coluna das variáveis pela coluna dos termos independente. Assim, temos a seguinte matriz incompleta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando o determinante, temos que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{2} + 0 + 6 + 2 \cancel{-2} + 0 = 8$$

Agora vamos calcular o determinante secundário D_x, antes devemos substituir toda a coluna do x pela coluna do termo independente. Assim:

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Próximo passo é calcular o determinante D_y, antes vamos substituir a coluna y pela coluna do termo independente. Então:

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Próximo passo é calcular o determinante D_z, antes vamos substituir a coluna z pela coluna do termo independente. Então:

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Dessa forma, podemos achar os valores de x, y e z fazendo:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{0}{8} = 0$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{8} = 0$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{0}{8} = 0$$

Portanto, a solução do sistema é:

$$S = \{0, 0, 0\}$$

c) Na regra de Cramer calculamos o determinante principal e depois os secundários substituindo a coluna das variáveis pela coluna dos termos independente. Assim, temos a seguinte matriz incompleta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando o determinante, temos que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cancel{+2} + 3 + 3 + 1 \cancel{-2} = 8$$

Agora vamos calcular o determinante secundário D_x, antes devemos substituir toda a coluna do x pela coluna do termo independente. Assim:

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cancel{+1} + 1 + 1 + 0 \cancel{-1} = 2$$

Próximo passo é calcular o determinante D_y, antes vamos substituir a coluna y pela coluna do termo independente. Então:

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cancel{-2} + 0 \cancel{+3} \cancel{-1} + 0 = 1$$

Próximo passo é calcular o determinante D_z, antes vamos substituir a coluna z pela coluna do termo independente. Então:

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{1} + 0 + 3 + 0 \cancel{+1} \cancel{-2} = 3$$

Dessa forma, podemos achar os valores de x, y e z fazendo:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{8}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{3}{8}$$

Portanto, a solução do sistema é:

$$S=\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right\}$$

d) Iremos resolver esta questão por escalonamento, então temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -a-4b+2c+d=-32 \\ 2a-b+7c+9d=14 \\ -a+b+3c+d=11 \\ a-2b+c-4d=-4 \end{cases}$$

Transformando o sistema em matriz, temos que:

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 & 1 & -32 \\ 2 & -1 & 7 & 9 & 14 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \to -L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 & 1 & -32 \\ 2 & -1 & 7 & 9 & 14 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 & 32 \\ 2 & -1 & 7 & 9 & 14 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \to 2L_1 - L_2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 & 32 \\ 0 & 9 & -11 & -11 & 50 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 & 32 \\ 0 & 9 & -11 & -11 & 50 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 43 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4 \to L_1 - L_4$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 & 32 \\ 0 & 9 & -11 & -11 & 50 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 43 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 & 32 \\ 0 & 9 & -11 & -11 & 50 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 43 \\ 0 & 6 & -3 & 3 & 36 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to -\frac{5}{9}L_2 + L_3$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 & 32 \\ 0 & 9 & -11 & -11 & 50 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 43 \\ 0 & 6 & -3 & 3 & 36 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 & 32 \\ 0 & 9 & -11 & -11 & 50 \\ 0 & 0 & \frac{64}{9} & \frac{55}{9} & \frac{137}{9} \\ 0 & 6 & -3 & 3 & 36 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4 \to -\frac{6}{9}L_2 + L_4$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 & 32 \\ 0 & 9 & -11 & -11 & 50 \\ 0 & 0 & \frac{64}{9} & \frac{55}{9} & \frac{137}{9} \\ 0 & 6 & -3 & 3 & 36 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 & 32 \\ 0 & 9 & -11 & -11 & 50 \\ 0 & 0 & \frac{64}{9} & \frac{55}{9} & \frac{137}{9} \\ 0 & 0 & \frac{39}{9} & \frac{93}{9} & \frac{24}{9} \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4 \to -\frac{39}{64}L_3 + L_4$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 & 32 \\ 0 & 9 & -11 & -11 & 50 \\ 0 & 0 & \frac{64}{9} & \frac{55}{9} & \frac{137}{9} \\ 0 & 0 & \frac{39}{9} & \frac{93}{9} & \frac{24}{9} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 & 32 \\ 0 & 9 & -11 & -11 & 50 \\ 0 & 0 & \frac{64}{9} & \frac{55}{9} & \frac{137}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{423}{64} & \frac{-423}{64} \end{bmatrix}$$

Transformando em sistema, temos que:

$$\begin{cases} a+4b-2c-d=32 \\ 9b-11c-11d=50 \\ \dfrac{64}{9}x+\dfrac{55}{9}d=\dfrac{137}{9} \\ \dfrac{423}{64}d=\dfrac{-423}{64} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=8 \\ c=3 \\ d=-1 \end{cases}$$

Portanto, a solução do sistema é:

$$S=\{5,8,3,-1\}$$

13)

a) Transformando o sistema em matriz, temos que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \rightarrow 3L_1 - L_2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -5 & 14 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to 5L_1 - L_3$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -5 & 14 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -5 & 14 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -8 & 21 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \to -2L_2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -5 & 14 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -8 & 21 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -8 & 21 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to \frac{3}{2}L_2 + L_3$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -8 & 21 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & 7 & -21 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to \frac{L_3}{7}$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & 7 & -21 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Transformando em sistema, temos que:

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}y-z=5 \\ y+10z=-28 \\ z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-3 \end{cases}$$

b) Escalonando o sistema, temos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Transformando em sistema, temos que:

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ -5y+5z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=z \\ z=z \end{cases}$$

Portanto, temos como solução do sistema:

$$S=\{-z, z, z\};\ z\in\mathbb{R}$$

c) Transformando o sistema em matriz, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \to 2L_1 - L_2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to L_1 + L_3$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4 \to \frac{L_4}{3}$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4 \to L_4 - L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \to \frac{L_2}{-3}$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to L_3 - L_2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4 \to L_4 - L_2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transformando em sistema, temos que:

$$\begin{cases} x - y + 2z - w = -1 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z - w = -1 \\ y = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cancel{-2z} \cancel{+2z} - w = -1 \\ y = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + w \\ y = 2z \\ z = z \\ w = w \end{cases}$$

d) Transformando o sistema em matriz, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \to 2L_1 - L_2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & -7 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to L_3 - L_1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & -7 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to L_3 + 2L_2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & -8 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

Transformando em sistema, temos um sistema impossível:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -3y + 4z = 5 \\ 0x + 0y + 0z = 11 \end{cases}$$

e) Transformando o sistema em matriz, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \to 2L_1 - L_2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transformando em sistema, temos que:

$$\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ -9y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2.0+3z=0 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} x=-3z \\ y=0 \\ z=z \end{cases}$$

f) Transformando o sistema em matriz, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 \to L_1 - L_2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to L_1 - L_3$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4 \to L_1 - L_4$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Invertendo as linhas L_2 e L_4, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Transformando em sistema, temos que:

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2y=-2 \\ 2z=4 \\ 2t=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=2 \\ t=-2 \end{cases}$$

14)

a) Primeiramente, sabemos que, se

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{vmatrix} \neq 0$$

O teorema tem solução única (Teorema de Cramer).

Se $D = 0$, o sistema poderá ser indeterminado ou impossível.

Analisando o caso $D = 0$, temos que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

Se $a = -2$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ 2(x - y) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ 2.2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ 0 = b - 4 \end{cases}$$

Assim, temos que:

$$\begin{cases} b - 4 = 0 \ \Rightarrow \ Sistema\ Possível\ e\ Indeterminado \\ b - 4 \neq 0 \ \Rightarrow \ Sistema\ Impossível \end{cases}$$

Portanto, temos que:

$$\begin{cases} a \neq -2 & \Rightarrow Sistema\ Possível\ e\ determinado \\ a = -2\ \ e\ \ b = 4 & \Rightarrow Sistema\ Possievel\ e\ Indeterminado \\ a = -2\ \ e\ \ b \neq 4 & \Rightarrow\ Sistema\ Impossível \end{cases}$$

b) Primeiramente, sabemos que, se

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

O teorema tem solução única (Teorema de Cramer).

Se $D = 0$, o sistema poderá ser indeterminado ou impossível.

Analisando o caso $D = 0$, temos que:

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2a \cancel{+4a} + 4 + 4 - 2a \cancel{-4a} = -4a + 8 = 0 \Rightarrow a = 2$$

Se $a = 2$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = b \\ 4x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = b \\ 4x - y + 2z = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = b \\ 4x - y + 2z = 1 \\ 0 = 3 - b \end{cases}$$

Assim, temos que:

$$\begin{cases} 3 - b = 0 \Rightarrow \text{Sistema Possível e Indeterminado} \\ 3 - b \neq 0 \Rightarrow \text{Sistema Impossível} \end{cases}$$

Portanto, temos que:

$$\begin{cases} a \neq 2 \Rightarrow \text{Sistema Possível e Determinado} \\ a \neq 2 \text{ e } b = 3 \Rightarrow \text{Sistema Possível e Indeterminado} \\ a \neq 2 \text{ e } b \neq 3 \Rightarrow \text{Sistema Impossível} \end{cases}$$

15)

a) Seja a matriz incompleta do sistema

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

E a matriz completa do sistema

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Agora, iremos encontrar os valores de $\rho(A)$ e $\rho(B)$ escalonando a matriz B:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & \frac{16}{3} \end{bmatrix}$$

Assim, temos que $\rho(A) = \rho(B) = 3 = n$. Logo, o sistema é possível e determinado.

Resolvendo o sistema, temos que:

$$\begin{cases} x-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}z=2 \\ 5y+z=-2 \\ 4z=\dfrac{16}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ y=-\dfrac{2}{3} \\ z=\dfrac{4}{3} \end{matrix}$$

b) Seja a matriz incompleta do sistema

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

E a matriz completa do sistema

$$B=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, iremos encontrar os valores de $\rho(A)$ e $\rho(B)$ escalonando a matriz B:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que $\rho(A) = \rho(B) = 2 < n$. Logo, o sistema é possível e indeterminado.

Resolvendo o sistema, temos que:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ \quad y-3z=-1 \Rightarrow \\ \qquad 0z=0 \end{cases} \begin{aligned} x&=1-2z \\ y&=-1+3z \\ z&=z \end{aligned}$$

c) Seja a matriz incompleta do sistema

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

E a matriz completa do sistema

$$B=\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Agora, iremos encontrar os valores de $\rho(A)$ e $\rho(B)$ escalonando a matriz B.

Fazendo $L_2 \to -\frac{2}{3}L_1 + L_2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{11}{3} \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to \frac{1}{3}L_1 + L_3$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{11}{3} \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 2 & 7 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4 \to -\frac{2}{3}L_1 + L_4$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 2 & 7 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to \frac{13}{14}L_2 + L_3$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & \frac{45}{14} & -\frac{61}{14} & \frac{99}{14} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4 \to \frac{13}{14}L_2 + L_4$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & \frac{45}{14} & -\frac{61}{14} & \frac{99}{14} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & \frac{45}{14} & -\frac{61}{14} & \frac{99}{14} \\ 0 & 0 & \frac{45}{14} & -\frac{61}{14} & \frac{15}{14} \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_4 \to -L_3 + L_4$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & \frac{45}{14} & -\frac{61}{14} & \frac{99}{14} \\ 0 & 0 & \frac{45}{14} & -\frac{61}{14} & \frac{15}{14} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & \frac{45}{14} & -\frac{61}{14} & \frac{99}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Transformando em sistema, temos que:

$$\begin{cases} 3x+4y-z+2t=2 \\ -\frac{14}{3}y+\frac{5}{3}z-\frac{13}{3}t=\frac{11}{3} \\ \frac{45}{14}z-\frac{61}{14}t=\frac{99}{14} \\ 0x+0y+0z+0t=-6 \end{cases}$$

Assim, temos que o sistema é impossível.

d) Seja a matriz incompleta do sistema

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

E a matriz completa do sistema

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Agora, iremos encontrar os valores de $\rho(A)$ e $\rho(B)$ escalonando a matriz B.

Fazendo $L_2 \to L_1 - L_2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_3 \to L_1 - L_3$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Transformando em sistema, temos que:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2y = 0 \\ -y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

Assim, temos que o sistema é impossível.

VOLUME 8
Lição 16 – Análise combinatória (I)
No outro documento